拟正则映射与 $\mathcal{A}$- 调和方程

高 红 亚

内 容 简 介

作为高维空间拟共形映射理论的推广和发展，拟正则映射理论及 $\mathcal{A}$- 调和方程的研究已成为高维空间几何函数论和非线性分析的重要课题. 本书主要讲述高维空间的拟正则映射理论及相关 $\mathcal{A}$- 调和方程的若干问题. 内容包括：预备知识、拟正则映射、 Beltrami 方程组和 $\mathcal{A}$- 调和方程等.

本书适合高等学校数学与应用数学专业的大学生、研究生、教师及相关专业的科技工作者参考.

前　　言

高维空间的几何函数论主要考虑单复变函数论中的几何与函数论性质在 R^n 空间，或更一般的 Riemann 流形上的推广. 这种推广目前仍为人们所关注，其主要原因是它在研究过程中的新思想、新方法和得到的新结果在其他领域中有应用价值，而且这种应用是本质的、重要的.

众所周知，复变函数论在力学、物理学以及工程技术中有着广泛的应用. 如何拓广它的应用范围一直是人们关注的. 单叶解析函数在平面上的一个自然的拓广为平面上的拟共形映射，它作为平面上 Beltrami 方程的同胚解，已经被 Ahlfors 和 Bojarski 等数学家研究. 拟正则映射去掉了拟共形映射的同胚性要求. 早在二十世纪五六十年代，平面上的拟正则映射理论已经被研究，主要结果是平面上 Beltrami 方程的任何解，都可以表示为一个解析函数与一个拟共形映射的复合. 这样，解析函数恰好是伸张系数为 1 的二维拟正则映射. 另一方面， Liouville 定理断言，非常数的 1- 拟正则映射是 Möbius 变换，即空间的共形映射非常之少. 因此，研究空间拟共形映射与拟正则映射是必要的. 空间拟正则映射与平面拟正则映射在研究方法上有很大不同，需要较多用到其他数学分支的理论与方法. 空间拟正则映射的研究需要用模与模不等式方法、偏微分方程、Sobolev 空间、微分几何、调和分析等多个学科的方法与结果. 反过来，拟正则映射的研究方法也对这些分支的研究与发展提供新的思路. 例如， Gehring 在拟共形映射理论研究中得到的逆 Hölder 不等式 (见 Gehring [1]), 现在已被广泛应用于偏微分方程的正则性理论研究； n- 维空间拟共形映射理论已被广泛应用于具有广义导数的函数理论 (见 Vodopyanov, Goldshtein [1,2,3]) 和具有常负曲率的紧 Riemann 空间 (见 Mostow [1]). 这说明，空间拟正则映射的研究具有广泛的应用前景.

空间拟正则映射的研究也具有广泛的物理、力学意义. 例如，拟共形映射和拟正则映射与力学中的有限变形有内在联系 (见方爱农 [1]).

二十世纪六十年代末, 苏联数学家 Reshetnyak 开始了空间拟正则映射 (Reshetnyak 称之为具有有界伸张的空间映射) 理论的研究，建立了空间拟正则映射的离散

性和开集性等重要性质, 见 Reshetnyak [1]. 稍后的几年里, Martio, Rickman, Väsälä [1,2,3] 利用研究拟共形映射的传统方法，即曲线族的模和模不等式等方法，建立了高维空间拟正则映射的正规族理论、值分布理论等. 空间拟正则映射是 Beltrami 方程组的广义解，而 Beltrami 方程组的强非线性、超定性、非一致性给研究工作带来了极大的困难. 二十世纪九十年代初， Iwaniec [1], Iwaniec, Martin[1] 等在文 Donalson, Sullivan [1] 工作的基础上，将奇异积分的 Calderón-Zgymund 理论，微分几何中的 Hodge 分解 (现称为 Iwaniec-Hodge 分解) 理论， Grassman 代数和 Sobolev 空间的分析方法引入空间拟正则映射的研究，建立了偶数维及任意维数下拟正则映射的正则性与可去奇异性等结果，取得了突破性进展，并使得拟正则映射的理论与应用问题的研究成为当代国际热门课题.

空间拟正则映射属于多个分支的交叉学科，它的研究需要综合用到基础数学中许多学科的研究方法与结果. 平面情形下的拟正则映射理论, 经过 Ahlfors, Bojarski, Gehring 等数学家几十年的研究，使得这一方向的诸多研究结果以相当完美的形式出现. 空间拟正则映射的研究刚刚开始，可以预见，这一方向有良好的发展前景.

本书主要讲述高维空间的拟正则映射与 $\mathcal{A}$- 调和方程的近期进展，其中大部分内容是作者近年来的科研成果. 全书共分 4 章: 第 1 章是预备知识, 主要介绍 Sobolev 空间、外代数、外微分形式和一些常用的引理；第 2 章讲述拟正则映射理论，包括拟正则映射、弱拟正则映射以及退化的拟正则映射等；第 3 章是与拟正则映射理论密切相关的高维空间的 Beltrami 方程组；第 4 章介绍 A- 调和方程的近期进展.

本书的主要内容是作者近年来的研究成果，同时参考了其他作者的文献. 由于本书是从大量的文献中整理出来的，书中出现疏漏或错误在所难免，作者真诚的欢迎读者批评指正.

作者感谢上海交通大学方爱农教授多年来的指导与帮助. 感谢审稿专家提出的有益建议. 本书整理过程中得到了乔金静博士的帮助，一并致谢.

高红亚

目　　录

第 1 章 预备知识

作为预备知识，本章讲述一些本书中常用的函数空间和 Sobolev 空间的基本知识，外代数和外微分形式，以及一些常用的引理. 重点放在后面三章将要用到的一些结论上. 函数空间与 Sobolev 空间的系统理论，参见 Adams[1]. 外代数和外微分形式的系统理论参看陈省身，陈维桓 [1].

§1.1 Hölder 空间与 L^p 空间

1.1.1 一些记号

记 $\mathrm{R}^n (n \geq 2)$ 为 n 维 Euclid 空间. 两个向量 $x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathrm{R}^n$ 的内积记为 $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. 向量 x 的模为 $|x| = \langle x, x \rangle^{1/2}$. 记 $e_i, i = 1, 2, \cdots, n$, 为 R^n 中的标准正交基.

设 Ω 是 R^n 中的集合. 定义函数

$$\chi_\Omega(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega, \\ 0, & x \notin \Omega \end{cases}$$

为集合 Ω 的特征函数. 若 Ω 为可测集，则记 $|\Omega|$ 为 Ω 的 n 维 Lebesgue 测度.

函数 $f : \Omega \to \mathrm{R}$ 的支撑定义为

$$\mathrm{supp}(f) = \Omega \cap \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}.$$

用 $C_0^\infty(\Omega)$ 表示所有在 Ω 上具有紧支撑的无穷次可微函数 $\varphi : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ 所形成的代数. 引入 n 重指标 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$, 这里 $\alpha_1, \alpha_2, \cdot\cdot\cdot, \alpha_n$ 是非负整数，记 $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$. α 次微分算子为

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

∂^α 可作用于充分的光滑函数上. 约定 $0 = (0, \cdots, 0)$ 为 0 重指标，∂^0 为恒等算子. 当 k 为非负整数时，记 $\partial^k = \{\partial^\alpha\}_{|\alpha|=k}$.

对 $x \in \mathrm{R}^n$, $A \subset \mathrm{R}^n$, 定义 x 到 A 的距离为

$$\operatorname{dist}(x, A) = \inf_{y \in A} |x - y|.$$

A 的直径定义为

$$\operatorname{diam}(A) = \sup_{x,y \in A} |x - y|.$$

对任意 $A, B \subset \mathrm{R}^n$, A 与 B 的距离为

$$\operatorname{dist}(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} |x - y|.$$

设 $r > 0$, $x \in \mathrm{R}^n$. 分别用

$$B(x, r) = B_r(x) = \{y \in \mathrm{R}^n : |x - y| < r\},$$

$$\overline{B}(x, r) = \overline{B}_r(x) = \{y \in \mathrm{R}^n : |x - y| \le r\}$$

和

$$S(x, r) = S_r(x) = \{y \in \mathrm{R}^n : |x - y| = r\}$$

表示以 x 为心，以 r 为半径的球，闭球和球面.

R^n 中单位球 $B(0,1)$ 的体积为 $\omega_n = |B(0,1)| = \frac{\sigma_{n-1}}{n}$, 其中 $\sigma_{n-1} = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}$ 为单位球面 $S(0,1)$ 的表面积.

1.1.2 Hölder 空间

记 $C^0(\Omega) = C(\Omega)$ 为所有在 Ω 上连续的函数的全体. 设 k 为非负整数，可能为无穷， $m \ge 1$ 为整数. 记

$$C^k(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathrm{R} : \partial^\alpha f \in C^0(\Omega), 0 \le |\alpha| \le k\}.$$

$$C_0^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap \{f : \operatorname{supp} f \text{ 紧，且} \subset \Omega\}.$$

$$C^k(\Omega, \mathrm{R}^m) = \{f = (f^1, \cdots, f^m) : \Omega \to \mathrm{R}^m : f^i \in C^k(\Omega), i = 1, \cdots, m\}.$$

设 $f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^m$ 为给定的函数. 若 $\omega : [0, \infty) \to [0, \infty)$ 满足下列条件:

(1) ω 非减,

(2) $\lim_{t \to 0^+} \omega(t) = 0$,

(3) 对任意 $x, y \in \mathrm{R}^n$,

$$|f(x) - f(y)| \leq \omega(|x - y|), \tag{1.1}$$

则称 ω 为 f 的连续模.

若 $\omega(t) = Kt^\alpha$, $0 < K < \infty$, $0 < \alpha \leq 1$, 则称 f 满足具有常数 K 和指数 α 的 Hölder 条件. 此时

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|^\alpha. \tag{1.2}$$

当 $\alpha = 1$ 时，称 f 满足具有常数 K 的 Lipschitz 条件.

用符号 $C^{0,\alpha}(\Omega, \mathrm{R}^m)$, $0 < \alpha \leq 1$, 表示所有满足指数为 α 的 Hölder 条件的映射 $f : \Omega \to \mathrm{R}^m$ 的集合. 即

$$C^{0,\alpha}(\Omega, \mathrm{R}^m) = \{f : |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|^\alpha\}.$$

称映射 f 属于 Hölder 空间 $C^{k,\alpha}(\Omega, \mathrm{R}^m)$, 其中 $k \geq 1$ 为整数， $0 < \alpha \leq 1$, 若 $f \in C^k(\Omega, \mathrm{R}^m)$, 且 f 的所有小于等于 k 阶的偏导数属于 $C^{0,\alpha}(\Omega, \mathrm{R}^n)$. 即

$$C^{k,\alpha}(\Omega, \mathrm{R}^m) = \{f : \partial^\alpha f \in C^{0,\alpha}(\Omega, \mathrm{R}^m), 0 \leq |\alpha| \leq k\}.$$

$C^{k,\alpha}(\Omega, \mathrm{R}^m)$ 在范数

$$\|f\|_{C^{k,\alpha}(\Omega, \mathrm{R}^m)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq k} \sup_{x \in \Omega} |\partial^\alpha f(x)| + \sup_{|\alpha| = k} \sup_{x, y \in \Omega, x \neq y} \frac{|\partial^\alpha f(x) - \partial^\alpha f(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

之下成为 Banach 空间.

1.1.3 L^p 空间

设 $\Omega \subset \mathrm{R}^n$, $1 \leq p \leq \infty$. $L^p(\Omega)$ 定义为在 Ω 中的所有 p 次可积的可测函数 $f : \Omega \to \mathrm{R}$ 的集合，即

$$L^p(\Omega) = \left\{ f(x) : \int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

而

$$L^p_{loc}(\Omega) = \left\{ f(x) : \int_V |f(x)|^p dx < \infty, \forall V \subset\subset \Omega \right\},$$

即 Ω 中所有局部可积的函数的集合．这里 $V \subset\subset \Omega$ 意味着 $\overline{V} \subset \Omega$.

当 $1 \le p < \infty$ 时， $L^p(\Omega)$ 中的范数由

$$\|f\|_{p,\Omega} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \tag{1.3}$$

给出，当 $p = \infty$ 时， $L^p(\Omega)$ 中的范数由

$$\|f\|_{\infty,\Omega} = \text{esssup}_\Omega |f(x)|. \tag{1.4}$$

给出．在不至于引起混淆的情况下， $\|f\|_{p,\Omega}$ 简写成 $\|f\|_p$.

当 f 是向量或矩阵时，仍用 (1.3), (1.4) 表示 f 的 p 范数，这里 $|f(x)|$ 理解为向量或矩阵的范数．例如， $f = (f^1, f^2, \cdots, f^m)$ 时，

$$|f| = \left(\sum_{i=1}^m |f^i|^2 \right)^{1/2}.$$

此时 (1.3) 成为

$$\|f\|_{p,\Omega} = \left(\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^m |f^i|^2 \right)^{p/2} \right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty.$$

严格来说， $L^p(\Omega)$ 中的元素不是函数，而是函数的等价类．两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 称为等价的，如果除去一个零测集外它们相等.

设 $a, b > 0$, p, q 为 Hölder 共轭的，即 $p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 引入 Zimer [1] 中的下列不等式

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

取 $\varepsilon > 0$. 将上面不等式中的 a 换为 $\varepsilon^{1/p}a$, b 换为 $\varepsilon^{-1/p}b$, 就得到 Young 不等式

$$ab \le \frac{\varepsilon a^p}{p} + \frac{\varepsilon^{-q/p} b^q}{q}. \tag{1.5}$$

上式当 $p = q = 2$ 时即为 Cauchy 不等式

$$ab \le \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2. \tag{1.6}$$

设 $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p \ge 1$, 则有下面的 Hölder 不等式

$$\int_\Omega fg dx \le \|f\|_p \|g\|_q. \tag{1.7}$$

当 $p=q=2$ 时， Hölder 不等式成为 Schwarz 不等式

$$\int_\Omega fg dx \le \|f\|_2 \|g\|_2.$$

L^p 空间中的三角不等式，即 Minkowski 不等式，叙述如下：设 $f,g\in L^p(\Omega)$, $p\ge 1$, 则

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p.$$

引入函数 f 在 Ω 上的积分平均

$$f_\Omega = \fint_\Omega f(x)dx = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f(x)dx. \tag{1.8}$$

由 Hölder 不等式可以推出：当 $1\le p\le q$, $|\Omega|<\infty$ 时,

$$\left(\fint_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \le \left(\fint_\Omega |f(x)|^q dx\right)^{1/q}. \tag{1.9}$$

事实上，由 Hölder 不等式推出

$$\int_\Omega |f(x)|^p dx \le \left(\int_\Omega |f(x)|^{p\cdot\frac{q}{p}} dx\right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_\Omega dx\right)^{\frac{q-p}{q}} = |\Omega|^{1-\frac{p}{q}} \left(\int_\Omega |f(x)|^q dx\right)^{\frac{p}{q}}.$$

两端除以 $|\Omega|$ 并开 p 次方，得到 (1.9).

因此，如果用

$$[f]_p = |f|_\Omega = \left(\fint_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

表示 f 的 L^p 范数，则 $p\mapsto [f]_p$ 单增.

Hölder 不等式可以推广到 k 个函数情形. 设 $f_i\in L^{p_i}(\Omega)$, $p_i\ge 1$, $i=1,2,\cdots,k$, 且 $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_k}=1$. 则有

$$\int_\Omega f_1 f_2\cdot\cdots\cdot f_k dx \le \|f_1\|_{p_1}\|f_2\|_{p_2}\cdots\|f_k\|_{p_k}.$$

上式两端同除以 $|\Omega|$ 得

$$\fint_\Omega f_1 f_2\cdots f_k dx \le [f_1]_{p_1}[f_2]_{p_2}\cdots[f_k]_{p_k}.$$

设 $1\le p\le q\le r$, $0\le\lambda\le 1$, $\frac{1}{q}=\frac{\lambda}{p}+\frac{1-\lambda}{r}$, $u\in L^r(\Omega)$. 当 $0<\alpha<1$ 时，取 $\alpha=\lambda q$, $\beta=(1-\lambda)q$. 由 Hölder 不等式 (1.7) 得

$$\|f\|_q^q = \int_\Omega |f|^q dx = \int_\Omega |f|^\alpha |f|^\beta dx \le \left(\int_\Omega |f|^{\alpha y} dx\right)^{1/y}\left(\int_\Omega |f|^{\beta z} dx\right)^{1/z},$$

这里 $y=\frac{p}{\lambda q}$, $z=\frac{r}{(1-\lambda)q}$. 由此推出

$$\|f\|_q \le \|f\|_p^{\lambda}\|f\|_r^{1-\lambda}. \tag{1.10}$$

显然当 $\lambda=0,1$ 时， (1.10) 也成立.

称函数 $\Phi:\mathrm{R}^n\to\mathrm{R}$ 为凸的，若对任意 $x_1,x_2\in\mathrm{R}^n$, $0\le t\le 1$,

$$\Phi[(1-t)x_1+tx_2]\le(1-t)\Phi(x_1)+t\Phi(x_2).$$

若 $\Phi(x)$ 在 R^n 凸， $\Omega\subset\mathrm{R}^n$ 有界可测， $f\in L^1(\Omega)$, 则有下面的 Jensen 不等式

$$\Phi\left(⨍_{\Omega}f(x)dx\right)\le ⨍_{\Omega}\Phi[f(x)]dx.$$

当 $1\le p\le\infty$ 时， $L^p(\Omega)$ 空间是 Banach 空间；当 $1\le p<\infty$ 时，它是可分的; 当 $1<p<\infty$ 时, 它是自反的, 此时 $L^p(\Omega)$ 的对偶空间为 $L^q(\Omega)$, 其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

§1.2 Schwartz 分布与 Sobolev 平均核

1.2.1 Schwartz 分布

分布或广义函数的概念是由物理学家 Dirac 和 Schrödinger 于 1933 年首次使用的． 1936 年 Sobolev [1] 以明确的，现在所接受的形式提出.

定义 2.1 设 Ω 为 R^n 中的开集， $\mathbb{V}$ 是有限维内积空间. 称定义在 Ω 上取值于 $\mathbb{V}$ 中的线性泛函

$$f:C_0^{\infty}(\Omega)\to\mathbb{V}$$

为 Schwarz 分布，简称分布，若对于每个 $X\subset\subset\Omega$ 和任意的试验函数 $\varphi\in C_0^{\infty}(X)$ 都有估计

$$|f[\varphi]|\le C(X)\sum_{|\alpha|\le k}\sup|\partial^{\alpha}\varphi|. \tag{2.1}$$

所有定义在 Ω 上取值于 $\mathbb{V}$ 的分布构成的空间记为 $\mathcal{D}'(\Omega,\mathbb{V})$.

一般的， (2.1) 中的整数 k 依赖于 X. 否则，称 f 在 Ω 中具有有限阶，使 (2.1) 成立的最小整数 k 称为 f 在 Ω 上的阶． $f\in\mathcal{D}'(\Omega,\mathbb{V})$ 与 $\lambda\in C^{\infty}(\Omega)$ 的乘积定义为 $(\lambda f)[\varphi]=f[\lambda\varphi]$.

设 $f \in L^1_{loc}(\Omega, \mathbb{V})$. 定义

$$f[\varphi] = \int_\Omega \varphi(x) f(x) dx, \ \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{2.2}$$

对任意 $X \subset\subset \Omega$, $\varphi \in C_0^\infty(X)$, 有

$$|f[\varphi]| = \left| \int_\Omega \varphi(x) f(x) dx \right| = \left| \int_X \varphi(x) f(x) dx \right| \le \|f\|_{1,X} \sup |\varphi|.$$

这样, f 为 Ω 上的零阶分布. 因此

$$L^1_{loc}(\Omega, \mathbb{V}) \subset \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{V}).$$

定义 2.2 称 $L^1_{loc}(\Omega, \mathbb{V})$ 中的函数为正则分布.

对于 Dirac delta 函数 $\delta_a \in \mathcal{D}'(\Omega)$, 有 $\delta_a[\varphi] = \varphi(a)$. 它是零阶分布, 但不是正则分布.

定理 2.1 $C_0^\infty(\Omega, \mathbb{V})$ 在 $\mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{V})$ 中稠密.

证明 见 Iwaniec, Martin [1, 引理 4.1.1].

1.2.2 Sobolev 平均核

Sobolev 空间理论中经常用到平均核的概念.

定义 2.3 函数 $\omega : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ 称为平均核, 若 ω 在 R^n 是有界可积的, 其支撑含于球 $\overline{B}(0,1)$, 且

$$\int_{\mathrm{R}^n} \omega(x) dx = 1. \tag{2.3}$$

平均核 ω 称为 Sobolev 平均核, 若 ω 非负且属于 $C_0^\infty(\mathrm{R}^n)$.

例 2.1 取

$$\omega_1(x) = \begin{cases} c_1(n) \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right), & \text{若 } |x| < 1, \\ 0, & \text{若 } |x| \ge 1. \end{cases}$$

这里选择 $c_1(n)$ 使 $\omega_1(x)$ 满足 (2.3). $\omega_1(x)$ 为 Sobolev 平均核.

例 2.2 取 $\omega_2(x) = c_2(n)\varphi(|x|^2 - \frac{1}{4})$, 这里

$$\varphi(t) = \begin{cases} e^{1/t}, & \text{若 } t < 0, \\ 0, & \text{若 } t \ge 0. \end{cases}$$

选择 $c_2(n)$ 使 $\omega_2(x)$ 满足 (2.3). $\omega_2(x)$ 为 Sobolev 平均核.

§1.3 Sobolev 空间与嵌入定理

1.3.1 Sobolev 空间的定义

对于 $f \in C^{\infty}(\Omega, \mathbb{V})$, $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$, 成立分部积分公式

$$\int_{\Omega} \varphi(\partial^{\alpha} f) = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} (\partial^{\alpha} \varphi) f.$$

当 $f \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{V})$ 时，定义

$$(\partial^{\alpha} f)[\varphi] = (-1)^{|\alpha|} f[\partial^{\alpha} \varphi].$$

设 $\Omega \subset \mathrm{R}^n$ 为区域， $\mathbb{V}$ 是有限维内积空间， $1 \leq p \leq \infty$, $k = 1, 2, \cdots$. 定义 Sobolev 空间 $W^{k,p}(\Omega, \mathbb{V})$ 由下面的分布组成： $f \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{V})$, 且 $\partial^{\alpha} f(|\alpha| \leq k)$ 能够由 $L^p(\Omega, \mathbb{V})$ 中的函数表示.

Sobolev 空间 $W^{k,p}(\Omega, \mathbb{V})$ 中的范数为

$$\|f\|_{k,p} = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |\partial^{\alpha} f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty, \\ \displaystyle\max_{|\alpha| \leq k} \|\partial^{\alpha} f\|_{\infty}, & p = \infty. \end{cases} \tag{3.1}$$

$W^{k,p}(\Omega, \mathbb{V})$, $1 \leq p \leq \infty$, 在上述范数下是 Banach 空间.

局部 Sobolev 空间 $W_{loc}^{k,p}(\Omega, \mathbb{V})$ 定义为

$$W_{loc}^{k,p}(\Omega, \mathbb{V}) = \{f : f \in W^{k,p}(\Omega', \mathbb{V}), \forall \Omega' \subset\subset \Omega\}.$$

空间 $W_0^{k,p}(\Omega, \mathbb{V})$ 定义为 $C_0^{\infty}(\Omega, \mathbb{V})$ 相对于范数 (3.1) 的闭包. $W_0^{k,p}(\Omega, \mathbb{V})$ 也可说成在 Sobolev 意义下边界值为零.

定理 3.1 $C^{\infty}(R^n, \mathbb{V})$ 在 $W_{loc}^{k,p}(R^n, \mathbb{V})(1 \leq p \leq \infty)$ 中稠密.

1.3.2 嵌入定理

定义 3.1 称区域 $\Omega \subset \mathrm{R}^n$ 为关于球 $B(a, r) \subset \Omega$ 的星形区域，如果对任意 $x \in \Omega$ 和 $y \in B(a, r)$, 有 $[x, y] \subset \Omega$. 称 $\Omega \subset \mathrm{R}^n$ 为 S 类区域，如果 Ω 有界，且可表示为关于某个球的有限个星形区域的并集.

显然， R^n 中的球，方体和任何开凸集为星形区域.

定义 3.2 连续线性泛函 $L: W^{1,p}(\Omega) \to \mathrm{R}(p \geq 1)$ 称为投影，如果当 $f \equiv 1$ 时， $L(f) = 1$.

例 3.1 设 $f \in W^{1,1}(\Omega)$, 则由

$$Lf = f_\Omega = \fint_\Omega f dx$$

定义的连续线性泛函 $L: W^{1,1}(\Omega) \to \mathrm{R}$ 为投影算子.

例 3.2 设 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, 且 $\int_\Omega \varphi dx = 1$. 对 $f \in W^{1,1}(\Omega)$, 由

$$L_\varphi(f) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx$$

定义的连续线性泛函 $L_\varphi: W^{1,1}(\Omega) \to \mathrm{R}$ 为投影算子.

以下取 $\mathbb{V} = \mathrm{R}^1 = \mathrm{R}$. 下面的 3 个定理可在 Martio, Rickman, Väisälä [1] 中找到.

定理 3.1 设 $\Omega \subset \mathrm{R}^n$ 为 S 类区域， $1 \leq p \leq n$. 取

$$q \begin{cases} < \frac{n}{n-p}, & p < n, \\ \text{任意数}, & p = n. \end{cases}$$

则 $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, 且存在常数 $C_1 = C_1(n,p,q,\Omega)$ 使得对任意函数 $f \in W^{1,p}(\Omega)$, 有

$$\|f\|_{q,\Omega} \leq C_1 \| \bigtriangledown f\|_{p,\Omega}.$$

对任一投影连续泛函 $L: W^{1,p}(\Omega) \to \mathrm{R}$,

$$\|u - Lu\|_{q,\Omega} \leq C_2 \| \bigtriangledown u\|_{p,\Omega}, \tag{3.2}$$

这里 $C_2 = C_2(n,p,q,L,U) < \infty$ 为常数.

定理 3.2 设 $\Omega \subset \mathrm{R}^n$ 为 S 类区域， $p > n$. 任意 $f \in W^{1,p}(\Omega)$, 存在连续函数 f^* 使得 $f = f^*$ 在 Ω 几乎处处相等. 对所有 $f \in W^{1,p}(\Omega)$, 有

$$\mathrm{esssup}_{x\in\Omega}|f(f)| \leq C_3 \| \bigtriangledown f\|_{p,\Omega},$$

这里 $C_3 = C_3(n,p,\Omega)$. 对任何投影连续线性泛函 $L: W^{1,p}(\Omega) \to \mathrm{R}$, 现在常数 $C_4 = C_4(p,n,L,\Omega) < \infty$, 使得对 $f \in W^{1,p}(\Omega)$, 有

$$\mathrm{esssup}_{x\in\Omega}|f(x) - L(f)| \leq C_4 \| \bigtriangledown f\|_{p,\Omega}. \tag{3.3}$$

定理 3.3(Poincaré 定理) 设 $\Omega \subset \mathrm{R}^n$ 为有界区域. 存在常数 $C_5 = C_5(p,n,\Omega)$ 使得对任意 $f \in W_0^{1,p}(\Omega)$, 有

$$\|f\|_{p,\Omega} \leq C_5 \| \bigtriangledown f\|_{p,\Omega}. \tag{3.4}$$

在使用定理 3.1, 定理 3.2 和定理 3.3 时，经常出现的情形是其中的区域为球或方体. 下面给出三个定理中的常数对区域的依赖关系. 先引进一个引理，见 Reshetnyak[1, 第一章定理 2.8].

引理 3.1 设 $U, V \subset \mathrm{R}^n$ 为有界开集，$\sigma : U \to \mathrm{R}^n$ 为 C^1 类微分同胚，$\sigma(U) = V$, 且 σ 的一阶导数在 U 中有界. 则对任意函数 $v \in W_{loc}^{1,1}(\Omega)$, 函数 $u = v \circ \sigma \in W_{loc}^{1,1}(U)$, 且有

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial v}{\partial y_j} \circ \sigma \right) \frac{\partial \sigma_j}{\partial x_i}.$$

设 $B = B(a,r)$ 为 R^n 中以 a 为心，以 r 为半径的球， $B_1 = B(0,1)$ 为单位球. 取 $\sigma : x \mapsto a + rx$ 为 R^n 中的变换. 显然，$\sigma(B_1) = B$. 变换 σ 的 Jacobi 行列式为 r^n. 若 $f \in W^{1,p}(B)$, 则由引理 3.1, $g = f \circ \sigma \in W^{1,p}(B_1)$, 且对 $i = 1, 2, \cdots, n$,

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial y_i}(a + rx) r.$$

因此

$$\begin{aligned} &\int_{B_1} \left| \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \right|^p dx = \int_{B_1} \left| \frac{\partial f}{\partial y_i}(a + rx) \right|^p r^p dx \\ &= r^{p-n} \int_B \left| \frac{\partial f}{\partial y_i}(a + rx) \right|^p r^n dx = r^{p-n} \int_{B(a,r)} \left| \frac{\partial f}{\partial y_i} \right|^p dx. \end{aligned}$$

由此

$$\|g\|_{L_p^1(B_1)} = r^{1-n/p} \| \bigtriangledown f\|_{p,B}. \tag{3.5}$$

而且

$$\|g\|_{q,B_1} = \left(\frac{1}{r^n} \int_{B_1} |f(a + rx)|^q r^n dx \right)^{1/q} = r^{-n/q} \|f\|_{q,B}. \tag{3.6}$$

显然

$$g_{B_1} = \fint_{B_1} g(x) dx = \fint_B f(y) dy.$$

设 $p \le n$, $q \ge 1$, $(n-p)q \le n$. 选择 (3.2) 中的 L 为线性泛函 $v \mapsto \overline{v}_{B_1}$ 得到

$$\|g - g_{B_1}\|_{L^q(B)} \le C\| \bigtriangledown g\|_{p,B_1}.$$

由 (3.5), (3.6) 得

$$\|f - f_B\|_{L_q(B)} \le Cr^{1+n/q-n/p}\| \bigtriangledown f\|_{p,B(a,r)}, \tag{3.7}$$

这里的常数 C 只依赖于 p, q, r.

同样，当 $p > n$ 时，由 (3.3) 得

$$\mathrm{esssup}_{x \in B(a,r)}|f(x) - f_B| \le Cr^{1-n/p}\| \bigtriangledown f\|_{p,B}. \tag{3.8}$$

对任意 $p \ge 1$, 由 (3.4) 得对任意 $f \in W_0^{1,p}(B(a,r))$, 有

$$\|f\|_{L_p(B(a,r))} \le Cr\| \bigtriangledown f\|_{p,B(a,r}. \tag{3.9}$$

注 3.1 估计式 (3.7), (3,8) 和 (3.9) 中的球 $B(a,r)$ 换成方体 $Q(a,r)$ 也成立.

§1.4 一些常用的微分算子

下面列举一些本书中常用的微分算子. 设 Ω 为 R^n 中的开子集， $\mathbb{V}$ 是有限维内积空间.

(1) 梯度算子

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) : C^k(\Omega, \mathbb{V}) \to C^{k-1}(\Omega, \mathbb{V}^n), k \ge 1.$$

(2) 散度算子

$$\mathrm{div} : C^k(\Omega, \mathbb{V}^n) \to C^{k-1}(\Omega, \mathbb{V})$$

是梯度算子的形式共轭，定义为

$$\mathrm{div}(v^1, \cdots, v^n) = \frac{\partial v^1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial v^n}{\partial x_n}.$$

(3) Laplace 算子

$$\triangle = \mathrm{div}\nabla : C^k(\Omega, \mathbb{V}) \to C^{k-2}(\Omega, \mathbb{V}).$$

(4) 微分算子

$$D : C^k(\Omega, \mathrm{R}^m) \to C^{k-1}(\Omega, \mathrm{R}^{m\times n})$$

将 $f = (f^1, f^2, \cdots, f^m)$ 映射为其 Jacobi 矩阵

$$Df(x) = \left(\frac{\partial f^i(x)}{\partial x_j}\right)_{1\le i\le m, 1\le j\le n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x_1}, & \frac{\partial f^1}{\partial x_2}, & \cdots, & \frac{\partial f^1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f^2}{\partial x_1}, & \frac{\partial f^2}{\partial x_2}, & \cdots, & \frac{\partial f^2}{\partial x_n} \\ & & \cdots & \\ \frac{\partial f^m}{\partial x_1}, & \frac{\partial f^m}{\partial x_2}, & \cdots, & \frac{\partial f^m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

(5) 转置微分算子

$$D^t : C^k(\Omega, \mathrm{R}^m) \to C^{k-1}(\Omega, \mathrm{R}^{n\times m})$$

定义为 $D^t f(x) = (Df(x))^t$.

(6) 矩阵的散度

$$\mathrm{Div} : C^k(\Omega, \mathrm{R}^{m\times n}) \to C^{k-1}(\Omega, \mathrm{R}^m)$$

定义为

$$\mathrm{Div}[F^i_j] = (\mathrm{div}F^1, \cdots, \mathrm{div}F^m),$$

这里 $F^1, \cdots, F^m$ 为 F 的行向量.

(7) 旋度算子

$$\mathrm{curl} : C^k(\Omega, \mathrm{R}^n) \to C^{k-1}(\Omega, \mathrm{R}^{n\times n})$$

作用到 $f = (f^1, f^2, \cdots, f^n)$ 上，定义为

$$\mathrm{curl}(f) = Df - D^t f = \left(\frac{\partial f^i}{\partial x_j} - \frac{\partial f^j}{\partial x_i}\right)_{1\le i,j\le n}.$$

下面两个定理是上述微分算子之间的关系式.

定理 4.1 Laplace 算子 $\triangle$ 可分解为

$$\triangle = \nabla(\mathrm{div}) + \mathrm{Div}(\mathrm{curl}) : C^k(\Omega, \mathrm{R}^n) \to C^{k-2}(\Omega, \mathrm{R}^n), k \ge 2. \tag{4.1}$$

证明 设 $f \in C^k(\Omega, \mathrm{R}^n)$. n 维向量

$$\nabla(\mathrm{div}\ f) + \mathrm{Div}(\mathrm{curl} f)$$

的第 $k(1\le k\le n)$ 个分量为

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_k}\sum_{i=1}^n\frac{\partial f^i}{\partial x_i}+\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f^k}{\partial x_i}-\frac{\partial f^i}{\partial x_k}\right)\\
=&\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial^2 f^i}{\partial x_k\partial x_i}+\frac{\partial^2 f^k}{\partial x_i^2}-\frac{\partial^2 f^i}{\partial x_i\partial x_k}\right)\\
=&\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2 f^k}{\partial x_i^2}=\triangle f^k.
\end{aligned}
$$

由此推出 (4.1).

定理 4.2 设 $\varphi\in C^\infty(\Omega)$, $f\in\mathcal{D}'(\Omega,\mathrm{R}^n)$, 则

$$\operatorname{div}(\varphi f)=\varphi\operatorname{div}f+\langle f,\nabla\varphi\rangle, \tag{4.2}$$

$$D(\varphi f)=\varphi Df+f\otimes\nabla\varphi, \tag{4.3}$$

$$\operatorname{curl}(\varphi f)=\varphi\operatorname{curl}(f)+f\times\nabla\varphi, \tag{4.4}$$

这里的张量积和叉积分别定义为

$$\xi\otimes\zeta=[\xi_i\zeta_j]\in\mathrm{R}^{n\times n},\quad \xi\times\zeta=\xi\otimes\zeta-\zeta\otimes\xi,\quad \xi,\zeta\in\mathrm{R}^n.$$

证明

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{div}(\varphi f)=\operatorname{div}(\varphi f^1,\varphi f^2,\cdots,\varphi f^n)\\
=&\frac{\partial(\varphi f^1)}{\partial x_1}+\frac{\partial(\varphi f^2)}{\partial x_2}+\cdots+\frac{\partial(\varphi f^n)}{\partial x_n}\\
=&\varphi\left(\frac{\partial f^1}{\partial x_1}+\frac{\partial f^2}{\partial x_2}+\cdots+\frac{\partial f^n}{\partial x_n}\right)+f^1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+f^2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+\cdots+f^n\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\\
=&\varphi\operatorname{div}f+\langle f,\nabla\varphi\rangle.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D(\varphi f)&=\left(\frac{\partial(\varphi f^i(x))}{\partial x_j}\right)_{1\le i,j\le n}=\left(\varphi\frac{\partial f^i}{\partial x_j}+f^i(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)_{1\le i,j\le n}\\
&=\varphi\left(\frac{\partial f^i(x)}{\partial x_j}\right)_{1\le i,j\le n}+\left(f^i(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)_{1\le i,j\le n}=\varphi Df+f\otimes\nabla\varphi.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{curl}(\varphi f)&=D(\varphi f)-D^t(\varphi f)=\left(\frac{\partial(\varphi f^i)}{\partial x_j}-\frac{\partial(\varphi f^j)}{\partial x_i}\right)_{1\le i,j\le n}\\
&=\left(\varphi\frac{\partial f^i}{\partial x_j}+f^i\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}-\varphi\frac{\partial f^j}{\partial x_i}-f^j\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)_{1\le i,j\le n}\\
&=\varphi\left(\frac{\partial f^i}{\partial x_j}-\frac{\partial f^j}{\partial x_i}\right)_{1\le i,j\le n}-\left[\left(f^i\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)_{1\le i,j\le n}+\left(f^j\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)_{1\le i,j\le n}\right]\\
&=\varphi\operatorname{curl}(f)+f\times\nabla\varphi.
\end{aligned}
$$

定理 4.2 证毕.

§1.5 外代数

设 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 为 R^n 中的标准正交基. 对 $l = 0, 1, \cdots, n$, 记 $\bigwedge^l = \bigwedge^l(\mathrm{R}^n)$ 为 R^n 上 l 向量的复空间. $\bigwedge^0 = C$, $\bigwedge^1 = C^n$. $\bigwedge^l$ 由外乘

$$e^I = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_l}$$

的线性组合组成，其中 $I = (i_1, i_2, \cdots, i_l)$, $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_l \leq n$, 为任意有序 l-重. $\bigwedge^l$ 的标准基为 $\{e^I\}$. 空间 $\bigwedge^l$ 的复维数为

$$\dim \bigwedge^l = C_n^l,$$

这里 C_n^l 为组合数. $\bigwedge^l$ 中的两个元素 $\mu = \sum_I \mu_I e^I$ 和 $\lambda = \sum_I \lambda_I e^I$, μ, λ 的内积为

$$\langle \mu, \lambda \rangle = \sum_I \mu_I \lambda_I,$$

这里的求和对所有有序 l- 重求. R^n 上的体积形式记为

$$\mathrm{vol} = e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n \in \bigwedge^n(\mathrm{R}^n).$$

当 $l \notin \{0, 1, \cdots, n\}$ 时，记 $\bigwedge^l(\mathrm{R}^n) = \{0\}$. $\alpha \in \bigwedge^l$ 与 $\beta \in \bigwedge^k$ 的外积为

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{lk} \beta \wedge \alpha \in \bigwedge^{l+k}.$$

设 $A = (a_j^i)_{1 \leq i,j \leq n}$ 为 $n \times n$ 矩阵，若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \bigwedge^1(\mathrm{R}^n) = C^n$, 则

$$A\alpha_1 \wedge A\alpha_2 \wedge \cdots \wedge A\alpha_n = (\det A)\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n.$$

对任意 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_l \in \bigwedge^1$, 定义

$$A_\#^l(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_l) = A\alpha_1 \wedge A\alpha_2 \wedge \cdots \wedge A\alpha_l : \quad \bigwedge^l \to \bigwedge^l$$

为 A 的 l 次外幂，当不至于引起混淆的时候， $A^l_\#$ 简记为 $A_\#$. 特别的，对有序 l-重 $J=(j_1,j_2,\cdots,j_l)$,

$$\begin{aligned}
A^l_\#(e^J) &= Ae_{j_1}\wedge Ae_{j_2}\wedge\cdots\wedge Ae_{j_l}\\
&= \left(\sum_{i_1=1}^n a^{i_1}_{j_1}e_{i_1}\right)\wedge\left(\sum_{i_2=1}^n a^{i_2}_{j_2}e_{i_2}\right)\wedge\cdots\wedge\left(\sum_{i_l=1}^n a^{i_l}_{j_l}e_{i_l}\right)\\
&= \sum a^{i_1}_{j_1}a^{i_2}_{j_2}\cdots a^{i_l}_{j_l}e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\cdots\wedge e_{i_l}\\
&= \sum_I A^I_J e^I,
\end{aligned}$$

这里的求和是对所有有序 l- 重 $I=(i_1,i_2,\cdots,i_l)$ 求的，而 A^I_J 为从 A 中删去 $i\notin I$ 的那些行，并删去 $j\notin J$ 的那些列后余下的 $l\times l$ 阶子式的行列式，即

$$A^I_J=\det\left(a^i_j\right)_{i\in I,j\in J}.$$

这样 $A^l_\#$ 由 A^I_J 表示为

$$A^l_\#=(A^I_J)_{I,J}.$$

记 $\mathrm{GL}(n)$ 为所有行列式非零的 $n\times n$ 实矩阵的全体， $S(n)\subset\mathrm{GL}(n)$ 为所有正定，对称，行列式为 1 的 $n\times n$ 矩阵的全体.

引理 5.1 对 $A,B\in\mathrm{GL}(n)$, 有

(1) $(AB)_\#=A_\#B_\#$;

(2) 若 $\det A\neq 0$, 则 $(A^{-1})_\#=(A_\#)^{-1}=A_\#^{-1}$;

(3) $(A^t)_\#=(A_\#)^t=A^t_\#$;

(4) 对 $\omega\in\bigwedge^p$, $\eta\in\bigwedge^q$, 有 $A_\#(\omega\wedge\eta)=(A_\#\omega)\wedge(A_\#\eta)$.

证明 参见 Flanders [1, §II, 2.4].

推论 5.1 若 A 分别为恒等矩阵，正交矩阵，对称矩阵，对角矩阵，可逆矩阵，则 $A_\#$ 也是.

Hodge 星算子 $*:\bigwedge^l\to\bigwedge^{n-l}$ 为由下列方式定义的线性算子: 对任意 $\mu,\lambda\in\bigwedge^l$,

$$\overline{\mu}\wedge *\lambda=\langle\lambda,\mu\rangle\mathrm{vol}.$$

下面引入余指标的概念. 对 l- 重 $I=(i_1,i_2,\cdots,i_l)$, 定义 I 的余指标 $N-I$ 为 $(n-l)$- 重指标 $J=(j_1,j_2,\cdots,j_{n-l})$, 其中 $j_1,j_2,\cdots,j_{n-l}$ 为从 $N=(1,2,\cdots,n)$ 中

删去 $i_1, i_2, \cdots, i_l$ 之后余下的项. 显然

$$*e^I = \sigma(I, N-I)e^{N-I},$$

这里 $\sigma(I, N-I) \in \{-1, 1\}$ 依赖于由 $(I, N-I)$ 置换成 $N=(1, 2, \cdots, n)$ 的次数, 当置换次数为偶数时, $\sigma(I, N-I)=1$, 否则 $\sigma(I, N-I)=-1$. 因为 $\sigma(I, N-I)=(-1)^{l(n-l)}\sigma(N-I, I)$, 所以

$$** = (-1)^{l(n-l)} : \bigwedge^l \to \bigwedge^l.$$

引理 5.2 对任意 $A \in \mathrm{GL}(n)$, 有

$$A_\#^t * A_\# = (\det A)* : \bigwedge^l \to \bigwedge^{n-l}.$$

证明 设 $\mu \in \bigwedge^{n-l}$, $\lambda \in \bigwedge^l$, 则

$$\begin{aligned}
\langle A_\#^t * A_\#\lambda, \mu\rangle \mathrm{vol} &= \langle *A_\#\lambda, A_\#\mu\rangle \mathrm{vol}\\
&= A_\#\overline{\mu} \wedge **A_\#\lambda = A_\#\overline{\mu} \wedge A_\# **\lambda\\
&= A_\#(\overline{\mu} \wedge **\lambda) = A_\#\langle *\lambda, \mu\rangle \mathrm{vol}\\
&= (\det A)\langle *\lambda, \mu\rangle \mathrm{vol},
\end{aligned}$$

因此 $(A_\#^t * A_\#)\lambda = (\det A) * \lambda$. 引理 5.2 由 λ 的任意性得知.

§1.6 外微分形式

记 $\bigwedge^k(\Omega) = \mathcal{D}'(\Omega, \bigwedge^k)$. $\alpha \in \bigwedge^k$ 具有如下表示

$$\alpha = \sum_I \alpha^I dx^I,$$

其中系数 $\alpha^I \in \mathcal{D}'(\Omega)$ 为复值分布, I 有有序 k- 重. 若对任意 I, $\alpha^I \in L^p_{loc}(\Omega)$, 则 k 向量的外代数对几乎所有的点 $x \in \Omega$ 成立. 符号 $C_0^\infty(\Omega, \bigwedge^k)$ 和 $L_m^p(\Omega, \bigwedge^k)$ 的意义不言自明. $L_m^p(\Omega, \bigwedge^k)$ 具有半范数

$$\|\alpha\|_{m,p} = \left(\int_\Omega \left(\sum_I \left\{\sum_{|\nu|=m} |D^\nu \alpha^I(x)|^2\right\}\right)^{p/2} dx\right)^{1/p}.$$

设 $k=1,2,\cdots,n+1$, 记外导数算子为 $d:\bigwedge^{k-1}(\Omega)\to\bigwedge^{k}(\Omega)$. 当 $k=0,1,\cdots,n$ 时， Hodge 算子 $d^*:\bigwedge^{k}(\Omega)\to\bigwedge^{k-1}(\Omega)$ 定义为

$$d^*=(-1)^{n(n-k)}*d*$$

Hodge 算子 d^* 为外导数算子 d 的形式共轭. 若 $\alpha\in C^\infty(\Omega,\bigwedge^k)$, $\beta\in C^\infty(\Omega,\bigwedge^{k+1})$, 且至少有一个在 Ω 具有紧支撑，则

$$\int_\Omega\langle\alpha,d^*\beta\rangle dx=-\int_\Omega\langle d\alpha,\beta\rangle dx$$

计算得知， Laplace 算子 $\triangle=dd^*+d^*d:\bigwedge^k(\Omega)\to\bigwedge^k(\Omega)$ 只在 k 形式 α 的系数上作用，即对 $\alpha=\sum_I\alpha^I dx^I$, 有

$$\triangle\alpha=\sum_I\triangle\alpha^I dx^I,$$

这里 $\triangle\alpha^I$ 为通常的函数 α^I 作用 Laplace 算子.

定义 6.1 称微分形式 $\alpha\in\bigwedge^l(\Omega)$ 为闭的，如果 $d\alpha=0$; 称其为余闭的，如果 $d^*\alpha=0$. 称 α 为恰当的，如果存在微分形式 $\beta\in\bigwedge^{l-1}(\Omega)$, 使得 $\alpha=d\beta$; 称其为余恰当的，如果存在微分形式 $\gamma\in\bigwedge^{l+1}(\Omega)$, 使得 $\alpha=d^*\gamma$.

由 Poincaré 引理，恰当的微分形式为闭的，余恰当的微分形式为余闭的.

引理 6.3 设 $\alpha\in L_1^p(\mathrm{R}^n,\bigwedge^{k-1})$, $\beta\in L_1^q(\mathrm{R}^n,\bigwedge^{k+1})$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 则

$$\int_{\mathrm{R}^n}\langle d\alpha,d^*\beta\rangle dx=0.$$

证明 因为 $L_1^p(\mathrm{R}^n)\cap C^\infty(\mathrm{R}^n)$ 和 $L_1^q(\mathrm{R}^n)\cap C^\infty(\mathrm{R}^n)$ 分别在 $L_1^p(\mathrm{R}^n)$ 和 $L_1^q(\mathrm{R}^n)$ 中稠密，所以可假设 α 和 β 光滑. 对任意函数 $\varphi\in C_0^\infty(\mathrm{R}^n)$,

$$\varphi\langle d^*\beta,d\alpha\rangle dx=\varphi(d\overline{\alpha}\wedge *d^*\beta)=d(\varphi\overline{\alpha}\wedge *d^*\beta)-d\varphi\wedge\overline{\alpha}\wedge *d^*\beta.$$

由 Stokes 定理,

$$\left|\int_{\mathrm{R}^n}\varphi\langle d\alpha,d^*\beta\rangle dx\right|=\left|\int_{\mathrm{R}^n}\overline{\alpha}\wedge d\varphi\wedge d*\beta\right|.$$

设 $R>0$, $\varphi\in C_0^\infty(B(0,2R))$, $0\le\varphi\le 1$, 在 $B(0,R)$ 上 $\varphi\equiv 1$, 且

$$|\nabla\varphi|\le\frac{2}{R}.$$

显然可由 $\alpha-\alpha_0$ 代替 α, 这里 $\alpha_0\in\bigwedge^{k-1}$ 具有常系数. 由 Hölder 不等式和 Poincaré 引理得到

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathrm{R}^n}\varphi\langle d\alpha,d^*\beta\rangle dx\right| &\le \frac{2}{R}\|\beta\|_{L_1^q(R<|x|<2R)}\|\alpha-\alpha_0\|_{L^p(|x|<2R)}\\ &\le C(n,p,k)\|\beta\|_{L_1^q(R<|x|<2R)}\|\alpha\|_{L_1^p(\mathrm{R}^n)}.\end{aligned}$$

取 $R\to\infty$, 由 Lebesgue 控制收敛定理得

$$\|\beta\|_{L_1^q(r<|x|<2R)}\to 0.$$

引理 6.3 得证.

设 $f=(f^1,f^2,\cdots,f^n)\in W_{loc}^{1,lp}(\Omega,\mathrm{R}^n)$, $p\ge 1$. 由 f 诱导的同胚

$$f^*:C^\infty\left(\mathrm{R}^n,\bigwedge^{l-1}\right)\to L_{loc}^p\left(\Omega,\bigwedge^{l-1}\right)$$

称为拉回，即若 $\alpha\in C^\infty(\mathrm{R}^n,\bigwedge^{l-1})$, $\alpha=\sum_I\alpha^I dx^I$, 则

$$(f^*\alpha)(x)=\sum_I\alpha^I(f(x))df^{i_1}\wedge df^{i_2}\wedge\cdots\wedge df^{i_{l-1}}.$$

若 α 具有线性系数, 则 α 的外导数为 $d\alpha=\beta=\sum_J\beta^J dx^J$. 这个形式具有常系数, 因此诱导的 l- 形式

$$(f^*\beta)(x)=\sum_J\beta^J df^{j_1}\wedge df^{j_2}\wedge\cdots\wedge df^{j_l}$$

的系数是 Jacobi 矩阵 $Df(x)$ 的 $l\times l$ 阶子式的线性组合，且是可测的．因此

$$f^*\beta\in L_{loc}^p\left(\Omega,\bigwedge^l\right).$$

作用在具有常系数的 l- 形式上的算子 f^* 可看出是线性变换 $D^tf(x)$ 的 l 次外幂．即

$$(f^*d\alpha)(x)=[D^tf(x)]_\# d\alpha.$$

外幂有下面的恒等式.

引理 6.4 对具有线性系数的 $\alpha\in\bigwedge^{l-1}(\mathrm{R}^n)$, $f\in W_{loc}^{1,pl}(\Omega,\mathrm{R}^n)$, $p\ge 1$, 有

$$d(f^*\alpha)=f^*(d\alpha),$$

这里左侧理解为分布.

证明 设 $f_\nu \in C^\infty(\Omega, \mathrm{R}^n)$, $\nu = 1, 2, \cdots$, 为按照 $W^{1,pl}_{loc}(\Omega, \mathrm{R}^n)$ 中的拓扑收敛到 f 的映射序列. 显然有 $d(f_\nu^*\alpha) = f_\nu^*(d\alpha)$, $\nu = 1, 2, \cdots$. 但

$$f_\nu^*\alpha \to f^*\alpha, \quad \text{in } L^p_{loc}\left(\Omega, \bigwedge^{l-1}\right),$$

$$f_\nu^*(d\alpha) \to f_\nu^*(d\alpha), \quad \text{in } L^p_{loc}\left(\Omega, \bigwedge^{l}\right).$$

因此在 $\mathcal{D}'(\Omega, \bigwedge^l)$ 中,

$$d(f_\nu^*\alpha) \to d(f^*\alpha).$$

引理 6.4 得证.

§1.7 一些预备引理

本节列举本书中常用的一些预备引理.

1.7.1 一个基本不等式

下面的引理出自 Iwaniec, Migliaccio, Nania, Sbordone [1].

引理 7.1 设 $X, Y \in \mathrm{R}^n$, $n \geq 2$. 则

$$||X|^\varepsilon X - |Y|^\varepsilon Y| \leq \begin{cases} \frac{1-\varepsilon}{2^\varepsilon(1+\varepsilon)}|X-Y|^{1+\varepsilon}, & -1 < \varepsilon \leq 0, \\ (1+\varepsilon)(|Y| + |X-Y|)^\varepsilon |X-Y|, & \varepsilon > 0. \end{cases} \tag{7.1}$$

证明 不妨设 $X \neq Y$. 对 $0 \leq t \leq 1$,

$$\begin{aligned} & \left|\frac{d}{dt}|tX - tY + Y|^\varepsilon(tX - tY + Y)\right| \\ = \ & |tX - tY + Y|^\varepsilon |X - Y| \\ & + \left|\varepsilon|tX - tY + Y|^{\varepsilon-2}\langle tX - tY + Y, X - Y\rangle(tX - tY + Y)\right| \\ \leq \ & (1 + |\varepsilon|)|tX - tY + Y|^\varepsilon |X - Y| \\ \leq \ & \begin{cases} (1-\varepsilon)|t|X-Y| - |Y||^\varepsilon |X-Y|, \ -1 < \varepsilon \leq 0, \\ (1+\varepsilon)(|Y| + |X-Y|)^\varepsilon |X-Y|, \ \varepsilon > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

由中值定理, (7.1) 的第二个不等式显然. 当 $-1 < \varepsilon \leq 0$ 时, 对 $t \in [0, 1]$ 积分得到

$$||X|^\varepsilon X - |Y|^\varepsilon Y| \leq |1-\varepsilon||X-Y|^{1+\varepsilon} \int_0^1 |t-a|^\varepsilon dt,$$

这里

$$a = \frac{|Y|}{|X-Y|}.$$

因此

$$\int_0^1 |t-a|^\varepsilon dt \le \max_b \int_0^{b+1} |\tau|^\varepsilon d\tau = \int_{-1/2}^{1/2} |\tau|^\varepsilon d\tau = \frac{1}{2^\varepsilon(1+\varepsilon)}.$$

引理 7.1 得证.

1.7.2 Hodge 分解

设 (X,μ) 为测度空间. E 为可分的复 Hilbert 空间，对 $\xi,\zeta\in E$, 其内积记为 $\langle\xi,\zeta\rangle$. $L^p(X,E)$ 空间及其范数定义为

$$L^p(X,E) = \left\{ f : \int_X |f|^p d\mu < +\infty \right\}, \quad \|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

设 $1 \le r_1 \le r \le r_2 \le +\infty$, $T : L^r(X,E) \to L^r(X,E)$ 对所有 $r\in[r_1,r_2]$ 为有界线性算子，其 r 范数记为 $\|T\|_r$.

引入非线性映射

$$S^\varepsilon(f) = \left(\frac{|f|}{\|f\|_r}\right)^\varepsilon f : L^r(X,E) \to L^{\frac{r}{1+\varepsilon}}(X,E).$$

引理 7.2 设 $\frac{r}{r_2}-1 \le \varepsilon \le \frac{r}{r_1}-1$. 则对任意 $f\in L^r(X,E)$, 有

$$\|TS^\varepsilon(f) - S^\varepsilon(Tf)\|_{\frac{r}{1+\varepsilon}} \le C_r|\varepsilon|\|f\|_r, \tag{7.2}$$

这里

$$C_r = \frac{2r(r_2-r_1)}{(r-r_1)(r_2-r)} \sup_{r_1\le s\le r_2} \|T\|_s.$$

证明 若 $|\varepsilon| \ge \frac{(r-r_1)(r_2-r)}{r(r_2-r_1)}$, 则

$$\begin{aligned}
\|TS^\varepsilon(f) - S^\varepsilon(Tf)\|_{\frac{r}{1+\varepsilon}} &\le \|TS^\varepsilon(f)\|_{\frac{r}{1+\varepsilon}} + \|S^\varepsilon(Tf)\|_{\frac{r}{1+\varepsilon}} \\
&\le \|T\|_{\frac{r}{1+\varepsilon}} \|S^\varepsilon(f)\|_{\frac{r}{1+\varepsilon}} + \|Tf\|_r \\
&\le \|T\|_{\frac{r}{1+\varepsilon}} \|f\|_r + \|T\|_r\|f\|_r \\
&\le 2 \sup_{r_1\le s\le r_2} \|T\|_s \|f\|_r \\
&\le C_r|\varepsilon|\|f\|_r.
\end{aligned}$$

下面证明当 $|\varepsilon| < \frac{(r-r_1)(r_2-r)}{r(r_2-r_1)}$ 时 (7.2) 成立. 设 q 为 r 的 Hölder 共轭指数，即 $\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=1$. 对复平面上垂直于实轴的带型域

$$\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r}\le x\le \frac{1}{r_1}-\frac{1}{r} \tag{7.3}$$

中的每个复数 $z=x+iy$, 定义 Hölder 共轭指数

$$r_z=\frac{r}{1+rx},\quad q_z=\frac{q}{1-qx}.$$

这样对带型域 (7.3) 中的 z, 有 $r_1\le r_z\le r_2$. 引入非线性映射

$$\mathrm{R}_z f=\left(\frac{|f|}{\|f\|_r}\right)^{rz} f: L^r(X,E)\to L^{r_z}(X,E)$$

和

$$\mathrm{Q}_z g=\left(\frac{|g|}{\|g\|_q}\right)^{-q\overline{z}} g: L^q(X,E)\to L^{q_z}(X,E).$$

显然 $|\mathrm{R}_z f|=\|f\|_r^{-rx}|f|^{1+rx}$, $|\mathrm{Q}_z g|=\|g\|_q^{qx}|g|^{1-qx}$. 因此对 $f\in L^r(X,E)$ 和 $g\in L^q(X,E)$,

$$\|\mathrm{R}_z f\|_{r_z}=\|f\|_r,\quad \|\mathrm{Q}_z g\|_{q_z}=\|g\|_q. \tag{7.4}$$

在带型域 (7.3) 中定义解析函数

$$\phi(z)=\int_X\langle T\mathrm{R}_z f-\mathrm{R}_z Tf,\mathrm{Q}_z g\rangle d\mu.$$

由上可知 $\phi(0)=0$. 由 Hölder 不等式和等式 (7.4) 得到

$$\begin{aligned}|\phi(z)| &\le \int_X |T\mathrm{R}_z f-\mathrm{R}_z Tf||\mathrm{Q}_z g|d\mu\\ &\le \|T\mathrm{R}_z f-\mathrm{R}_z Tf\|_{r_z}\|\mathrm{Q}_z g\|_{q_z}\\ &\le (\|T\|_{r_z}+\|T\|_r)\|f\|_r\|g\|_q\\ &\le 2\sup_{r_1\le s\le r_2}\|T\|_s\|f\|_r\|g\|_q.\end{aligned}$$

注意到圆盘

$$\left\{z:|z|\le\rho=\frac{(r-r_1)(r_2-r)}{r^2(r_2-r_1)}\right\}$$

包含在带型域 (7.3) 中 (因为 $\rho\le\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}$, $\rho\le\frac{1}{r}-\frac{1}{r_2}$), 于是由 Schwarz 引理得

$$|\phi(z)|\le 2\frac{|z|}{\rho}\sup_{r_1\le s\le r_2}\|T\|_s\|f\|_r\|g\|_q.$$

特别的，因为 $|\varepsilon| \leq r\rho$, 所以

$$\left|\phi\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)\right| \leq C_r|\varepsilon|\|f\|_r\|g\|_q.$$

又

$$S^{\varepsilon}(f) = \mathrm{R}_{\frac{\varepsilon}{r}}(f), \quad \|\mathrm{Q}_{\frac{\varepsilon}{r}}(g)\|_{\frac{r}{r-1-\varepsilon}} = \|g\|_q,$$

这样

$$\begin{aligned}\|TS^{\varepsilon}(f) - S^{\varepsilon}(Tf)\|_{\frac{r}{1+\varepsilon}} &= \sup_{g\in L^q(X,E)} \frac{\left|\int_X \langle TS^{\varepsilon}(f) - S^{\varepsilon}(Tf), \mathrm{Q}_{\frac{\varepsilon}{r}}(g)\rangle d\mu\right|}{\|\mathrm{Q}_{\frac{\varepsilon}{r}}(g)\|_{\frac{r}{r-1-\varepsilon}}} \\ &= \sup_{g\in L^q(X,E)} \frac{\left|\phi\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)\right|}{\|g\|_q} \leq C_r|\varepsilon|\|f\|_r.\end{aligned}$$

引理 7.2 证毕.

推论 7.1 在引理 7.2 的假设下，若 $Tf = 0$, 则

$$\|T(|f|^{\varepsilon} f)\|_{\frac{r}{1+\varepsilon}} \leq C_r\varepsilon\|f\|_r^{1+\varepsilon}.$$

证明 由 $Tf = 0$, T 为有界线性算子和引理 7.2 得

$$\begin{aligned}& \frac{1}{\|f\|_r^{\varepsilon}}\|T(|f|^{\varepsilon} f)\|_{\frac{r}{1+\varepsilon}} = \left\|\frac{1}{\|f\|_r^{\varepsilon}}T(|f|^{\varepsilon} f)\right\|_{\frac{r}{1+\varepsilon}} \\ = \ & \left\|T\left(\frac{|f|}{\|f\|_r}\right)^{\varepsilon} f\right\|_{\frac{r}{1+\varepsilon}} = \|TS^{\varepsilon}(f) - S^{\varepsilon}(Tf)\|_{\frac{r}{1+\varepsilon}} \\ \leq \ & C_r\varepsilon\|f\|_r.\end{aligned}$$

推论 7.1 证毕.

下面引入 Riesz 变换的概念．给定 $f \in C_0^{\infty}(\mathrm{R}^n)$, 定义 Riesz 变换

$$\mathcal{R}_{\nu} : L^p(\mathrm{R}^n) \to L^p(\mathrm{R}^n), 1 < p < \infty, \nu = 1, 2, \cdots, n$$

为

$$\mathcal{R}_{\nu} f(x) = c_n \int_{\mathrm{R}^n} \frac{(x_{\nu} - y_{\nu})f(y)}{|x - y|^{n+1}} dy \tag{7.5}$$

这里

$$c_n = \pi^{-(n+1)/2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right),$$

(7.5) 中的积分理解为主值. n 重 Riesz 变换定义为

$$\mathcal{R} = (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \cdots, \mathcal{R}_n) : L^p(\mathrm{R}^n) \to L^p(\mathrm{R}^n, \mathrm{R}^n).$$

$n = 1$ 时的 Riesz 变换称为 Hilbert 变换:

$$\mathcal{H}f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{x-y} dy.$$

给定向量 $F = (f^1, f^2, \cdots, f^n) \in L^r(\mathrm{R}^n, \mathrm{R}^n)$, $1 < r < \infty$, Poisson 方程 $\triangle u = \mathrm{div} F$ 可由 R^n 中的 Riesz 变换表示,

$$\bigtriangledown u = -(\mathcal{R} \otimes \mathcal{R})(F) = \mathcal{K}(F).$$

这里张量积算子 $\mathcal{K} = -(\mathcal{R} \otimes \mathcal{R}) = -[\mathcal{R}_{ij}]$ 为二阶 Riesz 变换 $\mathcal{R}_{ij} = \mathcal{R}_i \circ \mathcal{R}_j$, $i, j = 1, 2, \cdots, n$ 的 $n \times n$ 矩阵. 注意到算子

$$\mathcal{H} = \mathrm{Id} - \mathcal{K} : L^r(\mathrm{R}^n, \mathrm{R}^n) \to L^r(\mathrm{R}^n, \mathrm{R}^n)$$

由散度为零的向量组成，于是得到关于 F 的 Hodge 分解

$$F = \bigtriangledown u + H, \quad \mathrm{div}\ H = 0.$$

由 Riesz 变换的 L^r 估计得到一致估计式

$$\| \bigtriangledown u\|_r + \|H\|_r \le C(r)\|F\|_r.$$

这里的 $C(r)$ 只依赖于 r.

设 $\Omega \subset \mathrm{R}^n$ 为区域, $G = G(x, y)$ 为 $\Omega \subset \mathrm{R}^n$ 的 Green 函数. 对 $h \in C_0^\infty(\Omega)$, 积分

$$u(x) = \int_\Omega G(x, y)h(y)dy$$

给出了 Poisson 方程 $\triangle u = h$ 的一个解，其中 u 在 Ω 的边界为零. 若 h 具有散度形式，即 $h = \mathrm{div} F$, $F = (f^1, f^2, \cdots, f^n) \in C_0^\infty(\Omega, \mathrm{R}^n)$, 则由分部积分得到

$$u(x) = -\int_\Omega \triangle_y G(x, y)F(y)dy.$$

因此 u 的梯度由奇异积分

$$\bigtriangledown u(x) = -\int_\Omega \bigtriangledown_x \bigtriangledown_y G(x,y)F(y)dy = (\mathcal{K}_\Omega F)(x)$$

表示.

称区域 $\Omega \subset \mathrm{R}^n$ 为正则的，若算子 $\mathcal{K}_\Omega$ 在所有的 $L^r(\Omega, \mathrm{R}^n)$, $1 < r < \infty$ 有界. 球和方体为 R^n 中的正则区域.

对正则区域 Ω 引入算子

$$\mathcal{H}_\Omega = \mathrm{Id} - \mathcal{K}_\Omega : L^r(\Omega, \mathrm{R}^n) \to L^r(\Omega, \mathrm{R}^n).$$

显然 $\mathcal{H}_\Omega$ 的值域由散度为零的向量组成. 对 $F \in L^r(\Omega, \mathrm{R}^n)$, 有 Hodge 分解

$$F = \bigtriangledown u + H,\ \mathrm{div} H = 0,$$

并有一致估计

$$\| \bigtriangledown u\|_{r,\Omega} + \|H\|_{r,\Omega} \le C(r,\Omega)\|F\|_{r,\Omega}.$$

若 Ω 为球或方体，则 $C(r,\Omega)$ 不依赖于 Ω.

取 $H = \mathcal{H}_\Omega(|\bigtriangledown w|^\varepsilon \bigtriangledown w)$, 因为 $\bigtriangledown w$ 属于 $\mathcal{H}_\Omega$ 的核，所以

$$\|H\|_{r/(1+\varepsilon)} \le C_r(\Omega, m)|\varepsilon| \|\bigtriangledown w\|_r^{1+\varepsilon},$$

这里

$$C_r(\Omega, m) \le \frac{2r(s_2 - s_1)}{(r - s_1)(s_2 - r)}(\|\mathcal{H}_\omega\|_{s_1} + \|\mathcal{H}_\omega\|_{s_2}),$$

$s_1 < r < s_2$ 为满足

$$1 < s_1 \le \frac{r}{1+\varepsilon} \le s_2 < \infty$$

的任意数. 引理 7.2 得到

引理 7.3 设 $\Omega \subset \mathrm{R}^n$ 为正则区域， $w \in W_0^{1,r}(\Omega, \mathrm{R}^m)$, $r > 1, m \ge 1$. 设 $-1 < \varepsilon < r - 1$. 则存在 $\phi \in W_0^{\frac{r}{1+\varepsilon}}(\Omega, \mathrm{R}^m)$ 和散度为零 (divergence free) 的矩阵 $H \in L^{\frac{r}{1+\varepsilon}}(\Omega, \mathrm{R}^{m\times n})$, 使得

$$|\nabla w(x)|^\varepsilon \nabla w(x) = \nabla\phi(x) + H(x), \tag{7.6}$$

且有下面的估计

$$\|H\|_{\frac{r}{1+\varepsilon}} \leq C_r(\Omega, m)|\varepsilon| \|\nabla w\|_r^{1+\varepsilon}, \tag{7.7}$$

上面的引理出自 Iwaniec, Sbordone [1, 定理 3], 它是向量的 Hodge 分解.

下面的引理出自 Greco, Iwaniec [2], 它也是向量的 Hodge 分解，但不要求 u 在边界上为零.

引理 7.4 设 $B = B(a, r)$ 为 R^n 中的球，$u \in W^{1,r}(B)$, $p > 1$. 则对 $\varepsilon \in (1-r, 1)$, $|\nabla u|^{-\varepsilon}\nabla u \in L^{r/(1-\varepsilon)}(B, \mathrm{R}^n)$ 可分解为

$$|\nabla u(x)|^{-\varepsilon}\nabla u(x) = \nabla\varphi(x) + H(x), \tag{7.8}$$

这里 $\varphi \in W^{1,r/(1-\varepsilon)}(\mathrm{R}^n)$, 且 $H \in L^{r/(1-\varepsilon)}(\mathrm{R}^n, \mathrm{R}^n)$ 是散度为零的向量，且有下面的估计

$$\|H\|_{r/(1-\varepsilon)} \leq C(n, r)|\varepsilon| \|\nabla u\|_r^{1-\varepsilon}, \tag{7.9}$$

这里常数 $C(n, r)$ 只依赖于 n, r.

证明 不妨设 B 以原点为心. 函数 u 可以扩充到 R^n 上,

$$u(x) = u\left(\frac{R^2 x}{|x|^2}\right), \ x \in \mathrm{R}^n \setminus B.$$

容易看到

$$\int_{R<|x|<2R} |\nabla u(x)|^r dx = \int_{R/2<|x|<R} |\nabla u(x)|^r \left|\frac{x}{R}\right|^{2r-2n} dx.$$

因此

$$\int_{2B} |\nabla u(x)|^r dx \leq 4^n \int_B |\nabla u(x)|^r dx.$$

下面设 $\eta \in C_0^\infty(2B)$ 为阶段函数, 使得 $0 \leq \eta \leq 1$, 在 B 上 $\eta \equiv 1$, 且 $|\nabla\eta| \leq c(n)/R$. 定义辅助函数 $\omega \in W_0^{1,r}(2B) \subset W^{1,r}(\mathrm{R}^n)$ 为

$$\omega(x) = \eta(x)[u(x) - u_{2B}].$$

由 Poincaré 不等式得到

$$\int_{\mathrm{R}^n} |\nabla u|^r dx \leq C(n, r)\int_{2B} |\nabla u|^r dx \leq 4^n C(n, r)\int_B |\nabla u|^r dx. \tag{7.10}$$

应用引理 7.2, 考虑下面的 Hodge 分解

$$|\nabla\omega|^{-\varepsilon}\nabla\omega=\nabla\varphi+H, \tag{7.11}$$

这里 $\varphi\in W^{1,r/(1-\varepsilon)}(\mathrm{R}^n)$, $H\in L^{r/(1-\varepsilon)}(\mathrm{R}^n,\mathrm{R}^n)$, 且

$$\|H\|_{r/(1-\varepsilon)}\le c(n,r)|\varepsilon|\|\nabla\omega\|_r^{1-\varepsilon}.$$

(7.10) 推出 (7.9).

下面的引理出自 Iwaniec, Martin [1], 它是微分形式的 Hodge 分解.

引理 7.5 若 $\omega\in L^p(\mathrm{R}^n,\bigwedge^k)$, $1<p<\infty$, 则存在 $(k-1)$ 形式 α 和 $(k+1)$ 形式 β, 使得

$$\omega=d\alpha+d^*\beta,$$

且 $d\alpha,d^*\beta\in L^p(\mathrm{R}^n,\bigwedge^k)$. 微分形式 $d\alpha$, $d^*\beta$ 是唯一的,

$$\alpha\in\mathrm{Ker}d^*\cap L_1^p\left(\mathrm{R}^n,\bigwedge^{k-1}\right), \tag{7.12}$$

$$\beta\in\mathrm{Ker}d\cap L_1^p\left(\mathrm{R}^n,\bigwedge^{k+1}\right), \tag{7.13}$$

且有下面的一致估计

$$\|\alpha\|_{L_1^p(\mathrm{R}^n)}+\|\beta\|_{L_1^p(\mathrm{R}^n)}\le C_p(k,n)\|\omega\|_p, \tag{7.14}$$

这里 $C_p(k,n)$ 只依赖于 p,k,n.

证明 先证唯一性. 设

$$d\alpha+d^*\beta=0,\ d\alpha,d^*\beta\in L^p\left(\mathrm{R}^n,\bigwedge^k\right),$$

由此得到

$$d^*d\alpha=0,\quad dd^*\beta=0.$$

因此 $dd^*(d\alpha)=0$, $d^*d(d^*\beta)=0$. 这个结果联合 $d^*d(d\alpha)=0$ 和 $dd^*(d^*\beta)=0$ 得到

$$\triangle d\alpha=0,\ \triangle d^*\beta=0.$$

因此 $d\alpha$ 和 $d^*\beta$ 是调和的且 L^p 可积. 由 Weyl 引理 (由 $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ 且 $\triangle u = 0$ 推出 u 在通常意义下调和) 知 $d\alpha$ 和 $d^*\beta$ 在通常意义下调和且 L^p 可积. 因此 $d\alpha = 0$, $d^*\beta = 0$.

为证存在性, 求解下面的 Poisson 方程

$$\omega = \triangle \varphi.$$

其解 φ 可由 Riesz 位势表示：当 $n = 2$ 时,

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int \omega(y) \log |x - y| dy;$$

当 $n \geq 3$ 时,

$$\varphi(x) = -\frac{\Gamma(n/2 - 1)}{4\pi^{n/2}} \int \frac{\omega(y) dy}{|x - y|^{n-2}}.$$

记 $\varphi = \mathcal{R}(\omega)$. φ 的二阶导数可由下式表示：对 $i = 1, 2, \cdots, n$,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} = -\mathcal{R}_i \mathcal{R}_j (\triangle \varphi) = -\mathcal{R}_i \mathcal{R}_j (\omega),$$

这里 $\mathcal{R}_i$ 为 Riesz 变换. 由 Riesz 变换的 L^p 理论知

$$\varphi \in L_2^p \left(\mathrm{R}^n, \bigwedge^k \right),$$

$$\|\varphi\|_{L_2^p(\mathrm{R}^n)} \leq C_p(k, n) \|\omega\|_p. \tag{7.15}$$

现在,

$$\omega = \triangle \varphi = (dd^* + d^* d) \varphi = d\alpha + d^* \beta,$$

这里 $\alpha \in \mathrm{Ker} d^* \cap L_1^p \left(\mathrm{R}^n, \bigwedge^{k-1} \right)$, $\beta \in \mathrm{Ker} d \cap L_1^p \left(\mathrm{R}^n, \bigwedge^{k+1} \right)$. 估计式 (7.13) 由 (7.15) 得到.

1.7.3 弱逆 Hölder 不等式

下面的引理建立了弱逆 Hölder 不等式和 L^p 可积性之间的关系. 参见 Giaquinta[1, 第五章命题 1.2].

引理 7.5 设 $0 < r < d_0 \leq \mathrm{dist}(x, \partial\Omega), x \in \Omega$. 如果对于函数 $g(x), h(x) \in L^p(B_r), 1 < p < \infty$, 成立

$$⨍_{B_{\frac{r}{2}}} |g(x)|^p dx \leq \theta ⨍_{B_r} |g(x)|^p dx + C \left(⨍_{B_r} |g(x)|^s dx \right)^{\frac{p}{s}} + C ⨍_{B_r} |h(x)|^p dx \tag{7.16}$$

这里 $1 \leq s < p, 0 \leq \theta < 1$；那么一定存在指数 $p' = p'(\theta, p, n, C) > p$ 使得 $g \in L^{p'}_{loc}(\Omega, \mathrm{R}^n)$; 并且

$$\left(\fint_{B_{\frac{r}{2}}} |g(x)|^{p'} dx\right)^{\frac{1}{p'}} \leq C \left(\fint_{B_r} |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + C \left(\fint_{B_r} |h(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{7.17}$$

本章注记：本章 1.1-1.3 节参考了 Reshetnyak[1], Iwaniec, Martin[1], Zimer[1], Iwaniec [1]. 1.4 节参考了 Iwaniec [2]. 1.5-1.6 节参考了 Iwaniec, Martin[1]. 1.7 节参考了 Iwaniec, Migliaccio, Nania, Sbordone [1], Greco, Iwaniec [1], Iwaniec, Sbordone [1,2] 和 Giaquinta [1].

第 2 章　拟正则映射

平面拟共形映射是单复变函数论的重要内容，其应用范围很广．n 维空间拟共形映射的概念是由 Lavrent'ev 于二十世纪三十年代引入的，见 Lavrent'ev[1], 其系统研究开始于二十世纪六十年代. 二十世纪六十年代末，苏联数学家 Reshetnyak 开始了空间拟正则映射 (Reshetnyak 称之为 **具有有界伸张的空间映射**) 理论的研究，建立了空间拟正则映射的离散性和开集性等重要性质，见总结性专著 Reshetnyak [1]. 稍后的几年里， Martio, Rickman, Väsälä 等人利用研究拟共形映射的传统方法，即曲线族的模和模不等式等方法，建立了高维空间拟正则映射的正规族理论和值分布理论等，见 Martio, Rickman, Väsälä [1-3]. 二十世纪九十年代初， Iwaniec, Martin [1] 和 Iwniaec [1] 在 " 拟共形 4 维流形 "(见 Donalson, Sullivan [1]) 工作的基础上，将奇异积分的 Calderón-Zgymund 理论，微分几何中的 Hodge 分解理论，Grassman 代数和 Sobolev 空间的分析方法引入空间拟正则映射的研究，建立了偶数维及任意维数下拟正则映射的正则性与可去奇异性等结果，取得了突破性进展，并使得拟正则映射的理论与应用问题的研究成为当代国际热门课题.

本章讲述拟正则映射理论，包括拟正则映射，弱拟正则映射以及退化的拟正则映射等.

§2.1 K- 拟正则映射

2.1.1 K- 拟正则映射的定义

设 $A, B \in \mathrm{R}^{n\times n}$ 为两个 n 阶方阵．它们的内积定义为

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{Trace}(B^tA) = \mathrm{Trace}(A^tB) = \sum_{i=1}^{n}\langle Ae_i, Be_i\rangle.$$

矩阵 $A = (a_j^i)_{1\le i,j\le n}$ 的 Hilbert-Schmidt 范数定义为

$$|A| = \sqrt{\langle A, A\rangle} = \left(\sum_{i=1}^{n}|Ae_i|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n}(a_j^i)^2\right)^{1/2}.$$

我们还将用到 A 的下列范数

$$\|A\| = \max\{|Av| : |v| = 1\}.$$

由 Hadamard 不等式得到

$$n^{n/2}|\det A| \le \|A\|^n,$$

等号成立当且仅当 A 为线性共形变换.

设 $\Omega \subset \mathrm{R}^n$ 为开集，$f = (f^1, f^2, \cdots, f^n) \in W^{1,p}_{loc}(\Omega, \mathrm{R}^n)$, $p \ge 1$. 记 f 的微分矩阵为 $Df(x) \in L^p_{loc}(\Omega, \mathrm{R}^{n\times n})$, 其相应的 Jacobi 行列式为 $J(x,f) = J_f(x) = \det Df(x)$.

定义 1.1 映射 $f : \Omega \to \mathrm{R}^n$ 称为 K- 拟正则映射， $K \ge 1$, 若 $f \in W^{1,n}_{loc}(\Omega, \mathrm{R}^n)$, 且

$$|Df(x)|^n \le KJ_f(x), \quad \text{a.e. } x \in \Omega. \tag{1.1}$$

又若 f 为同胚的，则称其为 K- 拟共形映射.

2.1.2 K- 拟正则映射的 Caccioppoli 不等式

本小节建立 K- 拟正则映射的 Caccioppoli 不等式，高阶可积性作为其推论.

定理 1.1 设 $f \in W^{1,n}_{loc}(\Omega, \mathrm{R}^n)$ 为 K- 拟正则映射. 对任意常向量 $C = (C^1, C^2, \cdots, C^n)$ 和任意 $\varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$, 下面的 Caccioppoli 不等式成立

$$\int_\Omega |\varphi Df|^n dx \le (nK)^n \int_\Omega |(f - C) \otimes \nabla\varphi|^n dx. \tag{1.2}$$

这里 $\otimes$ 为向量的张量积，见 §1.4.

证明 由 (1.1), Hölder 不等式以及

$$J_f(x)dx = df^1 \wedge df^2 \wedge \cdots \wedge df^n$$

得

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |\varphi Df|^n dx = \int_\Omega \varphi^n |Df|^n dx \le K \int_\Omega \varphi^n J_f(x) dx \\
&= K \int_\Omega \varphi^n df^1 \wedge df^2 \wedge \cdots \wedge df^n \\
&= K \int_\Omega d\left[\varphi^n (f^1 - C^1) df^2 \wedge \cdots \wedge df^n\right] - K \int_\Omega (f^1 - C^1) d\varphi^n \wedge df^2 \wedge \cdots \wedge df^n \\
&= -K \int_\Omega (f^1 - C^1) d\varphi^n \wedge df^2 \wedge \cdots \wedge df^n \\
&\le K \int_\Omega |(f - C) \otimes \nabla\varphi^n||df^2| \cdots |df^n| dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq nK\int_\Omega |(f-C)\otimes\nabla\varphi||\varphi Df|^{n-1}dx\\
&\leq nK\left(\int_\Omega |(f-C)\otimes\nabla\varphi|^n dx\right)^{1/n}\left(\int_\Omega |\varphi Df|^n dx\right)^{(n-1)/n},
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

上面推导过程中用到了 Poincaré 引理 $d\circ d=0$ 和 Stokes 公式

$$
\int_\Omega dg=\int_{\partial\Omega} g,
$$

(1.2) 由 (1.3) 得到.

Caccioppoli 不等式结合 Poincaré 不等式，可以推出弱逆 Hölder 不等式. 弱逆 Hölder 不等式蕴涵高阶可积性.

任取球 $B_R\subset B_{2R}\subset\subset\Omega$. 取定理 1.1 中的 $\varphi(x)\in C_0^\infty(\Omega)$ 满足 $0\leq\varphi(x)\leq 1$, $\varphi(x)$ 在 B_R 上恒为 1, 在 B_{2R} 之外恒为 0, 且 $|\nabla\varphi|\leq 2/R$. 取 $C=f_{B_{2R}}$ 为 f 在球 B_{2R} 上的积分平均，取第 1 章 (3.7) 中的 $q=n$, $p=\frac{n}{2}$. 由 (1.2) 得

$$
\begin{aligned}
&\int_{B_R}|Df|^n dx\leq\int_\Omega|\varphi Df|^n dx\\
&\leq (nK)^n\int_\Omega |(f-f_{B_{2R}})\otimes\nabla\varphi|^n dx\\
&=(nK)^n\int_{B_{2R}} |(f-f_{B_{2R}})\otimes\nabla\varphi|^n dx\\
&\leq\frac{(2nK)^n}{R^n}\int_{B_{2R}}|f-f_{B_{2R}}|^n dx\\
&\leq\frac{C(n)K^n}{R^n}\left(\int_{B_{2R}}|Df|^{n/2}dx\right)^2.
\end{aligned}
$$

两端除以 $|B_{2R}|=\omega_n R^n$, 得到

$$
⨍_{B_R}|Df|^n dx\leq C(n)K^n\left(⨍_{B_{2R}}|Df|^{n/2}dx\right)^{2/n}. \tag{1.4}
$$

这是一个弱逆 Hölder 不等式.

定理 1.2 存在 $p>n$, 使得对任意 K- 拟正则映射 $f\in W^{1,n}_{loc}(\Omega,\mathrm{R}^n)$, 有 $f\in W^{1,p}_{loc}(\Omega,\mathrm{R}^n)$.

证明 f 的 $L^p(p>n)$ 可积性由 Sobolev 嵌入定理得到. Df 的 $L^p(p>n)$ 可积性由 (1.4) 和第一章引理 7.5 得到.

§2.2 (K_1, K_2)- 拟正则映射

本节考虑比 K- 拟正则映射更广的 (K_1, K_2)- 拟正则映射. 下面的定义是郑神州和方爱农 [1] 给出的.

定义 2.1 映射 $f:\Omega\to \mathrm{R}^n$ 称为 (K_1, K_2)- 拟正则映射, $K_1>0$, $K_2\geq 0$, 若 $f\in W^{1,n}_{loc}(\Omega,\mathrm{R}^n)$, $J_f(x)>0$, a.e. Ω, 且

$$|Df(x)|^n\leq K_1J_f(x)+K_2,\quad \text{a.e. } x\in\Omega. \tag{2.1}$$

又若 f 为同胚的，则称其为 (K_1, K_2)- 拟共形映射.

上面定义中当 $K_2=0$ 时，由于 $J_f(x)\leq |Df(x)|$, a.e.Ω, 所以 $K_1\geq 1$. 这时的 $(K_1, 0)$- 拟正则映射与 K- 拟正则映射一致.

Gilbarg, Trudinger[1] 在考虑两个变量的拟线性椭圆方程时，非常简便的采用平面上的 (K_1, K_2)- 拟正则映射 (由于它在椭圆型方程理论中的独特作用，又称椭圆映射) 建立的 Hölder 连续性方法，得到了二阶椭圆型方程在 Sobolev 空间中弱解的 $C^{1,\alpha}_{loc}$ 先验估计，从而建立了拟线性椭圆型方程 Dirichlet 边值问题解的存在性. 因此平面上的 (K_1, K_2)- 拟正则映射对椭圆型方程的研究具有一定的意义.

2.2.1 (K_1, K_2)- 拟正则映射的 Hölder 连续性和几乎处处可微性

本小节在稍强的条件 $f\in W^{1,n}(\Omega,\mathrm{R}^n)$ 之下，研究 (K_1, K_2)- 拟正则映射的 Hölder 连续性和几乎处处可微性.

称函数 $u:\Omega\to\mathrm{R}$ 在 Ω 中不变号，如果在 Ω 中几乎处处有 $u(x)\geq 0$, 或者几乎处处有 $u(x)\leq 0$.

定理 2.1 设 $f\in W^{1,n}(\Omega,\mathrm{R}^n)$ 为 (K_1, K_2)- 拟正则映射，且

$$\int_\Omega |Df(x)|^n dx = M<+\infty,$$

则在 Ω 的任意紧子集上， f 满足指数为 α 的 Hölder 条件，其中

$$\alpha=\begin{cases} 1/K_1, & \text{当} K_1>1 \text{ 时},\\ \text{任意小于 1 的正数}, & \text{当} K_1=1 \text{ 且} K_2>0 \text{ 时},\\ 1, & \text{当} K_1=1 \text{ 且} K_2=0 \text{ 时},\\ 1, & \text{当} K_1<1 \text{ 时}.\end{cases} \tag{2.2}$$

而且，若 V 严格包含于 Ω, 则对任意 $x, y \in V$,

$$|f(x)-f(y)| \leq L|x-y|^{\alpha},$$

这里的常数 L 只依赖于 V, 常数 K_1, K_2, 维数 n, V 到 Ω 边界的距离以及常数 M.

反例 映射

$$f(x)=\begin{cases} x|x|^{\alpha-1}, & x \neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$$

这里 $\alpha=1/K_1$ 表明定理 2.1 中的指数 $1/K_1$ 是最优的，因为 $|f(x)-f(0)|=|x|^{\alpha}$.

推论 2.1 设 Ω 为 R^n 中的区域， $F(\Omega, K_1, K_2, M)$ 为所有在 Ω 上满足

$$\int_{\Omega}|Df(x)|^n dx \leq M$$

的 (K_1, K_2)- 拟正则映射 $f \in W^{1,n}(\Omega, \mathrm{R}^n)$ 的全体. 则 $F(\Omega, K_1, K_2, M)$ 在 Ω 的任意紧子集上是等度一致连续的.

定义 2.1 称映射 f 具有 N 性质，如果任意零测集 $E \subset \Omega$ 在 f 映射之下的象是零测集.

推论 2.2 $K_1<1$ 时的 (K_1, K_2)- 拟正则映射和空间拟共形映射具有 N 性质.

证明 由 Reshetnyak [1, 定理 2.2] 知，局部 Lipschitz 映射具有 N 性质，结合定理 2.1 便得.

定义 2.2 称映射 $f: \Omega \to \mathrm{R}^n$ 在点 $a \in \Omega$ 可微，若存在线性映射 $L: \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$ 使得对所有 $x \in \Omega$,

$$f(x)=f(a)+L(x-a)+\beta(x)|x-a|$$

这里当 $x \to a$ 时， $\beta(x) \to 0$. 映射 L 称为 f 在点 a 的微分.

下面的定理表明 (K_1, K_2)- 拟正则映射是几乎处处可微的.

定理 2.2 设 $f \in W^{1,n}(\Omega, \mathrm{R}^n)$ 为 (K_1, K_2)- 拟正则映射. 则对几乎所有的 $x \in \Omega$, 线性映射 $Df(x)$ 是 f 在点 x 的微分.

证明 利用推论 2.1, 仿 Reshetnyak [1, 定理 1.2] 可得.

为证定理 2.1, 需要两个预备引理. 下面的 Morrey 引理来自 Reshetnyak [1, P79-80], 证明见 Reshetnyak [1, P335-338].

引理 2.1 设 $\Omega \subset \mathrm{R}^n$ 为开子集， $f:\Omega \to \mathrm{R}^k$ 为 $W^{1,m}(\Omega,\mathrm{R}^k)$ 类函数，这里 $1 \le m \le n$. 假设存在 $\alpha(0<\alpha\le 1)$, $M<+\infty$ 和 $\delta>0$, 使得对任意半径之多为 δ 的球 $B(a,r)\subset\Omega$,

$$\int_{B(a,r)} |Df(x)|^m dx \le M r^{n-m+m\alpha}, \tag{2.3}$$

则存在连续函数 $\tilde{f}$, 使得几乎处处有 $f(x)=\tilde{f}(x)$, 并且 $\tilde{f}$ 在任意球 $B(x,r)\subset\Omega$, $r\le\delta/3$ and $r<\rho(x)/3$ 上的振荡不超过 $CM^{1/m}r^{\alpha}$, 这里 $C<+\infty$ 为常数.

下面的等周不等式来自 Reshetnyak [1, P80-81].

引理 2.2 设 $\Omega\subset\mathrm{R}^n$, 映射 $f:\Omega\to\mathrm{R}^n$ 属于 $W^{1,n}(\Omega,\mathrm{R}^n)$. 则对任意 $a\in U$ 和几乎所有的 $t\in(0,\rho(a))$,

$$\int_{B(a,t)} J_f(x)dx \le \frac{t}{n}\int_{S(a,t)} |Df(x)|^n d\sigma(x), \tag{2.4}$$

这里 $d\sigma$ 为球面 $S(a,t)$ 上的面积元素.

证明 首先给出一些必要的定义. 设 $A:\mathrm{R}^n\to\mathrm{R}^n$ 为线性映射， ν 为 R^n 上的单位向量， P_ν 为垂直于 ν 的 R^n 的 $(n-1)$- 为子空间， $Q_\nu=A(P_\nu)$. A 在 P_ν 的限制为 $(n-1)$- 维欧氏空间 P_ν 到欧氏空间 Q_ν 的线性映射，其行列式记为 $\triangle_\nu(A)$. 线性映射 $A|P_\nu$ 的范数显然不超过 $|A|$. 我们有

$$\triangle_\nu(A)\le |A|P_\nu|^{n-1},$$

由此推出

$$\triangle_\nu(A)\le |A|^{n-1}.$$

设 Ω 为 R^n 中的任意区域， $a\in\Omega$, $f:\Omega\to\mathrm{R}^n$ 为 $W^{1,n}$ 类映射. 设

$$V(t,f)=\int_{B(a,t)} J_f(x)dx,$$

这里 $0<t<\rho_\Omega(a)$, 且设

$$F(t,f)=\int_{S(a,t)} \triangle_{\nu(x)}[Df(x)]d\sigma(x).$$

这里 $d\sigma(x)$ 为球面 $S(a,t)$ 上的面积元素，且 $\nu(x)$ 为 $S(a,t)$ 在点 x 的单位法向量. 上面的积分显然对所有 $t\in(0,\rho(a))$ 有定义.

当 f 属于 C^1 类, 且 f 的 Jacobi 行列式处处非零时，$F(t,f)$ 显然为在 f 映射之下 $S(a,t)$ 的象的 $(n-1)$- 维面积，$V(t,f)$ 为由此围成的区域的有向体积. 适当定义曲面的面积，当 f 属于 $W^{1,n}$ 时上面的积分可表示曲面的面积. 由 $\triangle_\nu(A) \le |A|^{n-1}$, 对所有使得 $Df(x)$ 有定义的 x,

$$\triangle_\nu[Df(x)] \le |Df(x)|^{n-1}.$$

由此得到

$$F(t,f) \le \int_{S(a,t)} |Df(x)|^{n-1} d\sigma(x).$$

对几乎所有 $t \in (0,\rho(a))$,

$$V(t,f) \le (1/n\beta_n)[F(t,f)]^{n/(n-1)},$$

这里 $\beta_n = \omega_n^{1/(n-1)}$. 上面的不等式表明, 在所有具有给定面积的 R^n 中的闭曲面中, 球面的体积最大.

由上面的两个不等式得到，对几乎所有 $t \in (0,\rho(a))$,

$$\int_{B(a,t)} J_f(x)dx \le (1/n\beta_n)\left(\int_{S(a,t)} |Df(x)|^{n-1} d\sigma(x)\right)^{n/(n-1)}.$$

Hölder 不等式推出

$$\begin{aligned} & \int_{S(a,t)} |Df(x)|^{n-1} d\sigma(x) \\ \le \; & \left(\int_{S(a,t)} |Df(x)|^{n} d\sigma(x)\right)^{1-1/n} \left(\int_{S(a,t)} d\sigma(x)\right)^{1/n}. \end{aligned}$$

上式右端第二个积分等于 $\omega_n t^{n-1}$. 带入得到

$$\int_{B(a,t)} J_f(x)dx \le \frac{t}{n}\int_{S(a,t)} |Df(x)|^{n} d\sigma(x).$$

由 Morrey 引理和等周不等式可得下面的两个引理.

引理 2.3 设 $\Omega \subset \mathrm{R}^n$ 为开集，f 为 (K_1,K_2)- 拟正则映射. 对 $x \in \Omega$, $r < \rho(x)$, 设

$$v(x,K_1,K_2,n,r) = \begin{cases} \frac{w(r)}{r^{n/K_1}} + \frac{K_2\omega_n}{K_1-1} r^{n-n/K_1}, & \text{当} K_1 \ne 1 \text{ 时}, \\ \frac{w(r)}{r^n} + K_2 n\omega_n \ln r, & \text{当} K_1 = 1 \text{ 时}, \end{cases} \tag{2.5}$$

这里

$$w(r) = \int_{B(x,r)} |Df(x)|^n dx.$$

则函数 $r \mapsto v(x, K_1, K_2, n, r)$ 非减.

证明 对 $r < \rho(x)$, 定义 2.1 推出

$$\begin{aligned} \int_{B(x,r)} |Df(x)|^n dx &\leq K_1 \int_{B(x,r)} |J_f(x)| dx + K_2 \int_{B(x,r)} dx \\ &= K_1 \left| \int_{B(x,r)} J_f(x) dx \right| + K_2 |B(x,r)| \end{aligned} \tag{2.6}$$

因为 $J(x, f)$ 在 Ω 中不变号. 由引理 2.2, 对几乎所有的 $r \in (0, \rho(x))$,

$$\left| \int_{B(x,r)} J_f(x) \right| \leq \frac{r}{n} \int_{S(x,r)} |Df(x)|^n d\sigma(x) \tag{2.7}$$

由 (2.6), (2.7) 得到

$$\int_{B(x,r)} |Df(x)|^n dx \leq \frac{K_1 r}{n} \int_{S(x,r)} |Df(x)|^n d\sigma(x) + K_2 \omega_n r^n. \tag{2.8}$$

设

$$\int_{S(x,r)} |Df(x)|^n d\sigma(x) = s(r).$$

由 Fubini 定理得，对所有 $r \in (0, \rho(x))$, $w(r) = \int_0^r s(t) dt$. 由此知函数 w 绝对连续且对几乎所有的 $r \in (0, \rho(x))$,

$$w'(r) = s(r).$$

由 (2.8) 得对所有 r,

$$w(r) \leq \frac{K_1 r w'(r)}{n} + K_2 \omega_n r^n.$$

这等价于

$$\frac{K_1 r w'(r)}{n} - w(r) + K_2 \omega_n r^n \geq 0.$$

两端乘以 $r^{-(n/K_1)-1}$ 得

$$\frac{K_1 w'(r)}{n r^{n/K_1}} - \frac{w(r)}{r^{n/K_1+1}} + K_2 \omega_n r^{n-n/K_1-1} \geq 0.$$

由此得

$$\frac{\partial v(x, K_1, K_2, n, r)}{\partial r} \geq 0,$$

这里 $v(x,K_1,K_2,n,r)$ 由 (2.5) 定义. 于是函数 $r\mapsto v(x,K_1,K_2,n,r)$ 非减.

引理 2.4 设 $\Omega\subset \mathrm{R}^n$ 为开集， f 为 (K_1,K_2)- 拟正则映射，

$$\int_\Omega |Df(x)|^n dx = M^n.$$

则向量值函数 f 在积分意义下等价于某连续函数 $\tilde{f}$. 而且，对每一严格包含于 Ω 的集合 V, $\tilde{f}$ 在以 $a\in V$ 为心，半径 $r<d/3$ 的任意球 $B(a,r)$ 上的振荡不超过 Cr^α, 这里 $d=\mathrm{dist}(V,\partial\Omega)$.

证明 设 $a\in V$,

$$w(a,r)=\int_{B(a,r)}|Df(x)|^n dx\le M^n.$$

由引理 2.3, 函数 $r\mapsto v(a,K_1,K_2,n,r)$ 非减. 分 4 种情形：

情形 1 $K_1>1$. 对所有 $r\in(0,d)$,

$$\begin{aligned}
& v(a,K_1,K_2,n,r)=\frac{w(a,r)}{r^{n/K_1}}+\frac{K_2\omega_n}{K_1-1}r^{n-n/K_1}\\
\le\ & v(a,K_1,K_2,n,d)\le M^n d^{-n/K_1}+\frac{K_2\omega_n}{K_1-1}d^{n-n/K_1}\\
:=\ & C_1(K_1,K_2,M,d,n).
\end{aligned}\tag{2.9}$$

因此

$$w(a,r)\le C_1 r^{n/K_1}-\frac{K_2\omega_n}{K_1-1}r^n\le C_1 r^{n/K_1}.$$

情形 2 $K_1=1$, $K_2>0$.

$$\begin{aligned}
& v(a,K_1,K_2,n,r)=\frac{w(a,r)}{r^n}+K_2 n\omega_n\ln r\\
\le\ & v(a,K_1,K_2,n,d)\le M^n d^{-n}+K_2 n\omega_n \ln d.
\end{aligned}\tag{2.10}$$

由此，对任意 $0<\alpha<1$,

$$\begin{aligned}
w(a,r) &\le [M^n d^{-n}+K_2 n\omega_n\ln d)]r^n-K_2 n\omega_n r^n\ln r\\
&= M^n d^{-n}r^n+K_2 n\omega_n r^n\ln(d/r)\\
&= \left[M^n d^{-n} r^{n(1-\alpha)}+K_2 n\omega_n r^{n(1-\alpha)}\ln(d/r)\right]r^{n\alpha}.
\end{aligned}\tag{2.11}$$

因为对任意 $0<\alpha<1$, $\lim_{r\to 0^+} r^{n(1-\alpha)}\ln(d/r)=0$, 则对 1, 存在 δ:$0<\delta<d$, 使得 $K_2 n\omega_n r^{n(1-\alpha)}\ln(d/r)\le 1$, 对每一 $r\in[\delta,d]$, 存在 M_1 使得 $K_2 n\omega_n r^{n(1-\alpha)}\ln(d/r)\le$

M_2, 所以， $K_2 n\omega_n r^{n(1-\alpha)}\ln(d/r) \le \min(1, M_2) := M_0$. 这样， $M^n d^{-n} r^{n(1-\alpha)} \le M^n d^{-n} d^{n(1-\alpha)} = M^n d^{-n\alpha}$, 所以对任意 $r \in (0, d)$,

$$w(a,r) \le (M^n d^{-n\alpha} + M_0) r^{n\alpha} := C_2 r^{n\alpha}.$$

情形 3 $K_1 = 1$, $K_2 = 0$. (2.10) 推出

$$w(a,r) \le M^n d^{-n} r^n := C_3 r^n.$$

情形 4 $K_1 < 1$. (2.9) 对所有 $r \in (0, d)$ 仍成立，这样

$$\begin{aligned} w(a,r) &\le C_1 r^{n/K_1} + \frac{K_2\omega_n}{1-K_1} r^n = \left[C_1 r^{n/K_1 - n} + \frac{K_2\omega_n}{1-K_1}\right] r^n \\ &\le \left[C_1 d^{n(1-K_1)/K_1} + \frac{K_2\omega_n}{1-K_1}\right] r^n := C_4 r^n \end{aligned}$$

综合所有情形，对 $0 < r \le \delta$,

$$\int_{B(a,r)} |Df(x)|^n dx \le C r^\alpha,$$

这里 α 有 (1.2) 定义， C 只依赖于 K_1, K_2, M, d, n. 结果由引理 2.3 得到.

定理 2.1 的证明 设 V 为 Ω 的紧子集， $\gamma = \min\{\delta/3, d/3\}$, 这里 δ 为引理 2.1 中的常数， $d = \mathrm{dist}(V, \partial\Omega)$. 考虑定义在 $(x,y) \in V \times V$ 上的函数 h:

$$h(x,y) = \begin{cases} |f(x) - f(y)|/|x-y|^\alpha, & x \ne y, \\ 0, & x = y \end{cases}$$

设 H 为 $(x,y) \in V \times V$, 且使得 $|x-y| \ge \gamma$ 的集合，设 $G = (V \times V) \setminus H$. 集合 H 是紧的，由连续性， h 在 H 有界. 由引理 2.4 知 h 在 G 上仍有界. 这样 h 在 $V \times V$ 有界，于是对任意 $x, y \in V$, $|f(x) - f(y)| \le L|x-y|^\alpha$.

2.2.2 (K_1, K_2)- 拟正则映射的 $L^p (p > n)$ 可积性

设 $f \in W^{1,n}_{loc}(\Omega, \mathrm{R}^n)$. 由 f 在 $f(\Omega)$ 上诱导出的拉回算子记为 f^*, 特别的，它在 $f(\Omega)$ 的体积形式 $\alpha = dy^1 \wedge dy^2 \wedge \cdots \wedge dy^n$ 上的拉回是

$$(f^*\alpha)(x) = df^1 \wedge df^2 \wedge \cdots \wedge df^n = J_f(x) dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n. \tag{2.12}$$

对于 l 微分形式 $\alpha = \alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \cdots \wedge \alpha^l$, 其中 $\alpha^i, 1 \le i \le l$ 为 1 微分形式，由 Hadamard 不等式，有

$$|\alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \cdots \wedge \alpha^l| \le |\alpha^1| \cdot |\alpha^2| \cdots |\alpha^l|. \tag{2.13}$$

引理 2.5 设映射 $f \in W^{1,n}_{loc}(\Omega, \mathrm{R}^n)$ 为 (K_1, K_2)- 拟正则映射. 下面的弱逆 Hölder 不等式成立

$$\fint_{B_{R/2}} |Df|^n dx \le \theta \fint_{B_R} |Df|^n dx + C \left(\fint_{B_R} |Df|^s dx \right)^{\frac{n}{s}} + \omega_n |K_2| \tag{2.14}$$

这里 $\frac{n}{2} \le s < n, 0 \le \theta < 1$, ω_n 是 R^n 中的单位球体体积；而 $0 < R < d_0 \le \mathrm{dist}(x, \partial\Omega), \forall x \in \Omega$.

证明 对于 R^n 上的体积形式 $\alpha = dy^1 \wedge dy^2 \wedge \cdots \wedge dy^n$, 可以得到它的拉回 (2.12) 是一个恰当形式. 事实上，若取

$$\omega = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} (y^k - c^k) dy^1 \wedge dy^2 \wedge \cdots \wedge \widehat{dy^k} \wedge \cdots \wedge dy^n$$

上式中含有抑扬符的项表示该项是被去掉，C 为常值向量 $C = (c^1, c^2, \cdots, c^n) \in \mathrm{R}^n$, 则

$$\begin{aligned} df^*\omega &= d\left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} (f^k - c^k) df^1 \wedge df^2 \wedge \cdots \wedge \widehat{df^k} \wedge \cdots \wedge df^n \right] \\ &= J_f(x) dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n = f^*\alpha. \end{aligned} \tag{2.15}$$

对于 Sobolev 类 $W^{1,n}_{loc}(B_R, \mathrm{R}^n)$ 映射，可以用 $f \in C^1(B_R, \mathrm{R}^n)$ 来逼近，这里 $B_R = B(x, R) \subset \Omega$. 取一个非负的实验函数 $\phi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$, 由分部微分不等式和 (2.15), 有

$$d(\phi f^*\omega) = d\phi \wedge f^*\omega + \phi(x) df^*\omega = d\phi \wedge f^*\omega + \phi(x) J_f(x) dx,$$

这里 $dx = dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n$. 根据 Stokes 公式得

$$\int_\Omega \phi(x) J_f(x) dx = -\int_\Omega d\phi \wedge f^*\omega,$$

于是

$$\left| \int_\Omega \phi(x) J_f(x) dx \right| \le \frac{1}{n} \int_\Omega \sum_{k=1}^{n} |d\phi| |f^k - c^k| |df^1 \wedge df^2 \wedge \cdots \wedge \widehat{df^k} \wedge \cdots \wedge df^n| dx \tag{2.16}$$

根据 Hadamard 不等式 (2.13) 和基本不等式： $|df^i| \le |Df|, i=1,2,\cdots,n$, 有

$$|df^1 \wedge df^2 \wedge \cdots \wedge \widehat{df^k} \wedge \cdots \wedge df^n| \le |Df|^{n-1}. \tag{2.17}$$

现将 (2.17) 代入 (2.16), 由于 $|f^k - c^k| \le |f - C|$, 于是

$$\left|\int_\Omega \phi(x) J_f(x) dx\right| \le \int_\Omega |\nabla\phi||f-C||Df(x)|^{n-1} dx,$$

又根据定义 2.1 中的式 (2.1), 得到

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \phi(x)|Df(x)|^n dx \\
&\le |K_1|\left|\int_\Omega \phi(x) J_f(x) dx\right| + |K_2|\int_\Omega \phi(x) dx \\
&\le |K_1|\int_\Omega |\nabla\phi||f-C||Df|^{n-1} dx + |K_2|\int_\Omega \phi(x) dx.
\end{aligned}$$

若以 $\phi(x) = \psi^n(x), \psi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ 代入上式，则由 Hölder 不等式得到

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \psi^n(x)|Df(x)|^n dx \\
&\le n|K_1|\left(\int_\Omega |\phi(x)Df(x)|^n dx\right)^{\frac{n-1}{n}}\left(\int_\Omega |\nabla\psi(x)||f-C|^n dx\right)^{\frac{1}{n}} \\
&\quad +|K_2|\int_\Omega \psi^n(x) dx.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

如果试验函数 $0 \le \psi \le 1$, 使得 $\psi(x) = 1, x \in B_{R/2}$ 和 $\psi(x) = 0, x \in \Omega \setminus B_R$ 并且 $|\nabla\psi(x)| \le \frac{C(n)}{R}, x \in \Omega$. 取 $C = \overline{f_R} = \frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} f(x)dx$, 于是式 (2.18) 成为

$$\begin{aligned}
&\int_{B_{R/2}} |Df(x)|^n dx \\
&\le \frac{Cn|K_1|}{R}\left(\int_{B_R} |Df(x)|^n dx\right)^{\frac{n-1}{n}}\left(\int_{B_R} |f-\overline{f_r}|^n dx\right)^{\frac{1}{n}} + |K_2||B_R| \\
&\le \frac{C}{R}\left(\int_{B_R} |Df(x)|^n dx\right)^{\frac{n-1}{n}} \cdot R^{1+n(\frac{1}{n}-\frac{1}{s})}\left(\int_{B_R} |Df(x)|^s dx\right)^{\frac{1}{s}} + \omega_n|K_2|R^n,
\end{aligned} \tag{2.19}$$

这里 $\frac{n}{2} \le s < n$, ω_n 表示 R^n 中的单位球体积.

利用 Young 不等式 (见第 1 章 (1.3) 式), (2.19) 成为

$$\begin{aligned}
&\int_{B_{R/2}} |Df(x)|^n dx \\
\le\ & C\delta\int_{B_R} |Df(x)|^n dx + C\delta^{-(n-1)} R^{n(1-n/s)}\left(\int_{B_R} |Df(x)|^s dx\right)^{\frac{n}{s}} + \omega_n|K_2|R^n.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

上式两边同除于 R^n, 得到

$$\fint_{B_{R/2}} |Df(x)|^n dx \le C\delta \fint_{B_R} |Df(x)|^n dx + C\delta^{-(n-1)} \left(\fint_{B_R} |Df(x)|^s dx\right)^{\frac{n}{s}} + \omega_n |K_2|.$$

取 $\delta < \frac{1}{C}$, 上式可写成

$$\fint_{B_{R/2}} |Df(x)|^n dx \le \theta \fint_{B_R} |Df(x)|^n dx + C \left(\fint_{B_R} |Df(x)|^s dx\right)^{\frac{n}{s}} + \omega_n |K_2|.$$

这里 $0 \le \theta < 1, \frac{n}{2} \le s < n$. 引理 2.5 得证.

定理 2.2 存在可积指数 $p = p(n, K_1, K_2) > n$, 使得对任意 (K_1, K_2)- 拟正则映射 $f \in W^{1,n}_{loc}(\Omega, \mathrm{R}^n)$, 都有 $f \in W^{1,p}_{loc}(\Omega, \mathrm{R}^n)$.

证明 对于 (K_1, K_2)- 拟正则映射，由引理 2.5 得知偏微商 $Df(x)$ 满足弱逆 Hölder 不等式 (2.14). 由引理 1.1, 存在可积指数 $p = p(n, K_1, K_2) > n$, 使得 $Df \in L^p_{loc}(\Omega, \mathrm{R}^{n\times n})$, f 本身的 L^p 可积性有 Sobolev 嵌入定理得到. 于是 $f \in W^{1,p}_{loc}(\Omega, \mathrm{R}^n)$. 得证.

推论 2.3 如果 $f \in W^{1,n}_{loc}(\Omega, \mathrm{R}^n)$ 是 Ω 上的一个 (K_1, K_2)- 拟正则映射，那么有 $f \in C^{\alpha}_{loc}(\Omega, \mathrm{R}^n), \alpha = 1 - n/p$, 这里 p 的同定理 2.2, 并且对于 Ω 的任一个紧子集 G, 成立

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le C|x_1 - x_2|^{\alpha}, x_1, x_2 \in G.$$

这是定理 2.2 和 Sobolev 嵌入定理的直接结果.

作为一个应用的例子，在 Sobolev 空间 $W^{1,n}_{loc}(\Omega, \mathrm{R}^n)$ 中考虑下列形式的一类非线性椭圆型方程组. 设 $J_f(x) > 0$, a.e. Ω.

$$D^t f(x) H(x, f) Df(x) = J_f^{\frac{n}{2}}(x) G(x, f) + P(x, f), \tag{2.21}$$

这里 $H(x, f)$, $G(x, f)$ 和 $P(x, f)$ 是对称，正定且可测的实 n 阶方阵，并满足对于任意 $\xi \in \mathrm{R}^n \setminus 0$, 有

a) $\langle H(x, f)\xi, \xi\rangle \ge \lambda(x, f)|\xi|^2$,

b) $\langle G(x, f)\xi, \xi\rangle \le \Lambda_1(x, f)|\xi|^2$,

c) $\langle P(x, f)\xi, \xi\rangle \le \Lambda_2(x, f)|\xi|^2$,

并且

$$\frac{\Lambda_1(x, f)}{\lambda(x, f)} \le L_1 < \infty, \frac{\Lambda_2(x, f)}{\lambda(x, f)} \le L_2 < \infty.$$

当维数 $n=2$ 时，我们得到如下形式的拟线性复方程：对于 $z\in C$, 有

$$f_{\overline{z}}=\mu_1(z,f)f_z(z)+\mu_2(x,f)\overline{f_z(z)}+\mu_3(z,f),$$

其中 $\mu_1(x,f)$ 和 $\mu_2(x,f)$ 满足

$$|\mu_1(x,f)|+|\mu_2(x,f)|\le\mu_0<1.$$

当 $n=2$ 时，方程组 (2.21) 是一个具有很强非线性项的超定实方程组，直接研究困难很大. 这里将方程组 (2.21) 转化为 (K_1,K_2)- 拟正则映射来处理，应用推论 2.3, 可以得到方程组 (2.21) 在 $W^{1,n}_{loc}(\Omega,\mathrm{R}^n)$ 中弱解的 Hölder 连续性估计.

对于任意 $\xi\in\mathrm{R}^n\setminus\{0\}$, 从方程组 (2.21) 得到

$$\xi^tD^Tf(x)H(x,f)Df(x)\xi=J^{\frac{n}{2}}(x,f)\xi^tG(x,f)\xi+\xi^tP(x,f)\xi,$$

即

$$\langle H(x,f)Df(x)\xi,Df(x)\xi\rangle=J^{\frac{n}{2}}(x,f)\langle G(x,f)\xi,\xi\rangle+\langle P(x,f)\xi,\xi\rangle. \tag{2.22}$$

根据假设 $a),b),c)$, 从式 (2.22) 得到

$$\lambda(x,f)|Df(x)\xi|^2\le J^{\frac{n}{2}}(x,f)\Lambda_1(x,f)|\xi|^2+\Lambda_2(x,f)|\xi|^2,$$

即

$$|Df(x)\xi|^2\le\left(\frac{\Lambda_1}{\lambda}J^{\frac{n}{2}}(x,f)+\frac{\Lambda_2}{\lambda}\right)|\xi|^2\le(L_1J^{\frac{n}{2}}(x,f)+L_2)|\xi|^2.$$

所以

$$|Df|^2\le L_1J^{\frac{n}{2}}(x,f)+L_2.$$

从初等不等式

$$(a+b)^\alpha\le2^{\alpha-1}(a^\alpha+b^\alpha),a,b\in R^+,\alpha>1$$

得到

$$|Df|^n\le(L_1J^{\frac{n}{2}}(x,f)+L_2)^{\frac{n}{2}}\le2^{\frac{n-2}{2}}L_1^{\frac{n}{2}}J^{\frac{n}{2}}(x,f)+2^{\frac{n-2}{2}}L_2^{\frac{n}{2}}.$$

记

$$K_1=2^{\frac{n-2}{2}}L_1^{\frac{n}{2}},K_2=2^{\frac{n-2}{2}}L_2^{\frac{n}{2}}$$

根据推论 2.3, 得到

定理 2.3 设椭圆型方程组 (2.21) 满足条件 a), b), c). 则它它在 Sobolev 类 $W_{loc}^{1,n}(\Omega, \mathrm{R}^n)$ 中的弱解 $f \in C_{loc}^{\alpha}(\Omega, \mathrm{R}^n)$, 这里 $0 < \alpha = \alpha(\lambda, \Lambda_1, \Lambda_2, n) < 1$.

§2.3 弱 K- 拟正则映射

2.3.1 弱 K- 拟正则映射的定义

定义 3.1 映射 $f \in W_{loc}^{1,p}(\Omega, \mathrm{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$ 称为弱 K- 拟正则映射， $K \geq 1$, 如果

$$|Df(x)|^n \leq K J_f(x), \quad \text{a.e. } x \in \Omega. \tag{3.1}$$

上面定义中当 Sobolev 可积指数 $p \geq n$ 时即为 K 拟正则映射. 上面定义中的的 " 弱 " 是指 Sobolev 可积指数 $p < n$ 的情形，此时 $J_f(x)$ 不一定局部可积.

2.3.2 弱 K- 拟正则映射的正则性

定理 3.1 存在两个可积指数 $q = q(n, K) < n < p = p(n, K)$, 使得任意弱 K- 拟正则映射 $f \in W_{loc}^{1,q}(\Omega, \mathrm{R}^n)$, 都有 $f \in W_{loc}^{1,p}(\Omega, \mathrm{R}^n)$, 即 f 为 K- 拟正则映射.

研究可积指数小于空间维数的映射时，一个常用的方法是使用 Hodge 分解. 下面的引理是 Iwaniec, Sbordone [1] 利用 Hodge 分解的方法得到的，其中对 $J_f(x)$ 的符号没有限制.

引理 3.1 设 $f \in W_{loc}^{1,p-\varepsilon}(\mathrm{R}^n, \mathrm{R}^n)$, $-\infty < \varepsilon < 1$, 则

$$\begin{aligned} \int_{\mathrm{R}^n} |df^1|^{-\varepsilon} J_f(x) dx &\leq C(n)|\varepsilon| \|df^1\|_{n-\varepsilon}^{1-\varepsilon} \|df^2\|_{n-\varepsilon} \cdots \|df^n\|_{n-\varepsilon} \\ &\leq C(n)|\varepsilon| \int_{\mathrm{R}^n} |Df(x)|^{n-\varepsilon} dx. \end{aligned}$$

引理 3.1 的一个关键事实是不等式右端含有因子 $|\varepsilon|$, 这将对下面的推导起到重要作用.

引理 3.2 存在 $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(n, K) \in (0, 1)$, 使得对任意 $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ 及任意弱 K- 拟正则映射 $f \in W_{loc}^{1,n-\varepsilon}(\Omega, \mathrm{R}^n)$, 下面的弱逆 Hölder 不等式成立

$$⨍_B |Df|^{n-\varepsilon} dx \leq C(n, K) \left(⨍_{3B} |Df|^s dx \right)^{(n-\varepsilon)/s} + \theta ⨍_{3B} |Df|^{n-\varepsilon} dx, \tag{3.2}$$

其中 $B \subset 3B \subset\subset \Omega$ 为任意同心球， $0 < \theta < 1$, $\frac{n-\varepsilon}{2} < s < n - \varepsilon$.

证明 设 $0 \le \varepsilon < 1$, $B = B(a,r) \subset 2B = B(a,2r) \subset 3B = B(a,3r) \subset\subset \Omega$ 为同心球. 设 $\phi \in C_0^\infty(2B)$, $\psi \in C_0^\infty(3B)$ (ϕ, ψ 分别在 $2B$, $3B$ 之外为零) 为两个试验函数，满足

(i) $0 \le \phi \le 1$, 当$x \in B$ 时$\phi = 1, |\nabla\phi| \le \frac{2}{R}$;

(ii) $0 \le \psi \le 1$, 当$x \in 2B$ 时$\psi = 1, |\nabla\psi| \le \frac{2}{R}$

考虑由下式定义的辅助函数 $F \in W_0^{1,n-\varepsilon}(\Omega, \mathrm{R}^n)$,

$$F = (\psi(f^1 - C^1), \psi(f^2 - C^2), \cdots, \psi(f^{n-1} - C^{n-1}), \phi(f^n - C^n)),$$

这里 $C^1, \cdots, C^n$ 为任意常数. 在 $2B$ 上有

$$\phi|df^1|^{-\varepsilon}df^1\wedge\cdots\wedge df^n = |dF^1|^{-\varepsilon}dF^1\wedge\cdots\wedge dF^n - (f^n - C^n)|df^1|^{-\varepsilon}df^1\wedge\cdots\wedge df^{n-1}\wedge d\phi.$$

对辅助函数 F 应用引理 3.1, 注意到 $|f^i - C^i| \le |f - C|, C = (C^1, \cdots, C^n)$, 利用 Hadamard 不等式 $|df^i| \le |Df|, i = 1, 2, \cdots, n$ 以及 $J_f(x) \ge 0$ 的假设得到

$$\int_B |df^1|^{-\varepsilon} J_f(x)dx \le \int_{3B} |\nabla\phi||f - C||Df|^{n-1-\varepsilon}dx + C(n)\varepsilon \int_{3B} |DF|^{n-\varepsilon}dx. \quad (3.3)$$

由 F 的定义及条件 (i)(ii), 易得估计式

$$|DF| \le C(n)r^{-1}|f - C| + C(n)|Df|,$$

因此

$$\int_{3B} |DF|^{n-\varepsilon}dx \le C(n)r^{\varepsilon-n} \int_{3B} |f - C|^{n-\varepsilon}dx + C(n) \int_{3B} |Df|^{n-\varepsilon}dx.$$

取

$$C = \overline{f}_{3B} = \frac{1}{|3B|}\int_{3B} |f|dx,$$

对上式右端第一项应用第一章不等式 (3.7)(其中 $p = q = n - \varepsilon$), 得到

$$\int_{3B} |f - \overline{f}_{3B}|^{n-\varepsilon}dx \le C(n)r^{n-\varepsilon} \int_{3B} |Df|^{n-\varepsilon}dx,$$

于是

$$\int_{3B} |DF|^{n-\varepsilon}dx \le C(n) \int_{3B} |Df|^{n-\varepsilon}dx. \quad (3.4)$$

由 (3.1) 及 Hadamard 不等式，联系 (3.3), (3.4) 便得

$$\begin{aligned}\int_B |Df|^{n-\varepsilon}dx &\le \int_B |df^1|^{-\varepsilon}|Df|^n dx \le K_1\int_B |df^1|^{-\varepsilon}J_f(x)dx\\ &\le K_1\int_{3B}|\nabla\phi||f-\overline{f_{3B}}||Df|^{n-1-\varepsilon}dx + K_1C(n)\varepsilon\int_{3B}|Df|^{n-\varepsilon}dx.\end{aligned}$$

取 $\varepsilon_0=\frac{1}{3^nK_1C(n)}$, $C(n)$ 如上式，则当 $0\le\varepsilon<\varepsilon_0$ 时， $K_1C(n)\varepsilon=\theta_1<3^{-n}$. 由 Hölder 不等式得到

$$\begin{aligned}&\int_B |Df|^{n-\varepsilon}dx\\ &\le \frac{K_1C(n)}{r}\left(\int_{3B}|f-\overline{f}_{3B}|^{n-\varepsilon}dx\right)^{\frac{1}{n-\varepsilon}}\left(\int_{3B}|Df|^{n-\varepsilon}dx\right)^{\frac{n-1-\varepsilon}{n-\varepsilon}}+\theta_1\int_{3B}|Df|^{n-\varepsilon}dx\\ &\le K_1C(n)\left[r^{\varepsilon-n}\tau^{-(n-1-\varepsilon)}\int_{3B}|f-\overline{f}_{3B}|^{n-\varepsilon}dx+\tau\int_{3B}|Df|^{n-\varepsilon}dx\right]+\theta_1\int_{3B}|Df|^{n-\varepsilon}dx.\end{aligned}$$

取 τ 充分小，使 $K_1C(n)\tau<\frac{(3^{-n}-\theta_1)}{2}$, 便有 $0<\theta_2=K_1C(n)\tau+\theta_1<3^{-n}$. 应用引理 3.1 得到

$$\begin{aligned}&\int_B |Df|^{n-\varepsilon}dx\le C(n,K_1)r^{\varepsilon-n}\int_{3B}|f-\overline{f}_{3B}|^{n-\varepsilon}dx+\theta_2\int_{3B}|Df|^{n-\varepsilon}dx\\ &\le C(n,K_1)r^{\frac{n(s-n+\varepsilon)}{s}}\left(\int_{3B}|Df|^s dx\right)^{\frac{n-\varepsilon}{s}}+\theta_2\int_{3B}|Df|^{n-\varepsilon}dx\\ &\le C(n,K_1)r^{n-\frac{n(n-\varepsilon)}{s}}\left(\int_{3B}|Df|^s dx\right)^{\frac{n-\varepsilon}{s}}+\theta_2\int_{3B}|Df|^{n-\varepsilon}dx.\end{aligned}$$

这里 $\frac{n-\varepsilon}{2}<s<n-\varepsilon$. 两端除以 $|B|$, 得到 (3.2) 式. 引理 3.2 证毕.

定理 3.1 的证明 令 $q=n-\frac{\varepsilon_0}{2}$, $f\in W^{1,q}_{loc}(\Omega,\mathrm{R}^n)$ 为弱 K 拟正则映射. 记 $I=\{r\in[q,n]:f\in W^{1,r}_{loc}(\Omega,\mathrm{R}^n)\}$. 显然 $q\in I$. 由上面逆 Hölder 不等式的一致估计可知集合 I 为闭的，又由引理 1.1 知集合 I 为开的. 这样 $I=[q,n]$. 又对 $f\in W^{1,n}_{loc}(\Omega,\mathrm{R}^n)$ 成立弱逆 Hölder 不等式，故存在 $p>n$ 使得 $f\in W^{1,p}_{loc}(\Omega,\mathrm{R}^n)$. 因此对任意 $f\in W^{1,q}_{loc}(\Omega,\mathrm{R}^n)$, 都有 $f\in W^{1,p}_{loc}(\Omega,\mathrm{R}^n)$, 即 f 为 K- 拟正则映射.

2.3.3 弱 K- 拟正则映射的 Caccioppoli 型不等式

定理 3.2 存在两个可积指数 $q(n,K)<n<p(n,K)$, 使得对每个 $q,p\in(q(n,K),p(n,K))$, 每个满足 (3.1) 映射 $f\in W^{1,q}_{loc}(\Omega,\mathrm{R}^n)$ 属于 $W^{1,p}_{loc}(\Omega,\mathrm{R}^n)$. 而且，对任意 $\phi\in C_0^\infty(\Omega)$ 成立 Caccioppoli 型不等式

$$\|\phi Df\|_q\le C_q(n,K)\|f\otimes\nabla\phi\|_q, \tag{3.4}$$

其中 $\otimes$ 为张量积.

研究可积指数小于空间维数的映射的另一个方法是利用 McShane 扩张，这个方法本质上是 Lewis 提出的，见 Lewis [1].

下面的关于 Sobolev 函数已知的逐点估计是定理 3.2 证明的基础，见 Hedberg [1].

引理 3.3 设 $u \in W^{1,p}(\mathrm{R}^n)$, $1 < q < \infty$, 且 x 和 y 是 u 的 Lebesgue 点且满足 $x \in B_0(x_0, r)$. 那么

$$|u(x) - u_{B_0}| \le crM(|\nabla u|\chi_{2B_0})(x_0), \tag{3.5}$$

$$|u(x) - u(y)| \le c|x-y|(M(|\nabla u|)(x) + M(|\nabla u|)(y)), \tag{3.6}$$

其中 $c = c(n) > 0$, χ_E 是集合 E 的特征函数, v_{B_0} 是 v 在 $B_0 = B(x_0, r)$ 上的平均，而 Mh 是 h 的 Hardy-Littlewood 最大值函数.

定理 3.2 的证明 需要证明存在 $q(n,K) < n$ 使得对于任意 $q(n,K) < q \le n$, 若 $f \in W^{1,q}_{loc}(\Omega, \mathrm{R}^n)$ 满足 (3.1), 则对于所有的试验函数 $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, 有

$$\int_\Omega |\phi Df|^q dx \le C(n,K) \int_\Omega |f \otimes \nabla\phi|^q dx. \tag{3.7}$$

假设 $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, $B_0 = B_r(x_0) \subset\subset \Omega$, $\phi \ge 0$.

首先适当地逼近 f 的第一个分量 f_1. 设 $u = f_1\phi$ 且在 $\mathrm{R}^n \setminus B_0$ 延拓为 0. 那么 $u \in W^{1,q}(\mathrm{R}^n)$. 对于 $\lambda > 0$, 令

$$F_\lambda = \{x \in B(x_0, r) : M(g)(x) \le \lambda, 且x是u的\ \text{Lebesgue}\ 点\},$$

这里，在 B_0 上 $g = |\phi Df| + |f \otimes \nabla\phi|$, 在 $\mathrm{R}^n \setminus B_0$ 上 $g = 0$. 很容易说明在集合 $F_\lambda \cup (\mathrm{R}^n \setminus B_0)$ 上, 对于 $c = c(n) \ge 1$, u 是 $c\lambda$-Lipschitz 连续的. 事实上, 设 $x, y \in F_\lambda$. 由于 $|\nabla u| \le c(n)g$, 由 (3.6) 有

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &\le c|x-y|(M(|\nabla u|)(x) + M(|\nabla u|)(y)) \\ &\le c|x-y|(M(g)(x) + M(g)(y)) \\ &\le c\lambda|x-y|. \end{aligned} \tag{3.8}$$

若 $x \in F_\lambda$, $y \in \mathrm{R}^n \setminus B_0$, 设 $\rho = 2\mathrm{dist}(x, \mathrm{R}^n \setminus B(x_0, r))$. 由于 $|\{z \in B(x,\rho) : u(z) = 0\}| \ge |B(x,\rho) \cap (\mathrm{R}^n \setminus B_0)| \ge c(n)|B(x,\rho)|$, 又由于 Poincaré 不等式，得到

$$|u_{B(x,\rho)}| \le c(n)\rho|\nabla u|_{B(x,\rho)} \le c\rho Mg(x) \le c\lambda|x-y|.$$

因此由 (3.5),

$$\begin{aligned}|u(x)-u(y)| &= |u(x)| \le |u(x)-u_{B(x,\rho)}| + |u_{B(x,\rho)}| \\ &\le c\rho M(|\nabla u|)(x) + c\lambda|x-y| \\ &\le c\rho Mg(x) + c\lambda|x-y| \le c\lambda|x-y|.\end{aligned} \tag{3.9}$$

如果 $x, r \in \mathrm{R}^n \backslash B_0$, 结论显然. 由于所有的其它的情况可以对称过去, 故 $u|_{F_\lambda \cup (\mathrm{R}^n \backslash B_0)}$ 关于常数 $c\lambda$ 是 Lipschitz 连续的. 应用经典的 McShane 扩张定理, 我们把 $u|_{F_\lambda \cup (\mathrm{R}^n \backslash B_0)}$ 延拓为 R^n 上的 Lipschitz 连续函数 u_λ, 且具有相同的常数. 我们考虑映射 $f_\lambda = (u_\lambda, \phi f_2, \phi f_3, \cdots, \phi f_n)$. 因为 $f \in W^{1,q}_{loc}(\Omega, \mathrm{R}^n)$, 用一个简单的逼近理论则有，若 $q \ge n-1$,

$$\int_\Omega J(x, f_\lambda) dx = 0,$$

因此

$$\int_{F_\lambda} J(x, \phi f) dx \le -\int_{\Omega \backslash F_\lambda} J(x, f_\lambda) dx. \tag{3.10}$$

现在有 $|f_i \nabla \phi| \le C(n)|f \otimes \nabla \phi|$, $|\nabla(\phi f_i)| \le c(n)g$. 这些估计与 (3.10) 联合且把 Jacob 表示为微分形式的楔乘，我们得到

$$\int_{F_\lambda} \phi^n J_f(x) \le c(n) \left(\lambda \int_{\Omega \backslash F_\lambda} g^{n-1} + \int_{F_\lambda} |f \otimes \nabla \phi| g^{n-1} \right).$$

这个不等式对于所有的 $\lambda > 0$ 都成立. 这样，我们在不等式两端同时乘以 $\lambda^{-1-\varepsilon}$, 这里对于某待定常数 $\varepsilon > 0$. 关于 λ 在 $(0, \infty)$ 积分，最后改变积分的阶，得到

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \phi^n J_f(x) \int_{Mg(x)}^\infty \lambda^{-1-\varepsilon} d\lambda dx \\ \le\ & c(n) \left(\int_\Omega g^{n-1} \int_0^{Mg(x)} \lambda^{-\varepsilon} d\lambda dx + \int_\Omega |f \otimes \nabla \phi| g^{n-1} \int_{Mg(x)}^\infty \lambda^{-1-\varepsilon} d\lambda dx \right).\end{aligned} \tag{3.11}$$

我们利用一直未用的 f 的拟正则性，就有

$$\begin{aligned}\int_\Omega \phi^n |Df|^n M(g)^{-\varepsilon} dx &\le c(n)K \int_\Omega |f \otimes \nabla \phi| g^{n-1} M(g)^{-\varepsilon} dx \\ &\quad + \frac{\varepsilon c(n) K}{1-\varepsilon} \int_\Omega g^{n-1} M(g)^{1-\varepsilon} dx.\end{aligned} \tag{3.12}$$

从现在起，我们只用 Hölder 不等式和 Hardy-Littlewood 最大值定理来完成证明过程，要选取适当的小的 ε. 另一方面，有

$$\begin{aligned}\int_\Omega (|Df||\phi|)^{n-\varepsilon}dx &\leq \left(\int_\Omega |Df|^n|\phi|^n M(g)^{-\varepsilon}dx\right)^{\frac{n-\varepsilon}{n}}\left(\int_\Omega M(g)^{n-\varepsilon}dx\right)^{\frac{\varepsilon}{n}}\\ &\leq c(n)\left(\int_\Omega |Df|^n|\phi|^n M(g)^{-\varepsilon}dx\right)^{\frac{n-\varepsilon}{n}}\left(\int_\Omega g^{n-\varepsilon}dx\right)^{\frac{\varepsilon}{n}}.\end{aligned} \tag{3.13}$$

上面的第二个不等式，我们应用了 Hardy-Littlewood 最大值定理

$$\int_\Omega M(g)^{n-\varepsilon}dx \leq c(c)\int_\Omega g^{n-\varepsilon}dx, \tag{3.14}$$

这里常数 $c(n)$ 可以适当的选择使得若 $0\leq\varepsilon\leq 1$ 则它与 ε 无关. 现在注意到可以假设

$$\int_\Omega g^{n-\varepsilon}dx \leq 2^{n-\varepsilon}\int_\Omega (|Df||\phi|)^{n-\varepsilon}dx. \tag{3.15}$$

否则， Caccioppoli 不等式 (3.4) 关于常数 $c(n,K)=1$ 成立. 因此由 (3.13), 则

$$\int_\Omega g^{n-\varepsilon}dx \leq c(n)\int_\Omega |Df|^n|\phi|^n M(g)^{-\varepsilon}dx. \tag{3.16}$$

另一方面，利用 Hölder 不等式和 (3.14), 我们估计 (3.12) 的右端. 由 (3.16) 和 (3.12),

$$\begin{aligned}\int_\Omega g^{n-\varepsilon}dx &\leq c(n)\int_\Omega |Df|^n|\phi|^n M(g)^{-\varepsilon}dx\\ &\leq c(n)K\left(\int_\Omega |f\otimes\nabla\phi|^{n-\varepsilon}dx\right)^{\frac{1}{n-\varepsilon}}\left(\int_\Omega g^{n-\varepsilon}dx\right)^{\frac{n-\varepsilon-1}{n-\varepsilon}}\\ &\quad +c(n)K\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\int_\Omega g^{n-\varepsilon}dx.\end{aligned} \tag{3.17}$$

选择足够小的 $0<\varepsilon<1$ 使得 $c(n)K\varepsilon/(1-\varepsilon)$, 定理 3.2 得证.

§2.4 弱 (K_1,K_2)- 拟正则映射

3.4.1 弱 (K_1,K_2)- 拟正则映射的定义

定义 4.1 称 $f=(f^1,f^2,\cdots,f^n)\in W^{1,q}_{loc}$, $1\leq q<\infty$ 为弱 (K_1,K_2)- 拟正则映射， $0<K_1<\infty$, $0\leq K_2<\infty$, 若

$$|Df(x)|^n \leq K_1 n^{n/2}J_f(x)+K_2 \tag{4.1}$$

若 $q \le n$, 则称 f 为 (K_1, K_2)- 拟正则映射. 又若 f 是同胚的, 则称其为 (K_1, K_2)-拟共形映射.

这里的 " 弱 " 性是指 f 的 Sobolev 可积指数 q 小于空间的维数 n 的情形，此时 $J_f(x)$ 不一定是局部可积的.

2.4.2 弱 (K_1, K_2)- 拟正则映射的正则性

定理 4.1 对任意满足 $0 < K_1 n^{(n+4)/2} 2^{n+1} \times 100^{n^2} [2^{3n/2}(2^{5n}+1)](n-q_1) < 1$ 的 q_1, 都存在可积指数 $p_1 = p_1(n, q_1, K_1, K_2) > n$, 使得对任意弱 (K_1, K_2)- 拟正则映射 $f \in W^{1,q_1}_{loc}(\Omega, \mathrm{R}^n)$, 都有 $f \in W^{1,p_1}_{loc}(\Omega, \mathrm{R}^n)$, 即 f 为通常意义下的 (K_1, K_2)- 拟正则映射.

注 4.1 上面的定理表明，为了得到 (K_1, K_2)- 拟正则映射的正则性，不必要求 $f \in W^{1,n}_{loc}(\Omega, \mathrm{R}^n)$, 一个较弱的空间 $f \in W^{1,q_1}_{loc}(\Omega, \mathrm{R}^n)(q_1 < n)$ 就足够了.

作为上面结果的一个直接推论，由 Sobolev 嵌入定理得到弱 (K_1, K_2)- 拟正则映射的 Hölder 连续性结果. 我们省略其证明.

推论 4.1 设 q_1, p_1 如定理所述. 对于任意的弱 (K_1, K_2)- 拟正则映射 $f \in W^{1,q_1}_{loc}(\Omega, \mathrm{R}^n)$, 都有 $f \in C^{0,\alpha}_{loc}(\Omega, \mathrm{R}^n)$, 其中 $\alpha = 1 - \frac{n}{p_1}$; 并且对 Ω 中的任意紧子集 $G \subset\subset$, 有

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le C|x_1 - x_2|^\alpha, \ \forall x_1, x_2 \in \ G.$$

首先给出几个引理, 它们在定理 4.1 的证明将要用到. 下面的引理来自 Borjarski, Iwaniec [1].

引理 4.1 若 $u \in W^{1,p}(B_r)(1 \le p < \infty)$, 则对任意 $0 < \sigma \le 1$, 有

$$\|u - u_{B_{\sigma r}}\|_{L^p(B_r)} \le \left(\frac{2}{\sigma}\right)^{n/p} \mathrm{diam}(B_r) \|\nabla u\|_{L^p(B_r)},$$

其中

$$B_{\sigma r} = \fint_{B_{\sigma r}} u(x)dx = \frac{1}{|B_{\sigma r}|} \int_{B_{\sigma r}} u(x)dx$$

为 $u(x)$ 在 $B_{\sigma r}$ 上的积分平均.

引理 4.2 设 $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$, 则对任意球 $B_r \subset\subset \Omega$, 有

$$\|u - u_{B_{\sigma r}}\|_{L^p(B_r)} \le 2^{1+n/p} r \|\nabla u\|_{L^p(B_r)}. \tag{4.2}$$

证明 由引理 4.1 中 $\sigma=1$ 即得.

下面的引理来自 Borjarski, Iwaniec [1].

引理 4.3 设 $1\le p<n$. 若 $u\in W^{1,p}_{loc}(\Omega,\mathrm{R}^n)$, 则对任意 $B_r\subset\subset\Omega$, 有

$$\|u-u_{B_{\sigma r}}\|_{L^{\frac{np}{n-p}}(B_r)}\le C(n)\frac{p}{n-p}\left(\frac{p}{p-1}\right)^{(n-p)/np}\|Du\|_{L^p(B_r)}. \tag{4.3}$$

本节下文中的 $C(n)$ 均指这个常数.

引理 4.4 设 $\omega\in L^{\tau(1-\varepsilon)}(\Omega,\wedge^l),\tau\ge 7/4,\varepsilon<1/2,\wedge^l$ 为 l 次微分形式. 考虑 Hodge 分解

$$|\omega|^{-\varepsilon}\omega=d\alpha+d^*\beta,\alpha\in L^\tau_1(\Omega),\beta\in L^\tau_1(\Omega,\wedge r^{l+1}), \tag{4.4}$$

若 ω 为闭的 (即 $d\omega=0$), 则

$$\|d^*\beta\|_\tau\le 100^{n^2}\tau|\varepsilon|\|\omega\|^{1-\varepsilon}_{\tau(1-\varepsilon)}, \tag{4.5}$$

若 ω 为余闭的 (即 $d^*\omega=0$), 则

$$\|d\alpha\|_\tau\le 100^{n^2}\tau|\varepsilon|\|\omega\|^{1-\varepsilon}_{\tau(1-\varepsilon)}. \tag{4.6}$$

引理 4.5 若 $F=(F^1,F^2,\cdots,F^n)\in W^{1,n-\varepsilon}_0(\Omega,\mathrm{R}^n)(0<\varepsilon<1/2)$, 则对任意 $i=1,2,\cdots,n$, 有

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega|dF^i|^{-\varepsilon}J_F(x)dx\right|&\le 2n\times 100^{n^2}|\varepsilon|\|dF^1\|_{n-\varepsilon\varepsilon}\cdots\|dF^i\|_{n-\varepsilon\varepsilon}\cdots\|dF^n\|_{n-\varepsilon\varepsilon}\\&\le 2n\times 100^{n^2}|\varepsilon|\int_\Omega|DF(x)|^{n-\varepsilon}dx.\end{aligned} \tag{4.7}$$

注 4.4 上述引理对 $J_F(x)$ 的符号没有限制，其中一个关键事实是不等式右端含有因子 $|\varepsilon|$, 因为由 Hadamard 不等式 $|dF^i|\le|DF|(i=1,2,\cdots,n)$, 有逐点估计 $|dF^i|^{-\varepsilon}J_F(x)\le|dF^1|\cdots|dF^i|^{1-\varepsilon}\cdots|dF^n|\le|DF(x)|^{n-\varepsilon}$. 这样， (4.7) 式右端的因子 $2n\times 100^{n^2}|\varepsilon|$ 替换为 1 总成立.

引理 4.5 的证明 由 Poincaré 引理知 $dF^i(i=1,2,\cdots,n)$ 为闭的. 由引理 4.4, 对 Hodge 分解

$$|dF^i|^{-\varepsilon}dF^i=d\alpha+d^*\beta, \tag{4.8}$$

其中 α,β 有紧支集，有估计式 (其中 $\tau=\frac{n-\varepsilon}{1-\varepsilon}$)

$$\|d^*\beta\|_{\frac{n-\varepsilon}{1-\varepsilon}} \leq 100^{n^2}\frac{n-\varepsilon}{1-\varepsilon}|\varepsilon|\|dF^i\|_{n-\varepsilon}^{1-\varepsilon} < 2n\times 100^{n^2}|\varepsilon|\|dF^i\|_{n-\varepsilon}^{1-\varepsilon}, \tag{4.9}$$

显然 $dF^1\wedge\cdots\wedge d\hat{F}^i\wedge\cdots\wedge dF^n\in L^{\frac{n-\varepsilon}{1-\varepsilon}}(\Omega,\bigwedge^l)$(其中抑扬符项表示该项被去掉). 因为 $\frac{n-\varepsilon}{1-\varepsilon}$ 与 $\frac{n-\varepsilon}{n-1}$ 为 Hölder 共轭指数，由 Stokes 定理得到

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega d\alpha\wedge dF^1\wedge\cdots\wedge d\hat{F}^i\wedge\cdots\wedge dF^n\\
=&\int_\Omega d(\alpha dF^1\wedge\cdots\wedge d\hat{F}^i\wedge\cdots\wedge dF^n)\\
=&\int_{\partial\Omega}\alpha dF^1\wedge\cdots\wedge d\hat{F}^i\wedge\cdots\wedge dF^n=0.
\end{aligned}\tag{4.10}$$

由 (4.9) 和 (4.10), Hölder 不等式及 Hadamard 不等式得到

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega |dF^i|^{-\varepsilon}J(x,F)dx\right| &= \left|\int_\Omega dF^1\wedge\cdots|dF^i|^{-\varepsilon}dF^i\wedge\cdots\wedge dF^n\right|\\
&= |(-1)^{i-1}(\int_\Omega d\alpha\wedge dF^1\wedge\cdots\wedge d\hat{F}^i\wedge\cdots\wedge dF^n\\
&\quad +\int_\Omega d^*\beta\wedge dF^1\wedge\cdots\wedge d\hat{F}^i\wedge\cdots\wedge dF^n)|\\
&= |(-1)^{i-1}\int_\Omega d^*\beta\wedge dF^1\wedge\cdots\wedge d\hat{F}^i\wedge\cdots\wedge dF^n|\\
&\leq \|d^*\beta\|_{\frac{n-\varepsilon}{1-\varepsilon}}\|dF^1\wedge\cdots\wedge d\hat{F}^i\wedge\cdots\wedge dF^n\|_{\frac{n-\varepsilon}{1-\varepsilon}}\\
&\leq 2n\times 100^{n^2}|\varepsilon|\|dF^1\|_{n-\varepsilon}\cdots\|dF^i\|_{n-\varepsilon}^{1-\varepsilon}\cdots\|dF^n\|_{n-\varepsilon}.
\end{aligned}$$

(4.7) 式最后的不等式由 Hadamard 不等式而得. 证毕.

定理 4.1 的证明 设 $f\in W_{loc}^{1,n-\varepsilon}(\Omega,\mathrm{R}^n)$ 为弱 (K_1,K_2)- 拟正则映射. 取 $\Omega_1=\{x\in\Omega:|Df(x)|\geq 1\}$,$\Omega_2=\{x\in\Omega:|Df(x)|<1\}$,$\Omega_1\cap\Omega_2=\emptyset$. 设 $x_0\in\Omega$ 任意, $B=B(x_0,r)\subset B(x_0,\frac{3}{2}r)=\frac{3}{2}B\subset B(x_0,2r)=2B\subset\subset\Omega$ 为 Ω 中的同心球. 因为

$$\begin{aligned}
\int_B |Df(x)|^{n-\varepsilon}dx &= \int_{B\cap\Omega_1}|Df(x)|^{n-\varepsilon}dx+\int_{B\cap\Omega_2}|Df(x)|^{n-\varepsilon}dx\\
&\leq \int_{B\cap\Omega_1}|Df(x)|^{n-\varepsilon}dx+|B|,
\end{aligned}\tag{4.13}$$

由矩阵范数的定义 $|Df(x)|^2=\sum_{i=1}^n|df^i(x)|^2$,$\forall x\in B\cap\Omega_1$, 必存在 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$, 使得 $\sqrt{n}|df^i(x)|\leq|Df(x)|$. 否则，有矛盾 $|Df(x)|^2=\sum_{i=1}^n|df^i(x)|^2<|Df(x)|^2$.

这样，取 $A_1=\{x\in B\cap\Omega_1:\sqrt{n}|df^1(x)|\geq|Df(x)|\}$,$A_2=\{x\in B\cap\Omega_1-A_1:\sqrt{n}|df^2(x)|\geq|Df(x)|\}\cdots$,$A_n=\{x\in B\cap\Omega_1-\cup_{i=1}^{n-1}A_i:\sqrt{n}|df^n(x)|\geq|Df(x)|\}$. 显然 $B\cap\Omega=\cup_{i=1}^{n}A_i, A_i\cap A_j=\emptyset(i\neq j)$. 此时，由弱 (K_1,K_2)- 拟正则映射的定义及 Hadamard 不等式， (4.13) 式右端第一项成为

$$\begin{aligned}&\int_{B\cap\Omega_1}|Df|^{n-\varepsilon}dx=\sum_{i=1}^{n}\int_{A_i}|Df|^{n-\varepsilon}dx\leq\sum_{i=1}^{n}\int_{A_i}|df^i|^{-\varepsilon}|Df|^n dx\\ \leq&\sum_{i=1}^{n}[K_1n^{n/2}\int_{A_i}|df^i|^{-\varepsilon}J_f(x)dx+K_2\int_{A_i}|df^i|^{-\varepsilon}dx].\end{aligned}\tag{4.14}$$

首先，估计 (4.14) 式的第二项. 由 A_i 的定义可得

$$\int_{A_i}|df^i|^{-\varepsilon}dx\leq\sqrt{n}^{\varepsilon}\int_{A_i}|Df|^{-\varepsilon}dx\leq n|B|,$$

因此

$$K_2\sum_{i=1}^{n}\int_{A_i}|df^i|^{-\varepsilon}dx\leq n^2K_2|B|.\tag{4.15}$$

为估计 (4.14) 式的第 1 项，取 $\varphi\in C_0^\infty(\frac{3}{2}B)$ 和 $\psi\in C_0^\infty(2B)$(φ,ψ 分别在 $\frac{3}{2}B$,$2B$ 之外为零) 为两个试验函数，满足

(1) $0\leq\varphi\leq1,\varphi\equiv1$ 当 $x\in B$,$|\nabla\varphi|\leq\frac{4}{r}$;

(2) $0\leq\psi\leq1,\psi\equiv1$ 当 $x\in\frac{3}{2}B$,$|\nabla\psi|\leq\frac{4}{r}$.

对 $i=1,2,\cdots,n-1$, 考虑由下定义的辅助函数 $F\in W_0^{1,n-\varepsilon}(\Omega,\mathrm{R}^n)$,

$$F=(\psi(f^1-C^1),\psi(f^2-C^2),\cdots,\psi(f^{n-1}-C^{n-1}),\varphi(f^n-C^n)),$$

这里 $C^1,\cdots,C^n$ 为待定的任意常数. 在 $\frac{3}{2}B$ 上有

$$\begin{aligned}&\varphi|df^i|^{-\varepsilon}df^1\wedge\cdots\wedge df^n\\=&|dF^i|^{-\varepsilon}dF^1\wedge\cdots\wedge dF^n-(f^n-C^n)|df^i|^{-\varepsilon}df^1\wedge\cdots\wedge df^{n-1}\wedge d\varphi.\end{aligned}\tag{4.16}$$

对辅助函数 F 应用引理 4.5 , 注意到 $|f^n-C^n|\leq|f-C|,C=(C^1,C^2,\cdots,C^n)$, 利用 Hadamard 不等式以及 $J_f(x)>0$ 的假设，得到

$$\begin{aligned}&\int_{A_i}|df^i|^{-\varepsilon}J_f(x)dx\leq\int_B|df^i|^{-\varepsilon}J_f(x)dx\\ \leq&\int_{2B}|\nabla\varphi||f-C||Df|^{n-1-\varepsilon}dx+2n\times100^{n^2}\varepsilon\int_{2B}|DF|^{n-\varepsilon}dx,\end{aligned}\tag{4.17}$$

由 F 的定义及条件 (1)(2), 易得估计式 $|DF| \le \sqrt{2}(4r^{-1}|f-C| + |Df|)$, 因此

$$\int_{2B} |DF|^{n-\varepsilon} dx \le \sqrt{2}^{n-\varepsilon} 2^{n-\varepsilon} (4^{n-\varepsilon} r^{\varepsilon-n} \int_{2B} |f-C|^{n-\varepsilon} dx + \int_{2B} |Df|^{n-\varepsilon} dx).$$

取 $C = \overline{f_{2B}} = \frac{1}{|2B|}\int_{2B}|f|dx$, 对上式右端第一项应用引理 4.2 得到

$$\begin{aligned} & \int_{2B} |Df|^{n-\varepsilon} dx \le \sqrt{2}^{n-\varepsilon} 2^{n-\varepsilon} (2^{5n-4\varepsilon}+1) r^{n-\varepsilon} \int_{2B} |Df|^{n-\varepsilon} dx \\ < \; & 2^{3n/2}(2^{5n}+1) r^{n-\varepsilon} \int_{2B} |Df|^{n-\varepsilon} dx, \end{aligned} \tag{4.18}$$

代入 (4.17) 式,

$$\begin{aligned} & \int_{A_i} |df^i|^{-\varepsilon} J_f(x) dx \\ \le \; & \int_{2B} |\nabla\varphi||f-C||Df|^{n-1-\varepsilon} dx + 2n \times 100^{n^2} [2^{3n/2}(2^{5n}+1)] \int_{2B} |Df|^{n-\varepsilon} dx. \end{aligned} \tag{4.19}$$

对 $i=n$, 只要考虑辅助函数

$$F = (\varphi(f^1 - C^1), \psi(f^2 - C^2), \cdots, \psi(f^n - C^n)),$$

用同样的方法得到 (4.19) 式. 又

$$\int_{2B} |\nabla\varphi||f-\overline{f_{2B}}||Df|^{n-1-\varepsilon} dx \le \frac{4}{r} \int_{2B} |f-\overline{f_{2B}}||Df|^{n-1-\varepsilon} dx, \tag{4.20}$$

取 $q' = \frac{n(n-\varepsilon)}{1+\varepsilon}$, $p' = \frac{n(n-\varepsilon)}{(n+1)(n-1-\varepsilon)}$, 则 $1 < q', p' < \infty$, $\frac{1}{q'} + \frac{1}{p'} = 1$. 由 Hölder 不等式得到

$$\begin{aligned} & \int_{2B} |f-\overline{f_{2B}}||Df|^{n-1-\varepsilon} \\ \le \; & \left(\int_{2B} |f-\overline{f_{2B}}|^{\frac{n(n-\varepsilon)}{1+\varepsilon}} dx\right)^{\frac{1+\varepsilon}{n(n-\varepsilon)}} \left(\int_{2B} |Df|^{\frac{n(n-\varepsilon)}{n+1}} dx\right)^{\frac{(n+1)(n-1-\varepsilon)}{n(n-\varepsilon)}}, \end{aligned}$$

再取 $p'' = \frac{n(n-\varepsilon)}{n+1}$,$q'' = \frac{n(n-\varepsilon)}{1+\varepsilon}$, 则 $1 < p'' < n, q'' = \frac{np''}{n-p''}$, 由上式及引理 4.3 得

$$\begin{aligned} & \int_{2B} |f-\overline{f_{2B}}||Df|^{n-1-\varepsilon} \\ \le \; & C(n)\frac{p''}{n-p''}\left(\frac{p''}{p''-1}\right)^{\frac{n-p''}{np''}} \left(\int_{2B} |Df|^{\frac{n(n-\varepsilon)}{n+1}} dx\right)^{\frac{n+1}{n(n-\varepsilon)}} \times \\ & \left(\int_{2B} |Df|^{\frac{n(n-\varepsilon)}{n+1}} dx\right)^{\frac{(n+1)(n-1-\varepsilon)}{n(n-\varepsilon)}} \\ \le \; & C(n) n \left(\frac{n^2}{n^2-n+1}\right)^{\frac{2}{n(n-1)}} \left(\int_{2B} |Df|^{\frac{n(n-\varepsilon)}{n+1}} dx\right)^{\frac{n+1}{n}}, \end{aligned}$$

(4.21)

联合 (4.13)~(4.15) 式和 (4.19)~(4.21) 式得

$$\begin{aligned}\int_{2B}|Df|^{n-\varepsilon}dx \ \le\ & \sum_{i=1}^{n}K_1n^{n/2}\left\{\frac{4}{r}C(n)n\left(\frac{2}{n^2-n+1}\right)^{\frac{2}{n(n-1)}}\left(\int_{2B}|Df|^{\frac{n(n-\varepsilon)}{n+1}}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right.\\ & \left.+2n\times 100^{n^2}[2^{3n/2}(2^{5n}+1)]\varepsilon\int_{2B}|Df|^{n-\varepsilon}dx\right\}+(n^2K_2+1)|B|,\end{aligned}$$

两边除以 $|B|=\omega_n\mathrm{R}^n(\omega_n$ 为 R^n 中单位球体积), 得到

$$\begin{aligned}&\fint_{B}|Df|^{n-\varepsilon}dx\\ \le\ & 2^{n+3}K_1n^{(n+2)/2}C(n)n\left(\frac{n^2}{n^2-n+1}\right)^{\frac{2}{n(n-1)}}\omega_n^{1/n}\left(\fint_{2B}|Df|^{\frac{n(n-\varepsilon)}{n+1}}\right)^{\frac{n+1}{n}}\\ & +K_1n^{(n+4)/2}2^{n+1}\times 100^{n^2}[2^{3n/2}(2^{5n}+1)]\varepsilon\fint_{2B}|Df|^{n-\varepsilon}dx+(n^2K_2+1)\\ =\ & C_1(n,K_1)\left(\fint_{2B}|Df|^{\frac{n(n-\varepsilon)}{n+1}}\right)^{\frac{n+1}{n}}+C_2(n,K_1)\varepsilon\fint_{2B}|Df|^{n-\varepsilon}dx+C_3(n,K_2).\end{aligned}$$

其中 $C_1(n,K-1),C_2(n,K_1),C_3(n,K_2)$ 的取值不言自明. 取 $\varepsilon_0=C_2(n,K_1)^{-1}>0$, 这样当 $\varepsilon<\varepsilon_0$ 时, $0<C_2(n,K_1)\varepsilon=\theta<1$, 此时上式成为

$$\fint_{B}|Df|^{n-\varepsilon}dx\le C_1\left(\fint_{2B}|Df|^{\frac{n(n-\varepsilon)}{n+1}}\right)^{\frac{n+1}{n}}+\theta\fint_{2B}|Df|^{n-\varepsilon}dx+C_3(n,K_2),$$

因为 $\frac{n(n-\varepsilon)}{n+1}<n-\varepsilon$, 上式为一个关于 $|Df|$ 的弱逆 Hölder 不等式. 记 $q_1=n-\varepsilon$. 由引理 4.6, 存在 $p'>q_1$, 使得 $|Df|\in L^{p'}_{loc}(\Omega)$. 这样, 若设 $I=\{p\in[n-\varepsilon,n]:|Df|\in L^p_{loc}(\Omega)\}$, 则显然 $q_1\in I$ 且由上面的逆 Hölder 不等式的一致估计知 I 为闭的. 又由引理 4.6 知 I 为开的, 故 $I=[n-\varepsilon,n]$, 即 $|Df|\in L^n_{loc}(\Omega)$. 上面的推导对 $p=n$ 亦成立, 由引理 4.6 存在 $P_1=p_1(n,q_1,K_1,K_2)>n$, 使得 $|Df|\in L^{p_1}_{loc}(\Omega)$, 再由 Sobolev 嵌入定理可得 $f\in W^{1,p_1}_{loc}(\Omega,\mathrm{R}^n)$. 证毕.

2.4.3 弱 (K_1,K_2)- 拟正则映射的 Caccioppoli 型不等式

定理 4.2 存在两个数 $q(n,K_1,K_2)<n<p(n,K_1,K_2)$, 满足对于任意 $q,p\in(q(n,K_1,K_2),p(n,K_1,K_2))$, 每个满足 (4.1) 的映射 $f\in W^{1,q}_{loc}(\Omega,\mathrm{R}^n)$ 都属于 $W^{1,p}_{loc}(\Omega,\mathrm{R}^n)$. 而且, 对于任意 $\phi\in C_0^\infty(\Omega)$ 我们有不等式

$$\int_\Omega|\phi Df|^qdx\le C(n,K_1)\int_\Omega|f\otimes\bigtriangledown\phi|^qdx+C(n,K_2,|\Omega|)\qquad(4.22)$$

其中 $\otimes$ 表示张量积， $C(n,K_1)$, $C(n,K_2,|\Omega|)$ 是分别依赖于 n,K_1, $n,K_2,|\Omega|$ 的常数.

证明 只需证明存在 $q(n,K_1,K_2)<n$ 使得对任意的 $q(n,K_1,K_2)<q\le n$, 若 $f\in W^{1,q}_{loc}(\Omega,\mathrm{R}^n)$ 满足 (4.1) 式，那么对于所有的试验函数 $\phi\in C_0^\infty(\Omega)$ (4.22) 成立. 我们不妨假设 $\phi\in C_0^\infty(B_0)$, $B_0=B(x_0,r)\subset\subset\Omega$, $0\le\phi\le 1$.

设在 B_0 上 $g=|\phi Df|+|f\otimes\bigtriangledown\phi|$, 在 $\mathrm{R}^n\setminus B_0$ $g=0$. 我们给出两个集合 $\Omega_1=\{x\in\Omega:g>1\}$ 和 $\Omega_2=\{x\in\Omega:g\le 1\}$, 显然有 $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$ 和 $\Omega_1\cap\Omega_2=\emptyset$ (空集).

应用下面的结论：如果 $h=(h_1,h_2,\cdots,h_n)$ 是类 $W^{1,n}(\Omega)$ 中的映射，且坐标函数即 $h_k,k=1,2,\cdots,n$ 在 $\partial\Omega$ 为 0. 那么,

$$\int_\Omega J(x,h)=0 \tag{4.25}$$

当然，如果我们仅假设对于某 $q<n$, $h\in W^{1,q}(\Omega)$, 且坐标函数之一在 $\partial\Omega$ 为 0, (4.25) 一般是不成立的. 为了应用等式 (4.25), 这在讨论中很重要，我们要改 h 的一个坐标函数，如 h_1, 在 Ω 上用最大值函数来截断它. 那么等式 (4.25) 成立对于修改后的映射.

我们首先适当的逼近 f 的第一个分量函数 f_1. 设 $u=f_1\phi$, 把它延拓使得它 $\mathrm{R}^n\setminus B_0$ 为 0. 那么 $u\in W^{1,q}(\mathrm{R}^n)$. 对于 $\lambda>0$, 记

$$F_\lambda=\{x\in B(x_0,r)\cap\Omega_1:\mathcal{M}(g)(x)\le\lambda\ x\text{为 }u\text{ 的 Lebesgue 点}\}$$

我们可以说明 u 在集合 $F_\lambda\cup(\mathrm{R}^n\setminus B_0)$ 是 $c\lambda$-Lipschitz 连续的对于 $c=c(n)>0$. 证明参见 [15]. 为了完整性, 这里我们给出 $c\lambda$-Lipschitz 连续性的证明. 假设 $x,y\in F_\lambda$. 由于 $|\bigtriangledown u|\le c(n)g$, 由 (4.24) 则

$$\begin{aligned}|u(x)-u(y)| &\le c|x-y|(\mathcal{M}(|\bigtriangledown u|)(x)+\mathcal{M}(|\bigtriangledown u|)(y))\\ &\le c|x-y|(\mathcal{M}(g)(x)+\mathcal{M}(g)(y))\\ &\le c\lambda|x-y|\end{aligned}$$

如果 $x\in F_\lambda$, $y\in\mathrm{R}^n\setminus B_0$, 令 $\rho=2\mathrm{dist}(x,\mathrm{R}^n\setminus B(x_0,r))$. 因为 $|\{x\in B(x,\rho):u(x)=0\}|\ge|B(x,\rho)\cap(\mathrm{R}^n\setminus B_0)|\ge c(n)|B(x,\rho)|$, 又由 Poincaré 不等式，则

$$|u_{B(x,\rho)}|\le c(n)\rho|\bigtriangledown u|_{B(x,\rho)}\le c\rho\mathcal{M}(g)(x)\le c\lambda|x-y|$$

因此由 (4.23),

$$
\begin{aligned}
|u(x)-u(y)| &= |u(x)| \le |u(x)-u_{B(x,\rho)}| + |u_{B(x,\rho)}| \\
&\le c\rho\mathcal{M}(|\bigtriangledown u|)(x) + c\lambda|x-y| \\
&\le c\rho\mathcal{M}g(x) + c\lambda|x-y| \le c\lambda|x-y|
\end{aligned}
$$

如果 $x, y \in \mathrm{R}^n \setminus B_0$,, 那么结论显然成立. 因为所有的其他的情况都可以对称过去, 则有 $u|_{F_\lambda \cup (\mathrm{R}^n \setminus B_0)}$ 关于常数 $c\lambda$ 是 Lipschitz 连续的. 由经典的 McShane 延拓定理, 关于相同的常数我们将 $u|_{F_\lambda \cup (\mathrm{R}^n \setminus B_0)}$ 延拓为一个 Lipschitz 连续函数 u_λ in R^n . 然后我们考虑映射 $f_\lambda = (u_\lambda, \phi f_2, \cdots, \phi f_n)$. 由于 $f \in W^{1,q}_{loc}(\Omega, \mathrm{R}^n)$, 一个简单的逼近理论就可以得到如果 $q \ge n-1$, 那么

$$\int_{\Omega_1} J(x, f_\lambda)dx = 0$$

因此,

$$\int_{F_\lambda} J(x, f_\lambda)dx = -\int_{\Omega_1 \setminus F_\lambda} J(x, f_\lambda)dx \tag{2.26}$$

现在 $|f_i \bigtriangledown \phi| \le c(n)|f \otimes \bigtriangledown\phi|$, $|\bigtriangledown(\phi f_i)| \le c(n)g$. 把这些估计与 (2.26) 结合起来, 且把 Jacobian 表示成一个内积的形式, 我们就有

$$\int_{F_\lambda} \phi^n J_f(x)dx \le c(n)\left(\lambda\int_{\Omega_1 \setminus F_\lambda} g^{n-1}dx + \int_{F_\lambda}|f \otimes \bigtriangledown\phi|g^{n-1}dx\right)$$

这个不等式对于所有的 $\lambda > 0$ 都成立. 那么, 对于某个 $\varepsilon > 0$, 在它的两边同时乘以 $\lambda^{-1-\varepsilon}$ 对某 $\varepsilon > 0$, 这个数待定. 在 $(0, \infty)$ 上考虑 λ, 最后改变了可积指数且得到

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_1} \phi^n J_f(x)\int_{\mathcal{M}g(x)}^{\infty}\lambda^{-1-\varepsilon}d\lambda dx \le c(n)\Bigg(&\int_{\Omega_1} g^{n-1}\int_0^{\mathcal{M}g(x)}\lambda^{-\varepsilon}d\lambda dx \\
&+\int_{\Omega_1}|f \otimes \bigtriangledown\phi|g^{n-1}\int_{\mathcal{M}g(x)}^{\infty}\lambda^{-1-\varepsilon}d\lambda dx\Bigg)
\end{aligned}
$$

我们应用不等式 (4.1), 对于 f. 由此

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_1}\phi^n|Df|^n\mathcal{M}(g)^{-\varepsilon}dx \le{}& c(n)K_1\int_{\Omega_1}|f \otimes \bigtriangledown\phi|g^{n-1}\mathcal{M}(g)^{-\varepsilon}dx \\
&+\frac{\varepsilon c(n)K_1}{1-\varepsilon}\int_{\Omega_1} g^{n-1}\mathcal{M}(g)^{1-\varepsilon}dx + K_2\int_{\Omega_1}\phi^n\mathcal{M}(g)^{-\varepsilon}dx
\end{aligned} \tag{4.27}
$$

从现在起我们只应用 Hölder 不等式和 Hardy-Littlewood 最大值定理通过选择足够小的 ε 来完成证明. 一方面我们有

$$\int_{\Omega_1}(|Df||\phi|)^{n-\varepsilon}dx \leq \left(\int_{\Omega_1}|Df|^n|\phi|^n\mathcal{M}(g)^{-\varepsilon}dx\right)^{\frac{n-\varepsilon}{n}}\left(\int_{\Omega_1}\mathcal{M}(g)^{n-\varepsilon}dx\right)^{\frac{\varepsilon}{n}}$$

$$\leq c(n)\left(\int_{\Omega_1}|Df|^n|\phi|^n\mathcal{M}(g)^{-\varepsilon}dx\right)^{\frac{n-\varepsilon}{n}}\left(\int_{\Omega_1}g^{n-\varepsilon}dx\right)^{\frac{\varepsilon}{n}} \tag{2.28}$$

这里我们应用了 Hardy-Littlewood 最大值定理,

$$\int_{\Omega_1}\mathcal{M}(g)^{n-\varepsilon}dx \leq c(n)\int_{\Omega_1}g^{n-\varepsilon}dx \tag{4.29}$$

这里可以选择常数 $c(n) > 0$ 满足若 $0 \leq \varepsilon \leq 1$, 它不依赖于 ε 现在我们注意到可以假设

$$\int_{\Omega_1}g^{n-\varepsilon}dx \leq 2^{n-\varepsilon}\int_{\Omega_1}(|Df||\phi|)^{n-\varepsilon}dx \tag{4.30}$$

因为如果 (4.30) 不成立，那么

$$2^{n-\varepsilon}\int_{\Omega_1}(|Df||\phi|)^{n-\varepsilon}dx < \int_{\Omega_1}(|Df||\phi| + |f\otimes\triangledown\phi|)^{n-\varepsilon}dx$$

$$\leq 2^{n-1-\varepsilon}\left[\int_{\Omega_1}(|Df||\phi|)^{n-\varepsilon}dx + \int_{\Omega_1}|f\otimes\triangledown\phi|^{n-\varepsilon}dx\right]$$

这意味着

$$\int_{\Omega_1}(|Df||\phi|)^{n-\varepsilon}dx < \int_{\Omega_1}|f\otimes\triangledown\phi|^{n-\varepsilon}dx \tag{4.31}$$

显然

$$\int_{\Omega_2}(|Df||\phi|)^{n-\varepsilon}dx \leq \int_{\Omega_2}g^{n-\varepsilon}dx \leq |\Omega_2| \leq |\Omega| \tag{4.32}$$

联合 (4.31) 和 (4.32) 就有

$$\int_{\Omega}(|Df||\phi|)^{n-\varepsilon}dx \leq \int_{\Omega}|f\otimes\triangledown\phi|^{n-\varepsilon}dx + |\Omega|$$

因此，不等式 (4.22) 关于 $C(n, K_1) = 1$ 和 $C(n, K_2, |\Omega|) = |\Omega|$ 成立

由 (4.30) 和 (4.28) 则有

$$\int_{\Omega_1}g^{n-\varepsilon}dx \leq c(n)\int_{\Omega_1}|Df|^n|\phi|^n\mathcal{M}(g)^{-\varepsilon}dx \tag{4.33}$$

另一方面，我们利用 Hölder 不等式和 (4.29) 来估计 (4.27) 的右端由 (4.33) 和 (4.27),

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_1} g^{n-\varepsilon}dx &\le c(n)\int_{\Omega_1}|Df|^n|\phi|^n\mathcal{M}(g)^{-\varepsilon}dx\\ &\le c(n)K_1\left(\int_{\Omega_1}|f\otimes\triangledown\phi|^{n-\varepsilon}dx\right)^{\frac{1}{n-\varepsilon}}\left(\int_{\Omega_1}g^{n-\varepsilon}dx\right)^{\frac{n-\varepsilon-1}{n-\varepsilon}}\\ &+\frac{\varepsilon c(n)K_1}{1-\varepsilon}\int_{\Omega_1}g^{n-\varepsilon}dx+K_2\int_{\Omega_1}\phi^n\mathcal{M}(g)^{-\varepsilon}dx \end{aligned}\tag{4.34}$$

这里我们再次应用了 (4.29). (4.34) 右端最后一项可以利用 Hölder's 不等式和 (4.29) 来估计. 确切地说，我们有

$$\begin{aligned}K_2\int_{\Omega_1}\phi^n\mathcal{M}(g)^{-\varepsilon}dx &\le K_2\int_{\Omega_1}\mathcal{M}(g)^{n-1-\varepsilon}dx\\ &\le K_2\left(\int_{\Omega_1}\mathcal{M}(g)^{n-\varepsilon}dx\right)^{\frac{n-1-\varepsilon}{n-\varepsilon}}\left(\int_{\Omega_1}dx\right)^{\frac{1}{n-\varepsilon}}\\ &\le C(n)K_2|\Omega_1|^{\frac{1}{n-\varepsilon}}\left(\int_{\Omega_1}g^{n-\varepsilon}dx\right)^{\frac{n-1-\varepsilon}{n-\varepsilon}}\end{aligned}$$

这个不等式联合 (4.34) 就有

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_1} g^{n-\varepsilon}dx \le C(n)K_1\left(\int_{\Omega_1}|f\otimes\triangledown\phi|^{n-\varepsilon}dx\right)^{\frac{1}{n-\varepsilon}}\left(\int_{\Omega_1}g^{n-\varepsilon}dx\right)^{\frac{n-\varepsilon-1}{n-\varepsilon}}\\ +\frac{\varepsilon c(n)K_1}{1-\varepsilon}\int_{\Omega_1}g^{n-\varepsilon}dx+C(n)K_2|\Omega_1|^{\frac{1}{n-\varepsilon}}\left(\int_{\Omega_1}g^{n-\varepsilon}dx\right)^{\frac{n-1-\varepsilon}{n-\varepsilon}}\end{aligned}$$

选择足够小的 $0<\varepsilon<1$ 使得 $\varepsilon c(n)K_1/(1-\varepsilon)\le 1/2$ 由上面的不等式我们得到

$$\int_{\Omega_1}g^{n-\varepsilon}dx\le C(n,K_1)\int_{\Omega_1}|f\otimes\triangledown\phi|^{n-\varepsilon}dx+C(n,K_2,|\Omega|)$$

这个不等式与 (4.32) 结合就得到了我们要得结果. 证毕.

2.4.4 弱 $(K_1,K_2(x))$- 拟正则映射的高阶可积性

定义 4.2 称 $f\in W^{1,q}_{loc}(\Omega,\mathrm{R}^n), 1\le q<\infty$, 为弱 $(K_1,K_2(x))$- 拟正则映射, $0<K_1<\infty$, $0\le K_2(x)<\infty$, 若

$$|Df(x)|^n\le K_1J_f(x)+K_2(x).\tag{4.35}$$

若 $q \geq n$, 则称 f 为 $(K_1, K_2(x))$- 拟正则映射.

当 $K_2(x) = K_2$ 时，定义 4.2 与定义 4.1 一致. 本小节在关于函数 $K_2(x)$ 适当的条件下，利用等周不等式及弱逆 Hölder 不等式，得到弱 $(K_1, K_2(x))$- 拟正则映射的高阶可积性. 下面的定义来自 Onninen[1].

定义 4.3　若 $f = (f^1, f^2, \cdots, f^n) \in W_{loc}^{1,\frac{n^2}{n+1}}(\Omega, \mathrm{R}^n)$, 并对每一个指标 $i = 1, 2, \cdots, n$, 都有

$$\int_\Omega \varphi(x) J_f(x) dx = -\int_\Omega f^i(x) J(x, f^1, \cdots, f^{i-1}, \varphi, f^{i+1}, \cdots, f^n) dx \tag{4.36}$$

成立，其中 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ 为试验函数，则称 f 满足分部积分法则.

例子. 设 $f \in W_{loc}^{1,\frac{n^2}{n+1}}(\Omega, \mathrm{R}^n)$, $J_f(x) \geq 0$, a.e., 为有限伸张映射，$|Df|^n \in L_{loc}^P(\Omega)$, 这里 P 为 Orlicz 函数， $t \mapsto P(t^{\frac{n}{n+1}})$ 对充分大的 t 是增的，且

$$\int_1^\infty \frac{P(t)}{t^2} dt = \infty$$

则 f 满足分部积分法则，见 Onninen[1].

本小节主要结果为

定理 4.3　设 $f = (f^1, f^2, \cdots, f^n) \in W_{loc}^{1,\frac{n^2}{n+1}}(\Omega, \mathrm{R}^n)$ 为弱 $(K_1, K_2(x))$- 拟正则映射， $0 < K_1 < \infty$, $0 \leq K_2(x) < \infty$, $K_2(x) \in L_{loc}^t(\Omega)$, $t > 1$. 如果 f 满足分部积分法则 (4.36), 那么存在 $q > n$, 使得 $f \in W_{loc}^{1,q}(\Omega, \mathrm{R}^n)$. 特别的， f 为通常意义下的 $(K_1, K_2(x))$- 拟正则映射.

作为上面结果的一个直接应用, 考虑高维空间具有三个特征矩阵的 Beltrami 方程组

$$D^t f(x) H(x) Df(x) = J^{2/n}(x, f) G(x) + K(x) \tag{4.37}$$

这里 $H(x), G(x), K(x)$ 为正定，对称的矩阵，且满足以下条件：存在 $0 < \alpha_1 \leq \beta_1 < \infty$, $0 < \alpha_2 \leq \beta_2 < \infty$ 和 $0 < \alpha_3(x) \leq \beta_3(x) < \infty$, 使得对任意 $\xi, \eta \in \mathrm{R}^n$, 有

$$\alpha_1 |\xi|^2 \leq \langle H(x)\xi, \xi \rangle \leq \beta_1 |\xi|^2 \tag{4.38}$$

$$\alpha_2 |\eta|^2 \leq \langle G(x)\eta, \eta \rangle \leq \beta_2 |\eta|^2 \tag{4.39}$$

$$\alpha_3(x) |\zeta|^2 \leq \langle K(x)\zeta, \zeta \rangle \leq \beta_3(x) |\zeta|^2 \tag{4.40}$$

注 若 (4.37) 式中的矩阵 $K(x) \equiv 0$, 则 (4.37) 成为具有两个特征矩阵 $H(x)$ 和 $G(x)$ 的 Beltrami 方程组. 又若 $H(x) \equiv \mathrm{Id}$(恒等矩阵), 则 (4.37) 成为通常意义下的高维空间的 Beltrami 方程组. 关于 Beltrami 方程组的详细讨论，见第 4 章.

我们有下面的结果.

定理 4.4 设 $f = (f^1, f^2, \cdots, f^n) \in W_{loc}^{1,\frac{n^2}{n+1}}(\Omega, \mathrm{R}^n)$ 为满足条件 (4.38)~(4.40) 的具有三个特征矩阵的 Beltrami 方程组 (4.37) 的广义解, 且满足分部积分法则 (4.36). 如果 $\beta_3(x) \in L_{loc}^{\frac{nt}{2}}(\Omega)$, $t > 1$, 那么存在 $q > n$, 使得 $f \in W_{loc}^{1,q}(\Omega, \mathrm{R}^n)$.

下面的引理来自 Onninen[1], 将在定理 4.3 的证明中起重要作用.

引理 4.7 设 $f \in W_{loc}^{1,\frac{n^2}{n+1}}(\Omega, \mathrm{R}^n)$, $J_f(x) \geq 0$. 如果映射 f 满足分部积分法则 (4.36), 那么对任意的 $x_0 \in \Omega$ 和几乎所有的 $r \in (0, \mathrm{dist}(x_0, \partial\Omega))$, f 满足等周不等式

$$\left|\int_{B_r} J_f(x)dx\right| \leq I(n)\left(\int_{\partial B_r} \|D^\sharp f(x)\| dS\right)^{\frac{n}{n-1}} \tag{4.41}$$

其中 $I(n) = (n \sqrt[n-1]{\omega_{n-1}})^{-1}$, $\|D^\sharp f(x)\| = \sup\left\{|D^\sharp f(x)h| : |h| = 1, h \in \mathrm{R}^n\right\}$, 而 $D^\sharp f$ 为 Df 的余因子矩阵.

考虑矩阵 $A \in \mathrm{R}^{n\times n}$ 的两种范数 $\|A\| = \sup\{|Ah| : |h| = 1, h \in \mathrm{R}^n\}$ 和 $|A| = (\mathrm{Trace}A^tA)^{1/2}$. 我们有如下引理

引理 4.8 设 $A \in \mathrm{R}^{n\times n}$, $A^\sharp$ 为 A 的余因子矩阵，则有

$$\|A^\sharp\| \leq C|A|^{n-1} \tag{4.42}$$

这里 C 为只与 n 有关的常数.

证明 易知 $|A^\sharp| \leq C(n)|A|^{n-1}$. 又由有限维赋范线性空间中范数的等价性知结论成立.

定理 4.3 **的证明** 由引理 4.7 知 f 满足等周不等式 (4.36), 因此

$$\left|\int_{B_r} J_f(x)dx\right|^{\frac{n-1}{n}} \leq I(n)^{\frac{n-1}{n}} \int_{\partial B_r} \|D^\sharp f(x)\| dS \tag{4.43}$$

上式左右关于 r 从 $R/2$ 到 R 积分，有

$$\int_{R/2}^{R} \left|\int_{B_r} J_f(x)dx\right|^{\frac{n-1}{n}} dr \leq I(n)^{\frac{n-1}{n}} \int_{R/2}^{R} \int_{\partial B_r} \|D^\sharp f(x)\| dSdr \tag{4.44}$$

由 $J_f(x)$ 非负知

$$\int_{R/2}^{R}\left|\int_{B_r} J_f(x)dx\right|^{\frac{n-1}{n}} dr \ \geq \frac{R}{2}\left|\int_{B_{R/2}} J_f(x)dx\right|^{\frac{n-1}{n}} \tag{4.45}$$

利用引理 4.8 得

$$\begin{aligned}\int_{R/2}^{R}\int_{\partial B_r} \|D^\sharp f(x)\| dSdr \ &= \int_{B_R\setminus B_{R/2}} \|D^\sharp f(x)\| dx \\ \leq \int_{B_R} \|D^\sharp f(x)\| dx \leq C\int_{B_R} |Df(x)|^{n-1}dx &\end{aligned} \tag{4.46}$$

联合 (4.44)~(4.46), 有

$$R\left|\int_{B_{R/2}} J_f(x)dx\right|^{\frac{n-1}{n}} \leq 2CI(n)^{\frac{n-1}{n}}\int_{B_R} |Df(x)|^{n-1}dx$$

上式结合弱 $(K_1, K_2(x))$- 拟正则映射的定义得

$$\begin{aligned}\int_{B_{R/2}} |Df(x)|^n dx \ &\leq K_1\int_{B_{R/2}} J_f(x)dx + \int_{B_{R/2}} K_2(x)dx \\ &\leq K_1\left(\frac{2C}{R}\right)^{\frac{n}{n-1}} I(n)\left(\int_{B_R} |Df(x)|^{n-1}dx\right)^{\frac{n}{n-1}} + \int_{B_{R/2}} K_2(x)dx\end{aligned}$$

两端除以 $|B_{R/2}| = \omega_n\left(\frac{R}{2}\right)^n$($\omega_n$ 为 R^n 中单位球体积), 得到

$$⨍_{B_{R/2}} |Df(x)|^n dx \ \leq C(n, K_1)\left(⨍_{B_R} |Df(x)|^{n-1}dx\right)^{\frac{n}{n-1}} + ⨍_{B_{R/2}} K_2(x)dx$$

这里的 $C(n, K_1)$ 仅依赖于 n 和 K_1. 由 $K_2(x) \geq 0$ 知

$$⨍_{B_{R/2}} K_2(x)dx = \frac{1}{\omega_n(\frac{R}{2})^n}\int_{B_{R/2}} K_2(x)dx \leq \frac{2^n}{\omega_n R^n}\int_{B_R} K_2(x)dx = 2^n ⨍_{B_R} K_2(x)dx$$

于是

$$⨍_{B_{R/2}} |Df(x)|^n dx \ \leq C(n, K_1)\left(⨍_{B_R} |Df(x)|^{n-1}dx\right)^{\frac{n}{n-1}} + 2^n ⨍_{B_R} K_2(x)dx$$

上式为一个关于 $|Df|$ 的弱逆 Hölder 不等式. 由引理 1.1 知存在 $q > n$, 使得 $|Df(x)| \in L^q_{loc}(\Omega)$. 再由 Sobolev 嵌入定理便得定理 4.3 之结果.

定理 4.4 **的证明** 为证定理 4.4, 只需证明 f 是一个弱 $(K_1, K_2(x))$- 拟正则映射即可. 对 (4.37) 式左右两边取迹可得

$$\text{Trace}\left(D^t f(x) H(x) Df(x)\right) = \text{Trace}\left(J^{2/n}(x,f)G(x) + K(x)\right) \tag{4.47}$$

因 $H(x)$ 正定，对称，故利用 (4.38) 式知 (4.47) 式左端为

$$\begin{aligned} & \text{Trace}\left(D^t f(x) H(x) Df(x)\right) \\ = \; & \text{Trace}(D^t f(x) \sqrt{H(x)}^t \sqrt{H(x)} Df(x)) \\ = \; & \text{Trace}\,((\sqrt{H(x)} Df(x))^t (\sqrt{H(x)} Df(x))) \\ = \; & |\sqrt{H(x)} Df(x)|^2 \geq n\alpha_1 |Df(x)|^2 \end{aligned} \tag{4.48}$$

对 (4.47) 式右边利用 (4.39),(4.40) 式

$$\begin{aligned} & \text{Trace}\left(J^{\frac{2}{n}}(x,f)G(x) + K(x)\right) \\ = \; & \text{Trace}(J^{\frac{2}{n}}(x,f)G(x) + \text{Trace}K(x) \\ = \; & J^{\frac{2}{n}}(x,f)\text{Trace}G(x) + \text{Trace}K(x) \\ \leq \; & n\beta_2 J^{\frac{2}{n}}(x,f) + n\beta_3(x) \end{aligned} \tag{4.49}$$

结合 (4.47)~(4.49) 得

$$|Df(x)|^2 \leq \frac{\beta_2}{\alpha_1} J^{\frac{2}{n}}(x,f) + \frac{\beta_3(x)}{\alpha_1}$$

由此便得

$$|Df(x)|^n \leq 2^{\frac{n-2}{2}} \left(\frac{\beta_2}{\alpha_1}\right)^{\frac{n}{2}} J_f(x) + \left(\frac{\beta_3(x)}{\alpha_1}\right)^{\frac{n}{2}}$$

取 $K_1 = 2^{\frac{n-2}{2}} \left(\frac{\beta_2}{\alpha_1}\right)^{\frac{n}{2}}$, $K_2(x) = \left(\frac{\beta_3(x)}{\alpha_1}\right)^{\frac{n}{2}}$, 可知 f 是一个弱 $(K_1, K_2(x))$- 拟正则映射，且由 $\beta_3(x) \in L^{\frac{nt}{2}}_{loc}(\Omega)$, $t > 1$, 知 $K_2(x) \in L^t_{loc}(\Omega)$. 利用定理 4.3 便得定理 4.4 之结论.

§2.5 退化的拟正则映射

2.5.1 退化拟正则映射的定义

设 Ω 是 R^n 中的开子集， $f = (f^1, f^2, \cdots, f^n) \in W^{1,p}_{loc}(\Omega, \mathrm{R}^n)(1 \leq p < \infty)$ 为非常值向量映射. 设 Jacobi 矩阵

$$Df = \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

的第 k 阶子式为 A_I^J, 其中 k 重指标

$$I=(i_1,i_2,\cdots,i_k),\ J=(j_1,j_2,\cdots,j_k)$$

取自于 $N=(1,2,\cdots,n)$ 的一个有序排列，即 $1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n$ 和 $1\le j_1<j_2<\cdots<j_k\le n$.

对于非常值向量 $f(x)$ 满足 $J_f(x)=0$, a.e. Ω 时，设 n 阶方阵 $Df(x)$ 的秩为 $l:1\le l<n$(下面所做的工作对 $l=0$ 也成立). 在考虑线性映射的主要伸缩商系数时，假如已对 $f(x)$ 的各个分量作了适当的次序调整，这样只要考虑 $Df(x)$ 中所有的 l 阶主子式 A_I^I 就可以了， $I=(i_1,i_2,\cdots,i_l)$ 为所有的 l 重有序指标. 记

$$J_l(x,f)=\frac{1}{C_n^l}\sum_I \det A_I^I, \tag{5.1}$$

其中和式对所有有序的 l 重指标 $I=(i_1,i_2,\cdots,i_l)$ 求的， C_n^l 是一个组合数.

首先对线性映射引入主伸缩商系数概念. 设 E 和 F 分别是两个 n 维欧氏空间，用 $\mathcal{L}(E,F)$ 表示从 E 到 F 线性映射的全体. 对于 $A\in\mathcal{L}(E,F),\|A\|=\sup_{|\xi|\le 1,\xi\in E}|A\xi|$. 用 $\det A$ 表示线性映射 A 的行列式, 记 $Im(A)=A(E),Ker(A)=A^{-1}(0)$, 并用 A^* 来表示线性映射 A 的共轭算子，则 A^* 实际上是矩阵 A 的转置. 引用 Reshetnyak[1] 的如下结论

引理 5.1 设 $A\in\mathcal{L}(E,F)$, $A\ne 0$. 那么

(1)$E=\mathrm{Ker}A\oplus\mathrm{Im}A^*,\mathrm{Ker}A\cap\mathrm{Im}A^*=\emptyset$;

(2) 空间 E 和 F 中分别存在向量正交组 $u_1,u_2,\cdots,u_l$ 是子空间 ImA^* 的一组基和 $v_1,v_2,\cdots,v_l(1\le l\le n)$ 是 ImA 的一组基，以及存在常数 $\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,l)$, 使得

$$Au_i=\lambda_i v_i, A^*v_i=\lambda_i u_i; i=1,2,\cdots,l; \tag{5.2}$$

(3)

$$A^*Au_i=\lambda_i^2u_i, AA^*v_i=\lambda_i^2 v_i; i=1,2,\cdots,l; \tag{5.3}$$

而映射 A^*A 和 AA^* 的其他所有剩余特征值均为零.

设 $A=Df\in\mathcal{L}(\Omega,\mathrm{R}^n)$ 且 $Df\ne 0$ 而 $\lambda_{i_1},\lambda_{i_2},\cdots,\lambda_{i_l}(\lambda_{i_k}>0,1\le k\le l)$ 是由引理 5.1 中 (2) 所得到 A^*A 的特征值平方根， $u_{i_1},u_{i_2},\cdots,u_{i_l}$ 是由引理（ 1.1 ）得到

的相应于 λ_{i_k} 的正交向量组，称 $\lambda_{i_1},\lambda_{i_2},\cdots,\lambda_{i_l}$ 是线性映射 Df 的主伸缩商系数. 适当交换次序，使得 $0<\lambda_{i_1}\le\lambda_{i_2}\le\cdots\le\lambda_{i_l}$, 相应的向量组 $u_{i_k},k=1,2,\cdots,l$ 称为是线性映射 A 的主向量组. 类似地， $v_{i_k},k=1,2,\cdots,l$ 称为线性映射 A^* 的主向量组.

对于任意非零向量 $\xi\in\mathrm{R}^n\setminus\{0\}$,

$$\xi=\xi_1u_1+\xi_2u_2+\cdots,\xi_nu_n,|\xi|\le1,$$

由引理 5.1 中的 (5.2) 得到

$$|A\xi|^2=\lambda_{i_1}^2\xi_{i_1}^2+\lambda_{i_2}^2\xi_{i_2}^2+\cdots+\lambda_{i_l}^2\xi_{i_l}^2\le\lambda_{i_l}^2|\xi|^2\le\lambda_{i_l}^2.$$

又取向量 $\xi=(0,\cdots,0,\xi_{i_l},0,\cdots,0),|\xi_{i_l}|=1$ 时，有 $|A\xi|=\lambda_{i_l}$, 因此

$$\|A\|=\|Df\|=\sup_{|\xi|\le1}|A\xi|=\lambda_{i_l}. \tag{5.4}$$

设 $\varphi:\mathrm{R}^n\to\mathrm{R}^n$ 是一个正交变换，使得 $\varphi(v_i)=u_i,i=1,2,\cdots,n$. 那么对于合成映射 $B=A\cdot\varphi$, 得到

$$Bv_{i_k}=A\cdot\varphi(v_{i_k})=A(u_{i_k})=\lambda_{i_k}v_{i_k},k=1,2,\cdots,l;$$

$$Bv_{i_k}=0,k=l+1,l+2,\cdots,n.$$

所以对于 $J_f(x)$ 中的某一非零最高阶数主子式 A_I^I, 有

$$\det(A_I^I)=\det(B_I^I)=\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\cdots\lambda_{i_l}.$$

的 Hadamard 不等式表明

$$\det(A_I^I)\le\|A\|^l.$$

若设

$$K(A)=\sup_I\frac{\|A\|^l}{|\det(A_I^I)|}, \tag{5.5}$$

这里的 I 是使 $\det(A_I^I)\neq0$ 所有 l 重有序指标. 根据 (5.4) 和 (5.5), 则有 $K(A)\ge1$.

定义 5.1 一个非常向量映射 $f=(f^1,f^2,\cdots,f^n)\in W_{loc}^{1,l}(\Omega,\mathrm{R}^n)(1\le l<n)$, 称为是 Ω 上退化的 K- 拟正则映射. 如果

(1) 至少存在 $Df(x)$ 的一个非零的最高阶数的子式 A_I^I, 使得 $J_l(x,f) > 0$ a.e. Ω, 而

$$J_{l+1}(x,f) = J_{l+2}(x,f) = \cdots = J_n(x,f) = 0 \;\; a.e. \; \Omega;$$

(2)

$$|Df(x)|^l \le KJ_l(x,f) \; a.e. \; \Omega,$$

这里的常数 $K(1 \le K < \infty)$ 称为映射 $f(x)$ 的伸缩商.

注 5.1 事实上，定义 5.1 中的 l 也可取 $l = n$, 这时 $J_f(x) > 0$, a.e. Ω 恰好与经典意义下的 K- 拟正则映射的定义一致.

2.5.2 退化 K- 拟正则映射的 L^p 可积性

从现在起，约定在不同场合出现的常数，如果仅依赖于 $n, l, K, d_0 = \mathrm{dist}(a, \partial\Omega)$ $(\forall a \in \Omega)$, 都将用同一个字母 C 来表示. 设 $\bigwedge^l(\mathrm{R}^n)(1 \le l \le n)$ 表示由 $dx^I = dx_{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_l}$ 张成的 l- 形式的向量空间，其中 $I = (i_1, i_2, \cdots, i_l)$ 为 l 重有序指标.

下面的几个概念可见 Reshetnyak [1] 和 Iwaniec, Martin [2]. 对于映射 $f \in W_{loc}^{1,p}(\Omega, \mathrm{R}^n), 1 \le p < \infty$, 由 f 在 $f(\Omega)$ 中 l- 形式上所诱导的拉回算子记为 f^*. 对于任意的两个 l- 形式

$$\alpha = \sum_I \alpha^I dx^I \in \bigwedge^l, \beta = \sum_I \beta^I dx^I \in \bigwedge^l,$$

其内积记为 $\langle \alpha, \beta \rangle$

对于 l- 形式

$$\alpha = \alpha^{i_1} \wedge \alpha^{i_2} \wedge \cdots \wedge \alpha^{i_l},$$

这里 $\alpha^{i_k}, 1 \le k \le l$ 是 1- 微分形式，则

$$|\alpha^{i_1} \wedge \alpha^{i_2} \wedge \cdots \wedge \alpha^{i_l}| \le C|\alpha^{i_1}| \cdot |\alpha^{i_2}| \cdots |\alpha^{i_l}|, \tag{5.6}$$

上式中 C 的是一个仅依赖于 n, l 的常数.

记 Ω 上的体积形式为

$$\mathrm{vol} = dx = dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n \in \bigwedge^n(\mathrm{R}^n),$$

Hodge 星算子 $*: \bigwedge \to \bigwedge^{n-l}$ 满足

$$\alpha \wedge *\beta = \beta \wedge *\alpha = \langle \alpha, \beta \rangle vol, \forall \alpha, \beta \in \bigwedge^{l}(\mathrm{R}^n), \tag{5.7}$$

如果 $J = N - I$ 表示有序 l 重指标 $I = (i_1, i_2, \cdots, i_l)$ 的余指标 (余指标指的是从 $N = (1, 2, \cdots, n)$ 中删除元素 $i_k \in I$ 余下的指标), 那么

$$*dx^I = \sigma(I, N-I) dx^{N-I},$$

这里的 $\sigma(I, N-I) \in \{-1, 1\}$, 表示排列 $(I, N-I)$ 中逆序数的符号；即当偶排列时，取 $\sigma = 1$ ；当奇排列时，取 $\sigma = -1$. 所以

$$* * \alpha = (-1)^{l(n-l)} \alpha, \alpha \in \bigwedge^{l}. \tag{5.8}$$

对于 l- 形式

$$v = dy^I = dy^{i_1} \wedge dy^{i_2} \wedge \cdots \wedge dy^{i_l}$$

其中 $I = (i_1, i_2, \cdots, i_l)$. f 在 v 的一个拉回为

$$(f^* v)(x) = df^{i_1} \wedge df^{i_2} \wedge \cdots \wedge df^{i_l} = \sum_{I_1} \det A_{I_1}^{I} dx^{I_1},$$

其中的和式中 $I_1 = (i_1^1, i_2^1, \cdots, i_l^1)$ 为所有有序的 l- 重指标. 一个简单的验证可知 $f^* v$ 是一个恰当形式. 事实上，若取

$$u = (-1)^{(k-1)} y^{i_k} dy^{i_1} \wedge dy^{i_2} \wedge \cdots \wedge d\hat{y}^{i_k} \wedge \cdots \wedge dy^{i_l},$$

上面式子中含抑扬符项表示该项要被去掉，则有

$$df^* u = d((-1)^{(k-1)} f^{i_k} df^{i_1} \wedge df^{i_2} \wedge \cdots \wedge d\hat{f}^{i_k} \wedge \cdots \wedge df^{i_l})$$

$$= df^{i_1} \wedge df^{i_2} \wedge \cdots \wedge df^{i_l} = f^* v.$$

表明了 $f^* v$ 是一个恰当形式.

给定的 l- 重指标 $I = (i_1, i_2, \cdots, i_l)$, 记

$$dx^J = *dx^I$$

其中 $J=(j_1,j_2,\cdots,j_{n-l})$ 为 I 的一个余指标，由于正负号的关系，这里的 J 不必是有序的．记常值矢量

$$a=(a^1,a^2,\cdots,a^n)\in \mathrm{R}^n.$$

引理 5.2 对于 $(l-1)$- 形式

$$\omega=(-1)^{k-1}(f_{i_k}-a_{i_k})dx^{i_1}\wedge dx^{i_2}\wedge\cdots\wedge d\hat{x}^{i_k}\cdots\wedge dx^{i_l},\quad f^{i_k}\in W^{1,p}_{loc}(\omega,R),$$

如果取 $\eta=\varphi(x)dx^J$ 为 Ω 上具有紧支集的 $(n-l)$- 形式，这里 $\varphi(x)\in C_0^\infty(\Omega)$, J 为 I 的余指标．则

$$\int_\Omega d(\omega\wedge\eta)=0. \tag{5.9}$$

证明 不妨设 $f^{i_k}\in C^1(\Omega)$. 不然，对于 $f^{i_k}(x)\in W^{1,p}_{loc}(\Omega), 1\le p<\infty$, 取 $\alpha_h(x)$ 为 $f^{i_k}(x)$ 的一个光滑化因子，则 $\alpha_h * f^{i_k}\in C^1(\Omega)$, 而且在 $W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ 的范数意义下，有

$$\alpha_h(x)*f^{i_k}\to f^{i_k}(h\to 0).$$

所以只要用 $\alpha_h * f^{i_k}$ 代替 f^{i_k} 就可以了．由于 $\varphi(x)\in C_0^\infty(\Omega)$, 可以对 $\varphi(x)$ 作一个零延拓到定义在 R^n 上，于是

$$\begin{aligned}
d(\omega\wedge\eta) &= d[((-1)^{k-1}(f^{i_k}-a^{i_k})dx^{i_1}\wedge dx^{i_2}\wedge\cdots\wedge d\hat{x}^{i_k}\wedge\cdots\wedge dx^{i_l})\wedge(\varphi(x)dx^J)]\\
&= d[(-1)^{k-1}(f^{i_k}-a^{i_k})\varphi(x)dx^{i_1}\wedge dx^{i_2}\wedge\cdots\wedge d\hat{x}^{i_k}\wedge\cdots\wedge dx^{i_l}]\wedge dx^J\\
&= \left(\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial[(f_{i_k}-a_{i_k})\varphi(x)]}{\partial x^{i_k}}dx^I\right)\wedge *dx^J\\
&= \sum_{k=1}^{l}\frac{\partial[(f_{i_k}-a_{i_k})\varphi(x)]}{\partial x^{i_k}}dx,
\end{aligned}$$

对于上面和式中的每一项，由于 $\varphi(x)(f^{i_k}-a^{i_k})\in C_0^1(\mathrm{R}^n)$, 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial[(f_{i_k}-a_{i_k})\varphi(x)]}{\partial x^{i_k}}dx^k=0.$$

故

$$\int_\Omega d(\Omega\wedge\eta)=0$$

得证.

定理 5.1 假定 $f:\Omega\to \mathrm{R}^n$ 是 Sobolev 类 $W^{1,l}_{loc}(\omega,\mathrm{R}^n)(1\le l<n)$ 中退化的 K-拟正则映射；那么一定存在一个指数 $p=p(l,n,K)>l$, 使得 $f\in W^{1,p}_{loc}(\Omega,\mathrm{R}^n)$.

证明 不妨假定 $f\in C^1(\Omega)$. 设

$$\omega=(-1)^{k-1}(y^{i_k}-a^{i_k})dy^{i_1}\wedge dy^{i_2}\wedge\cdots\wedge d\hat{y}^{i_k}\wedge\cdots\wedge dy^{i_l},$$

$\varphi(x)\in C_0^\infty(\Omega)$ 为一个非负的试验函数. 设 $\eta=\varphi(x)dx^J$, 这里的 J 为 I 的一个余指标，使得 $dx^J=*dx^I$, 于是

$$\begin{aligned}d(\eta\wedge f^*\omega)&=d\eta\wedge f^*\omega+(-1)^{n-l}\eta\wedge df^*\omega\\ &= d\eta\wedge f^*\omega+(-1)^{n-l}\eta\wedge\left(\sum_{I_1}\det A^I_{I_1}dx^{I_1}\right).\end{aligned}\tag{5.10}$$

根据引理 5.1 得到

$$\begin{aligned}\int_\Omega d\eta\wedge f^*\omega &= -(-1)^{n-l}\int_\Omega\eta\wedge\left(\sum_{I_1}\det A^I_{I_1}dx^{I_1}\right)\\ &= (-1)^{n-l+1}\int_\Omega\varphi(x)dx^J\wedge\left(\sum_{I_1}\det A^I_{I_1}dx^{I_1}\right)\\ &= (-1)^{n-l+1}\int_\Omega\sum_{I_1}\varphi(x)\det A^I_{I_1}dx^J\wedge dx^{I_1}\\ &= (-1)^{n-l+1}\int_\Omega\sum_{I_1}\varphi(x)\det A^I_{I_1}*dx^I\wedge dx^{I_1}\\ &= (-1)^{n-l+1}\int_\Omega\varphi(x)\det A^I_I dx.\end{aligned}$$

将上面等式两边同时对所有的 l 重有序指标 I 求和，得到

$$\int_\Omega\varphi(x)\sum_I\det A^I_I dx\le C^l_n\int_\Omega|d\eta\wedge f^*\omega|dx.$$

由 (5.1) 有

$$\int_\Omega\varphi(x)J_l(x,f)dx\le\int_\Omega|d\eta\wedge f^*\omega|dx.$$

因为

$$f^*\omega=(-1)^{k-1}(f^{i_k}-a^{i_k})df^{i_1}\wedge df^{i_2}\wedge\cdots\wedge d\hat{f}^{i_k}\wedge\cdots\wedge df^{i_l},$$

并考虑到 $|f^{i_k}-a^{i_k}|\le|f-a|,|df^i|\le|Df|,i=1,2,\cdots,n$, 由 (2.1), 所以

$$\begin{aligned}|f^*\omega| &= |f_{i_k}-a^{i_k}||df^{i_1}\wedge df^{i_2}\wedge\cdots\wedge \hat{df^{i_k}}\wedge\cdots\wedge df^{i_l}|\\ &\le C|f_{i_k}-a^{i_k}||df^{i_1}||df^{i_2}|\cdots|\hat{df^{i_k}}|\cdots|df^{i_l}|\\ &\le C|f-a||Df|^{l-1}.\end{aligned}$$

又因为 $d\eta=d\varphi(x)\wedge dx^J$, 所以 $|d\eta|=|\nabla\varphi(x)|$ 则

$$\int_\Omega \varphi(x)J_l(x,f)dx\le C\int_\Omega|\nabla\eta||f-a||Df|^{l-1}dx \tag{5.11}$$

现将退化的 K- 拟正则映射定义代入到 (5.11). 并令 $\varphi(x)=\xi^l(x),\xi(x)\in C_0^\infty(\Omega)$ 为非负的试验函数： $0\le\xi\le1$, $\xi(x)=1,x\in B_{R/2}$； $\xi(x)=0,x\in\Omega\setminus B_R$ 且 $|\nabla\xi|\le\frac{C}{R}$. 则有

$$\begin{aligned}\int_\Omega\xi^l|Df|^l dx &\le K\int_\Omega\xi^l J_l(x,f)dx\\ &\le C\int_\Omega|\xi Df|^{l-1}|(f-a)\nabla\xi|dx\\ &\le C\left(\int_\Omega|\xi Df|^{l-1}dx\right)^{\frac{l-1}{l}}\left(\int_\Omega|(f-a)\nabla\xi|^l dx\right)^{\frac1l}.\end{aligned}$$

故

$$\left(\int_\Omega|\xi Df|^l dx\right)^{\frac1l}\le C\left(\int_\Omega|(f-a)\nabla\xi|^l dx\right)^{\frac1l},$$

于是

$$\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega|\xi Df|^l dx\right)^{\frac1l}\le\frac{C}{R}\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega|f-a|^l dx\right)^{\frac1l}.$$

取 $a=\overline{f}=\frac{1}{|B_R|}(\int_\Omega f(x)dx)$ 代入上式，由嵌入不等式得到

$$\left(⨍_{B_{R/2}}|Df|^l dx\right)^{\frac1l}\le C\left(⨍_{B_R}|Df|^s dx\right)^{\frac1s} \tag{5.12}$$

这里 $s=\frac{nl}{n+l}\le l$. 故逆 Hölder 不等式成立．根据 Gehring 型不等式，存在一个指数 $p=p(n,l,K)>l$, 使得 $f\in W^{1,p}_{loc}(\Omega,\mathrm{R}^n)$.

2.5.3 退化弱 K- 拟正则映射的 Hölder 连续性

本小节通过 Morrey 型引理建立退化的 K- 拟正则映射 Hölder 连续性内估计. 对于 $0 < R \leq d_0 = \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)(a \in \Omega)$, 记

$$B(a, R) = \{x \in \Omega : |x - a| < R\},$$

$$S(a, R) = \{x \in \Omega : |x - a| = R\}.$$

引理 5.3 设 $f : \Omega \to \mathrm{R}^n$ 是 Sobolev 类 $W^{1,l}_{loc}(\Omega, \mathrm{R}^n)(1 \leq l \leq n)$ 的一个映射. 那么对于几乎所有的 $0 < R \leq d_0$, 都有

$$\int_{B(a,R)} J_l(x, f)dx \leq \frac{R}{n} \int_{S(a,R)} |Df(x)|^l dx, \tag{5.13}$$

这里的 $J_l(x, f)$ 如 (5.1) 所示.

根据引理 5.3, 关系式 (7.7) 和 Morrey 型引理 (见引理 2.1), 得到的如下局部 Hölder 连续性.

定理 5.2 设 $f \in W^{1,l}_{loc}(\Omega, \mathrm{R}^n)(1 \leq l \leq n)$. 如果 f 是如定义 1.1 的退化的 K- 拟正则映射；那么当 $l > \frac{n(K-1)}{K}$ 时， f 在 Ω 上的任意一个紧子集 G 上是 Hölder 连续的，并且 Hölder 指数

$$\alpha = 1 - \frac{n(K-1)}{lK}.$$

证明 由于 $f(x) \in W^{1,l}_{loc}(\Omega, \mathrm{R}^n)$ 是退化的 K- 拟正则映射，根据定义 5.1, (5.7) 和引理 5.3, 有

$$\begin{aligned}\int_{B(a,R)} |Df(x)|^l dx &\leq K \int_{B(a,R)} J_l(x, f)dx \\ &\leq \frac{KR}{n} \int_{S(a,R)} |DF(x)|^l dx\end{aligned} \tag{5.14}$$

记

$$W(R) = \int_{B(a,R)} |Df(x)|^l dx,$$

$$S(R) = \int_{S(a,R)} |Df(x)|^l dx.$$

则 $W'(R) = S(R)$. 从而由不等式 (5.14) 得到

$$W(R) \leq \frac{KR}{n} W'(R),$$

所以

$$-(\frac{W(R)}{R^{n/K}})' \leq 0.$$

因此 $h(R) = \frac{W(R)}{R^{n/K}}$ 关于 R 是一个非降函数. 由于 $0 < R \leq d_0 = \mathrm{dist}(a, \Omega)$, 于是

$$\begin{aligned}\frac{W(R)}{R^{n/K}} \leq \frac{W(d_0)}{d_0^{n/K}} &= d_0^{-n/K} \int_{B(a,d_0)} |Df(x)|^l dx \\ &\leq d_0^{-n/K} \|Df\|_l,\end{aligned}$$

即

$$\int_{B(a,R)} |DF(x)|^l dx \leq d_0^{-n/K} \|Df\|_l R^{n/K}.$$

根据 Morrey 引理可得定理 5.2.

2.5.4 退化弱拟正则映射的 Caccioppoli 型不等式

定理 5.3 设 $f \in W^{1,q}_{loc}(\Omega, \mathrm{R}^n)$ $(q \geq \max\{1, l-1\}, 1 \leq l \leq n)$, 为定义中所述的退化弱 K 拟正则映射. 存在两个可积指数 $q(n,l,K) < l < p(n,l,K)$, 使得对任何 $q, p \in (q(n,l,K), p(n,l,K))$, 任一退化弱 K 拟正则映射 $f \in W^{1,q}_{loc}(\Omega, \mathrm{R}^n)$, 都有 $f \in W^{1,p}_{loc}(\Omega, \mathrm{R}^n)$, 且对任意的 $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, 下面的 Caccioppoli 不等式成立

$$\int_\Omega |\phi Df|^q dx \leq C(n,l,K) \int_\Omega |f \otimes \bigtriangledown\phi|^q dx,$$

这里 $\otimes$ 表示张量积, 而 $C(n,l,K)$ 表示只与 n, l 和 K 有关的常数.

证明 显然, 可假设 $\phi \in C_0^\infty(B_0)$, $B_0 = B(x_0, r) \subset\subset \Omega$, 且 $0 \leq \phi(x) \leq 1$. 引入

$$g = \begin{cases} |\phi Df| + |f \otimes \bigtriangledown\phi|, & x \in B_0, \\ 0, & x \in \mathrm{R}^n \setminus B_0. \end{cases}$$

首先, 若映射 $h = (h^1, h^2, \cdots, h^l)$, $1 \leq l \leq n$, 是一个属于 Sobolev 空间 $W^{1,l}(\Omega, R^l)$ 的映射, 而且其中的一个分量, 例如 h^k, $1 \leq k \leq l$, 在 $\partial\Omega$ 上为零, 则由 Stokes 公式, 得到

$$\begin{aligned}&\int_\Omega dh^1 \wedge dh^2 \wedge \cdots \wedge dh^l \wedge e_{n-l} \\ =\ & (-1)^{k-1} \int_\Omega d(h^k dh^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dh^k} \wedge \cdots \wedge dh^l \wedge e_{n-l}) \\ =\ & (-1)^{k-1} \int_{\partial\Omega} h^k dh^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dh^k} \wedge \cdots \wedge dh^l \wedge e_{n-l} = 0.\end{aligned} \tag{5.15}$$

这里 $e_{n-l}=dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_{n-l}}$, $1\le i_1<\cdots<i_{n-l}\le n$ 为任意 $n-l$ 次形式，抑扬符项表示该项被去掉．一般来讲，若只设 $h\in W^{1,q}(\Omega,R^l)$, $q<l$, 且其中的一个分量在 $\partial\Omega$ 上为零，则 (5.15) 不一定成立．为了对退化弱 K 拟正则映射利用公式 (5.15), 我们的思想是对 h 的其中一个分量，例如 h^1, 做适当的变化，使得对变化之后的 h, 可以利用 (5.15).

对退化弱 K 拟正则映射 $f\in W^{1,q}_{loc}(\Omega,\mathrm{R}^n)$, 考虑它的第一个分量 f^1. 设 $u=\phi f^1$, 在 $\mathrm{R}^n\setminus B_0$ 上将其扩张为 0, 于是 $u\in W^{1,q}(\mathrm{R}^n)$. 对 $\lambda>0$, 记

$$F_\lambda=\{x\in B(x_0,r):M(g)(x)\le\lambda,\text{且}x\text{为}u\text{的 Lebesgue 点}\}.$$

这里 $M(g)$ 为 g 的 Hardy-Littlewood 最大函数．利用 [9] 中得到的关于 Sobolev 类函数的估计式，可以证明 u 在集合 $F_\lambda\cup(\mathrm{R}^n\setminus B_0)$ 上是 $c\lambda$-Lipschitz 连续的．证明参见 [8]. 由 McShane 扩张定理，将 $u|_{F_\lambda\cup(\mathrm{R}^n\setminus B_0)}$ 扩张为 R^n 中的 $c\lambda$-Lipschitz 连续函数 u_λ. 考虑映射

$$f_\lambda=(u_\lambda,\phi f^2,\cdots,\phi f^n).$$

因 $f\in W^{1,q}_{loc}(\Omega,\mathrm{R}^n)$, 由一个逼近过程，并利用 Stokes 公式可知：若 $q\ge l-1$, 则

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\det A^{(1,2,\cdots,l)}_{\lambda(1,2,\cdots,l)}dx=\int_\Omega du_\lambda\wedge d(\phi f^2)\wedge\cdots\wedge d(\phi f^l)\wedge dx_{l+1}\wedge\cdots\wedge dx_n\\ =&\ -\int_\Omega d(\phi f^2du_\lambda\wedge\widehat{d(\phi f^2)}\wedge\cdots\wedge d(\phi f^l)\wedge dx_{l+1}\wedge\cdots\wedge dx_n)\\ =&\ -\int_{\partial\Omega}\phi f^2du_\lambda\wedge\widehat{d(\phi f^2)}\wedge\cdots\wedge d(\phi f^l)\wedge dx_{l+1}\wedge\cdots\wedge dx_n=0.\end{aligned}$$

这里

$$A^{(1,2,\cdots,l)}_{\lambda(1,2,\cdots,l)}=\left(\begin{array}{ccc}\dfrac{\partial u_\lambda}{\partial x_1}, & \cdots, & \dfrac{\partial u_\lambda}{\partial x_l}\\ \dfrac{\partial(\phi f^2)}{\partial x_1}, & \cdots, & \dfrac{\partial(\phi f^2)}{\partial x_l}\\ \cdots, & \cdots, & \cdots,\\ \dfrac{\partial(\phi f^l)}{\partial x_1}, & \cdots, & \dfrac{\partial(\phi f^l)}{\partial x_l}\end{array}\right)$$

为 Df_λ 的第一个 l 阶子式．于是

$$\int_{F_\lambda}\det A^{(1,2,\cdots,l)}_{\lambda(1,2,\cdots,l)}dx=-\int_{\Omega\setminus F_\lambda}\det A^{(1,2,\cdots,l)}_{\lambda(1,2,\cdots,l)}dx. \tag{5.16}$$

现由 $|f^i \bigtriangledown \phi| \le c(n)|f \otimes \bigtriangledown\phi|$ 和 $|\bigtriangledown(\phi f^i)| \le c(n)g$, 联合 (2.2) 得到

$$\int_{F_\lambda} \phi^l \det A^{(1,2,\cdots,l)}_{(1,2,\cdots,l)} dx \le c(n)\int_{F_\lambda} |f\otimes \bigtriangledown\phi| g^{l-1}dx + c\lambda \int_{\Omega\setminus F_\lambda} g^{l-1}dx, \tag{5.17}$$

这里 $A^{(1,2,\cdots,l)}_{(1,2,\cdots,l)}$ 为 $Df(x)$ 的第一个 l 阶子式，这个不等式对所有 $\lambda > 0$ 成立. (5.17) 每一项乘以 $\lambda^{-1-\varepsilon}$(ε 的取值待定), 对 λ 从 0 到 ∞ 积分，并交换积分次序，得到

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \phi^l \det A^{(1,2,\cdots,l)}_{(1,2,\cdots,l)} \int_{M(g)(x)}^\infty \lambda^{-1-\varepsilon} d\lambda dx \\ \le\ & c(n)\left(\int_\Omega g^{l-1}\int_0^\infty \lambda^{-\varepsilon}d\lambda dx + \int_\Omega |f\otimes\bigtriangledown\phi| g^{l-1}\int_{M(g)(x)}^\infty \lambda^{-1-\varepsilon}d\lambda dx\right).\end{aligned} \tag{5.18}$$

同理，对任意的有序 l 重指标 $I=(i_1,i_2,\cdots,i_l)$, 有

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \phi^l \det A^{(i_1,i_2,\cdots,i_l)}_{(i_1,i_2,\cdots,i_l)} \int_{M(g)(x)}^\infty \lambda^{-1-\varepsilon} d\lambda dx \\ \le\ & c(n)\left(\int_\Omega g^{l-1}\int_0^\infty \lambda^{-\varepsilon}d\lambda dx + \int_\Omega |f\otimes\bigtriangledown\phi| g^{l-1}\int_{M(g)(x)}^\infty \lambda^{-1-\varepsilon}d\lambda dx\right).\end{aligned}$$

将上式对所有的有序 l 重指标求和，利用 $J_l(x,f)$ 的定义，得到

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \phi^l J_l(x,f) \int_{M(g)(x)}^\infty \lambda^{-1-\varepsilon} d\lambda dx \\ \le\ & c(n,l)\left(\int_\Omega g^{l-1}\int_0^\infty \lambda^{-\varepsilon}d\lambda dx + \int_\Omega |f\otimes\bigtriangledown\phi| g^{l-1}\int_{M(g)(x)}^\infty \lambda^{-1-\varepsilon}d\lambda dx\right).\end{aligned} \tag{5.19}$$

再由退化弱 K 拟正则映射的定义，知

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \phi^l |Df|^l M(g)^{-\varepsilon} dx \\ \le\ & c(n,l)K\int_\Omega |f\otimes\bigtriangledown\phi| g^{l-1}M(g)^{-\varepsilon}dx + \frac{\varepsilon c(n,l)K}{1-\varepsilon}\int_\Omega g^{l-1}M(g)^{1-\varepsilon}dx.\end{aligned} \tag{5.20}$$

一方面,

$$\begin{aligned}&\int_\Omega (|Df||\phi|)^{l-\varepsilon}dx \le \left(\int_\Omega |Df|^l|\phi|^l M(g)^{-\varepsilon}dx\right)^{\frac{l-\varepsilon}{l}}\left(\int_\Omega M(g)^{l-\varepsilon}dx\right)^{\frac{\varepsilon}{l}} \\ \le\ & c(n,l)\left(\int_\Omega |Df|^l|\phi|^l M(g)^{-\varepsilon}dx\right)^{\frac{l-\varepsilon}{l}}\left(\int_\Omega g^{l-\varepsilon}dx\right)^{\frac{\varepsilon}{l}}.\end{aligned} \tag{5.21}$$

这里利用了 Hölder 不等式和 Hardy-Littlewood 定理

$$\int_\Omega M(g)^{l-\varepsilon}dx \le c(n,l)\int_\Omega g^{l-\varepsilon}dx, \tag{5.22}$$

其中当 $0\le\varepsilon\le 1$ 时，常数 $c(n,l)>0$ 可以选择的与 ε 无关．我们可以假设

$$\int_\Omega g^{l-\varepsilon}dx\le 2^{l-\varepsilon}\int_\Omega(|Df||\phi|)^{l-\varepsilon}dx. \tag{5.23}$$

因为否则，不等式 (1.2) 对常数 $c(n,l,K)=1$ 成立．这样，由 (5.21) 和 (5.23) 得到

$$\int_\Omega g^{l-\varepsilon}dx\le c(n,l)\int_\Omega|Df|^l|\phi|^lM(g)^{-\varepsilon}dx. \tag{5.24}$$

另一方面，由 (5.24) 及 (5.20) 得到

$$\begin{aligned}&\int_\Omega g^{l-\varepsilon}dx\le c(n,l)\int_\Omega|Df|^l|\phi|^lM(g)^{-\varepsilon}dx\\ \le\ & c(n,l)K\left(\int_\Omega|f\otimes\bigtriangledown\phi|^{l-\varepsilon}dx\right)^{\frac{1}{l-\varepsilon}}\left(\int_\Omega g^{l-\varepsilon}dx\right)^{\frac{l-1-\varepsilon}{l-\varepsilon}}+c(n,l)K\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\int_\Omega g^{l-\varepsilon}dx.\end{aligned}$$

选择 ε 适当小，使得 $c(n,l)K\varepsilon/(1-\varepsilon)<1/2$, 即得定理 5.3 之结论.

§2.6 具有多个 n- 维变量的弱 $(K_1,K_2(x))$- 拟正则映射

2.6.1 引言与结果叙述

本节给出具有多个 n- 维变量的弱 $(K_1,K_2(x))$- 拟正则映射的定义， $K_1>0$, $K_2(x)\ge 0$, 并给出高阶可积性结果.

设 $k,n,m\in\mathcal{N}$, $n\ge 2$. 空间 $(\mathrm{R}^n)^k$ 和 $(\mathrm{R}^n)^m$ 表示为 $(\mathrm{R}^n)^k=\underbrace{\mathrm{R}^n\times\cdots\times\mathrm{R}^n}_{k\ \mathrm{times}}$ 和 $(\mathrm{R}^n)^m=\underbrace{\mathrm{R}^n\times\cdots\times\mathrm{R}^n}_{m\ \mathrm{times}}$. 对 $x\in(\mathrm{R}^n)^k$ 和 $y\in(\mathrm{R}^n)^m$, 使用记号

$$x=(x_1,\cdots,x_k)=((x_1^1,x_1^2,\cdots,x_1^n),(x_2^1,x_2^2,\cdots,x_2^n),\cdots,(x_k^1,x_k^2,\cdots,x_k^n))$$

和

$$y=(y^1,\cdots,y^m)=((y_1^1,y_2^1,\cdots,y_n^1),(y_1^2,y_2^2,\cdots,y_n^2),\cdots,(y_1^m,y_2^m,\cdots,y_n^m)),$$

这里

$$x_j=(x_j^1,x_j^2,\cdots,x_j^n)\in\mathrm{R}^n,\ y^i=(y_1^i,y_2^i,\cdots,y_n^i)\in\mathrm{R}^n,\ j=1,\cdots,k,\ i=1,\cdots,m.$$

设 U 为 $(\mathrm{R}^n)^k$ 中的区域， $f=(f^1,\cdots,f^m):U\to(\mathrm{R}^n)^m$ 为 $W^{1,r}_{loc}(U)$, $1\le r<\infty$ 类映射. Jacob 矩阵 $f'(x)$ 为分块矩阵

$$f'(x)=(f'_{ij}(x))_{i=1,\cdots,m,j=1,\cdots,k},\quad f'_{ij}(x)=\left(\frac{\partial f^i_\ell}{\partial x^t_j}\right)_{1\le\ell,t\le n}\in\mathrm{R}^{n\times n},$$

它在 U 几乎处处有定义. 对 $i=1,\cdots,m$ 和 $j=1,\cdots,k$, 记 $J_{ij}(x,f)=\det f'_{ij}(x)$. 本文假设 $J_{ij}(x,f)$ 非负， $i=1,\cdots,m$, $j=1,\cdots,k$.

定义 6.1 映射 $f=(f^1,\cdots,f^m)\in W^{1,r}_{loc}(U,(\mathrm{R}^n)^m)$, $1\le r<\infty$, 称为具有多个 n- 维变量的弱 $(K_1,K_2(x))$- 拟正则映射， $K_1>0$, $K_2(x)\ge 0$, a.e., 若在 U 中下面的不等式成立

$$\sum_{i,j}|f'_{ij}(x)|^n\le K_1 n^{n/2}\sum_{i,j}J_{ij}(x,f)+K_2(x). \tag{6.1}$$

若 $r\ge n$, 则 f 称为具有多个 n- 维变量的 $(K_1,K_2(x))$- 拟正则映射.

注 6.1 定义 6.1 中 ” 弱 ” 的含义是指 f 的可积指数 r 小于维数 n 的情形. 此时 $J_{ij}(x,f)$, $i=1,\cdots,m$, $j=1,\cdots,k$ 不一定局部可积.

注 6.2 记所有从 $(\mathrm{R}^n)^k$ 到 $(\mathrm{R}^n)^m$ 的弱 $(K_1,K_2(x))$- 拟正则映射的全体为 $G(K_1,K_2(x))$. 对 $k=m=1$ 和 $K_2(x)\equiv K_2$, 类 $G(K_1,K_2(x))$ 与 R^n 间的弱 (K_1,K_2)- 拟正则映射的类一致，当 $r\ge n$, $K_1=K$, $K_2(x)=0$, a.e. 时，类 $G(K_1,K_2(x))=G(K,0)$ 与类 $G(K)$ 一致.

本节主要结果为下面的正则性定理.

定理 6.1 设 $K_2(x)\in L^t_{loc}(U)$, $t>n$. 存在指数 $q=q(n,k,m,K_1)<n<p=p(n,k,m,K_1)$, 使得 $W^{1,q}_{loc}(U,(\mathrm{R}^n)^m)$ 中的任意具有多个 n- 维变量的弱 $(K_1,K_2(x))$- 拟正则映射都属于 $W^{1,p}_{loc}(U,(\mathrm{R}^n)^m)$, 即 $(K_1,K_2(x))$- 拟正则的.

2.6.2 预备引理

下面记 $C(*,\cdots,*)$ 为只依赖于变量 $*,\cdots,*$ 的常数，在不同的场合它的值可能不一样. 记 B_R 为中心在 0 半径为 $R>0$ 的球， $B_R(x)=B_R+x, x\in(\mathrm{R}^n)^k$. $|B_R|$ 表示 B_R 的 nk- 维 Lebesgue 测度. 对 $x_0\in(\mathrm{R}^n)^k$ 和 $g\in L^1(B_R(x_0))$, 记

$$\overline{g}_{B_R(x_0)}=⨍_{B_R(x_0)}gdx=\frac{1}{|B_R(x_0)|}\int_{B_R(x_0)}gdx$$

为 g 在 $B_R(x_0)$ 上的积分平均. 引入 $(\mathrm{R}^n)^k$ 上的微分形式 Ω_j, $j=1,\cdots,k$,

$$\Omega_j=(-1)^{(j-1)n}dx_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_j}\wedge\cdots\wedge dx_k\in\bigwedge^{(k-1)n},$$

这里的抑扬符项表示该项被去掉, 对变量 $x_j=(x_j^1,\cdots,x_j^n)\in\mathrm{R}^n$, 置 $dx_j=dx_j^1\wedge\cdots\wedge dx_j^n$. 显然 $dx=dx_1\wedge\cdots\wedge dx_k=dx_j\wedge\Omega_j$, $j=1,2,\cdots,k$.

引理 6.1 设 $F=(F^1,\cdots,F^m)\in W^{1,n-\varepsilon}((\mathrm{R}^n)^k,(\mathrm{R}^n)^m)$, $-\infty<\varepsilon\le 1$, 这里 $F^i=(F_1^i,\cdots,F_n^i)\in\mathrm{R}^n$. 则对每一 $i=1,\cdots,m$, $j=1,\cdots,k$, 有

$$\int_{(\mathrm{R}^n)^k}|dF_1^i\wedge\Omega_j|^{-\varepsilon}dF_1^i\wedge\cdots\wedge dF_n^i\wedge\Omega_j\le C(n)|\varepsilon|\int_{(\mathrm{R}^n)^k}|F'_{ij}(x)|^{n-\varepsilon}dx.$$

注 6.1 上面的引理对 $dF_1^i\wedge\cdots\wedge dF_n^i\wedge\Omega_j$ 的系数的符号没有限制. 因子 $|\varepsilon|$ 是本质的.

引理 6.1 的证明 由 Iwaniec, Sbordone [1, 定理 1] 得到

$$\begin{aligned}
&\int_{(\mathrm{R}^n)^k}|dF_1^i\wedge\Omega_j|^{-\varepsilon}dF_1^i\wedge\cdots\wedge dF_n^i\wedge\Omega_j\\
=&\int_{(\mathrm{R}^n)^{k-1}}dx_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_i}\wedge\cdots\wedge dx_k\int_{\mathrm{R}^n}|dF_1^i\wedge\Omega_j|^{-\varepsilon}\det F'_{ij}(x)dx_i\\
\le& C(n)|\varepsilon|\int_{(\mathrm{R}^n)^{k-1}}dx_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_i}\wedge\cdots\wedge dx_k\int_{\mathrm{R}^n}|F'_{ij}(x)|^{n-\varepsilon}dx_i\\
=& C(n)|\varepsilon|\int_{(\mathrm{R}^n)^k}|F'_{ij}(x)|^{n-\varepsilon}dx.
\end{aligned}$$

即为所求.

下面的引理可由第一章的 Poincaré 引理得到.

引理 6.2 设 $1\le r<\infty$, $U\subset(\mathrm{R}^n)^k$. 若 $u\in W_{loc}^{1,r}(U)$, 则对任意球 $B_R(x_0)\subset\subset U$, 有

$$\|u-\overline{u}_{B_R(x_0)}\|_{r,B_R(x_0)}\le 2^{1+\frac{nk}{r}}R\|\nabla u\|_{r,B_R(x_0)},$$

这里 ∇u 为 u 的梯度.

引理 6.3 设 $1\le r<\infty$, $U\subset(\mathrm{R}^n)^k$. 则对 $f=(f^1,\cdots,f^m)\in W_{loc}^{1,r}(U,(\mathrm{R}^n)^m)$, 有

$$\|f^i-\overline{f^i}_{B_R(x_0)}\|_{r,B_R(x_0)}\le n2^{1+\frac{nk}{r}}R\|f'(x)\|_{r,B_R(x_0)},\quad i=1,\cdots,m,$$

这里 $f_i'(x)=(f_{i1}'(x),\cdots,f_{ik}'(x))=\left(\frac{\partial f_\ell^i}{\partial x_j^t}\right)_{1\le\ell,t\le n,1\le j\le k}$ 为 $n\times nk$ 矩阵.

证明 对 $\ell=1,\cdots,n$, 由引理 6.2 得

$$\|f_\ell^i-\overline{f_\ell^i}_{B_R(x_0)}\|_{r,B_R(x_0)}\le 2^{1+\frac{nk}{r}}R\|\nabla f_\ell^i\|_{r,B_R(x_0)},$$

这样,

$$\begin{aligned}&\|f^i-\overline{f^i}_{B_R(x_0)}\|_{r,B_R(x_0)}\le\sum_{\ell=1}^n\|f_\ell^i-\overline{f_\ell^i}_{B_R(x_0)}\|_{r,B_R(x_0)}\\ \le\;& 2^{1+\frac{nk}{r}}R\sum_{\ell=1}^n\|\nabla f_\ell^i\|_{r,B_R(x_0)}\le n2^{1+\frac{nk}{r}}R\|f_i'(x)\|_{r,B_R(x_0)}\le n2^{1+\frac{nk}{r}}R\|f'(x)\|_{r,B_R(x_0)}.\end{aligned}$$

引理 6.3 证毕.

下面的引理可在 Borjarski, Iwaniec [1] 中找到.

引理 6.4 设 $1\le r<nk$. 若 $u\in W_{loc}^{1,r}(U)$, 则对任意球 $B_R(x_0)\subset\subset U$, 有

$$\|u-\overline{u}_{B_R(x_0)}\|_{\frac{nkr}{nk-r},B_R(x_0)}\le C(nk)\frac{nk}{nk-r}\left(\frac{r}{r-1}\right)^{\frac{nk-r}{nkr}}\|\nabla u\|_{r,B_R(x_0)}.$$

2.6.3 定理 6.1 的证明

设 $f\in W_{loc}^{1,n-\varepsilon}(U,(\mathrm{R}^n)^m)$ 为具有多个 n- 维变量的弱 $(K_1,K_2(x))$- 拟正则映射, 其中 $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$ 后面决定. 置

$$U_1=\{x\in U:|f'(x)|\ge 1\}\ \text{ and }\ U_2=\{x\in U:|f'(x)|<1\}.$$

显然 $U=U_1\cup U_2$, $U_1\cap U_2=\emptyset$. 对任意 $i=1,\cdots,m$ 和 $j=1,\cdots,k$, 有

$$J_{ij}(x,f)=\det f_{ij}'(x)=*\left(df_1^i\wedge\cdots\wedge df_n^i\wedge\Omega_j\right),$$

这里 $*$ 为 Hodge 星算子. 不等式 (6.1) 可重写为

$$\sum_{i,j}|f_{ij}'(x)|^n\le K_1n^{n/2}*\left(\sum_{i,j}df_1^i\wedge\cdots\wedge df_n^i\wedge\Omega_j\right)+K_2(x).\tag{6.2}$$

联合 (6.2) 和双边不等式

$$\underline{C}(n,m,k)\sum_{i,j}|f_{ij}'(x)|^n\le|f'(x)|^n\le\overline{C}(n,m,k)\sum_{i,j}|f_{ij}'(x)|^n$$

得到

$$
\begin{aligned}
& \int_{B_R(x_0)} |f'(x)|^{n-\varepsilon} dx \\
= & \int_{B_R(x_0)\cap U_1} |f'(x)|^{n-\varepsilon} dx + \int_{B_R(x_0)\cap U_2} |f'(x)|^{n-\varepsilon} dx \\
\leq & \int_{B_R(x_0)\cap U_1} |f'(x)|^{n-\varepsilon} dx + |B_R(x_0)\cap U_2| \\
\leq & \ C(n,m,k)\int_{B_R(x_0)\cap U_1} |f'(x)|^{-\varepsilon} \sum_{i,j} |f'_{ij}(x)|^n dx + |B_R(x_0)| \\
\leq & \ C(n,m,k)K_1 \sum_{i,j} \int_{B_R(x_0)\cap U_1} |f'(x)|^{-\varepsilon} df_1^i \wedge \cdots \wedge df_n^i \wedge \Omega_j \\
& + C(n,m,k)\int_{B_R(x_0)\cap U_1} K_2(x)|f'(x)|^{-\varepsilon} dx + |B_R(x_0)| \\
\leq & \ C(n,m,k)K_1 \sum_{i,j} \int_{B_R(x_0)} |df_1^i\wedge\Omega_j|^{-\varepsilon} df_1^i \wedge \cdots \wedge df_n^i \wedge \Omega_j \\
& + C(n,m,k)\int_{B_R(x_0)} K_2(x) dx + |B_R(x_0)|,
\end{aligned}
\tag{6.3}
$$

这里 $x_0\in U$, $B_R(x_0)\subset B_{2R}(x_0)\subset\subset U$ 为任意同心球.

为估计 (6.3) 右端第一项，设 $\phi\in C_0^\infty\left(B_{\frac{3}{2}R}(x_0)\right)$, $\psi\in C_0^\infty(B_{2R}(x_0))$ (ϕ 和 ψ 分别在 $B_{\frac{3}{2}R}(x_0)$ 和 $B_{2R}(x_0)$ 之外为零) 为截断函数，使得

(i) $0\leq\phi\leq 1$, 在 $B_R(x_0)$ 上 $\phi\equiv 1$, $|\nabla\phi|\leq\frac{C(n,m,k)}{R}$,

(ii) $0\leq\psi\leq 1$, 在 $B_{\frac{3}{2}R}(x_0)$ 上 $\psi\equiv 1$, $|\nabla\phi|\leq\frac{C(n,m,k)}{R}$.

考虑由下式定义的辅助映射 $F=(F^1,F^2,\cdots,F^m)\in W_0^{1,n-\varepsilon}(B_{2R}(x_0),(\mathrm{R}^n)^m)$,

$$
\begin{aligned}
F = \big(\psi(f^1-C^1),\cdots,\psi(f^{i-1}-C^{i-1})\ , \ & \big(\psi(f_1^i-C_1^i),\cdots,\psi(f_{n-1}^i-C_{n-1}^i),\phi(f_n^i-C_n^i)\big)\,, \\
& \psi(f^{i+1}-C^{i+1}),\cdots,\psi(f^m-C^m)\big)\,,
\end{aligned}
$$

这里 $C^i=(C_1^i,\cdots,C_n^i)\in\mathrm{R}^n$, $i=1,2,\cdots,m$ 为常值向量. 显然在 $B_{\frac{3}{2}R}(x_0)$ 上,

$$
\begin{aligned}
& \phi|df_1^i\wedge\Omega_j|^{-\varepsilon}df_1^i\wedge\cdots\wedge df_n^i\wedge\Omega_j \\
= & \ |dF_1^i\wedge\Omega_j|^{-\varepsilon}dF_1^i\wedge\cdots\wedge dF_n^i\wedge\Omega_j \\
& -(f_n^i-C_n^i)|df_1^i\wedge\Omega_j|^{-\varepsilon}df_1^i\wedge\cdots\wedge df_{n-1}^i\wedge d\phi\wedge\Omega_j.
\end{aligned}
\tag{6.4}
$$

因为 ϕ 和 ψ 分别在 $B_{\frac{3}{2}R}(x_0)$ 和 $B_{2R}(x_0)$ 之外为零，所以 $\phi,\psi\in C_0^\infty((\mathrm{R}^n)^k)$, 这样

$F\in W^{1,n-\varepsilon}((\mathrm{R}^n)^k,(\mathrm{R}^n)^m)$. 在球 $B_{\frac{3}{2}R}(x_0)$ 上积分 (6.4) 的两端，由引理 6.1 得到

$$\begin{aligned}
&\int_{B_{\frac{3}{2}R}(x_0)}\phi|df_1^i\wedge\Omega_j|^{-\varepsilon}df_1^i\wedge\cdots\wedge df_n^i\wedge\Omega_j\\
=&\int_{B_{\frac{3}{2}R}(x_0)}|dF_1^i\wedge\Omega_j|^{-\varepsilon}dF_1^i\wedge\cdots\wedge dF_n^i\wedge\Omega_j\\
&-\int_{B_{\frac{3}{2}R}(x_0)}(f_n^i-C_n^i)|df_1^i\wedge\Omega_j|^{-\varepsilon}df_1^i\wedge\cdots\wedge df_{n-1}^i\wedge d\phi\wedge\Omega_j\\
\leq&\ C(n)\varepsilon\int_{B_{2R}(x_0)}|F_{ij}'(x)|^{n-\varepsilon}dx+C(n)\int_{B_{2R}(x_0)}|\nabla\phi||f_n^i-C_n^i||f_{ij}'(x)|^{n-1-\varepsilon}dx,
\end{aligned}\tag{6.5}$$

这里使用了 Hadamard 不等式.

现在估计 (6.5) 右端的两项. 因为

$$\frac{\partial F_\ell^i}{\partial x_j^t}=\left(f_\ell^i-C_\ell^i\right)\frac{\partial\eta}{\partial x_j^t}+\eta\frac{\partial f_\ell^i}{\partial x_j^t},\quad \ell,t=1,\cdots,n,$$

这里 $\eta=\phi$ 或 ψ, 依 $\ell=n$ 与否而定. 由条件 (i), (ii) 得

$$\begin{aligned}
|F_{ij}'(x)|^{n-\varepsilon}&=\left[\sum_{\ell,t=1}^n\left(\frac{\partial F_\ell^i}{\partial x_j^t}\right)^2\right]^{\frac{n-\varepsilon}{2}}\\
&\leq C(n)\left\{\left[\sum_{\ell,t=1}^n\left(f_\ell^i-C_\ell^i\right)^2\left(\frac{\partial\eta}{\partial x_j^t}\right)^2\right]^{\frac{n-\varepsilon}{2}}+|f_{ij}'(x)|^{n-\varepsilon}\right\}.
\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}
&\int_{B_{2R}(x_0)}|F_{ij}'(x)|^{n-\varepsilon}dx\\
\leq&\ C(n)\int_{B_{2R}(x_0)}\left[\sum_{\ell,t=1}^n\left(f_\ell^i-C_\ell^i\right)^2\left(\frac{\partial\eta}{\partial x_j^t}\right)^2\right]^{\frac{n-\varepsilon}{2}}dx+C(n)\int_{B_{2R}(x_0)}|f_{ij}'(x)|^{n-\varepsilon}dx\\
\leq&\ C(n,m,k)\left[\frac{1}{R^{n-\varepsilon}}\int_{B_{2R}(x_0)}|f^i-C^i|^{n-\varepsilon}dx+\int_{B_{2R}(x_0)}|f_{ij}'(x)|^{n-\varepsilon}dx\right].
\end{aligned}$$

取

$$C^i=\overline{f^i}_{B_{2R}(x_0)}=\frac{1}{|B_{2R}(x_0)|}\int_{B_{2R}(x_0)}f^idx.$$

应用引理 6.2 得

$$\begin{aligned}\int_{B_{2R}(x_0)}|F'_{ij}(x)|^{n-\varepsilon}dx &\le C(n,m,k)\left[\int_{B_{2R}(x_0)}|f'(x)|^{n-\varepsilon}dx+\int_{B_{2R}(x_0)}|f'_{ij}(x)|^{n-\varepsilon}dx\right]\\ &\le C(n,m,k)\int_{B_{2R}(x_0)}|f'(x)|^{n-\varepsilon}dx.\end{aligned}\tag{6.6}$$

现在估计 (6.5) 右端第二项. 回忆 $C^i=\overline{f^i}_{B_{2R}(x_0)}$. 置 $q'=\frac{nk(n-\varepsilon)}{nk-(n-1-\varepsilon)}$, $p'=\frac{nk(n-\varepsilon)}{(nk+1)(n-1-\varepsilon)}$, 则 $1<p',q'<\infty$, $\frac{1}{p'}+\frac{1}{q'}=1$. 由 Hölder 得到

$$\begin{aligned}&\int_{B_{2R}(x_0)}|\nabla\phi||f^i_n-\overline{f^i_n}_{B_{2R}(x_0)}||f'_{ij}(x)|^{n-1-\varepsilon}dx\\ \le\ &\frac{C(n,m,k)}{R}\int_{B_{2R}(x_0)}|f^i_n-\overline{f^i_n}_{B_{2R}(x_0)}||f'_{ij}(x)|^{n-1-\varepsilon}dx\\ \le\ &\frac{C(n,m,k)}{R}\left(\int_{B_{2R}(x_0)}|f^i_n-\overline{f^i_n}_{B_{2R}}|^{q'}dx\right)^{\frac{1}{q'}}\left(\int_{B_{2R}(x_0)}|f'_{ij}(x)|^{p'(n-1-\varepsilon)}dx\right)^{\frac{1}{p'}}.\end{aligned}$$

若置 $p''=\frac{nk(n-\varepsilon)}{nk+1}$, 则 $1<p''<n$, $q'=\frac{nkp''}{nk-p''}$. 由引理 6.4 得到

$$\begin{aligned}&\int_{B_{2R}(x_0)}|\nabla\phi||f^i_n-\overline{f^i_n}_{B_{2R}(x_0)}||f'_{ij}(x)|^{n-1-\varepsilon}dx\\ \le\ &\frac{C(n,m,k)}{R}\left(\int_{B_{2R}(x_0)}|\nabla f^i_n|^{\frac{nk(n-\varepsilon)}{nk+1}}dx\right)^{\frac{nk+1}{nk(n-\varepsilon)}}\left(\int_{B_{2R}(x_0)}|f'_{ij}(x)|^{\frac{nk(n-\varepsilon)}{nk+1}}dx\right)^{\frac{(nk+1)(n-1-\varepsilon)}{nk(n-\varepsilon)}}\\ \le\ &\frac{C(n,m,k)}{R}\left(\int_{B_{2R}(x_0)}|f'(x)|^{\frac{nk(n-\varepsilon)}{nk+1}}dx\right)^{\frac{nk+1}{nk}}.\end{aligned}\tag{6.7}$$

联合 (6.3), (6.5), (6.6) 和 (6.7) 得

$$\begin{aligned}&\int_{B_R(x_0)}|f'(x)|^{n-\varepsilon}dx\\ \le\ &C(n,m,k)K_1\varepsilon\int_{B_{2R}(x_0)}|f'(x)|^{n-\varepsilon}dx+\frac{C(n,m,k)}{R}\left(\int_{B_{2R}(x_0)}|f'(x)|^{\frac{nk(n-\varepsilon)}{nk+1}}dx\right)^{\frac{nk+1}{nk}}\\ &+C(n,m,k)\int_{B_R(x_0)}K_2(x)dx+|B_R(x_0)|.\end{aligned}$$

上述不等式两端除以 $|B_R(x_0)|=\omega_{nk}R^{nk}$, 这里 ω_{nk} 为 $(\mathrm{R}^n)^k$ 中单位球的体积,

$$\begin{aligned}&⨍_{B_R(x_0)}|f'(x)|^{n-\varepsilon}dx\\ \le\ &C(n,m,k)K_1\varepsilon⨍_{B_{2R}(x_0)}|f'(x)|^{n-\varepsilon}dx+C(n,m,k)\left(⨍_{B_{2R}(x_0)}|f'(x)|^{\frac{nk(n-\varepsilon)}{nk+1}}dx\right)^{\frac{nk+1}{nk}}\\ &+C(n,m,k)⨍_{B_R(x_0)}K_2(x)dx+1.\end{aligned}$$

取 $\varepsilon_0=\varepsilon_0(n,m,k,K_1)$ 使得 $C(n,m,k)K_1\varepsilon_0=1$. 若 $\varepsilon<\varepsilon_0$, 则 $\theta=C(n,m,k)K_1\varepsilon<1$. 此时上述不等式成为

$$\begin{aligned}
&\fint_{B_R(x_0)}|f'(x)|^{n-\varepsilon}dx\\
\le\ &\theta\fint_{B_{2R}(x_0)}|f'(x)|^{n-\varepsilon}dx+C(n,m,k)\left(\fint_{B_{2R}(x_0)}|f'(x)|^{\frac{nk(n-\varepsilon)}{nk+1}}dx\right)^{\frac{nk+1}{nk}} \qquad (6.8)\\
&+C(n,m,k)\fint_{B_R(x_0)}K_2(x)dx+1.
\end{aligned}$$

因为 $\frac{nk(n-\varepsilon)}{nk+1}<n-\varepsilon$, $0<\theta<1$, 所以 (3.7) 是一个关于 $|f'(x)|$ 的弱逆 Hölder 不等式. 设 $q=q(n,k,m,K_1)=n-\varepsilon_0/2$. 现在利用第一章引理 7.5 提高 $|f'(x)|$ 的可积指数. 存在 $q'>q$, 使得 $|f'(x)|\in L^{q'}_{loc}(U)$. 对固定的 f, 记 I 为所有使得 $|f'(x)|\in L^r_{loc}(U)$ 的指数 $r\in[q,n]$ 的集合. 由假设，集合 I 包含 q. 下面证明 I 就是区间 $[q,n]$. 显然集合 I 是闭的. 不等式 (6.8) 和引理 6.5 推出 $|f'(x)|$ 事实上属于 $L^{q'}_{loc}(U)$, $q'>q$. 于是集合 I 是闭的和开的，这样就与区间 $[q,n]$ 一致. 上面的结果当可积指数为 n 时同样成立，再次应用引理 6.5 again, 存在 $p=p(n,m,k,K_1)>n$, 使得 $|f'(x)|\in L^p_{loc}(U)$. f 的可积性由 Sobolev 嵌入定理得到. 定理 6.1 证毕.

§2.7 保向形式 Jacobi 行列式的可积性

设 Ω 是 R^n 中的连通开子集. 设 $f=(f^1,f^2,\cdots,f^n)$ 是各项异性 Sobolev 类 $W^{1,\mathcal{P}-\varepsilon}_{loc}(\Omega,\mathrm{R}^n)$ 中的映照，这里 $\mathcal{P}-\varepsilon=(p_1-\varepsilon,p_2-\varepsilon,\cdots,p_n-\varepsilon)$ 是一个 n- 重指标， $p_1-\varepsilon,p_2-\varepsilon,\cdots,p_n-\varepsilon\in(1,+\infty)$, 且 $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_n}=1$, $0<\varepsilon<1$. 由关于 f 的条件知道每一分量坐标 $f^j, j=1,2,\cdots,n$ 及其梯度属于 $L^{p_j-\varepsilon}_{loc}(\Omega)$. f 的微分与 Jacobi 分别记成 $Df(x):\Omega\to\mathrm{R}^n$ 与 $J_f(x)=\det Df(x)$. f 称为保向映照，若 Jacobi 函数 $J(x,f)$ 在 Ω 中几乎处处非负. $Df(x)$ 的算子范数定义为 $|Df(x)|=\sup\{|Df(x)\xi|:\xi\in S^{n-1}\}$, 这里 S^{n-1} 是 R^n 中的单位球面.

近年来，Sobolev 类映照的 Jacobi 理论的研究取得了引人注意的进展. 它们中的许多有趣结果以及它们在诸如拟正则分析，测度与积分的几何理论，映照度理论和非线性弹性理论中的应用已被得到.

为了研究我们上面提及的领域中的空间映照, 有必要对映射 f 的 Jacobi 行列式积分. 若 $f\in W^{1,n}_{loc}(\Omega,\mathrm{R}^n)$, 则显然 $J_f(x)$ 是局部可积的. 但这个条件对保证 $J_f(x)$ 的

局部可积性不是必要的. 一个有趣的结果是保向映照具有自我提高的性质, 即 $J_f(x)$ 在 Ω 中不变号，就能推出其高阶可积性. Müller [1] 第一次观察到了这个情况，也见 Müllder [2]. 因此一个自然的问题是在 f 的什么条件下，其 Jacobi 行列式是局部可积的. Iwaniec, Sbordone 在 [1] 中给出了一个保证 Jacobi 行列式可积性的极小假设. Brezis, Fusco, Sbordone [1] 中也做了类似的工作. 本节定义并考虑保向形式，并且给出它们的 Jacobi 行列式的可积性的一般的假设.

本节中使用的一些符号和记号可在第 1 章中找到. 下面做简短回忆.

设 $e^1, e^2, \cdots, e^n$ 表示 R^n 中的标准正交基. 对 $\ell = 0, 1, \cdots, n$, ℓ- 余向量的线性空间，由对应于所有有序 ℓ- 重 $I = (i_1, i_2, \cdots, i_\ell), 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_\ell \le n$ 的外乘 $e^I = e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \cdots \wedge e^{i_\ell}$ 张成，记为 $\bigwedge^\ell = \bigwedge^\ell(\mathrm{R}^n)$. 这样， $\bigwedge^0 = \mathrm{R}$, $\bigwedge^1 = \mathrm{R}^n$. Grassman 代数 $\bigwedge = \oplus \bigwedge^\ell(\mathrm{R}^n)$ 是一个相对于外乘的分次代数. 我们由下面的规则定义 Hodge 星算子 $* : \bigwedge \to \bigwedge$, 对所有 $\alpha, \beta \in \bigwedge^\ell, \ell = 1, 2, \cdots, n$,

$$*1 = e^1 \wedge e^2 \wedge \cdots \wedge e^n$$

$$\alpha \wedge *\beta = \beta \wedge *\alpha = \langle \alpha, \beta \rangle (*1)$$

一个微分 ℓ- 形式 ω 是一个在 Ω 上的取值于 $\bigwedge^\ell(\mathrm{R}^n)$ 的 Schwarz 分布. 我们记微分 ℓ- 形式的空间为 $\mathcal{D}'(\Omega, \bigwedge^\ell)$, 对 $\ell = 1, \cdots, n$, 外导数为

$$\mathrm{d} : \mathcal{D}'\left(\Omega, \bigwedge^{\ell-1}\right) \to \mathcal{D}'\left(\Omega, \bigwedge^{\ell}\right)$$

它的形式共轭（ Hodge 余微分）是算子

$$\mathrm{d}^* : \mathcal{D}'\left(\Omega, \bigwedge^{\ell+1}\right) \to \mathcal{D}'\left(\Omega, \bigwedge^{\ell}\right)$$

它在 $\mathcal{D}'(\Omega, \bigwedge^{\ell+1}), \ell = 0, 1, \cdots, n$ 上定义为

$$\mathrm{d}^* = (-1)^{n\ell+1} * \mathrm{d} *$$

我们分别称空间

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{d}) = \left\{\omega \in \mathcal{D}'\left(\Omega, \bigwedge^{\ell}\right) : \mathrm{d}\omega = 0\right\}$$
$$\mathrm{Ker}(\mathrm{d}^*) = \left\{\omega \in \mathcal{D}'\left(\Omega, \bigwedge^{\ell}\right) : \mathrm{d}^*\omega = 0\right\}$$

中的形式为闭 ℓ- 形式与余闭 ℓ- 形式. 恰当的与余恰当的 ℓ- 形式分别定义成

$$\mathrm{Im}(\mathrm{d}) = \left\{\mathrm{d}\alpha : \alpha \in \mathcal{D}'\left(\Omega, \bigwedge^{\ell-1}\right)\right\}$$
$$\mathrm{Im}(\mathrm{d}^*) = \left\{\mathrm{d}^*\beta : \beta \in \mathcal{D}'\left(\Omega, \bigwedge^{\ell+1}\right)\right\}$$

显然，恰当形式是闭的，余恰当的形式是余闭的.

使用微分形式的语言，可以记

$$\mathcal{J}(x,f)\mathrm{d}x = \mathrm{d}f^1 \wedge \mathrm{d}f^2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f^n = \varphi^1 \wedge \varphi^2 \wedge \cdots \wedge \varphi^m \tag{7.1}$$

这里每一个 φ^j 是楔乘，即

$$\varphi^j = \mathrm{d}f^{j_1} \wedge \mathrm{d}f^{j_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f^{j_l}$$

(7.1) 中的分解对应于集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 到 m 个不相交子集的一个特殊分解.

考虑闭微分形式的 m- 重

$$\Phi = (\varphi^1, \varphi^2, \cdots, \varphi^m) : \Omega \to \bigwedge^{\ell_1} \times \bigwedge^{\ell_2} \times \cdots \times \bigwedge^{\ell_m}$$

定义 Φ 的 Jacobi 为 n- 形式

$$J(x,\Phi) = \varphi^1 \wedge \varphi^2 \wedge \cdots \wedge \varphi^m : \Omega \to \bigwedge^n, \quad n = \ell_1 + \ell_2 + \cdots + \ell_m$$

Φ 称为保向的，若 $J(x,\Phi)$ 的系数在 Ω 几乎处处非负. 本文我们总假设 Φ 为保向形式.

若 $\varphi^j \in L^{p_j}(\Omega, \bigwedge^{\ell_j}), j = 1,2,\cdots,m$, 则 Hadamard-Schwarz 不等式

$$|\varphi^1 \wedge \varphi^2 \wedge \cdots \wedge \varphi^m| \le C_n(\ell_1,\cdots,\ell_m)|\varphi^1||\varphi^2|\cdots|\varphi^m|$$

联合 Hölder 不等式，导致

$$\int_\Omega J(x,\Phi) \le C(n,\ell_1,\cdots,\ell_m)\|\varphi^1\|_{p_1}\|\varphi^2\|_{p_2}\cdots\|\varphi^m\|_{p_m}$$

这里 $1 < p_1, p_2, \cdots, p_m < \infty$, $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_m} = 1$. 我们记

$$\mathcal{P} = (p_1, p_2, \cdots, p_m)$$

为这样的一个 Hölder 共轭序列．我们也记

$$\ell = (\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_m)$$

为一个正整数的 m- 重，并使得 $1 \le \ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_m \le n$, $n = \ell_1 + \ell_2 + \cdots + \ell_m$. 对 m- 重空间 $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m) : \Omega \to \bigwedge^{\ell_1} \times \bigwedge^{\ell_2} \times \cdots \times \bigwedge^{\ell_m}$ 中的形式

$$\varphi^i \in L^{p_i}\left(\Omega, \bigwedge^{\ell_i}\right)$$

我们引进符号

$$L^{\mathcal{P}}\left(\Omega, \bigwedge^{\ell_1} \times \cdots \times \bigwedge^{\ell_m}\right)$$

我们将需要一类空间,记为 $L^{p)}(\Omega, \bigwedge^{\ell})$, 它有所有微分 ℓ- 形式 $\omega \in \bigcap_{1 \le s < p} L^s(\Omega, \bigwedge^{\ell})$ 组成，使得

$$\|\omega\|_{p),\Omega} = \sup_{1 \le s < p}\left[(p-s) \fint_{\Omega} |\omega(x)|^s \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{s}} < \infty$$

这是 $L^{p)}(\Omega, \bigwedge^{\ell})$ 的一个范数，使得 $L^{p)}(\Omega, \bigwedge^{\ell})$ 成为一个 Banach 空间．我们引进下面的量：对 $\omega \in L^{p)}(\Omega, \bigwedge^{\ell})$,

$$(\omega)_{p,\Omega} = \limsup_{s \nearrow p}\left[(p-s) \fint_{\Omega} |\omega(x)|^s \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{s}} < \infty$$

显然，对所有 $\omega \in L^{p)}(\Omega, \bigwedge^{\ell})$, 有

$$(\omega)_{p,\Omega} \le \|\omega\|_{p),\Omega}$$

下面的结果出自 Iwaniec, Lutoborski [1]. 设 $Q \subset \mathrm{R}^n$ 是一个方体或球．对每一 $y \in Q$ 对应于一个线性算子 $K_y : C^{\infty}(Q, \bigwedge^{\ell}) \to C^{\infty}(Q, \bigwedge^{\ell})$, 定义为

$$(K_y\omega)(x; \xi_1, \cdots, \xi_l) = \int_0^1 t^{\ell-1}\omega(tx + y - ty; x - y, \xi_1, \cdots, \xi_{\ell-1})\mathrm{d}t$$

并有分解

$$\omega = \mathrm{d}(K_y\omega) + K_y(\mathrm{d}\omega)$$

我们对于所有 Q 中的点 y, 定义另一个线性算子 $T_Q : C^\infty(Q, \bigwedge^\ell) \to C^\infty(Q, \bigwedge^\ell)$ 为对所有 Q 中的 y 平均 K_y, 即

$$T_Q\omega = \int_Q \varphi(y)K_y\omega \mathrm{d}y$$

这里 $\varphi \in C_0^\infty(Q)$ 正规化为 $\int_Q \varphi(y)\mathrm{d}y = 1$. 我们定义 ℓ- 形式 $\omega_Q \in \mathcal{D}'(Q, \bigwedge^\ell)$ 为对所有 $\omega \in L^p(Q, \bigwedge^\ell), 1 \le p < \infty$,

$$\omega_Q = |Q|^{-1} \int_Q \omega(y)\mathrm{d}y, \quad \ell = 0, \qquad \omega_Q = \mathrm{d}(T_Q\omega), \quad \ell = 1, 2, \cdots, n$$

有了上面的记号与结果做准备，我们现在可以叙述本文的主要结果. 它考虑保证 Φ 的 Jacobi 可积的极小条件，即

定理 7.1 设 $B \subset 3B$ 为 Ω 中给定的同心球，且

$$\Phi = (\varphi^1 \cdots, \varphi^m) = (\mathrm{d}\alpha^1, \cdots, \mathrm{d}\alpha^m) : 3B \to \bigwedge^{\ell_1} \times \cdots \times \bigwedge^{\ell_m}, \ell_1 + \cdots + \ell_m = n$$

是一个恰当微分形式的 m- 重, 保向, 并且 $\varphi^j \in \bigcap_{1 \le s < p_j} L^s(3B, \bigwedge^{\ell_j}), j = 1, 2, \cdots, m$, 使得

$$\sup_{1 \le s < p_j} (p_j - s) \int_{3B} |\varphi^j|^s \mathrm{d}x < \infty$$

则， $J(x, \Phi)$ 在 $3B$ 中局部可积，且成立下面的一致估计：

$$\fint_B J(x, \Phi) \le C(n, p_1, p_2, \cdots, p_m) \|\mathrm{d}\alpha^1\|_{p_1), 3B} \cdots \|\mathrm{d}\alpha^m||_{p_m), 3B} \tag{7.2}$$

假设 $1 < p_1, p_2, \cdots, p_m < \infty$, $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_m} = 1$. 设 ε 是一个小正数，使得

$$2\varepsilon \le \min_{1 \le i \le m} (p_i - 1)$$

定义 τ_j 为

$$\tau_j = 1 - (p_j - \varepsilon) \left(1 - \sum_{k=1, k \ne j}^{m} \frac{1}{p_k - \varepsilon} \right) > 0, \quad j = 1, 2, \cdots, m \tag{7.3}$$

我们现在有下面有用的结果. 有关零切分量的概念和性质, 参见 Iwaniec, Martin [1, P231].

引理 7.1 设 Ω 为一个球或整个空间 R^n. 设 $\Phi=(\varphi^1,\varphi^2,\cdots,\varphi^m)$ 是一个恰当微分形式的 m- 重，且

$$\varphi^j\in L^{p_j-\varepsilon}\left(\Omega,\bigwedge^{\ell_j}\right),\quad j=1,2,\cdots,m,\quad \ell_1+\ell_2+\cdots+\ell_m=n$$

至少其中之一，例如 φ^j, 在 $\partial\Omega$ 有零切分量. 则

$$\int_\Omega|\varphi^j|^{-\tau_j}\varphi^1\wedge\cdots\wedge\varphi^m\leq C(\mathcal{P})\tau_j\|\varphi^1\|_{p_1-\varepsilon}\cdots\|\varphi_j\|_{p_j-\varepsilon}^{1-\tau_j}\cdots\|\varphi^m\|_{p_m-\varepsilon}\tag{7.4}$$

证明 不失一般性，假设 (7.4) 中的 $j=1$. 首先观察到 $p_1-\varepsilon>1$, 所以我们至少能利用下面的在 Ω 中的 Hodge 分解

$$L^p(\Omega,\bigwedge)=\mathrm{d}W^{1,p}(\Omega,\bigwedge)\oplus\mathrm{d}^*W^{1,p}(\Omega,\bigwedge)$$

见 Iwaniec, Martin [1], 这里 $1<p<\infty$. 在 Iwaniec, Martin [1] 的 (10.71) 与 (10.72) 中定义的投影算子可以用一个明显的方式推广为

$$E:L^p(\Omega,\bigwedge)\to\mathrm{d}W^{1,p}(\Omega,\bigwedge)$$
$$E^*:L^p(\Omega,\bigwedge)\to\mathrm{d}^*W^{1,p}(\Omega,\bigwedge)$$

事实上，这些算子可被二阶 Rieze 变换表示.

我们现在将形式 $|\varphi^1|^{-\tau_1}\varphi^1\in L^{\frac{p_1-\varepsilon}{1-\tau_1}}(\Omega,\bigwedge^{\ell_1})$ 看作是 $L^{\frac{p_1-\varepsilon}{1-\tau_1}}(\Omega,\bigwedge)$ 中的一个元素并分解它. 即

$$|\varphi^1|^{-\tau_1}\varphi^1=\mathrm{d}\alpha+\mathrm{d}^*\beta$$

我们选择这个分解的正规化使得 $\alpha_T=0$. 形式 $\mathrm{d}\alpha$ 与 $\mathrm{d}^*\beta$ 是唯一决定的并可被算子 $E:L^{\frac{p_1-\varepsilon}{1-\tau_1}}(\Omega,\bigwedge^{\ell_1})\to L^{\frac{p_1-\varepsilon}{1-\tau_1}}(\Omega,\bigwedge^{\ell_1})$ 和 $E^*:L^{\frac{p_1-\varepsilon}{1-\tau_1}}(\Omega,\bigwedge^{\ell_1})\to L^{\frac{p_1-\varepsilon}{1-\tau_1}}(\Omega,\bigwedge^{\ell_1})$ 表示. 事实上,

$$\mathrm{d}\alpha=E(|\varphi^1|^{-\tau_1}\varphi^1)$$
$$\mathrm{d}^*\beta=E^*(|\varphi^1|^{-\tau_1}\varphi^1)$$

则我们有下面的对恰当项的界

$$\|\mathrm{d}\alpha\|_{\frac{p_1-\varepsilon}{1-\tau_1}}\leq C(p_1)\|\varphi^1\|_{p_1-\varepsilon}^{1-\tau_1}$$

因为 φ^1 是恰当的，一个关键是 $E^*\varphi^1=0$, 所以我们可以记 $\mathrm{d}^*\beta$ 为一个换位子

$$\mathrm{d}^*\beta = E^*(|\varphi^1|^{-\tau_1}\varphi^1) - |E^*\varphi^1|^{-\tau_1}E^*\varphi^1$$

这里 $|E^*\varphi^1|^{-\tau_1}E^*\varphi^1$ 理解为系数为零的微分形式. 现在 [9] 中的定理 13.2.1 为我们提供了一个在对余恰当项的 $L^{\frac{p_1-\varepsilon}{1-\tau_1}}$- 估计中的额外的因子 τ_1

$$\|\mathrm{d}^*\beta\|_{\frac{p_1-\varepsilon}{1-\tau_1}} \le C(p_1)\tau_1\|\varphi_1\|_{p_1-\varepsilon}^{1-\tau_1} \tag{7.5}$$

现在可以如下计算积分

$$\int_\Omega |\varphi^1|^{-\tau_1}\varphi^1\wedge\varphi^2\wedge\cdots\wedge\varphi^m = \int_\Omega(\mathrm{d}\alpha+\mathrm{d}^*\beta)\wedge\varphi^2\wedge\cdots\wedge\varphi^m$$

$$= \int_\Omega \mathrm{d}\alpha\wedge\varphi^2\wedge\cdots\wedge\varphi^m + \int_\Omega \mathrm{d}^*\beta\wedge\varphi^2\wedge\cdots\wedge\varphi^m \tag{7.6}$$

这里，因为 $\mathrm{d}\alpha\in L^{\frac{p_1-\varepsilon}{1-\tau_1}}(\Omega,\bigwedge^{\ell_1})$, $\mathcal{P}_1=(\frac{p_1-\varepsilon}{1-\tau_1},p_2-\varepsilon,\cdots,p_m-\varepsilon)$ 表示一个 Höder 共轭对， α 在 $\partial\Omega$ 上具有零切分量，由分部积分得到

$$\int_\Omega \mathrm{d}\alpha\wedge\varphi^2\wedge\cdots\wedge\varphi^m = 0$$

现在 Hölder 不等式， (7.4), 联合估计 (7.3) 得到

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |\varphi^1|^{-\tau_1}\varphi^1\wedge\varphi^2\wedge\cdots\wedge\varphi^m\\
&= \int_\Omega \mathrm{d}^*\beta\wedge\varphi^2\wedge\cdots\wedge\varphi^m\\
&\le \|\mathrm{d}^*\beta\|_{\frac{p_1-\varepsilon}{1-\tau_1}}\|\varphi^2\|_{p_2-\varepsilon}\cdots\|\varphi^m\|_{p_m-\varepsilon}\\
&\le C(p_1)\tau_1\|\varphi^1\|_{p_1-\varepsilon}^{1-\tau_1}\|\varphi_2\|_{p_2-\varepsilon}\cdots\|\varphi^m\|_{p_m-\varepsilon}
\end{aligned}$$

即为所求.

下面两个结果出自 Iwaniec, Lutoborski[1]. 它们分别是微分形式的 Poincaré-型不等式和 Poincaré-Sobolev 不等式.

命题 7.1 设 U 为 R^n 中的有界正则区域. 假设 $\omega\in\mathcal{D}'(U,\bigwedge^\ell)$, 且 $\mathrm{d}\omega\in L^p(U,\bigwedge^{\ell+1}),\ell=0,1,\cdots,n$. 则 $\omega-\omega_U$ 属于 $L^p(U,\bigwedge^\ell)$, 并有下面的一致估计：

$$\left(\int_U|\omega-\omega_U|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p} \le C(p,n,U)\left(\int_U|d\omega|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p} \tag{7.7}$$

命题 7.2 假设 Q 为一个 R^n 中的方体或球. 设 $\omega \in \mathcal{D}'(Q, \bigwedge^\ell)$, $\mathrm{d}\omega \in L^p(Q, \bigwedge^{\ell+1})$, $\ell = 0, 1, \cdots, n$, $1 < p < n$. 则 $\omega - \omega_Q$ 属于 $L^{np/(n-p\,)}(Q, \bigwedge^\ell)$, 并有下面的一致估计:

$$\left(\int_Q |\omega - \omega_Q|^{np/(n-p\,)}\mathrm{d}x\right)^{(n-p)/np} \le C_p(n)\left(\int_Q |d\omega|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \tag{7.8}$$

其中常数 $C_p(n)$ 不依赖于 Q.

Strofolini[1] 中证明了一个相似的结果.

命题 7.3 假设 Q 为一个 R^n 中的方体或球. 设 $\omega \in \mathcal{D}'(Q, \bigwedge^\ell)$ 满足 $\mathrm{d}^*\omega \in L^p(Q, \bigwedge^{\ell-1}), \ell = 0, 1, \cdots, n, 1 < p < n$. 则存在一个余闭微分形式 $\omega_Q^* \in L^p(Q, \bigwedge^{\ell-1})$ 使得

$$\left(\int_Q |\omega - \omega_Q^*|^{np/(n-p)}\mathrm{d}x\right)^{(n-p)/np} \le C_p(n)\left(\int_Q |\mathrm{d}^*\omega|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}, \tag{7.9}$$

其中常数 $C_p(n)$ 不依赖于 Q.

在命题 7.1 的应用中，有必要对某些标准区域 (例如方体，球等) 知道 (7.7) 中的常数如何依赖于区域的大小. 这个问题可由一个简单的变量变换回答. 我们只考虑球的情形，对方体可类似考虑.

引理 7.2 设 $B = B(a, r)$ 为一个中心在 a, 半径为 $r > 0$ 的球. 假设 $\omega \in \mathcal{D}'(B, \bigwedge^\ell)$, $\mathrm{d}\omega \in L^p(B, \bigwedge^{\ell+1}), \ell = 0, 1, \cdots, n$. 则 $\omega - \omega_B$ 属于 $L^p(B, \bigwedge^\ell)$, 并有下面的一致估计:

$$\left(\int_B |\omega - \omega_B|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \le C_p(n) r \left(\int_B |d\omega|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \tag{7.10}$$

证明 设 $B_1 = B(0, 1)$, σ 为 R^n 中的变换 $x \mapsto a + rx$. 显然， $\sigma(B_1) = B(a, r)$. σ 的 Jacobi 等于 R^n. 设

$$\omega = \sum_I \omega_I(x)\mathrm{d}x^I$$

这里 $I = (i_1, i_2, \cdots, i_\ell)$ 为一个 ℓ- 重， $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_\ell \le n$. 设 $v = \omega \circ \sigma = \sum_I (\omega_I(x) \circ \sigma)\mathrm{d}x = \sum_I v_I(x)\mathrm{d}x^I$. 若 $\mathrm{d}\omega \in L^p(B, \bigwedge^{\ell+1})$, 则由 [R] 中的定理 2.8 知 $\mathrm{d}v = \mathrm{d}(\omega \circ \sigma) \in L^p(B_1, \bigwedge^{\ell+1})$. 而且，对每一 $i = 1, 2, \cdots, n$ 与每个 ℓ- 重 I, 有

$$\frac{\partial v_I}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial \omega_I}{\partial y_i}(a + rx)r$$

这样

$$\begin{aligned}\int_{B_1}\left|\frac{\partial v_I}{\partial x_i}(x)\right|^p \mathrm{d}x &= \int_{B_1}\left|\frac{\partial \omega_I}{\partial y_i}(a+rx)\right|^p r^p \mathrm{d}x\\ &= r^{p-n}\int_{B_1}\left|\frac{\partial \omega_I}{\partial y_i}(a+rx)\right|^p \mathrm{R}^n \mathrm{d}x = r^{p-n}\int_{B(a,r)}\left|\frac{\partial \omega_I}{\partial y_i}\right|^p \mathrm{d}x\end{aligned}$$

由此得到

$$\|v\|_{L_p^1(B_1)} = r^{1-n/p}\|\omega\|_{L_p^1(B)} \tag{7.11}$$

从 (7.7), 我们有

$$\|v - v_{B_1}\|_{p,B_1} \le C_p(n)\|\mathrm{d}v\|_{p,B_1} \tag{7.12}$$

显然，由 (7.2), $v_{B_1} = \omega_B$, 因此，

$$\begin{aligned}\|v - v_{B_1}\|_{p,B_1} &= \left(\frac{1}{\mathrm{R}^n}\int_{B_1}|v(a+rx) - v_{B_1}|^p \mathrm{R}^n \mathrm{d}x\right)^{1/p}\\ &= r^{-n/p}\|\omega - \omega_B\|_{p,B}\end{aligned} \tag{7.13}$$

联合 (7.11)-(7.13), 得到 (7.10).

定理 7.1 的证明 下面，符号 $C(*)$ 表示只依赖于 $*$ 的一个常数，在不同的位置它可能取不同的数值.

因为 $\sum_{k=1}^m \frac{1}{p_k} = 1$, 则至少 $p_k, k = 1, 2, \cdots, m$ 之一满足条件 $1 < p_k \le n$. 不失一般性，假设 $1 < p_m \le n$.

设 $B = B(a,r) \subset B(a,2r) = 2B \subset B(a,3r) = 3B$ 为给定的 Ω 中的同心球. 设 $\phi \in C_0^\infty(2B)$, $\psi \in C_0^\infty(3B)$ 为截断函数，使得

(i) $0 \le \phi \le 1$, 在 B 上 $\varphi \equiv 1$, 且 $|\nabla\varphi| \le \frac{C(n)}{r}$

(ii) $0 \le \psi \le 1$, 在 B 上 $\psi \equiv 1$, 且 $|\nabla\psi| \le \frac{C(n)}{r}$

我们将考察具有紧支集的辅助的 m- 重 $\Psi \in W^{1,\mathcal{P}-\varepsilon}(\Omega, \bigwedge^{\ell_1-1} \times \cdots \times \bigwedge^{\ell_m-1})$, 它定义为

$$\Psi = (\Psi^1, \Psi^2, \cdots, \Psi^m) = (\psi\alpha^1, \cdots, \psi\alpha^{m-1}, \phi\alpha^m)$$

明显看到

$$\begin{aligned}&\phi|\mathrm{d}\alpha^1|^{-\tau_1}\mathrm{d}\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\alpha^m\\ =\ &|\mathrm{d}\Psi^1|^{-\tau_1}\mathrm{d}\Psi^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\Psi^m - \alpha^m|\mathrm{d}\alpha^1|^{-\tau_1}\mathrm{d}\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\alpha^{m-1} \wedge \mathrm{d}\phi\end{aligned}$$

这里 τ_1 由 (6.3) 定义. 对上面不等式右端第一项应用引理 1, 我们看到

$$\int_B \phi|\mathrm{d}\alpha^1|^{-\tau_1}\mathrm{d}\alpha^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\alpha^m \le \int_{3B}|\nabla\phi||\alpha^m||\mathrm{d}\alpha^1|^{1-\tau_1}|\mathrm{d}\alpha^2|\cdots|\mathrm{d}\alpha^{m-1}|\mathrm{d}x+$$

$$+C_{p_1}\tau_1\|\mathrm{d}\Psi^1\|_{p_1-\varepsilon,3B}^{1-\tau_1}\|\mathrm{d}\Psi^2\|_{p_2-\varepsilon,3B}\cdots\|\mathrm{d}\Psi^m\|_{p_m-\varepsilon,3B} \tag{7.14}$$

由 Ψ 的定义和对 ϕ 与 ψ 的条件 (i) 与 (ii) 我们有

$$|\mathrm{d}\Psi^j|\le|\mathrm{d}\alpha^j|+\frac{C(n)}{r}|\alpha^j|,\quad j=1,2,\cdots,m$$

因此,

$$\begin{aligned}&\|\mathrm{d}\Psi^j\|_{p_j-\varepsilon,3B}^{p_j-\varepsilon}=\int_{3B}|\mathrm{d}\Psi^j|^{p_j-\varepsilon}\mathrm{d}x\\ \le\ &2^{p_j-1-\varepsilon}\int_{3B}|\mathrm{d}\alpha^j|^{p_j-\varepsilon}\mathrm{d}x+2^{p_j-1-\varepsilon}r^{\varepsilon-p_j}\int_{3B}|\alpha^j|^{p_j-\varepsilon}\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{7.15}$$

注意到对 α^j 加上一个闭形式对 $\mathrm{d}\alpha^j$ 没有影响，我们可以假设 α^j 的在球 $3B$ 上的平均 α^j_{3B} 为零. 这使我们可以对 (6.15) 中的第二项应用引理 2 中证明的 Poincaré-型不等式. 因此,

$$\|\mathrm{d}\Psi^j\|_{p_j-\varepsilon,3B}\le 2\|\mathrm{d}\alpha^j\|_{p_j-\varepsilon,3B}$$

这样，利用 $(\mathrm{d}\alpha^1,\cdots,\mathrm{d}\alpha^m)$ 为保向的事实，不等式 (6.14) 成为

$$\begin{aligned}&\int_B|\mathrm{d}\alpha^1|^{-\tau_1}J(x,\Phi)=\int_B\varphi|\mathrm{d}\alpha^1|^{-\tau_1}J(x,\Phi)\\ \le\ &\int_{3B}|\nabla\phi||\alpha^m||\mathrm{d}\alpha^1|^{1-\tau_1}|\mathrm{d}\alpha^2|\cdots|\mathrm{d}\alpha^{m-1}|\mathrm{d}x+\\ &+C(p_1)\tau_1\|\mathrm{d}\alpha^1\|_{p_1-\varepsilon,3B}^{1-\tau_1}\|\mathrm{d}\alpha^2\|_{p_2-\varepsilon,3B}\cdots\|\mathrm{d}\alpha^m\|_{p_m-\varepsilon,3B}\end{aligned} \tag{7.16}$$

首先估计 (7.16) 右端第二项. 因为 $\frac{1-\tau_1}{p_1-\varepsilon}+\frac{1}{p_2-\varepsilon}+\cdots+\frac{1}{p_m-\varepsilon}=1$, 从 τ_1 的定义, 等式 $\sum_{j=1}^m\frac{1}{p_j}=1$ 与 L'Hospital 法则容易看到 $\tau_1=O(\varepsilon)(\varepsilon\to0^+)$. 因此,

$$\begin{aligned}&C(p_1)\tau_1\|\mathrm{d}\alpha^1\|_{p_1-\varepsilon,3B}^{1-\tau_1}|\|\mathrm{d}\alpha^2\|_{p_2-\varepsilon,3B}\cdots\|\mathrm{d}\alpha_m\|_{p_m-\varepsilon,3B}\\ &C(p_1)\frac{\tau_1}{\varepsilon}\left[\varepsilon\int_{3B}|\mathrm{d}\alpha^1|^{p_1-\varepsilon}\mathrm{d}x\right]^{\frac{1-\tau_1}{p_1-\varepsilon}}\cdots\left[\varepsilon\int_{3B}|\mathrm{d}\alpha^m|^{p_m-\varepsilon}\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p_m-\varepsilon}}\end{aligned} \tag{7.17}$$

(7.17) 右端的的极限当 $\varepsilon\to0^+$ 时是有限的，因为它趋向于

$$C(p_1)|3B|(\mathrm{d}\alpha^1)_{p_1),3B}\cdots(\mathrm{d}\alpha^m)_{p_m),3B} \tag{7.18}$$

(7.18) 右端第一项可如下估计．由 Hölder 不等式得，

$$\begin{aligned}
&\int_{3B} |\nabla\phi||\alpha^m||\mathrm{d}\alpha^1|^{1-\tau_1}|\mathrm{d}\alpha^2|\cdots|\mathrm{d}\alpha^{m-1}|\mathrm{d}x \\
\leq\ & \frac{C(n)}{r}\int_{3B} |\mathrm{d}\alpha^1|^{1-\tau_1}|\mathrm{d}\alpha^2|\cdots|\mathrm{d}\alpha^{m-1}||\alpha^m|\mathrm{d}x \\
\leq\ & \frac{C(n)}{r}\left[\int_{3B}|\mathrm{d}\alpha^1|^{(1-\tau_1)t_1}\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{t_1}}\left[\int_{3B}|\mathrm{d}\alpha^2|^{t_2}\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{t_2}}\times\cdots\times \\
& \times\left[\int_{3B}|\mathrm{d}\alpha^{m-1}|^{t_{m-1}}\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{t_{m-1}}}\left[\int_{3B}|\alpha^m|^{t_m}\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{t_m}}
\end{aligned} \tag{7.19}$$

这里

$$\begin{aligned}
&t_2 = \frac{p_2(p_2-\varepsilon)}{p_2+\sigma}, \\
&\cdots, \\
&t_{m-1} = \frac{p_{m-1}(p_{m-1}-\varepsilon)}{p_{m-1}+\sigma}, \\
&t_m = \frac{np_m(p_m-\varepsilon)}{n(p_m+\sigma)-p_m(p_m-\varepsilon)}
\end{aligned} \tag{7.20}$$

σ 是一个充分小的正数，满足

$$\sigma\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{p_j^2} < \frac{1}{n} \tag{7.21}$$

t_1 满足 $\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{t_j}=1$. 这些条件保证了

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} t_1 = \overline{t_1} = \left(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{n}+\sigma\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{p_j^2}\right)^{-1} < p_1$$

由假设 $1<p_m\leq n$, (7.19) 右端最后一项可利用 Poincaré-Sobolev 不等式 (见命题 6.2) 估计．事实上，若我们取 $p=\frac{p_m(p_m-\varepsilon)}{p_m+\sigma}<n$ 及 $q=t_m=\frac{np_m(p_m-\varepsilon)}{n(p_m+\sigma)-p_m(p_m-\varepsilon)}$ ，则 $q=\frac{np}{n-p}$. 由假设， α^m 在球 $3B$ 上的平均 α^m_{3B} 为零，则

$$\begin{aligned}
&\left[\int_{3B}|\alpha^m|^{t_m}\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{t_m}} = \left[\int_{3B}|\alpha^m|^{\frac{np_m(p_m-\varepsilon)}{n(p_m+\sigma)-p_m(p_m-\varepsilon)}}\mathrm{d}x\right]^{\frac{n(p_m+\sigma)-p_m(p_m-\varepsilon)}{np_m(p_m-\varepsilon)}} \\
&\leq C\left[\int_{3B}|\mathrm{d}\alpha^m|^{\frac{p_m(p_m-\varepsilon)}{p_m+\sigma}}\mathrm{d}x\right]^{\frac{p_m+\sigma}{p_m(p_m-\varepsilon)}}
\end{aligned}$$

这样， (7.19) 成为

$$\begin{aligned}
&\int_{3B}|\nabla\phi||\alpha^m||\mathrm{d}\alpha^1|^{1-\tau_1}|\mathrm{d}\alpha^2|\cdots|\mathrm{d}\alpha^{m-1}|\mathrm{d}x\\
\le\;&\frac{C(n)}{r}\left[\int_{3B}|\mathrm{d}\alpha^1|^{(1-\tau_1)t_1}\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{t_1}}\left[\int_{3B}|\mathrm{d}\alpha^2|^{t_2}\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{t_2}}\times\cdots\times \qquad (7.22)\\
&\times\left[\int_{3B}|\mathrm{d}\alpha^{m-1}|^{t_{m-1}}\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{t_{m-1}}}\left[\int_{3B}|\mathrm{d}\alpha^m|^{\frac{p_m(p_m-\varepsilon)}{p_m+\sigma}}\mathrm{d}x\right]^{\frac{p_m+\sigma}{p_m(p_m-\varepsilon)}}
\end{aligned}$$

联合 (7.16), (7.17) 与 (7.22), 并在不等式两端除以 $|B|=\omega_n\mathrm{R}^n$, 这里 ω_n 为 R^n 中单位球的体积，有

$$\begin{aligned}
&\int_B|\mathrm{d}\alpha^1|^{-\tau_1}J(x,\Phi)\\
\le\;&C(p_1)\frac{\tau_1}{\varepsilon}\left[\varepsilon\fint_{3B}|\mathrm{d}\alpha^1|^{p_1-\varepsilon}\mathrm{d}x\right]^{\frac{1-\tau_1}{p_1-\varepsilon}}\cdots\left[\varepsilon\fint_{3B}|\mathrm{d}\alpha^m|^{p_m-\varepsilon}\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p_m-\varepsilon}}\\
&+C(n)\left[\fint_{3B}|\mathrm{d}\alpha^1|^{(1-\tau_1)t_1}\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{t_1}}\left[\fint_{3B}|\mathrm{d}\alpha^2|^{t_2}\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{t_2}}\times\cdots\times\\
&\times\left[\fint_{3B}|\mathrm{d}\alpha^{m-1}|^{t_{m-1}}\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{t_{m-1}}}\left[\fint_{3B}|\mathrm{d}\alpha^m|^{\frac{p_m(p_m-\varepsilon)}{p_m+\sigma}}\mathrm{d}x\right]^{\frac{p_m+\sigma}{p_m(p_m-\varepsilon)}}
\end{aligned}$$

考察当 ε 下降并趋于零时的极限，由 Fatou 引理得到

$$\begin{aligned}
&\int_B J(x,\Phi)\le C(p_1)(|\mathrm{d}\alpha^1|)_{p_1,3B}\cdots(|\mathrm{d}\alpha^m|)_{p_m,3B}\\
&+C(n)\left[\fint_{3B}|\mathrm{d}\alpha^1|^{\overline{t_1}}\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{\overline{t_1}}}\left[\fint_{3B}|\mathrm{d}\alpha^2|^{\frac{p_2^2}{p_2+\sigma}}\mathrm{d}x\right]^{\frac{p_2+\sigma}{p_2^2}}\cdots\left[\fint_{3B}|\mathrm{d}\alpha^m|^{\frac{p_{m-1}^2}{p_m+\sigma}}\right]^{\frac{p_m+\sigma}{p_m^2}}\\
\le\;&C(n,p_1)\||\mathrm{d}\alpha^1|\|_{p_1),3B}\cdots\||\mathrm{d}\alpha^m|\|_{p_m),3B}
\end{aligned}$$

这完成了定理 7.1 的证明.

§2.8 外幂的可积性

2.8.1 引言

首先回忆第 2 章的一些符号和结果. 设 $\bigwedge^l=\bigwedge^l(\mathrm{R}^n)$, $l=1,2,\cdots,n$, 为 R^n 中的 l- 外形式 (也称 l- 余向量) 的线性空间. 它是一个反变 l- 张量的线性空间. 记 $\bigwedge^0=\mathrm{R}$, 对 $l<0$ 和 $l>n$, 记 $\bigwedge^l(\mathrm{R}^n)=0$. $\bigwedge^l(\mathrm{R}^n)$ 的维数为 $\binom{n}{l}$. 设 Ω 为 R^n 中的区域，此区域上的一个微分 l- 形式 α 是 Ω 上的一个局部可积函数或是 Schwarz 分

布，取值于 $\bigwedge^l = \bigwedge^l(\mathrm{R}^n)$. 记 $\alpha \in D'(\Omega, \bigwedge^l)$. 若设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为 R^n 中的坐标，则微分形式 $\alpha : \Omega \to \bigwedge^l(\mathrm{R}^n)$ 可唯一的写为

$$\alpha(x) = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_l \le n} \alpha_{i_1 \cdots i_l}(x) dx_I = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_l \le n} \alpha_{i_1 \cdots i_l}(x) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_l}$$

这里 $\alpha_{i_1 \cdots i_l}(x)$ 为函数或分布，且 $I = (i_1, i_2, \cdots, i_l)$ 是有序的 l- 重指标.

设 G 为 $n \times n$ 阶矩阵. G 的 l- 外幂是线性算子

$$G_\#^l : \bigwedge^l(\mathrm{R}^n) \to \bigwedge^l(\mathrm{R}^n)$$

定义为

$$G_\#^l(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_l) = G\alpha_1 \wedge G\alpha_2 \wedge \cdots \wedge G\alpha_l$$

这里 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_l \in \bigwedge^1(\mathrm{R}^n)$. 我们有明显的关系式 $G_\#^n = \det G$ 和 $G_\#^1 = G$. 线性变换 $G_\#^l$ 可被一个 $\binom{n}{l} \times \binom{n}{l}$ 阶矩阵表示，其元素为矩阵 G 的 $l \times l$ 阶子式，并记为 $G_\#^l = (\det A_J^I) \in \mathrm{R}^{\binom{n}{l} \times \binom{n}{l}}$, 这里 I, J 是有序的 l- 重指标且

$$\det A_J^I = \det \begin{bmatrix} A_{j_1}^{i_1} \cdots A_{j_l}^{i_1} \\ \cdots \\ A_{j_1}^{i_l} \cdots A_{j_l}^{i_l} \end{bmatrix}$$

Hodge 星算子是一个线性算子 $* : \bigwedge^l \to \bigwedge^{n-l}$, 由下列规则定义：对所有的 $\alpha, \beta \in \bigwedge^l$,

$$\alpha \wedge *\beta = \beta \wedge *\alpha = \langle \alpha, \beta \rangle \mathrm{vol}$$

这里 vol 为体积形式. 我们需要引入余指标的概念. 对 l- 重指标 $I = (i_1, i_2, \cdots, i_l)$, 其余指标为 $(n-l)$- 重指标 $N - I$, 由 $N = (1, 2, \cdots, n)$ 中删去那些 $i_k \in I$ 之后得到. 符号 $\sigma(I, N-I) \in \{-1, 1\}$ 为诱导置换的符号，或奇或偶.

若 A, B 是两个矩阵，则定义 $\langle A, B \rangle = Tr(B^T A), |A|^2 = \langle A, A \rangle$, 这里 B^T 是矩阵 B 的转置. 对映射 $f = (f^1, f^2, \cdots, f^n) \in W_{loc}^{1,q}(\Omega, \mathrm{R}^n), (1 \le q < \infty)$, 记 $Df(x) = \left(\frac{\partial f^i}{\partial x_j}\right)_{1 \le i,j \le n}$ 和 $J_f(x) = \det Df(x)$ 分别是 f 的 Jacobi 矩阵和 Jacobi 行列式.

Jacobi 函数和 $Df(x)$ 的 l- 外幂 $D_\#^l f(x)$ 在许多研究领域中出现，例如测度和积分的几何理论、映射度理论、拟共形分析和非线性弹性理论. 通常，积分 Jacobi

和 l- 外幂 $D^l_{\#}f(x)$ 的范数是必要的. 保证 $D^l_{\#}f(x)$ 的可积性的通常的假设是 $f\in W^{1,l}_{loc}(\Omega,\mathrm{R}^n)$. 现在，自然会提出这样的问题：在 f 的什么条件下，能保证 $D^l_{\#}f(x)$ 的范数是局部可积的？在没有任何限制条件下，我们没有理由期望 $D^l_{\#}f(x)$ 的可积性次数不同于 $|Df(x)|^l$ 的可积性次数. 一个令人吃惊的事实是：只要一个条件，即所有的 $\sigma(J,N-J)\mathrm{det}A^I_J$ 在 Ω 中不改变符号，比如说非负，就可推出 $D^l_{\#}f(x)$ 的范数的高阶可积性.

许多的文章在假设 $J_f(x)\geq 0$ a.e.Ω 的前提下, 研究 Jacobi 的可积性. 在 [1] 中, S.Müller 证明了若 $|Df|\in L^n(\Omega)$, 则对 Ω 中的任意紧子集 K, 有 $J_f\in \mathrm{L}\log\mathrm{L}(K)$, (也见 [2]). 在 [3] 中， T.Iwaniec 和 C.Sbordone 证明了当 $|Df|\in \mathrm{L}^n(\log\mathrm{L})^{-1}(\Omega)$ 时，有 $J_f\in L^1_{loc}(\Omega)$. 在 [4] 中， H.Brézis, N.Fusco 和 C.Sbordone 在上面结果的基础之上证明了当 $|Df|\in \mathrm{L}^n(\log\mathrm{L})^{-\alpha}(\Omega), 0\leq\alpha\leq 1$ 时, 对 Ω 内任意的紧子集 K, 都成立 $J_f\in \mathrm{L}(\log\mathrm{L})^{1-\alpha}(K)$. 关于 Jacobi 的可积性的相关工作可参考 [5-13]. 在本文中，我们在假设所有的 $\sigma(J,N-J)\mathrm{det}A^I_J$ 在 Ω 内是非负的条件下，研究空间映射的微分 l- 外幂范数的可积性. 主要结果是下面的定理.

定理 8.1 设 $B\subset 3B$ 是 R^n 中给定的同心球，映射 $f\in\bigcap_{1\leq s<l}W^{1,s}(3B,\mathrm{R}^n)$ 满足

$$\sup_{1\leq s<l}(l-s)\int_{3B}|Df(x)|^s dx<\infty$$

则 $|D^l_{\#}f(x)|\in L^1_{loc}(3B)$, 且有下面的一致估计

$$\begin{aligned}
&\fint_B |D^l_{\#}f(x)|dx\\
\leq\ & C(n)\left(\fint_{3B}|Df(x)|^{\frac{nl}{n+1}}dx\right)^{\frac{n+1}{n}}+C(n,l)\limsup_{s\uparrow l}(l-s)\fint_{3B}|Df(x)|^s dx\\
\leq\ & C(n,l)\sup_{1\leq s<l}\left((l-s)\fint_{3B}|Df(x)|^s dx\right)^{\frac{l}{s}}
\end{aligned}\tag{8.1}$$

这里 $\fint_B g$ 是 g 在 B 上的积分平均.

推论 8.1 设 $B\subset 3B$ 是 R^n 中的同心球，映射 $f:3B\to\mathrm{R}^n, J_f(x)\geq 0$ 是 $\bigcap_{1\leq s<n}W^{1,s}(3B,\mathrm{R}^n)$ 中的保向映射，满足

$$\sup_{1\leq s<n}(n-s)\int_{3B}|Df(x)|^s dx<\infty$$

则 $J_f(x)\in L^1_{loc}(3B)$, 并有下面的一致估计

$$\begin{aligned}&\fint_B J_f(x)dx\\ \le\ & C(n)\left(\fint_{3B}|Df(x)|^{\frac{n^2}{n+1}}dx\right)^{\frac{n+1}{n}}+C(n)\limsup_{s\uparrow n}(n-s)\fint_{3B}|Df(x)|^s dx \qquad (8.2)\\ \le\ & C(n)\sup_{1\le s<n}\left((n-s)\fint_{3B}|Df(x)|^s dx\right)^{\frac{n}{s}}\end{aligned}$$

此推论就是 [3, 定理 2]. 如果在定理 1 中设 $l=n$, 容易证明上面的推论.

设 $f=(f^1,\cdots,f^n)$ 是满足定理 1 条件的映射, $I=(i_1,\cdots i_l)$ 和 $J=(j_1,\cdots,j_l)$ 是 $N=\{1,2,\cdots,n\}$ 中两个固定的有序的 l- 重指标, $2\le l\le n$. 考虑它们的 $(n-l)$-重余指标 $H=N-I=(h_1,\cdots,h_{n-l})$ 与 $K=N-J=(k_1,\cdots,k_{n-l})$. 定义映射 g, 其分支为

$$g^i(x)=\begin{cases} f^i(x), & i\in I\\ x_{k_m}, & i=h_m\in H\end{cases}$$

其中 $i=1,2,\cdots,n$. 映射 f 的 Jacobi 矩阵 Df 的子式

$$\frac{\partial f^I}{\partial x^I}=\frac{\partial(f^{i_1},\cdots,f^{i_l})}{\partial(x_{j_1},\cdots,x_{j_l})}$$

在不计符号情况下等于映射 g 的 Jacobi 行列式

$$\frac{\partial f^I}{\partial x^J}=\mp\det Dg$$

这蕴涵

$$|D^l_{\#}f(x)|=|\det Dg|$$

因此，我们得到定理 1 的如下推论.

推论 8.2 在定理 8.1 的假设条件下，有

$$\begin{aligned}&\fint_B|\det Dg(x)|dx\\ \le\ & C(n)\left(\fint_{3B}|Dg(x)|^{\frac{nl}{n+1}}dx\right)^{\frac{n+1}{n}}+C(n,l)\limsup_{s\uparrow l}(l-s)\fint_{3B}|Dg(x)|^s dx\\ \le\ & C(n,l)\sup_{1\le s<l}\left((l-s)\fint_{3B}|Dg(x)|^s dx\right)^{\frac{l}{s}}\end{aligned}$$

此推论可看作文 [3] 在允许映射 $g=(g^1,\cdots,g^n)$ 的一些分支为 Lipschitz 函数时各向异性形式下的结论.

为证定理 1, 我们需要下面的基本估计.

定理 8.2 若 $F=(F^1,F^2,\cdots,F^n)\in W_0^{1,l-\varepsilon}(\mathrm{R}^n,\mathrm{R}^n),(-\infty<\varepsilon<1,1\le l\le n)$, 则对任意有序 $(n-l)$- 重指标 $J=(j_1,j_2,\cdots,j_{n-l})$, 下面的估计成立

$$\begin{aligned}&\int_{\mathrm{R}^n}|dF^1|^{-\varepsilon}dF^1\wedge dF^2\wedge\cdots\wedge dF^l\wedge dx^J\\ \le\ & C(n,l)|\varepsilon|\|dF^1\|_{l-\varepsilon}^{1-\varepsilon}\|dF^2\|_{l-\varepsilon}\cdots\|dF^l\|_{l-\varepsilon}\\ \le\ & C(n,l)|\varepsilon|\int_{\mathrm{R}^n}|DF|^{l-\varepsilon}dx\end{aligned}\tag{8.3}$$

公式 (7.3) 右端的因子 $|\varepsilon|$ 是这个不等式的本质. 因为由 Hardamard 不等式，我们总有点态估计 $|dF^1|^{-\varepsilon}dF^1\wedge dF^2\wedge\cdots\wedge dF^l\wedge dx^J\le|DF|^{l-\varepsilon}$.

2.8.2 定理 8.2 和定理 8.1 的证明

定理 8.2 **的证明** 若 $|dF^1|=0$, 则 $|dF^1|^{-\varepsilon}dF^1$ 可理解为具有 0 系数的 1- 外形式，结论明显. 否则，考虑下面的 Hodge 分解

$$|\bigtriangledown F^1|^{-\varepsilon}\bigtriangledown F^1=\eta+\bigtriangledown u,\tag{8.6}$$

这里 $u\in W^{1,\frac{l-\varepsilon}{1-\varepsilon}}(\mathrm{R}^n)$ 且 $\mathrm{div}\eta=0$. 由引理 1 中的 (5) 式，有下面的估计

$$\|\eta\|_{\frac{l-\varepsilon}{1-\varepsilon}}\le C(n,l)|\varepsilon|\|\bigtriangledown F^1\|_{l-\varepsilon}^{1-\varepsilon}.\tag{8.7}$$

为记号简便，我们用微分形式代替向量. 因此， R^n 中的向量 η 可看作一次微分形式， $\bigtriangledown u$ 可看作 du. 显然

$$dF^2\wedge\cdots\wedge dF^l\in L^{\frac{l-\varepsilon}{l-1}}(\mathrm{R}^n,\bigwedge{}^{l-1})$$

因为 $\frac{l-\varepsilon}{l-1}$ 和 $\frac{l-\varepsilon}{1-\varepsilon}$ 是 Hölder 共轭指数，由 Stokes 定理并由一个逼近讨论，得到

$$\int_{\mathrm{R}^n}du\wedge dF^2\wedge\cdots\wedge dF^l\wedge dx^J=\int_{\mathrm{R}^n}d(udF^2\wedge\cdots\wedge dF^l\wedge dx^J)=0$$

现在，方程 (6), Hölder 不等式和 Hadamard 不等式导致

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathrm{R}^n} |dF^1|^{-\varepsilon} dF^1 \wedge dF^2 \wedge \cdots \wedge dF^l \wedge dx^J \\
= &\int_{\mathrm{R}^n} \eta \wedge dF^2 \wedge \cdots \wedge dF^l \wedge dx^J \\
\leq &\|\eta\|_{\frac{l-\varepsilon}{1-\varepsilon}} \|dF^2 \wedge \cdots \wedge dF^l\|_{\frac{l-\varepsilon}{l-1}} \\
\leq &C(n,l)|\varepsilon| \|dF^1\|_{l-\varepsilon}^{1-\varepsilon} \|dF^2\|_{l-\varepsilon} \cdots \|dF^l\|_{l-\varepsilon} \\
\leq &C(n,l)|\varepsilon| \int_{\mathrm{R}^n} |DF(x)|^{l-\varepsilon} dx
\end{aligned}$$

定理 8.2 得证.

定理 8.1 **的证明** 在此段中， $C(n,l)$ 表示仅依赖于 n 和 l 的常数，在不同的场合可能取值不同. 设 $B = B(a,r) \subset B(a,2r) = 2B \subset B(a,3r) = 3B$ 是 R^n 中给定的同心球， $\phi \in C_0^\infty(2B)$ 和 $\psi \in C_0^\infty(3B)$ 是截断函数，使得

(i) $0 \leq \phi \leq 1$, $\phi = 0$ on B, $|\bigtriangledown \phi| \leq \frac{C(n)}{r}$,

(ii) $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi = 0$ on $2B$, $|\bigtriangledown \psi| \leq \frac{C(n)}{r}$

我们考察具有紧支集的辅助映射 $F \in W^{1,l-\varepsilon}(\mathrm{R}^n, \mathrm{R}^n), 0 < \varepsilon < 1$, 定义为

$$F = (F^1, F^2, \cdots, F^n) = (\psi f^{i_1}, \psi f^{i_2}, \cdots, \psi f^{i_{l-1}}, \phi f^{i_l}, \cdots, \phi f^{i_n})$$

这里 $I = (i_1, i_2, \cdots, i_l)$ 是有序的 l- 重指标. 容易看到对任意有序的 $(n-l)$- 重指标 $K = (k_1, k_2, \cdots, k_{n-l})$

$$\begin{aligned}
&\phi |df^{i_1}|^{-\varepsilon} df^{i_1} \wedge df^{i_2} \wedge \cdots \wedge df^{i_l} \wedge dx^K \\
= &|dF^1|^{-\varepsilon} dF^1 \wedge dF^2 \wedge \cdots \wedge dF^l \wedge dx^K \\
&-f^{i_l} |df^{i_1}|^{-\varepsilon} df^{i_1} \wedge df^{i_2} \wedge \cdots \wedge df^{i_{l-1}} \wedge d\phi \wedge dx^K
\end{aligned}$$

对映射 F 应用上面的定理 2, 有

$$\begin{aligned}
&\int_{2B} \phi |df^{i_1}|^{-\varepsilon} df^{i_1} \wedge df^{i_2} \wedge \cdots \wedge df^{i_l} \wedge dx^K \\
\leq &\int_{3B} |\bigtriangledown \phi||f||Df|^{l-1-\varepsilon} dx + C(n,l)\varepsilon \int_{3B} |DF|^{l-\varepsilon} dx
\end{aligned} \tag{8.8}$$

由条件 (i) 和 (ii), 我们有点态估计 $|DF| \leq C(n) r^{-1}|f| + C(n)|Df|$. 因此

$$\int_{3B} |DF|^{l-\varepsilon} dx \leq C(n) r^{\varepsilon - l} \int_{3B} |f|^{l-\varepsilon} dx + C(n) \int_{2B} |Df|^{l-\varepsilon} dx. \tag{8.9}$$

注意到对映射 f 加任意常向量， Df 不受影响. 因此，可假设映射 f 在球 $2B$ 上的积分平均是 0. 这使得我们可以对不等式 (879) 的右端的第一个积分应用 Poincaré 不等式.

$$\int_{3B}|DF|^{l-\varepsilon}dx \le C(n)\int_{3B}|Df|^{l-\varepsilon}dx$$

这样， (8.8) 成为

$$\begin{aligned} &\int_{2B}\phi(x)|df^{i_1}|^{-\varepsilon}df^{i_1}\wedge df^{i_2}\wedge\cdots\wedge df^{i_l}\wedge dx^K \\ \le\ &\int_{3B}|\bigtriangledown\phi||f||Df|^{l-1-\varepsilon}dx + C(n,l)\varepsilon\int_{3B}|Df|^{l-\varepsilon}dx. \end{aligned}\tag{8.10}$$

现在我们估计上面不等式的右端第一项. 若取 $p'=\frac{n(l-\varepsilon)}{n-l+1+\varepsilon}$ 和 $q'=\frac{n(l-\varepsilon)}{(n+1)(l-1-\varepsilon)}$, 则 $1<p',q'<\infty$, $\frac{1}{p'}+\frac{1}{q'}=1$. 由条件 (i) 和 Hölder 不等式得到

$$\begin{aligned} &\int_{3B}|\bigtriangledown\phi||f||Df|^{l-1-\varepsilon}dx \\ \le\ &\frac{C(n)}{r}\left[\int_{3B}|f|^{\frac{n(l-\varepsilon)}{n-l+1+\varepsilon}}dx\right]^{\frac{n-l+1+\varepsilon}{n(l-\varepsilon)}}\left[\int_{3B}|Df|^{\frac{n(l-\varepsilon)}{n+1}}dx\right]^{\frac{(n+1)(l-1-\varepsilon)}{n(l-\varepsilon)}}. \end{aligned}\tag{8.11}$$

再取 $p''=\frac{n(l-\varepsilon)}{n+1}$ 和 $q''=\frac{n(l-\varepsilon)}{n-l+1+\varepsilon}$, 则 $1<p''<n, q''=\frac{np''}{n-p''}$. Poincaré-Sobolev 不等式导致

$$\left[\int_{3B}|f|^{\frac{n(l-\varepsilon)}{n-l+1+\varepsilon}}dx\right]^{\frac{n-l+1+\varepsilon}{n(l-\varepsilon)}} \le C(n)\left[\int_{3B}|Df|^{\frac{n(l-\varepsilon)}{n+1}}dx\right]^{\frac{n+1}{n(l-\varepsilon)}}.\tag{8.12}$$

联合 (8.11) 与 (8.12) 得到

$$\int_{3B}|\bigtriangledown\phi||f||Df|^{l-1-\varepsilon}dx \le \frac{C(n)}{r}\left[\int_{3B}|Df|^{\frac{n(l-\varepsilon)}{n+1}}dx\right]^{\frac{n+1}{n}}.\tag{8.13}$$

因此 (8.10) 成为

$$\begin{aligned} &\int_{2B}\phi|df^{i_1}|^{-\varepsilon}df^{i_1}\wedge df^{i_2}\wedge\cdots\wedge df^{i_l}\wedge dx^K \\ \le\ &\frac{C(n)}{r}\left[\int_{3B}|Df|^{\frac{n(l-\varepsilon)}{n+1}}dx\right]^{\frac{n+1}{n}} + C(n,l)\varepsilon\int_{3B}|Df|^{l-\varepsilon}dx. \end{aligned}\tag{8.14}$$

由所有的 $\sigma(J,N-J)\det A_J^I$ 非负的基本假设，容易看到

$$\begin{aligned}
&\int_{2B}\phi|df^{i_1}|^{-\varepsilon}df^{i_1}\wedge df^{i_2}\wedge\cdots\wedge df^{i_l}\wedge dx^K\\
=&\int_{2B}\phi|df^{i_1}|^{-\varepsilon}\det A_{N-K}^I dx^{N-K}\wedge dx^K\\
=&\int_{2B}\phi|df^{i_1}|^{-\varepsilon}\det A_{N-K}^I\sigma(N-K,K)dx \qquad (8.15)\\
=&\int_{2B}\phi|df^{i_1}|^{-\varepsilon}\det A_J^I\sigma(J,N-J)dx\\
\geq&\int_{B}|Df|^{-\varepsilon}\det A_J^I\sigma(J,N-J)dx.
\end{aligned}$$

联合 (8.14) 与 (8.15), 得到

$$\begin{aligned}
&\int_B|Df|^{-\varepsilon}\det A_J^I\sigma(J,N-J)dx\\
\leq&\ \frac{C(n)}{r}\left[\int_{3B}|Df|^{\frac{n(l-\varepsilon)}{n+1}}dx\right]^{\frac{n+1}{n}}+C(n,l)\varepsilon\int_{3B}|Df|^{l-\varepsilon}dx. \qquad (8.16)
\end{aligned}$$

对所有的有序的 l- 重指标 $I=(i_1,i_2,\cdots,i_l)$ 和有序的 $(n-l)$- 重指标 $K=(k_1,k_2,\cdots,k_{n-l})$ 求和，有

$$\begin{aligned}
&\int_B|Df|^{-\varepsilon}|D^l_\# f(x)|dx\leq\int_B|Df|^{-\varepsilon}\sum_{I,J}\sigma(J,N-J)\det A_J^I dx\\
\leq&\ \frac{C(n)}{r}\left[\int_{3B}|Df|^{\frac{n(l-\varepsilon)}{n+1}}dx\right]^{\frac{n+1}{n}}+C(n,l)\varepsilon\int_{3B}|Df|^{l-\varepsilon}dx
\end{aligned}$$

上面不等式的两边同除以 $|B|$, 有

$$\begin{aligned}
&\fint_B|Df|^{-\varepsilon}|D^l_\# f(x)|dx\\
\leq&\ C(n)\left[\fint_{3B}|Df|^{\frac{n(l-\varepsilon)}{n+1}}dx\right]^{\frac{n+1}{n}}+C(n,l)\varepsilon\fint_{3B}|Df|^{l-\varepsilon}dx
\end{aligned}$$

余下的是考虑当 $\varepsilon>0$ 趋向于零的极限，定理 1 由 Fatou 引理得到.

本章注记：本章 2.1 节参考了 Bojarski, Iwaniec [1]; 2.2 节参考了高红亚，刘超 [1], 郑神州，方爱农 [1] 和 Reshetnyak[1]; 2.3 节来自高红亚 [1], Faraco, Zhong[1]; 2.4 节来源于高红亚 [2], 高红亚，周树清，孟玉芹 [1] 和高红亚，刘海红，周树清 [1]; 2.5 节取自郑神州，方爱农 [2], 高红亚，李彤 [1]; 2.6 节取自高红亚，刘超，李军伟 [1]; 2.7 节取自高红亚，赵洪亮 [2]; 2.8 节取自高红亚，王建普 [1].

第 3 章　Beltrami 方程组

§3.1 Beltrami 方程组和拟正则映射

本章讨论 Beltrami 方程组. 设 $\Omega \subset \mathbf{R}^n (n \geq 2)$ 为有界区域, $f = (f^1, f^2, \cdots, f^n) \in W^{1,p}_{loc}(\Omega, \mathbf{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, 为空间映射. 本章的一个基本假定为 $J_f(x) \geq 0$, 即 f 为保向映射.

拟正则映射的分析理论依赖于偏微分方程，调和分析和复变函数论的进展. 与拟正则映射理论密切相关的是 n- 维空间中的 Beltrami 方程组

$$D^t f(x) Df(x) = J_f^{2/n}(x) G(x), \tag{1.1}$$

这里 $D^t f(x)$ 为 $Df(x)$ 的转置矩阵， $G(x) \in S(n)$ 为正定，对称且行列式为 1 的 n 阶方阵，且满足下面的一致椭圆型条件

$$\alpha|\xi|^2 \leq \langle G(x)\xi, \xi \rangle \leq \beta|\xi|^2, \quad 0 < \alpha \leq \beta < \infty. \tag{1.2}$$

若 $G(x) = \mathrm{Id}$, 这里 Id 为恒等矩阵，则

$$D^t f(x) Df(x) = J_f^{2/n}(x) \mathrm{Id}$$

称为 n- 维空间中的 Cauchy-Riemann 方程组.

当 $n = 2$ 时， $G(x) = (G_{ij}(x))_{1 \leq i,j \leq 2}$. 取 $z = x_1 + ix_2$, $f(z) = f^1(x_1, x_2) + if^2(x_1, x_2)$, (1.1) 成为复平面上的单特征 Beltrami 方程

$$f_{\overline{z}} = \mu(z) f_z, \tag{1.3}$$

其中

$$\mu(z) = \frac{G_{11} - G_{22} + 2iG_{12}}{G_{11} + G_{22} + 2}.$$

由条件 (1.2) 知

$$|\mu(z)| \leq k_1 < 1, \tag{1.4}$$

满足条件 (1.4) 的复方程 (1.3) 已被广泛研究，参见 Vekya[1].

n- 维空间 Beltrami 方程组 (1.1) 是超定的、非线性的、退化非一致的，直接研究其广义解的性质异常困难.

下面说明：若 $f \in W^{1,p}_{loc}(\Omega, \mathrm{R}^n)$ 为满足条件 (1.2) 的 (1.1) 的广义解，则 f 为拟正则映射. 事实上， (1.1) 左右取迹得

$$|Df|^2 \le J_f^{2/n}(x)\mathrm{Trace}G(x) \le n\beta J_f^{2/n}(x).$$

由此，

$$|Df|^n \le (n\beta)^{n/2} J_f(x),$$

即 f 满足 $K = \beta^{n/2}$ 的 (1.5) 式.

§3.2 Beltrami 方程组弱解分量函数的弱单调性

定义 2.1 实值函数 $u \in W^{1,1}(\Omega)$ 称为弱单调的，若任意球 $B \subset \Omega$ 及任意常数 $m \le M$, 当

$$\varphi = (u-M)^+ - (m-u)^+ \in W_0^{1,1}(B) \tag{2.1}$$

时，有

$$m \le u(x) \le M, \quad \text{a.e. } x \in B.$$

注 2.1 连续函数 u 在区域 $\Omega \subset \mathrm{R}^n$ 中单调，是指对任意球 $B \subset \Omega$,

$$\mathrm{osc}(u, B) \le \mathrm{osc}(u, \partial B).$$

粗略讲，u 在 Ω 满足最大值最小值原理. 弱单调性概念是单调性概念的推广，它首先由 Manfredi[1] 引入，并且是研究映射函数连续性的有力工具，见 Iwaniec, Koskela, Onninen [1].

注 2.2 (2.1) 等价于

$$|M-u| - |u-m| + 2u - m - M \in W_0^{1,1}(B).$$

本节研究具有特征矩阵 $G(x)$ 的 Beltrami 方程组

$$D^t f(x) Df(x) = J_f^{2/n}(x) G(x), \tag{2.2}$$

其中

$$\alpha(x)|\xi|^2 \le \langle G(x)\xi, \xi\rangle \le \beta(x)|\xi|^2, \quad 0 < \alpha(x) \le \beta(x) < \infty. \tag{2.3}$$

注 2.3 当 $0 < \alpha \le \alpha(x) \le \beta(x) \le \beta < \infty$ 时， (2.3) 就是 (1.2), 由此条件 (2.3) 比条件 (1.2) 广.

仿照 Iwaniec, Martin[2] 的推导过程, 可得 (2.2) 的弱解的每一分量函数 $u(x) = f^i(x), i = 1, 2, \cdots, n$ 都满足 Leary-Lions 方程

$$\mathrm{div} A(x, \bigtriangledown u(x)) = 0 \tag{2.4}$$

其中

$$A(x,\xi) = \langle G^{-1}(x)\xi, \xi\rangle^{\frac{n-1}{2}} G^{-1}(x)\xi$$

由 (2.3) 知道

$$\frac{1}{\beta(x)}|\xi|^2 \le \langle G^{-1}(x)\xi, \xi\rangle \le \frac{1}{\alpha(x)}|\xi|^2.$$

这样，算子 $A : \Omega \times \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$ 满足

(i) 单调性条件： $\langle A(x,\xi), \xi\rangle \ge \frac{1}{\beta(x)^{n/2}}|\xi|^n$;

(ii) 控制增长条件： $|A(x,\xi)| \le \frac{1}{\alpha(x)^{n/2}}|\xi|^{n-1}$;

(iii) 齐次性条件： $A(x, \lambda\xi) = |\lambda|^{n-2}\lambda A(x,\xi), \quad \forall \lambda \in \mathrm{R}$.

为了研究满足条件 (2.3) 的 Beltrami 方程组弱解分量函数的弱单调性，需要引入一类函数空间

$$L^{\infty)}(\Omega) = \left\{\tau(x) : \sup_{0<\varepsilon<1}\left(\varepsilon\int_\Omega |\tau(x)|^{1/\varepsilon}dx\right)^\varepsilon < \infty\right\}.$$

首先， $L^{\infty)}(\Omega)$ 为线性空间显然，且 $L^\infty(\Omega) \subset L^{\infty)}(\Omega)$. 这是因为，设 $\tau(x) \in L^\infty(\Omega)$, 则存在常数 $M > 0$, s.t. $|\tau(x)| \le M$, a.e. Ω. 于是

$$\sup_{0<\varepsilon<1}\left(\varepsilon\int_\Omega |\tau(x)|^{1/\varepsilon}dx\right)^\varepsilon \le M \sup_{0<\varepsilon<1} \varepsilon^\varepsilon|\Omega|^\varepsilon \le M\max\{1, |\Omega|\} < \infty$$

其次，对 $\tau(x) \in L^{\infty)}$, 定义

$$\|\tau(x)\|_{L^{\infty)}} = \sup_{0<\varepsilon<1}\left(\varepsilon\int_\Omega |\tau(x)|^{1/\varepsilon}dx\right)^\varepsilon$$

下证 $\|\tau(x)\|_{L^{\infty)}}$ 为范数.

(1) $\|\tau\|_{L^{\infty)}} \geq 0, \quad \|\tau\|_{L^{\infty)}} = 0 \Leftrightarrow \tau = 0$ 显然.

(2) $\|\gamma+\tau\|_{L^{\infty)}} \leq \|\gamma\|_{L^{\infty)}} + \|\tau\|_{L^{\infty)}}$

证明　由 Minkowski 不等式，得到

$$\begin{aligned}
&\|\gamma+\tau\|_{L^{\infty)}} = \sup_{0<\varepsilon<1}\left(\varepsilon\int_\Omega |\gamma+\tau|^{1/\varepsilon}dx\right)^\varepsilon \\
&\leq \sup_{0<\gamma<1}\varepsilon^\varepsilon\left[\left(\int_\Omega |\gamma|^{1/\varepsilon}dx\right)^\varepsilon + \left(\int_\Omega |\tau|^{1/\varepsilon}dx\right)^\varepsilon\right] \\
&\leq \|\gamma\|_{L^{\infty)}} + \|\tau\|_{L^{\infty)}}.
\end{aligned}$$

(3) $\|\lambda\tau(x)\|_{L^{\infty)}} = |\lambda|\|\tau(x)\|_{L^{\infty)}}$ 显然.

于是， $BL^{\infty)}(\Omega)$ 成为赋范线性空间.

注 2.4 引入 $L^{\infty)}(\Omega)$ 空间的思想来源于大 $L^p(\Omega)$ 空间 $L^{p)}(\Omega,\theta)$, 它由所有满足

$$u \in \bigcap_{1\leq s<p} L^s(\Omega)$$

且

$$\mathcal{L}^p(u;\varepsilon,\theta) = \left[\varepsilon^\theta \fint_\Omega |u|^{p-\varepsilon}dx\right]^{1/(p-\varepsilon)} < \infty,\ 0\leq\theta\leq 1,\ 0<\varepsilon\leq p-1$$

的函数组成，其范数由

$$\|u\|_{p,\theta)} = \sup_{0<\varepsilon\leq p-1}\mathcal{L}^p(u;\varepsilon,\theta)$$

给出． Sobolev 空间 $W^{1,p}(\Omega)$ 在范数

$$\|\cdot\|_p + \|\nabla\cdot\|_{p,\theta)}$$

之下的完备化空间称为大 Sobolev 空间, 记为 $W^{1,p)}(\Omega;\theta)$. 于是, 若 $u\in W^{1,p)}(\Omega,\theta)$, $0\leq\theta<1$, 则

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega |\nabla u|^{p-\varepsilon}dx = 0.$$

下面首先研究 Leray-Lions 方程 (A- 调和方程)

$$\operatorname{div}A(x,\bigtriangledown u(x)) = 0. \tag{2.4}$$

设 $A(x,\xi):\Omega\times \mathrm{R}^n\to\mathrm{R}^n$ 满足：存在 $1<p<\infty$, $0<\gamma(x)\leq\tau(x)<\infty$, a.e.$\Omega$, 使得

(i) $\langle A(x,\xi),\xi\rangle \geq \gamma(x)|\xi|^p$;

(ii) $|A(x,\xi)| \leq \tau(x)|\xi|^{p-1}$;

定义 2.2 称 $u \in W^{1,r}(\Omega)$, $\max\{1, p-1\} < r < p$ 为 (2.4) 的很弱解，若对所有的 $\varphi \in W_0^{1,\frac{r}{r-p+1}}(\Omega)$, 有

$$\int_\Omega \langle A(x, \bigtriangledown u(x)), \bigtriangledown \varphi(x)\rangle dx = 0.$$

定理 2.1 设 $\gamma(x) > 0$, a.e. Ω, $\tau(x) \in BL^{\infty)}(\Omega)$. 若 $u \in W^{1,p)}(\Omega)$ 为 (2.1) 的很弱解，则 u 弱单调.

证明 对任意球 $B \subset \Omega$, $\forall 0 < \varepsilon < 1$, 设

$$\psi = (u-M)^+ - (m-u)^+ \in W_0^{1,p-\varepsilon}(B)$$

则

$$\bigtriangledown\psi = \begin{cases} 0, & 若 m \leq u(x) \leq M, \\ \bigtriangledown u(x), & 否则，例如在集合 E \subset B 上. \end{cases}$$

取 Hodge 分解

$$|\bigtriangledown \psi|^{-(p-\varepsilon)\varepsilon} \bigtriangledown \psi = \bigtriangledown\varphi + h,$$

则有

$$\|h\|_{\frac{p-\varepsilon}{1-(p-\varepsilon)\varepsilon}} \leq C(p-\varepsilon)\varepsilon \| \bigtriangledown \psi\|_{p-\varepsilon}^{1-(p-\varepsilon)\varepsilon}.$$

于是，由很弱解的定义得到

$$\int_E \langle A(x, \bigtriangledown u), |\bigtriangledown u|^{-(p-\varepsilon)\varepsilon} \bigtriangledown u\rangle dx = \int_E \langle \mathcal{A}(x, \bigtriangledown u), h\rangle dx.$$

由 Hölder 不等式得到

$$\begin{aligned}
&\int_E \gamma(x)|\bigtriangledown u|^{p-(p-\varepsilon)\varepsilon} dx \leq \int_E \tau(x)|\bigtriangledown u|^{p-1}|h|dx \\
&\leq \|\tau(x)\|_{\frac{p-\varepsilon}{(p-1-(p-\varepsilon)\varepsilon}} \|\bigtriangledown u\|_{p-\varepsilon}^{p-1} \|h\|_{\frac{p-\varepsilon}{1-(p-\varepsilon)\varepsilon}} \\
&\leq C(p-\varepsilon)\varepsilon \|\tau\|_{\frac{p-\varepsilon}{(p-1-\varepsilon)\varepsilon}} \|\bigtriangledown u\|_{p-\varepsilon}^{p-(p-\varepsilon)\varepsilon} \\
&\leq C(p-\varepsilon)\left(\varepsilon\int_E |\tau(x)|^{\frac{p-\varepsilon}{(p-1-\varepsilon)\varepsilon}} dx\right)^{\frac{(p-1-\varepsilon)\varepsilon}{p-\varepsilon}} \left(\varepsilon\int_E |\bigtriangledown u|^{p-\varepsilon} dx\right)^{\frac{p-(p-\varepsilon)\varepsilon}{p-\varepsilon}},
\end{aligned}$$

故定义空间

$$BL^{\infty)}(\Omega) = \left\{\tau(x) : \sup_{0<\varepsilon<1} \left(\varepsilon \int_\Omega |\tau(x)|^{1/\varepsilon} dx\right)^\varepsilon < \infty\right\} \tag{2.5}$$

和

$$VL^{\infty)} = \left\{\tau(x) \in BL^{\infty)} : \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\varepsilon \int_\Omega |\tau(x)|^{1/\varepsilon} dx\right)^\varepsilon = 0\right\}. \tag{2.6}$$

上式右端第一项积分

$$= \left(\frac{p-\varepsilon}{p-1-\varepsilon}\right)^{\frac{p-1-\varepsilon}{p-\varepsilon}} \left(\frac{(p-1-\varepsilon)\varepsilon}{p-\varepsilon} \int_E |\tau(x)|^{\frac{p-\varepsilon}{p-1-\varepsilon}} dx\right)^{\frac{(p-1-\varepsilon)\varepsilon}{p-\varepsilon}} < \infty$$

而右端第二项积分当 $\varepsilon \to 0$ 时 $\to 0$. 这样，上式右端 $\to 0$, 从而 $\bigtriangledown u(x) = 0$, a.e.$E$, 于是 $u \in W^{1,p)}(\Omega)$ 弱单调. 证毕.

由前面的推导知, Beltrami 方程组的每一分量函数 $u(x) = f^i(x)(i = 1, 2, \cdots, n)$ 满足 A- 调和方程 (2.4), 其中 $\gamma(x) = \beta(x)^{-n/2}$, $\tau(x) = \alpha(x)^{-n/2}$. 这样便有

定理 2.2 *若设* $\alpha(x) < \infty$, a.e. Ω, *且* $\beta(x)^{-n/2} \in L^{\infty)}(\Omega)$, *则* Beltrami *方程组* (2.2) *的每一分量函数* $f^i \in W^{1,n)}(\Omega, \theta)$, $0 \le \theta < 1$, $i = 1, 2, \cdots, n$, *在* Ω *中弱单调.*

§3.3 具有两个特征矩阵的 Beltrami 方程组

考虑高维空间具有两个特征矩阵 $H(x), G(x)$ 的 Beltrami 方程组

$$D^t f(x) H(x) Df(x) = J_f(x)^{2/n} G(x) \tag{3.1}$$

这里 $H(x), G(x) \in S(n)$ 为正定，对称，行列式为 1 的 $n \times n$ 矩阵，并满足以下条件：对任意 $\xi, \eta \in \mathbf{R}^n$, 有

$$\alpha_1 |\xi|^2 \le \langle H(x)\xi,\, \xi\rangle \le \beta_1 |\xi|^2 \tag{3.2}$$

$$\alpha_2 |\eta|^2 \le \langle G(x)\eta,\, \eta\rangle \le \beta_2 |\eta|^2 \tag{3.3}$$

其中 $0 < \alpha_1 \le \beta_1 < \infty$, $0 < \alpha_2 \le \beta_2 < \infty$.

双特征 Beltrami 方程组 (1.1) 有明确的几何意义： f 将 Ω 中的点 x 附近的特征为 $H(x)$ 的无穷小椭圆映射为 $f(\Omega)$ 中的点 $f(x)$ 附近的特征为 $G(x)$ 的无穷小椭圆.

当 $n=2$ 时, $H(x)=(H_{i,j}(x))_{1\le i,j\le 2}$, $G(x)=(G_{i,j}(x))_{1\le i,j\le 2}$, 取 $z=x_1+ix_2$, $f(z)=f^1(x_1,x_2)+if^2(x_1,x_2)$, (3.1) 成为复平面上的双特征 Beltrami 方程

$$f_{\overline{z}}=\mu_1(z)f_z+\mu_2(z)\overline{f_z}, \tag{3.4}$$

其中

$$\mu_1(z)=\frac{G_{11}-G_{22}+2iG_{12}}{G_{11}+G_{22}+H_{11}+H_{22}},$$
$$\mu_2(z)=\frac{H_{22}-H_{11}-2iH_{12}}{G_{11}+G_{22}+H_{11}+H_{22}}.$$

由条件 (3.2), (3.3) 知

$$|\mu(z)|\le k_1<1, \tag{3.5}$$

$$|\mu_1(z)|+|\mu_2(z)|\le k_2<1. \tag{3.6}$$

郑神州 [4] 在 $H(x),G(x)\in C^{k,\alpha}(\Omega,\mathrm{R}^{n\times n})$, $k\ge 1, 0<\alpha<1$ 的条件下, 将 (3.1) 转化为一个非齐次散度型椭圆方程,

$$\mathrm{div}A(x,Df)=B(x,Df),$$

并建立了其在 $W^{1,n}_{loc}(\Omega,\mathrm{R}^n)$ 上广义解的正则性, 即 $f(x)\in C^{k+1,\delta}_{loc}(\Omega,\mathrm{R}^n)$, $0<\delta<1$.

本节继续研究高维空间中具有两个特征矩阵的 Beltrami 方程组 (3.1). 通过能量及变分方法, 得到了方程组 (3.1) 对应的齐次散度型椭圆方程

$$\mathrm{div}\mathcal{A}(x,Df(x))=0,$$

并给出算子 $\mathcal{A}$ 满足的 Lipschitz 条件, 单调性条件和 $n-1$ 次齐次性条件. 主要结果为

定理 3.1 设 $f=(f^1,f^2,\cdots,f^n)\in W^{1,n}(\Omega,\mathbf{R}^n)$ 为双特征 Beltrami 方程组 (3.1) 的广义解, 则在分布意义下, 有

$$\mathrm{div}\mathcal{A}(x,Df(x))=0, \tag{3.7}$$

这里 $\mathcal{A}(x,A):\Omega\times\mathrm{R}^{n\times n}\to\mathrm{R}^{n\times n}$ 由下式给出

$$\mathcal{A}(x,A)=\langle AG^{-1},HA\rangle^{(n-2)/2}HAG^{-1}.$$

并且算子 $\mathcal{A}$ 满足

(i) Lipschitz 条件

$$|\mathcal{A}(x,A)-\mathcal{A}(x,B)|\le K_1(|A|+|B|)^{n-2}|A-B|,\quad K_1=(n-1)\left(\frac{\beta_1}{\alpha_2}\right)^{n/2},$$

(ii) 单调性条件

$$\langle\mathcal{A}(x,A)-\mathcal{A}(x,B),A-B\rangle\ge K_2(|A|+|B|)^{n-2}|A-B|^2,\quad K_2=2^{2-n}\left(\frac{\alpha_1}{\beta_2}\right)^{n/2},$$

(iii) $n-1$ 次齐次条件

$$\mathcal{A}(x,tA)=|t|^{n-2}t\mathcal{A}(x,A),\quad \forall t\in \mathrm{R}.$$

由于我们得到的是一个齐次的散度型椭圆方程，在研究方程组 (3.1) 广义解的性质时，不必对矩阵 $H(x),G(x)$ 附加其他的条件. 例如，容易得到 (3.1) 广义解的弱单调性结果.

定理 3.2 (3.1) 的广义解 $f=(f^1,f^2,\cdots,f^n)$ 的每一个分量函数 $u=f^i$, $i=1,2,\cdots,n$ 是弱单调的.

由定理 3.1 还可得到双特征 Beltrami 方程组 (3.1) 广义解的其他性质，从略.

下面引入作用于矩阵上的散度算子 div 的定义. 设 $M\in\mathbf{R}^{m\times n}$, $m,n\in\mathbf{N}$. 定义

$$\mathrm{div}M=(\mathrm{div}M^1,\mathrm{div}M^2,\cdots,\mathrm{div}M^m),$$

这里 M^i, $i=1,2,\cdots,m$ 为 $M\in\mathrm{R}^{m\times n}$ 的行向量.

在定理 6.1 的证明中需要用到下面的引理.

引理 3.1 设 $H,G\in GL(n)$. 对任意 $A\in\mathrm{R}^{n\times n}$, 有

$$n^{n/2}\det A\le\langle AG^{-1},\,HA\rangle^{n/2}.$$

等号成立当且仅当 $A^tHA=|\det A|^{2/n}G$.

证明 因 $H,G\in GL(n)$, 故存在正交矩阵 O_1,O_2 和对角矩阵 $\Gamma_1=\mathrm{diag}(\gamma^1,\gamma^2,\cdots,\gamma^n)$, $\Gamma_2=\mathrm{diag}(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)$, $\det\Gamma_1=\det\Gamma_2=1$, 使 $H=O_1^t\Gamma_1^2O_1=\sqrt{H}\sqrt{H}$, $G=O_2^t\Gamma_2^2O_2=\sqrt{G}\sqrt{G}$, 其中 $\sqrt{H}=O_1^t\Gamma_1O_1$, $\sqrt{G}=O_2^t\Gamma_2O_2$. 由 [3, (9.39)] 知，对任意 $B\in\mathrm{R}^{n\times n}$, 有

$$n^{n/2}|\det B|\le|B|^n.$$

等号成立当且仅当 $B^tB = |\det B|^{2/n}\mathrm{Id}$. 于是

$$\begin{aligned} & n^{n/2}\det A = n^{n/2}\det(\sqrt{H}A\sqrt{G^{-1}}) \le |\sqrt{H}A\sqrt{G^{-1}}|^n \\ = \ & \langle\sqrt{H}A\sqrt{G^{-1}},\ \sqrt{H}A\sqrt{G^{-1}}\rangle^{n/2} = \langle AG^{-1},\ HA\rangle^{n/2}, \end{aligned}$$

等号成立当且仅当

$$(\sqrt{H}A\sqrt{G^{-1}})^t(\sqrt{H}A\sqrt{G^{-1}}) = |\det(\sqrt{H}A\sqrt{G^{-1}})|^{2/n}\mathrm{Id},$$

即

$$A^tHA = |\det A|^{2/n}G.$$

下面的引理出自 Iwaniec, Martin [2, Lemma 4.7.2].

引理 3.2 若 $f, g \in W^{1,n}(\Omega, \mathrm{R}^n)$, 并在 Sobolev 意义下 $f = g$, $x \in \partial\Omega$, 则

$$\int_\Omega J_g(x)\,dx = \int_\Omega J_f(x)\,dx.$$

定理 3.1 **的证明** 由 (3.1) 知

$$D^tf(x)H(x)Df(x)G^{-1}(x) = J_f(x)^{2/n}\mathrm{Id}.$$

上式左右和 Id 做内积，有

$$\langle D^tf(x)H(x)Df(x)G^{-1}(x),\ \mathrm{Id}\rangle = J_f(x)^{2/n}\langle \mathrm{Id},\ \mathrm{Id}\rangle.$$

此即

$$\langle Df(x)G^{-1}(x),\ H(x)Df(x)\rangle^{n/2} = n^{n/2}J_f(x). \tag{3.8}$$

对任意 $g \in f + W_0^{1,n}(\Omega, \mathrm{R}^n)$, $J(x, g) \ge 0$, 定义能量泛函

$$\mathcal{E}[g] = \int_\Omega E(x, Dg)\,dx,$$

这里 $E(x, A) : \Omega \times \mathrm{R}^{n\times n} \to \mathbf{R}$ 称为储存能量函数，由

$$E(x, A) = \langle AG^{-1}, HA\rangle^{n/2}$$

定义. 由引理 3.1 知 g 的能量 $\mathcal{E}[g]$ 非负. 下证在相同边界条件下，双特征 Beltrami 方程组 (6.1) 的广义解 f 使能量泛函达到极小. 事实上，由 (3.8), 引理 3.2 和引理

3.1 得

$$\begin{aligned}\mathcal{E}[f] &= \int_\Omega \langle DfG^{-1}, HDf\rangle^{n/2}\,dx = n^{n/2}\int_\Omega J_f(x)\,dx \\ &= n^{n/2}\int_\Omega J(x,g)\,dx \le \int_\Omega \langle DgG^{-1}, HDg\rangle^{n/2}\,dx = \mathcal{E}[g].\end{aligned}$$

于是，任取 $\varphi \in W_0^{1,n}(\Omega, \mathrm{R}^n)$, 任意 $t \in \mathrm{R}$, 有

$$\mathcal{E}[f + t\varphi] \ge \mathcal{E}[f].$$

这样 $t \mapsto \mathcal{E}[f + t\varphi]$ 在 $t = 0$ 点达极小值. 因此

$$\left.\frac{d\mathcal{E}[f + t\varphi]}{dt}\right|_{t=0} = 0.$$

计算得知

$$\left.\frac{d\mathcal{E}[f + t\varphi]}{dt}\right|_{t=0} = \int_\Omega \langle\langle DfG^{-1}, HDf\rangle^{(n-2)/2} HDfG^{-1},\, D\varphi\rangle\,dx = 0.$$

这就是分布意义下 (3.1) 的解的定义.

下面推导算子 $\mathcal{A}(x, A)$ 满足的三个条件. 由 $H = O_1^t\Gamma_1^2O_1$, $G = O_2^t\Gamma_2O_2$, $\Gamma_1 = \mathrm{diag}(\gamma^1, \gamma^2, \cdots, \gamma^n)$, $\Gamma_2 = \mathrm{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n)$ 以及 (162)(6.3) 知，$\sqrt{\alpha_1} \le \gamma^i \le \sqrt{\beta_1}$, $\sqrt{1/\beta_2} \le \gamma_i^{-1} \le \sqrt{1/\alpha_2}$, $i = 1, 2, \cdots, n$. 由一个基本的不等式，见 [12, (35)]

$$||\xi|^{p-2}\xi - |\zeta|^{p-2}\zeta| \le (p-1)(|\xi| + |\zeta|)^{p-2}|\xi - \zeta|, \quad \forall \xi, \zeta \in \mathbf{R}^{n\times n}, p \ge 2$$

得到

$$\begin{aligned}
& |\mathcal{A}(x, A) - \mathcal{A}(x, B)| \\
= & \left|\langle AG^{-1}, HA\rangle^{(n-2)/2} HAG^{-1} - \langle BG^{-1}, HB\rangle^{(n-2)/2} HBG^{-1}\right| \\
= & \left|\sqrt{H}\left(|\sqrt{H}A\sqrt{G^{-1}}|^{n-2}\sqrt{H}A\sqrt{G^{-1}} - |\sqrt{H}B\sqrt{G^{-1}}|^{n-2}\sqrt{H}B\sqrt{G^{-1}}\right)\sqrt{G^{-1}}\right| \\
\le & (n-1)\sqrt{\frac{\beta_1}{\alpha_2}}\left(|\sqrt{H}A\sqrt{G^{-1}}| + |\sqrt{H}B\sqrt{G^{-1}}|\right)^{n-2}\left|\sqrt{H}(A - B)\sqrt{G^{-1}}\right| \\
\le & (n-1)\left(\frac{\beta_1}{\alpha_2}\right)^{n/2}(|A| + |B|)^{n-2}|A - B|.
\end{aligned}$$

这就是 Lipschitz 条件. 又由一个基本的不等式

$$\langle |\xi|^a\xi - |\zeta|^a\zeta,\, \xi - \zeta\rangle \ge \frac{1}{2}(|\xi|^a + |\zeta|^a)|\xi - \zeta|^2, \quad \forall\, a > 0,\ \xi, \zeta \in \mathrm{R}^{n\times n}$$

得到

$$
\begin{aligned}
& \langle \mathcal{A}(x,A)-\mathcal{A}(x,B),\, A-B\rangle \\
= & \left\langle \langle AG^{-1},HA\rangle^{(n-2)/2}HAG^{-1}-\langle BG^{-1},HB\rangle^{(n-2)/2}HBG^{-1},\, A-B\right\rangle \\
= & \left\langle |\sqrt{H}A\sqrt{G^{-1}}|^{n-2}\sqrt{H}A\sqrt{G^{-1}}-|\sqrt{H}B\sqrt{G^{-1}}|^{n-2}\sqrt{H}B\sqrt{G^{-1}},\, \sqrt{H}(A-B)\sqrt{G^{-1}}\right\rangle \\
\geq & \frac{1}{2}\left(|\sqrt{H}A\sqrt{G^{-1}}|^{n-2}+|\sqrt{H}B\sqrt{G^{-1}}|^{n-2}\right)|\sqrt{H}(A-B)\sqrt{G^{-1}}|^2 \\
\geq & \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_1}{\beta_2}\right)^{n/2}\left(|A|^{n-2}+|B|^{n-2}\right)|A-B|^2 \\
\geq & 2^{2-n}\left(\frac{\alpha_1}{\beta_2}\right)^{n/2}(|A|+|B|)^{n-2}|A-B|^2.
\end{aligned}
$$

此即单调性条件. 由 $A(x,A)$ 的定义易得 $n-1$ 次齐次性条件. 至此定理 3.1 证毕.

定理 3.2 的证明 由定理 3.1 和 [14, 15] 得到.

本章注记: 本章第 3.1 节取自高红亚 [4]. 第 3.2 节取自高红亚, 王红敏, 顾广泽 [1], 第 3.3 节取自高红亚, 赵丽芳 [1].

第 4 章 $\mathcal{A}$- 调和方程

Beltrami 方程组与 $\mathcal{A}$- 调和方程密切相关. Beltrami 方程组广义解的每一个分量函数是某 $\mathcal{A}$- 调和方程的解. 本章研究 $\mathcal{A}$- 调和方程的弱解, 很弱解与障碍问题.

§4.1 Beltrami 方程组与 $\mathcal{A}$- 调和方程

由 §3.1 知 Beltrami 方程组的广义解为拟正则映射. 本节考虑 Beltrami 方程组与 $\mathcal{A}$- 调和方程. 证明 Beltrami 方程组的广义解的每一个分量函数为某 $\mathcal{A}$- 调和方程的解.

回忆第 1 章引理 4.2: 对任意 $A \in \mathrm{GL}(n)$, 有

$$A_{\#}^{t} * A_{\#} = (\det A) * : \bigwedge^{l} \to \bigwedge^{n-l}. \tag{1.1}$$

先考虑共形映射情形. 设 $0 \le l \le n$, $f \in W_{loc}^{1,n-l}(\Omega, \mathrm{R}^n)$ 为弱 1- 拟正则映射, 且 $J_f(x) \ge 0$, 则 f 满足 Cauchy-Riemann 方程组

$$D^t f(x) Df(x) = J_f^{2/n}(x)\mathrm{Id}.$$

简单起见, 若记 $A = A(x) = Df(x)$, 则有

$$AA^t = (\det A)^{2/n}\mathrm{Id}, \tag{1.2}$$

且对任意具有常系数的 l- 形式 ω, 有

$$A_{\#}\omega = f^*\omega. \tag{1.3}$$

(1.2) 左右取 $n-l$ 次外幂得到

$$A_{\#}A_{\#}^{t} = (\det A)^{2(n-l)/n}\mathrm{Id}_{\#} : \bigwedge^{n-l} \to \bigwedge^{n-l}.$$

上式结合 (1.1) 得

$$(\det A)^{(n-2l)/n} * A_{\#} = A_{\#} * : \bigwedge^{l} \to \bigwedge^{n-l}.$$

上式两端作用具有常系数的 $\omega \in \bigwedge^l$, 并利用 (1.3) 得

$$J_f^{(n-2l)/n}(x) * f^*(\omega) = f^*(*\omega). \tag{1.4}$$

由第 1 章引理 4.2,

$$df^*(*\omega) = f^*(d*\omega) = f^*(0) = 0. \tag{1.5}$$

对 (1.4) 两端取广义微分，并利用 (1.5) 得到

$$d[J_f^{(n-2l)/n}(x) * f^*(\omega)] = 0. \tag{1.6}$$

又由 Cauchy-Riemann 方程组 (1.2) 得

$$J_f^{1/n}(x) = |Df(x)| = |\nabla f^i|, \ i = 1, 2, \cdots, n. \tag{1.7}$$

在 (1.6) 中选择 $\omega = dy^I = dy^{i_1} \wedge dy^{i_2} \wedge \cdots \wedge dy^{i_l}$, 其中 $I = (i_1, i_2, \cdots, i_l)$ 任意. 利用 (1.7) 得到

$$\begin{aligned} & d(|Df|^{n-2l} * df^{i_1} \wedge df^{i_2} \wedge \cdots \wedge df^{i_l}) \\ = \ & d(|\nabla f^i|^{n-2l} * df^{i_1} \wedge df^{i_2} \wedge \cdots \wedge df^{i_l}) = 0. \end{aligned} \tag{1.8}$$

当 $l = 1$ 时，取 $i_1 = i$, 上述方程导致

$$d(|\nabla f^i|^{n-2} * df^i) = 0. \tag{1.9}$$

由

$$\begin{aligned} & d(|\nabla f^i|^{n-2} * df^i) \\ = \ & d\left(|\nabla f^i|^{n-2} * \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x_j} dx_j\right)\right) \\ = \ & d\left(\sum_{j=1}^n |\nabla f^i|^{n-2} \frac{\partial f^i}{\partial x_j} * dx_j\right) \\ = \ & \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left(|\nabla f^i|^{n-2} \frac{\partial f^i}{\partial x_j}\right) dx_j \wedge * dx_j \\ = \ & \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left(|\nabla f^i|^{n-2} \frac{\partial f^i}{\partial x_j}\right) dx \end{aligned}$$

于是 (1.9) 式等价于

$$\operatorname{div}(|\nabla f^i|^{n-2}\nabla f^i) = 0,\ i = 1, 2, \cdots, n. \tag{1.10}$$

下面考虑一般的 Beltrami 方程组

$$D^t f(x) D f(x) = J_f^{2/n}(x) G(x) \tag{1.11}$$

的广义解，这里 $G : \Omega \to \mathrm{S}(n)$ 为可测矩阵，正定，对称，行列式为 1, 且满足下面的一致椭圆型条件

$$\alpha|\xi|^2 \le \langle G(x)\xi, \xi\rangle \le \beta|\xi|^2. \tag{1.12}$$

仍记 $A = D^t f(x)$, 则有

$$AA^t = (\det A)^{2/n} G,$$

因此

$$A_\# A_\#^t = (\det A)^{2(n-l)/n} G_\# : \bigwedge^{n-l} \to \bigwedge^{n-l}.$$

结合 (1.1) 得到

$$(\det A)^{(n-2l)/n} G_\# * A_\# = A_\# * : \bigwedge^{l} \to \bigwedge^{n-l}.$$

上式应用到具有常系数的 l- 形式 ω 上，因为 $A_\# \omega = f^*\omega$, 所以

$$J_f^{(n-2l)/n}(x) G_\# * f^*(x) = f^*(*\omega).$$

两端取广义微分得

$$d[J_f^{(n-2l)/n}(x) G_\# * f^*\omega] = 0. \tag{1.13}$$

由 Beltrami 方程组 (1.11), 对 $i = 1, 2, \cdots, n$,

$$\frac{1}{n}\langle DfG^{-1}, Df\rangle = J_f^{2/n}(x) = \langle G^{-1}\nabla f^i, \nabla f^i\rangle, \tag{1.14}$$

因此，对任意 l- 重 $I = (i_1, i_2, \cdots, i_l)$, 取 $\omega = dy^I = dy^{i_1} \wedge dy^{i_2} \wedge \cdots \wedge dy^{i_l}$, 由 (1.13) 和 (1.14) 得到

$$d\left[\langle G^{-1}\nabla f^i, \nabla f^i\rangle^{(n-2l)/2} G_\# * df^{i_1} \wedge df^{i_2} \wedge \cdots \wedge df^{i_l}\right] = 0. \tag{1.14}$$

对 $i=1,2,\cdots,n$, 取 $l=1$, $i_1=i$, 对任意弱 K- 拟正则映射 $f\in W^{1,n-l}_{loc}(\Omega,\mathrm{R}^n)$, 有

$$\begin{aligned}
& d\left[\langle G^{-1}\nabla f^i,\nabla f^i\rangle^{(n-2)/2}G_{\#}*df^i\right]\\
= & d\left(\langle G^{-1}\nabla f^i,\nabla f^i\rangle^{(n-2)/2}G_{\#}*\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f^i}{\partial x_j}dx_j\right)\right)\\
= & d\left(\sum_{j=1}^{n}\langle G^{-1}\nabla f^i,\nabla f^i\rangle^{(n-2)/2}\frac{\partial f^i}{\partial x_j}G_{\#}*dx_j\right).
\end{aligned}$$

于是 (1.14) 式等价于

$$\operatorname{div}\left[\langle G^{-1}(x)\nabla f^i,\nabla f^i\rangle^{(n-2)/2}G^{-1}(x)\nabla f^i\right]=0.$$

令

$$\mathcal{A}(x,\xi)=\langle G^{-1}(x)\xi,\xi\rangle^{(n-2)/2}G^{-1}(x)\xi,$$

下面推导在条件 (1.12) 之下，算子 $\mathcal{A}$ 满足的条件.

因为 $G(x)\in S(n)$ 为正定, 对称, 行列式为 1, 所以可设 $G(x)=O^t(x)\Gamma^2(x)O(x)$, 其中 $O(x)$ 为正交矩阵， $\Gamma(x)=\operatorname{diag}(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)$ 为对角矩阵，且由 (1.12) 知

$$\sqrt{\alpha}\le\gamma_i\le\sqrt{\beta},\ i=1,2,\cdots,n.$$

这样

$$G^{-1}(x)=O^t(x)(\Gamma^{-1})^2(x)O(x),$$

且

$$\Gamma^{-1}=\operatorname{diag}(\gamma_1^{-1},\gamma_2^{-1},\cdots,\gamma_n^{-1}),$$
$$\frac{1}{\sqrt{\beta}}\le\gamma_i^{-1}\le\frac{1}{\sqrt{\alpha}},\ i=1,2,\cdots,n.$$

(i) **Lipschitz 型条件**

$$|\mathcal{A}(x,\xi)-\mathcal{A}(x,\eta)|\le\frac{n-1}{\alpha^{n/2}}|\xi-\eta|(|\xi|+|\eta|)^{n-2}.$$

证明 事实上,

$$\begin{aligned}
& |\mathcal{A}(x,\xi)-\mathcal{A}(x,\eta)|\\
= & \left|\langle G^{-1}\xi,\xi\rangle^{(n-2)/2}G^{-1}\xi-\langle G^{-1}\eta,\eta\rangle^{(n-2)/2}G^{-1}\eta\right|\\
= & \left|\langle O^t(\Gamma^{-1})^2O\xi,\xi\rangle^{(n-2)/2}O^t(\Gamma^{-1})^2O\xi-\langle O^t(\Gamma^{-1})^2O\eta,\eta\rangle^{(n-2)/2}O^t(\Gamma^{-1})^2O\eta\right|\\
\le & |O^t\Gamma^{-1}|\left||\Gamma^{-1}O\xi|^{n-2}\Gamma^{-1}O\xi-|\Gamma^{-1}O\eta|^{n-2}\Gamma^{-1}O\eta\right|.
\end{aligned}$$

由一个基本的不等式 (见高红亚，吴泽民 [1, (35) 式])

$$||g_1|^{p-2}g_1 - |g_2|^{p-2}g_2| \le (p-1)|g_1 - g_2|(|g_1| + |g_2|)^{p-2},\ g_1, g_2 \in \mathrm{R}^n,\ p \ge 2$$

得到

$$\begin{aligned}
& |\mathcal{A}(x,\xi) - \mathcal{A}(x,\eta)| \\
\le\ & (n-1)|O^t\Gamma^{-1}||\Gamma^{-1}O\xi - \Gamma^{-1}O\eta|(|\Gamma^{-1}O\xi| + |\Gamma^{-1}O\eta|)^{n-2} \\
\le\ & \frac{n-1}{\alpha^{n/2}}|\xi - \eta|(|\xi| + |\eta|)^{n-2}.
\end{aligned}$$

(ii) **单调不等式**

$$\langle \mathcal{A}(x,\xi) - \mathcal{A}(x,\eta), \xi - \eta\rangle \ge C_2|\xi - \eta|^2(|\xi| + |\eta|)^{n-2}.$$

证明

$$\begin{aligned}
& \langle \mathcal{A}(x,\xi) - \mathcal{A}(x,\eta), \xi - \eta\rangle \\
=\ & \langle \langle O^t(\Gamma^{-1})^2O\xi, \xi\rangle^{(n-2)/2}O^t(\Gamma^{-1})^2O\xi - \langle O^t(\Gamma^{-1})^2O\eta, \eta\rangle^{(n-2)/2}O^t(\Gamma^{-1})^2O\eta, \xi - \eta\rangle \\
=\ & \langle |\Gamma^{-1}O\xi|^{n-2}\Gamma^{-1}O\xi - |\Gamma^{-1}O\eta|^{n-2}\Gamma^{-1}O\eta, \Gamma^{-1}O\xi - \Gamma^{-1}O\eta\rangle.
\end{aligned}$$

由一个基本的不等式

$$\langle |g_1|^{p-2}g_2 - |g_2|^{p-2}g_2, g_1 - g_2\rangle \ge C|g_1 - g_2|^2(|g_1| + |g_2|)^{p-2}\ g_1, g_2 \in \mathrm{R}^n,\ p \ge 2$$

得到

$$\begin{aligned}
& \langle \mathcal{A}(x,\xi) - \mathcal{A}(x,\eta), \xi - \eta\rangle \\
\ge\ & C|\Gamma^{-1}O\xi - \Gamma^{-1}O\eta|^2(|\Gamma^{-1}O\xi| + |\Gamma^{-1}O\eta|)^{n-2} \\
\ge\ & \frac{C}{\beta^{n/2}}|\xi - \eta|^2(|\xi| + |\eta|)^{n-2}.
\end{aligned}$$

(ii) **齐次性条件**

$$\mathcal{A}(x, t\xi) = |t|^{n-2}t\mathcal{A}(x,\xi),\ t \in \mathrm{R}.$$

证明 对任意 $t \in \mathrm{R}$,

$$\mathcal{A}(x, t\xi) = \langle G^{-1}(x)t\xi, t\xi\rangle^{(n-2)/2}G^{-1}(x)t\xi = |t|^{n-2}t\mathcal{A}(x,\xi).$$

§4.2 $\mathcal{WT}$ 类微分形式与 $\mathcal{A}$- 调和张量

4.2.1 引言

弱 $\mathcal{A}$- 调和张量的高阶可积性结果属于 Stroffolini [1]. 本节建立弱 $\mathcal{WT}_2$- 类微分形式的弱逆 Hölder 不等式，并提供 Stroffolini 结果的另一个证明. 弱 $\mathcal{A}$- 调和张量是 p- 调和张量和 p- 调和函数的推广. 在 Franke, Martio, Miklyukov, Vorinen, Wisk [1] 中，作者引入了 4 类 $\mathcal{WT}$- 微分形式并得到了一些微分表达式和 $\mathcal{A}$- 调和张量与拟正则映射之间的自然联系. $\mathcal{A}$- 调和张量与位势论和非线性弹性理论之间有着密切的关系.

考虑 $\mathcal{A}$- 调和方程

$$d^*\mathcal{A}(x,du)=0, \tag{2.1}$$

这里 $\mathcal{A}:\Omega\times\bigwedge^\ell(\mathrm{R}^n)\to\bigwedge^\ell(\mathrm{R}^n)$, 且对几乎所有的 $x\in\Omega$ 和 $\xi\in\bigwedge^\ell(\mathrm{R}^n)$, 满足如下条件：

$$|\mathcal{A}(x,\xi)|\le a|\xi|^{p-1},\quad \langle\mathcal{A}(x,\xi),\xi\rangle\ge|\xi|^p \tag{2.2}$$

这里 $a\ge 1$ 为常数， $1<p<\infty$.

定义 2.1 称 $u\in W^{1,p}_{loc}(\Omega,\bigwedge^{\ell-1})$ 为 $\mathcal{A}$- 调和张量，如果对所有具有紧支集的 $\varphi\in W^{1,p}_{loc}(\Omega,\bigwedge^{\ell-1})$,

$$\int_\Omega\langle\mathcal{A}(x,du),d\varphi\rangle=0. \tag{2.3}$$

微分形式 u 称为 p- 调和张量，如果

$$d^*(|du|^{p-2}du)=0,\quad d^*u=0, \tag{2.4}$$

这里 $1<p<\infty$. 方程

$$\mathcal{A}(x,du)=d^*v$$

称为共轭 $\mathcal{A}$- 调和方程. 例如， $du=d^*v$ 为 R^n 中 Cauchy-Riemann 方程组的类似. 显然，对 u 加上一个闭形式，对 v 加上一个余闭形式，共轭 $\mathcal{A}$- 调和张量不受影响.

半径为 R 的球记为 B_R. 用 $B_{\sigma R}$ 表示与 B_R 同心的，且满足 $\mathrm{diam}(B_{\sigma R})=\sigma\mathrm{diam}(B_R)$ 的球. 集合 $E\subset\mathrm{R}^n$ 的 n- 维 Lebesgue 测度记为 $|E|$. 引入 Iwaniec, Lutoborski[1] 中的如下结果：设 $Q\subset\mathrm{R}^n$ 为方体或球. 对每一个 $y\in Q$, 存在一个由

$$(K_y\omega)(x;\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_l)=\int_0^1 t^{\ell-1}\omega(tx+y-ty;x-y,\xi_1,\cdots,\xi_{\ell-1})dt$$

定义的线性算子

$$K_y : C^\infty(Q, \bigwedge^\ell) \to C^\infty(Q, \bigwedge^{\ell-1}),$$

且有分解

$$\omega = d(K_y) + K_y(d\omega).$$

另一个线性算子 $T_Q : C^\infty(Q, \bigwedge^\ell) \to C^\infty(Q, \bigwedge^{\ell-1})$ 定义为

$$T_Q\omega = \int_Q \varphi(y) K_y \omega dy,$$

这里 $\varphi \in C_0^\infty(Q)$ 正规化为 $\int_Q \varphi(y)dy = 1$. 定义 ℓ- 形式 $\omega_Q \in D'(Q, \bigwedge^\ell)$ 为对所有 $\omega \in L^p(Q, \wedge^\ell), 1 \le p < \infty$,

$$\omega_Q = |Q|^{-1} \int_Q \omega(y) dy, \text{ if } \ell = 0, \text{ and } \omega_Q = d(T_Q\omega), \text{ if } \ell = 1, 2, \cdots, n.$$

下面两个定义出自 Franke, Martio, Miklyukov, Vorinen, Wisk [1].

定义 2.2 微分形式 $\alpha \in L^p_{loc}(\Omega, \bigwedge^\ell)$ 称为弱闭的，如果对每一个微分形式 $\beta \in W^{1,q}_{loc}(\Omega, \bigwedge^{\ell+1})$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 \le p, q \le \infty$, 且

$$\operatorname{supp}\beta \cap \partial\Omega = \emptyset, \ \operatorname{supp}\beta = \overline{\{x \in \Omega : \beta \neq 0\}},$$

有

$$\int_\Omega \langle \alpha, d^*\beta \rangle dx = 0. \tag{2.5}$$

注 2.1 闭微分形式 $\alpha \in L^p_{loc}(\Omega, \bigwedge^\ell)$ 是弱闭的.

定义 2.3 称弱闭微分形式 $\omega \in L^p_{loc}(\Omega, \bigwedge^\ell), 0 \le \ell \le n, p > 1$ 在 Ω 上属于 $\mathcal{WT}_2$ 类，如果存在弱闭微分形式 $\theta \in L^q_{loc}(\Omega, \bigwedge^{n-\ell})$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 使得在 Ω 上几乎处处有 $\overline{\nu}_1 |\omega|^p \le \langle \omega, *\theta \rangle$ 和 $|\theta| \le \overline{\nu}_2 |\omega|^{p-1}$, 这里常数 $\overline{\nu}_1, \overline{\nu}_2 > 0$.

现设

$$\omega \in L^r_{loc}(\Omega, \bigwedge^\ell), \ 0 \le \ell \le n, \ \max\{1, p-1\} \le r < p, \ p > 1 \tag{2.6}$$

为 Ω 上的弱闭微分形式.

定义 2.4 弱闭微分形式 ω (2.6) 称为在 Ω 上属于 $\mathcal{WT}_2$- 类，如果存在一个弱闭微分形式

$$\theta \in L^{\frac{r}{p-1}}_{loc}\left(\Omega, \bigwedge^{n-\ell}\right), \tag{2.7}$$

使得条件

$$\nu_1|\omega|^p \le \langle \omega, *\theta \rangle \tag{2.8}$$

和

$$|\theta| \le \nu_2|\omega|^{p-1} \tag{2.9}$$

在 Ω 上几乎处处满足，这里常数 $\nu_1, \nu_2 > 0$.

注 2.2 定义 2.4 中的 " 弱 " 是指 ω 的可积指数 r 低于自然指数 p.

现在考虑满足条件 (2.2) 的 $\mathcal{A}$- 调和方程 (2.1). 本节将考虑 (2.1) 的很弱解，即弱 $\mathcal{A}$- 调和张量.

下面的定义出自 Stroffolini [1].

定义 2.5 (2.1) 的很弱解 (也称弱 $\mathcal{A}$- 调和张量) 为 $u \in W^{1,r}_{loc}(\Omega, \bigwedge^{\ell-1})$, $\max\{1, p-1\} \le r < p$, 使得对所有的具有紧支集的 $\varphi \in W^{1,\frac{r}{r-p+1}}(\Omega, \bigwedge^{\ell-1})$, 成立

$$\int_\Omega \langle \mathcal{A}(x, du), d\varphi \rangle = 0 \tag{2.10}$$

Stroffolini [1] 得到如下结果.

定理 2.1 存在可积指数 $p_1 = p_1(n,p) < p$ 和 $p_2 = p_2(n,p) > p$, 使得若 $u \in W^{1,p_1}_{loc}(\Omega, \bigwedge^{\ell-1})$ 为弱 $\mathcal{A}$- 调和的，则 $u \in W^{1,p_2}_{loc}(\Omega, \bigwedge^{\ell-1})$. 特别的，$u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega, \bigwedge^{\ell-1})$ 为通常意义下的 $\mathcal{A}$- 调和张量.

本节的目的是利用 $\mathcal{WT}_2$- 类微分形式，给出上述定理的另一个证明. 本解所用的方法与 Stroffolini [1] 不同.

4.2.2 预备引理

引理 2.1 若 $u \in W^{1,r}_{loc}(\Omega, \bigwedge^{\ell-1})$, $\max\{1, p-1\} \le r < p$ 为弱 $\mathcal{A}$- 调和张量，则 $\omega = du$ 属于弱 $\mathcal{WT}_2$ 类，其中 $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = a$.

证明 由 Poincaré 引理，微分形式 $\omega = du \in L^r_{loc}(\Omega, \bigwedge^\ell)$ 为闭的，这样由注 2.1, 它是弱闭的. 设 $\theta = *\mathcal{A}(x, du) \in L^{\frac{r}{p-1}}_{loc}(\Omega, \bigwedge^{n-\ell})$. θ 的弱闭性由下式得到：对所有 $\psi = *^{-1}\varphi \in W^{1,\frac{r}{r-p+1}}(\Omega, \bigwedge^{n-\ell+1})$, $\mathrm{supp}\varphi \cap \partial\Omega = \emptyset$,

$$\begin{aligned}(-1)^{n\ell+1}\int_\Omega \langle \theta, d^*\psi \rangle dx &= \int_\Omega \langle *\mathcal{A}(x, du), *d*\psi \rangle dx \\ &= \int_\Omega \langle \mathcal{A}(x, du), d*\psi \rangle dx = \int_\Omega \langle \mathcal{A}(x, du), d\varphi \rangle dx = 0.\end{aligned}$$

由 (2.2) 得到

$$|\omega|^p = |du|^p \le \langle \mathcal{A}(x,du), du\rangle = \langle \omega, *\theta\rangle$$

和

$$|\theta| = |\mathcal{A}(x,du)| \le a|du|^p = a|\omega|^p.$$

证毕.

下面的引理出自高红亚，赵洪亮 [1, 引理 2].

引理 2.2 设 $\omega \in \mathcal{D}'(D, \bigwedge^\ell)$, $d\omega \in L^p(D, \bigwedge^{\ell+1})$, $1 < p < \infty$. 则 $\omega - \omega_D$ 属于 $L^p(D)$, 且对 R^n 中的方体和球 D, 下面的一致估计成立

$$\|\omega - \omega_D\|_{p,D} \le C(p,n)\mathrm{diam}(D)\|d\omega\|_{p,D}.$$

Stroffolini [1] 证明了下面的引理.

引理 2.3 设 $\omega \in \mathcal{D}'(D, \bigwedge^\ell)$, $d\omega \in L^p(D, \bigwedge^{\ell+1})$, $\ell = 0, 1, \cdots, n$, $1 < p < n$. 则 $\omega - \omega_D$ 属于 $L^{np/(n-p)}(D, \bigwedge^\ell)$, 且对 R^n 中的方体和球 D, 下面的一致估计成立

$$\left(\int_\Omega |\omega - \omega_D|^{np/(n-p)} dx\right)^{(n-p)/np} \le C(p,n)\left(\int_D |d\omega|^p dx\right)^{1/p}. \tag{2.11}$$

引理 2.4 如果恰当微分形式 $\omega \in L^r_{loc}(\Omega, \bigwedge^\ell)$ 属于 $\mathcal{WT}_2$ 类，则存在 $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(n, p, \frac{\nu_2}{\nu_1})$, 使得当 $|p - r| < \varepsilon_0$ 时，下面的弱逆 Hölder 不等式成立

$$⨍_{B_R} |\omega|^r dx \le \theta ⨍_{B_{2R}} |\omega|^r dx + C\left(n, p, \frac{\nu_2}{\nu_1}\right)\left(⨍_{B_{2R}} |\omega|^s dx\right)^{\frac{r}{s}}, \tag{2.12}$$

这里 $s = \frac{nr}{n+r} < r$, $0 \le \theta < 1$.

证明 设 $\eta(x) \in C_0^\infty(B_{2R})$ 为截断函数，满足 $0 \le \eta \le 1$, 在球 B_R 上 $\eta \equiv 1$, 且 $|\nabla\eta| \le \frac{C(n)}{R}$. 因为 ω 是恰当的，所有存在微分形式 $u \in W^{1,r}_{loc}(\Omega, \bigwedge^{\ell-1})$, 使得 $\omega = du$. 考虑 Hodge 分解 (参见 Iwaniec, Migliaccio, Nania, Sbordone [1])

$$|d(\eta u)|^{r-p} d(\eta u) = d\alpha + h, \tag{2.13}$$

这里 $d\alpha, h \in L^r(B_{2R}, \bigwedge^\ell)$. 由 Iwaniec, Migliaccio, Nania, Sbordone [1, (2.3)] 得到

$$\|h\|_{r/(r-p+1)} \le C(n)|p - r|\|d(\eta u)\|_r^{r-p+1}. \tag{2.14}$$

设

$$E = |d(\eta u)|^{r-p} d(\eta u) - |\eta du|^{r-p} \eta du. \tag{2.15}$$

由一个基本的不等式 (参见 Iwaniec, Migliaccio, Nania, Sbordone [1])

$$\big||X|^{-\varepsilon}X - |Y|^{-\varepsilon}Y\big| \le \frac{2^{\varepsilon}(1+\varepsilon)}{1-\varepsilon}|X-Y|^{1-\varepsilon},\ 0 \le \varepsilon < 1,\ X, Y \in R^n,$$

得到

$$|E| \le \frac{2^{p-r}(p-r+1)}{r-p+1}|ud\eta|^{r-p+1}. \tag{2.16}$$

由 θ 的弱闭性，对所有 $\alpha \in W^{1,r}(B_{2R}, \bigwedge^{\ell})$, 有

$$\int_{B_{2R}} \langle *\theta, d\alpha\rangle dx = (-1)^{n\ell+1}\int_{B_{2R}} \langle \theta, *d\alpha\rangle dx = \int_{B_{2R}} \langle \theta, d^*(*\alpha)\rangle dx = 0. \tag{2.17}$$

联合 (2.13), (2.15), (2.17) 得到

$$\int_{B_{2R}} \langle *\theta, |\eta du|^{r-p}\eta du\rangle dx = -\int_{B_{2R}} \langle *\theta, E\rangle dx + \int_{B_{2R}} \langle *\theta, h\rangle dx = I_1 + I_2.$$

由 (2.8), 上面等式的左端估计为

$$\begin{aligned}
&\int_{B_{2R}} \langle *\theta, |\eta du|^{r-p}\eta du\rangle dx = \int_{B_{2R}} \eta^{r-p+1}|du|^{r-p}\langle *\theta, du\rangle dx \\
&\ge \nu_1 \int_{B_{2R}} \eta^{r-p+1}|du|^r dx \ge \nu_1 \int_{B_R} |du|^r dx.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

现在估计 $|I_1|$ 和 $|I_2|$. 由 (2.19), Hölder 不等式和 (2.16) 得到

$$\begin{aligned}
|I_1| &= \left|-\int_{B_{2R}} \langle *\theta, E\rangle dx\right| \le \int_{B_{2R}} |\theta||E| dx \le \nu_2 \int_{B_{2R}} |du|^{p-1}|E| dx \\
&\le \frac{2^{p-r}(p-r+1)\nu_2}{r-p+1}\int_{B_{2R}} |du|^{p-1}|ud\eta|^{r-p+1} dx \\
&\le \frac{C(n)}{R^{r-p+1}} \cdot \frac{2^{p-r}(p-r+1)\nu_2}{r-p+1}\int_{B_{2R}} |du|^{p-1}|u|^{r-p+1} dx \\
&\le \frac{C(n)}{R^{r-p+1}} \cdot \frac{2^{p-r}(p-r+1)\nu_2}{r-p+1}\left(\int_{B_{2R}} |du|^r dx\right)^{\frac{p-1}{r}}\left(\int_{B_{2R}} |u|^r dx\right)^{\frac{r-p+1}{r}}.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

引理 2.3 推出 (注意我们已假设 $u_{B_{2R}} = 0$)

$$\left(\int_{B_{2R}} |u|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \le C(n, r)\left(\int_{B_{2R}} |du|^{\frac{nr}{n+r}} dx\right)^{\frac{n+r}{nr}}.$$

这个不等式联合 (2.19) 推出

$$\begin{aligned}|I_1| \leq \quad & \frac{C(n,p,r)}{R^{r-p+1}} \cdot \frac{2^{p-r}(p-r+1)\nu_2}{r-p+1} \times \\ & \left(\int_{B_{2R}} |du|^r dx\right)^{\frac{p-1}{r}} \left(\int_{B_{2R}} |du|^{\frac{nr}{n+r}} dx\right)^{\frac{(n+r)(r-p+1)}{nr}}.\end{aligned}$$

这样由 Young 不等式得

$$\begin{aligned}|I_1| \leq \quad & 2^{n-1} \int_{B_{2R}} |du|^r dx + \\ & \frac{C(n,p,r)}{R^r} \left(\frac{2^{p-r}(p-r+1)\nu_2}{r-p+1}\right)^{\frac{r}{r-p+1}} \left(\int_{B_{2R}} |du|^{\frac{nr}{n+r}} dx\right)^{\frac{n+r}{n}}.\end{aligned} \tag{2.20}$$

再次利用 (2.9), Hölder 不等式和 (2.14) 得

$$\begin{aligned}|I_2| \quad &= \left|\int_{B_{2R}} \langle *\theta, h\rangle dx\right| \leq \int_{B_{2R}} |\theta||h| dx \\ &\leq \nu_2 \int_{B_{2R}} |du|^{p-1}|h| dx \\ &\leq \nu_2 ||du||_r^{p-1} ||h||_{\frac{r}{r-p+1}} \\ &\leq C(n)\nu_2|p-r| ||du||_r^{p-1} ||d(\eta u)||_r^{r-p+1}.\end{aligned}$$

利用引理 2.2 得到

$$\begin{aligned}||d(\eta u)||_r^{r-p+1} \quad &= ||\eta du + u d\eta||_r^{r-p+1} \\ &\leq (||\eta du||_r + ||u d\eta||_r)^{r-p+1} \\ &\leq \left(\frac{C(n)}{R}||u||_r + ||du||_r\right)^{r-p+1} \\ &\leq \left(\frac{C(n,r)}{R} R ||du||_r + ||du||_r\right)^{r-p+1} \\ &= C(n,p,r) ||du||_r^{r-p+1}.\end{aligned}$$

这样

$$|I_2| \leq C(n,p,r)\nu_2|p-r| \int_{B_{2R}} |du|^r dx. \tag{2.21}$$

联合 (2.18), (2.20) 和 (2.21), 有

$$\begin{aligned}\nu_1 \int_{B_R} |du|^r dx \quad &\leq C(n,p,r)\nu_2|p-r| \int_{B_{2R}} |du|^r dx + 2^{n-1} \int_{B_{2R}} |du|^r dx \\ &+ \frac{C(n,p,r)}{R^r} \left(\frac{2^{p-r}(p-r+1)\nu_2}{r-p+1}\right)^{\frac{r}{r-p+1}} \left(\int_{B_{2R}} |du|^{\frac{nr}{n+r}} dx\right)^{\frac{n+r}{n}}.\end{aligned}$$

上面不等式中的常数 $C(n,p,r)$ 当 r 趋于无穷时出现爆破，但现在的情形是 r 充分接近于 p, 我们可以估计 $C(n,p,r)$ 与 r 无关. 上式两端除以 $|B_R| = \omega_n R^n$ 得

$$\begin{aligned}\fint_{B_R} |du|^r dx \ \ &\le \frac{C(n,p)\nu_2}{\nu_1}|p-r| \fint_{B_{2R}} |du|^r dx + \frac{1}{2}\fint_{B_{2R}} |du|^r dx \\ &+ \frac{C(n,p)}{\nu_1}\left(\frac{2^{p-r}(p-r+1)\nu_2}{r-p+1}\right)^{\frac{r}{r-p+1}} \left(\fint_{B_{2R}} |du|^{\frac{nr}{n+r}} dx\right)^{\frac{n+r}{n}}.\end{aligned} \tag{2.22}$$

取 $\varepsilon_0 = \frac{\nu_1}{2C(n,p)\nu_2}$. 若 $|p-r| < \varepsilon_0$, 则 $\theta = \frac{C(n,p)\nu_2}{\nu_1}|p-r| + \frac{1}{2} < 1$, 这样

$$\fint_{B_R} |du|^r dx \le \theta \fint_{B_{2R}} |du|^r dx + C\left(n,p,\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)\left(\fint_{B_{2R}} |du|^{\frac{nr}{n+r}} dx\right)^{\frac{n+r}{n}}.$$

由此推出 (2.2), 引理 2.4 证毕.

下面的引理来自 Stroffolini [1].

引理 2.5 设 $\omega \in \mathcal{D}'(D, \bigwedge^\ell)$ 满足 $d\omega \in L^p(D, \bigwedge^{\ell+1})$, $1 < p < \infty$. 则 $\omega - \omega_D$ 属于 $W^{1,p}(D, \bigwedge^\ell)$, 且对 R^n 中的方体或球 D, 有

$$\|\omega - \omega_D\|_{W^{1,p}(D)} \le C(n,p)\|d\omega\|_{p,D}.$$

4.2.3 定理 2.1 的证明

设 $u \in W^{1,p-\varepsilon_0}_{loc}(\Omega, \bigwedge^{\ell-1})$ 为弱 $\mathcal{A}$- 调和张量，这里 $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(n,p,\frac{\nu_2}{\nu_1})$ 来自引理 2.4. 显然 $\omega = du$ 是恰当的，由引理 2.1, ω 属于弱 $\mathcal{WT}_2$ 类，其中 $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = a$. 引理 2.4 推出 $\omega = du$ 满足弱逆 Hölder 不等式. 对固定的 u, 记 I 为所有指数 $r \in [p-\varepsilon_0, p+\varepsilon_0]$ 并使得 $\omega = du \in L^r_{loc}(\Omega, \bigwedge^\ell)$ 的集合. 由假设，集合 I 包含 $p-\varepsilon_0$. I 显然是闭的，由第 2 章引理 1.1 它也是开的. 这样， I 与区间 $[p-\varepsilon_0, p+\varepsilon_0]$ 重合. 结论 $u \in L^{p+\varepsilon_0}(\Omega, \bigwedge^{\ell-1})$ 由引理 2.5 得到. 证毕.

§4.3 $\mathcal{A}$- 调和方程很弱解的正则性

设 $\Omega \subset \mathrm{R}^n (n \le 2)$ 为有界区域. 考虑如下的二阶拟线性椭圆方程 (又称 $\mathcal{A}$- 调和方程或 Leray-Lions 方程)

$$\mathrm{div}\mathcal{A}(x, \nabla u) = 0, \tag{3.1}$$

这里 $\mathcal{A} : \Omega \times \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$ 满足通常的可测性条件 (Carathéodory 条件), 并且对 $1 < p < \infty$ 和几乎所有的 $x \in \Omega$ 及所有的 $\xi \in \mathrm{R}^n$, 有

(1) $|\mathcal{A}(x,\xi)| \leq b|\xi|^{p-1}$,

(2) $\langle A(x,\xi),\xi\rangle \geq a|\xi|^p$,

其中 $0 < a \leq b < \infty$.

生成 p- 调和方程

$$\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = 0 \tag{3.2}$$

的映射 $\mathcal{A}(x,h) = |h|^{p-2}h$ 满足上面的假设 (1),(2).

下面的定义来自 Iwaniec, Sbordone [2].

定义 3.1 称函数 $u \in W^{1,r}_{loc}(\Omega), \max\{1, p-1\} < r < p$ 为 (3.1) 的很弱解，如果对所有在 Ω 具有紧支集的 $\phi \in W^{1,\frac{r}{r-p+1}}(\Omega)$, 有

$$\int_\Omega \langle A(x,\nabla u),\nabla\phi\rangle dx = 0. \tag{3.3}$$

注 3.1 回忆 $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ 为 (3.1) 的弱解，如果对所有在 Ω 具有紧支集的 $\phi \in W^{1,p}(\Omega)$, (3.2) 成立．于是，若 $r = p$, (3.2) 与通常意义下的弱解的定义一致.

本节考虑 (3.1) 的很弱解的正则性.

定理 3.1 存在 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, 使得对任意 (3.1) 的很弱解 $u \in W^{1,p-\varepsilon_1}_{loc}(\Omega)$, 都有 $u \in W^{1,p+\varepsilon_2}_{loc}(\Omega)$. 特别的，$u$ 是 (3.1) 通常意义下的弱解.

证明 设 $\eta \in C_0^\infty(B_R), 0 \leq \eta \leq 1$, 当 $x \in B_{R/2}$ 时 $\eta \equiv 1, |\nabla\eta| \leq \frac{C(n)}{R}$ 为试验函数．假设 $u \in W^{1,p-\varepsilon}_{loc}(0 < \varepsilon < 1)$ 为 (3.1) 的一个很弱解．考虑下面的 Hodge 分解

$$|\nabla(\eta u)|^{-\varepsilon}\nabla(\eta u) = \nabla\phi + H. \tag{3.4}$$

这里 $\phi \in W_0^{1,\frac{p-\varepsilon}{1-\varepsilon}}(\Omega)$, $H \in L^{\frac{p-\varepsilon}{1-\varepsilon}}(\Omega, R^n)$ 是一个散度为 0(divergence free) 的矩阵，下面的估计式成立 (见 Iwaniec, Sbordone [2])

$$\|\nabla\phi\|_{\frac{p-\varepsilon}{1-\varepsilon}} \leq C(n,p)\|\nabla(\eta u)\|^{1-\varepsilon}_{p-\varepsilon}, \tag{3.5}$$

$$\|H\|_{\frac{p-\varepsilon}{1-\varepsilon}} \leq C(n,p)\varepsilon\|\nabla(\eta u)\|^{1-\varepsilon}_{p-\varepsilon}. \tag{3.6}$$

令

$$E(\eta,u) = |\eta\nabla u|^{-\varepsilon}\eta\nabla u - |\nabla(\eta u)|^{-\varepsilon}\nabla(\eta u).$$

由一个基本的不等式 (见 Iwaniec, Migliaccio, Nania, Sbordone [1])

$$||X|^{-\varepsilon}X - |Y|^{-\varepsilon}Y| \leq \frac{2^\varepsilon(1+\varepsilon)}{1-\varepsilon}|X-Y|^{1-\varepsilon}, 0 < \varepsilon < 1, X, Y \in \mathrm{R}^n,$$

得到

$$|E(\eta,u)| \le \frac{2^{\varepsilon}(1+\varepsilon)}{1-\varepsilon}|u\nabla\eta|^{1-\varepsilon}. \tag{3.7}$$

下面计算中一个有用的技巧是用 Hodge 分解中的 $\nabla\phi$ 充当 (3.2) 中的试验函数．我们有

$$\begin{aligned} & \int_{B_R}\langle A(x,\nabla u),|\eta\nabla u|^{-\varepsilon}\eta\nabla u\rangle dx \\ = & \int_{B_R}\langle A(x,\nabla u),|\nabla(\eta u)|^{-\varepsilon}\nabla(\eta u)\rangle dx + \int_{B_R}\langle A(x,\nabla u),E(\eta,u)\rangle dx \\ = & \int_{B_R}\langle A(x,\nabla u),H\rangle dx + \int_{B_R}\langle\ A(x,\nabla u),E(\eta,u)\rangle dx = I_1+I_2 \end{aligned} \tag{3.8}$$

由不等式 (2) 得到

$$\begin{aligned} & \int_{B_R}\langle A(x,\nabla u),|\eta\nabla u|^{-\varepsilon}\eta\nabla u\rangle dx \\ \ge & \int_{B_{\frac{R}{2}}}\langle A(x,\nabla u),|\nabla u|^{-\varepsilon}\nabla u\rangle dx \\ \ge & \ a\int_{B_{R/2}}|\nabla u|^{p-\varepsilon}dx. \end{aligned} \tag{3.9}$$

由 Hölder 不等式，条件 (1) 与 (3.5) 式得到

$$\begin{aligned} |I_1| &= \left|\int_{B_R}\langle A(x,\nabla u),H\rangle dx\right| \le b\int_{B_R}|\nabla u|^{p-1}|H|dx \\ &\le b\|\nabla u\|_{p-\varepsilon}^{p-1}\|H\|_{\frac{p-\varepsilon}{1-\varepsilon}} \le C(n,p)b\varepsilon\|\nabla u\|_{p-\varepsilon}^{p-1}\|\nabla(\eta u)\|_{p-\varepsilon}^{1-\varepsilon}. \end{aligned}$$

注意到 u 加上一个常向量不影响 ∇u 及 A- 调和方程 (3.1), 可以假设 u 在 B_R 上的积分平均为零．于是，应用 Poincaré 不等式得到

$$\begin{aligned} \|\nabla(\eta u)\|_{p-\varepsilon}^{1-\varepsilon} &\le (\|u\nabla\eta\|_{p-\varepsilon}+\|\eta\nabla u\|_{p-\varepsilon})^{1-\varepsilon} \\ &\le \left(\frac{C(n)}{R}\|u\|_{p-\varepsilon}+\|\nabla u\|_{p-\varepsilon}\right)^{1-\varepsilon} \\ &\le C(n)\|\nabla u\|_{p-\varepsilon}^{1-\varepsilon}. \end{aligned}$$

因此

$$|I_1| \le C(n,p)b\varepsilon\int_{B_R}|\nabla u|^{p-\varepsilon}dx. \tag{3.10}$$

下面估计 $|I_2|$. 由条件 (1), Hölder 不等式与 (3.7) 式得到

$$\begin{aligned}|I_2| &= \left|\int_{B_R}\langle\, A(x,\nabla u), E(\eta,u)\rangle dx\right| \\ &\leq b\int_{B_R}|\nabla u|^{p-1}|E(\eta,u)|dx \\ &\leq b\frac{2^\varepsilon(1+\varepsilon)}{1-\varepsilon}\int_{B_R}|\nabla u|^{p-1}|u\nabla\eta|^{1-\varepsilon}dx \\ &\leq \frac{C(n)b}{R^{1-\varepsilon}}\frac{2^\varepsilon(1+\varepsilon)}{1-\varepsilon}\int_{B_R}|\nabla u|^{p-1}|u|^{1-\varepsilon}dx.\end{aligned}$$

设

$$p'=\frac{n(p-\varepsilon)}{(n-1-\varepsilon)(p-1)},\ q'=\frac{n(p-\varepsilon)}{(n-p+1)(1-\varepsilon)},$$

则 $1<p',q'<\infty$, $\frac{1}{p'}+\frac{1}{q'}=1$, 由 Hölder 不等式得到

$$\begin{aligned}|I_2| &\leq \frac{C(n)b}{R^{1-\varepsilon}}\frac{2^\varepsilon(1+\varepsilon)}{1-\varepsilon}\left(\int_{B_R}|\nabla u|^{(p-1)p'}dx\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_{B_R}|u|^{(1-\varepsilon)q'}dx\right)^{\frac{1}{q'}} \\ &= \frac{C(n)b}{R^{1-\varepsilon}}\frac{2^\varepsilon(1+\varepsilon)}{1-\varepsilon}\left(\int_{B_R}|\nabla u|^{\frac{n(p-\varepsilon)}{n+1-\varepsilon}}dx\right)^{\frac{n+1-\varepsilon}{n(p-\varepsilon)}(p-1)}\left(\int_{B_R}|u|^{\frac{n(p-\varepsilon)}{n-p+1}}dx\right)^{\frac{n-p+1}{n(p-\varepsilon)}(1-\varepsilon)}.\end{aligned}$$

设 $p^{''}=\frac{n(p-\varepsilon)}{n+1-\varepsilon}$, 则 $\frac{np^{''}}{n-p^{''}}=\frac{n(p-\varepsilon)}{n-p+1}$. 由 $p^{''}<n$ 时的 Poincaré-Sobolev 不等式，得到

$$\left(\int_{B_R}|\nabla u|^{\frac{n(p-\varepsilon)}{n+1-\varepsilon}}dx\right)^{\frac{n-p+1}{n(p-\varepsilon)}}=\left(\int_{B_R}|\nabla u|^{\frac{np^{''}}{n-p^{''}}}dx\right)^{\frac{n-p^{''}}{np^{''}}}\leq C(n)\left(\int_{B_R}|\nabla u|^{p^{''}}dx\right)^{\frac{1}{p^{''}}},$$

因此

$$|I_2|\leq\frac{C(n)b}{R^{1-\varepsilon}}\frac{2^\varepsilon(1+\varepsilon)}{1-\varepsilon}\left(\int_{B_R}|\nabla u|^{\frac{n(p-\varepsilon)}{n+1-\varepsilon}}dx\right)^{\frac{n+1-\varepsilon}{n}} \tag{3.11}$$

联合 (3.9)-(3.11), 得到

$$\begin{aligned}&a\int_{B_{R/2}}|\nabla u|^{p-\varepsilon}dx \\ \leq\ & C(n,p)b\varepsilon\int_{B_R}|\nabla u|^{p-\varepsilon}dx+\frac{C(n)b}{R^{1-\varepsilon}}\frac{2^\varepsilon(1+\varepsilon)}{1-\varepsilon}\left(\int_{B_R}|\nabla u|^{\frac{n(p-\varepsilon)}{n+1-\varepsilon}}dx\right)^{\frac{n+1-\varepsilon}{n}},\end{aligned}$$

两端除以 $a|B_{R/2}|=a\omega_n(R/2)^n$, 得到

$$\begin{aligned}&\fint_{B_{R/2}}|\nabla u|^{p-\varepsilon}dx \\ \leq\ & C(n,p,b/a)\varepsilon\fint_{B_R}|\nabla u|^{p-\varepsilon}dx+\frac{C(n)b2^\varepsilon(1+\varepsilon)}{a(1-\varepsilon)}\left(\fint_{B_R}|\nabla u|^{\frac{n(p-\varepsilon)}{n+1-\varepsilon}}dx\right)^{\frac{n+1-\varepsilon}{n}},\end{aligned}$$

取 ε_1 使得 $C(n,p,b/a)\varepsilon_1=\frac{1}{2}$, 当 $\varepsilon\le\varepsilon_1$ 时，有

$$\fint_{B_{R/2}}|\nabla u|^{p-\varepsilon}dx\le\theta\fint_{B_R}|\nabla u|^{p-\varepsilon}dx+C(n)b/a\left(\fint_{B_R}|\nabla u|^{\frac{n(p-\varepsilon)}{n+1-\varepsilon}}dx\right)^{\frac{n+1-\varepsilon}{n}},$$

这是一个弱逆 Hölder 不等式，定理 3.1 的结果由第 2 章引理 1.1 并按照定理 2.1 的证明方法得到.

§4.4 $\mathcal{A}$ 调和方程很弱解的唯一性

考虑如下的二阶散度型椭圆型方程

$$\mathrm{div}\mathcal{A}(x,\nabla u)=0,\tag{4.1}$$

这里 $\mathcal{A}:\Omega\times\mathrm{R}^n\to\mathrm{R}^n$ 满足通常的可测性条件 (Caratheodory 条件), 并且对 $1<p<\infty$, 以及几乎所有的 $x\in\Omega$ 和所有的 $\xi,\zeta\in\mathrm{R}^n$, $0<a\le b<\infty,\lambda\in R$, 成立下面的条件

(1) Lipschitz 条件

$$|A(x,\xi)-A(x,\zeta)|\le b|\xi-\zeta|(|\xi|+|\zeta|)^{p-2}$$

(2) 单调不等式

$$\langle A(x,\xi)-A(x,\zeta),\xi-\zeta\rangle\ge a|\xi-\zeta|^2(|\xi|+|\zeta|)^{p-2}$$

(3) 齐次性条件

$$A(x,\lambda\xi)=|\lambda|^{p-2}\lambda A(x,\xi)$$

注 4.1 能够验证，生成 p- 调和方程

$$\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)=0$$

的函数 $\mathcal{A}(x,\xi)=|\xi|^{p-2}\xi$ 满足条件 (1)(2)(3).

定义 4.1 称 $u\in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ 为 (4.1) 的弱解，如果对于任意 $\phi\in W^{1,p}_0(\Omega)$, 有

$$\int_\Omega\langle A(x,\nabla u),\nabla\phi\rangle dx=0.\tag{4.2}$$

定义 4.2 称 $u \in W^{1,r}_{loc}(\Omega)$, $\max\{1, p-1\} < r < p$, 为 (3.1) 的很弱解，如果对于任意 $\phi \in W_0^{1,\frac{r}{r-p+1}}(\Omega)$, 有 (4.2) 式成立.

注 4.2 研究很弱解的原因在于：第一，若 $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega, R^n)$ 为 (4.1) 的弱解，则对于任意试验函数 $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, 积分

$$\int_\Omega \langle A(x, \nabla u), \nabla\phi\rangle dx = 0$$

中被积函数的可积性大于 1, 因此关于 u 的可积性条件可以减弱为 $u \in W^{1,r}_{loc}(\Omega, \mathrm{R}^n)$, $\max\{1, p-1\} \le r < p$; 第二，众所周知，由经典解的极限引入了弱解，而弱解的极限不一定为弱解，只可能是很弱解. 在用弱收敛方法推导强收敛的过程中，可能遇到这种情况，因此有必要研究很弱解；第三，对于某些问题，用很弱解得到的结果可能要好于用弱解的相应结果. 例如，本节中，若假设函数 u 的可积指数为 p, 则在边界上的例外集要减少.

我们也需要考虑局部边界值，参见 Li, Martio [1]. 设 $F \subset \partial\Omega$, $u \in W^{1,r}_{loc}(\Omega)$. 我们说在 $W^{1,r}$ 意义下， u 在 F 具有零边界值，简记为 $u \in W_0^{1,r}(\Omega, F)$, 如果对于任意 $x \in F$ 存在一个邻域 U 与一个函数 $\eta \in C_0^\infty(U)$, 使得在 x 的某邻域上 $\eta = 1, \eta u \in W_0^{1,r}(\Omega)$. 假设 $h \in W^{1,r}_{loc}(\Omega)$. 我们说在 $W^{1,r}$ 意义下， u 在 F 具有边界值 h, 如果 $u - h \in W_0^{1,r}(\Omega, F)$, 且对任意 $x \in F$ 存在一个邻域 U 与一个如上的 η, $\eta u \in W^{1,r}(\Omega)$. 注意到 ηu 属于 $W^{1,r}(\Omega)$.

如果在 $W^{1,r}$ 意义下， u 在 F 具有边界值 h, 则 u 在 F 的某邻域具有边界值 h. 因此我们总可以假设 F 相对于 $\partial\Omega$ 是开的.

在 Iwaniec, Sbordone [2, 定理 2, P146] 中，作者得到了如下 (4.1) 的很弱解 $u \in W^{1,r}(\Omega)$ 的存在性结果：给定 $u_0 \in W^{1,r}(\Omega)$, 寻找 (4.1) 于区域 Ω 中的解 $u \in W^{1,r}(\Omega)$, 使得 $u - u_0 \in W_0^{1,r}(\Omega)$. 但是，这种解的唯一性结果没有得到.

事实上，对 $p = 2$ 与线性方程的情形，可以得到唯一性结果. 在 Heinonen, Kilpelainen, Martio[1, Lemma7.37] 中，在边界 $\partial\Omega$ 上具有一些例外集上午很弱解 $u_1, u_2 \in W^{1,p}(\Omega)$ 的唯一性结果被得到. 最近， Li, Martio [1] 得到弱解的一个唯一性结果. 其中 $\mathcal{A} : \Omega \times \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$ 满足一些较弱的条件. 其结果如下：设算子 $\mathcal{A}$ 满足 (1) 以及

(1)' $\langle A(x, h), h\rangle \ge \alpha|h|^p$, $h \in \mathrm{R}^n$, (2)' $\langle A(x,h_1)-A(x,h_2),h_1-h_2\rangle>0$, 若 $h_1\neq h_2$.

定理 B 设 $p\in(1,\infty), q\in(1,\infty], s\in(1,\infty]$, 以及 $r\geq\max\{1,p-1\}$ 满足

$$t=sq/\left[sq-s-q-\frac{s(p-2)^+}{r}\right]>1$$

假设 $h\in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$, $u_1,u_2\in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ 在 Ω 中 $\mathcal{A}$- 调和，并且

(i) 在 $W^{1,p}$ 意义下， u_1,u_2 在 $\partial\Omega\setminus E$ 具有边界值 h,

(ii) $u_1-u_2\in L^s(\Omega)$,

(iii) $\nabla u_1-\nabla u_2\in L^q(\Omega)$,

(iv) $\nabla u_1,\nabla u_2\in L^r(\Omega)$, 若 $p>2$.

若 $\mathrm{Cap}_t(E)=0$, 其中 $t=sq/\left[sq-s-q-\frac{s(p-2)^+}{r}\right]>1$, 则 $u_1=u_2$, $x\in\Omega$.

一个已知的结果是 (参见 Kurki [1])：任何 (4.1) 的弱解都能够在一个零测度集上重新定义它的值，使其在 Ω 上连续. 这个重新定义的连续函数称为在 Ω 中是 $\mathcal{A}$-调和.

本节给出 (4.1) 的很弱解 $u\in W^{1,r}_{loc}(\Omega)$ 的唯一性结果, 其中 $u\in W^{1,r}_0(\Omega;\partial\Omega\setminus E)$, E 是一个闭集. 在定理的证明中，我们将要用到 Hodge 分解定理和 (4.1) 的很弱解的正则性结果.

设 t_1 满足

$$t_1\begin{cases}=1/(\frac{1}{r}+\frac{1}{n}-\frac{1}{r_2}), & \text{if} \quad r_2<n,\\ >r, \quad \text{if} \quad r_2\geq n.\end{cases}$$

这里 r_2 由引理 3.1 给出. t_2 满足

$$t_2\begin{cases}=1/(1+\frac{1}{n}-\frac{p-1}{r_2}-\frac{r-p+1}{r}), & \text{if} \quad \frac{r}{r-p+1}<n,\\ >1/(1-\frac{p-1}{r_2}), & \text{if} \quad \frac{r}{r-p+1}\geq n.\end{cases}$$

设 $t=\max\{t_1,t_2\}$.

定理 4.1 存在 $r_0=r_0(n,p,a,b,|\Omega|)<p$, 使得若 $u\in W^{1,r}_{loc}(\Omega)$ 为 (4.1) 的很弱解，并且 $u\in W^{1,r}_0(\Omega;\partial\Omega\setminus E)$, 这里 $E\subset\Omega$ 为一个闭集，且 $\mathrm{Cap}_t(E)=0$, 则当 $r_o<r<p$ 时，有 $u=0, a.e. x\in\Omega$.

注 4.3 若 $t>n$, 则 $\mathrm{Cap}_t(E)=0$ 能够推出 $E=\phi$, 因此我们只感情趣于 $t\leq n$ 的情形.

注 4.4 与 Li Martio [1] 的条件比较，本节关于算子 $\mathcal{A}$ 的条件有所加强，这样使得我们能够应用 $\mathcal{A}$- 调和方程很弱解的正则性定理. 另外，本节去掉了定理 B 中

的在整个 Ω 上的可积性条件 (ii)(iii)(iv), 这样就引起了证明中的实质性困难. 本节利用 Hodge 分解取适当的试验函数，克服了上述困难.

定理 4.1 的证明 类似于 Li Martio [1], 我们设 $r \geq r_1 = r_1(n,p,a,b)$, 这里 $r_1 = p - \varepsilon_1$ 由定理 3.1 给出. 在 $W^{1,r}$ 意义下， u 在 $\partial\Omega \setminus E$ 有零边界值，蕴涵对任意 $y \in \partial\Omega \setminus E$, 存在 $U = U(y)$, 使得

$$u \in W^{1,r}(U \cap \Omega) \tag{4.3}$$

固定球 $B \subset\subset \Omega$. 因为 $\mathrm{Cap}_t(E) = 0$, 我们可以选择一个开集 $D \subset R^n$ 使得 $E \subset D, B \subset R^n \setminus D$, 并且 $\mathrm{Cap}_t(E, D) = 0$. 这里 $\mathrm{Cap}_t(E, D)$ 是指容器 (E, D) 的通常的变分 t- 容量，参见 Heinonen, Kilpelainen, Martio [1, Chapter 2]. 给定 $\varepsilon > 0$, 可以找到开集 U_ε 与 $\eta \in C_0^\infty(D)$, 使得 $E \subset U_\varepsilon \subset\subset D, 0 \leq \eta \leq 1$, 在 $\bar{U}_\varepsilon$ 上 $\eta = 1$, 并且

$$\int_D |\nabla\eta|^t dx < \varepsilon', \tag{4.4}$$

因此

$$\|\nabla\eta\|_t < \varepsilon. \tag{4.5}$$

现在区分两种情况. 主要目的是找到合适的试验函数.

情况 1 $p \geq 2$.

记 $\xi = 1 - \eta$, 注意到我们已经在 $R^n \setminus D$ 置 $\eta = 0$. 则 $\xi \in C^\infty(R^n)$, $0 \leq \xi \leq 1$, 并且 (3.5) 对 ξ 也成立. 另一方面，在 $\bar{U}_\varepsilon$ 上 $\xi = 0$, 在 $R^n \setminus D$ 上 $\xi = 1$, 因此在 B 上 $\xi = 1$.

设 W_ε 为 E 的邻域，使得

$$E \subset\subset W_\varepsilon \subset\subset U_\varepsilon.$$

因为函数 $v = \xi u \in W_0^{1,r}(\Omega)$, 且 v 的支集在 E 之外. 由引；理得 $u \in W^{1,r_2}(\Omega_\varepsilon)$, 这里 $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \bar{W}_\varepsilon$. 我们引进在 Ω 中具有紧支集的 $|\nabla(\xi u)|^{r-p}\nabla(\xi u) \in L^{\frac{r}{r-p+1}}(\Omega_\varepsilon)$ 的 Hodge 分解，参见 Greco, Iwaniec, Sbordone[1, P252],

$$|\nabla(\xi u)|^{r-p}\nabla(\xi u) = \nabla\phi + h \tag{4.6}$$

其中 $\phi \in W_0^{1,\frac{r}{r-p+1}}(\Omega)$, $h \in L^{\frac{r}{r-p+1}}(\Omega)$ 为散度为零 (divergence free) 的向量，并且下面的估计式成立

$$\|\nabla\phi\|_{\frac{r}{r-p+1}} \le C_1(n,p)\|\nabla(\xi u)\|_r^{r-p+1} \tag{4.7}$$

$$\|h\|_{\frac{r}{r-p+1}} \le C_(n,p)(p-r)\|\nabla(\xi u)\|_r^{r-p+1} \tag{4.8}$$

这里的 $C_1(n,p)$ 表示依赖于 n,p 的常数，它还可能依赖于正则区域 Ω, 为符号简单计，我们做了省略.

设

$$E(\xi,u) = |\xi\nabla u|^{r-p}\xi\nabla u - |\nabla(\xi u)|^{r-p}\nabla(\xi u) \tag{4.9}$$

则有

$$|E(\xi,u)| \le \frac{2^{p-r}(p-r+1)}{r-p+1}|u\nabla\xi|^{r-p+1}. \tag{4.10}$$

下面计算中的一个有用的工具是将 $\xi^{p-1}\phi$ 作为试验函数，这里 ϕ 来自于 (4.7) 中的 Hodge 分解. 由 (4.6), (4.9), (4.10) 有

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_\varepsilon}\langle A(x,\xi\nabla u), |\xi\nabla u|^{r-p}\xi\nabla u\rangle dx \\
= & \int_{\Omega_\varepsilon}\langle A(x,\xi\nabla u), E(\xi,u)\rangle dx + \int_{\Omega_\varepsilon}\langle A(x,\xi\nabla u), h\rangle dx + \int_{\Omega_\varepsilon}\langle A(x,\xi\nabla u), \phi\nabla\xi^{p-1}\rangle dx \\
= & I_1 + I_2 + I_3
\end{aligned} \tag{4.11}$$

这里我们用 $(\xi^{p-1}\phi)$ 作为 (4.2) 中的试验函数. 应用单调不等式 (2), 有

$$\int_{\Omega_\varepsilon}\langle A(x,\xi\nabla u), |\xi\nabla u|^{p-1}\xi\nabla u\rangle dx \ge a\int_{\Omega_\varepsilon}|\xi\nabla u|^r dx. \tag{4.12}$$

现在估计 $|I_1|$. 若 $r_2 < n$, 则 $\frac{p-1}{r_2} + (\frac{1}{r_2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{t_1})(r-p+1) < 1$, 由 Lipschitz 型不等式 (1), (4.10) 及 Hölder 不等式，由于 $r-p+1<1$, 以及可以假设 $\varepsilon < 1$, 得到

$$\begin{aligned}
|I_1| &\le b\frac{2^{p-r}(p-r+1)}{r-p+1}\int_{\Omega_\varepsilon}|\nabla u|^{p-1}|u|^{r-p+1}|\nabla\xi|^{r-p+1}dx \\
&\le C_2 b\frac{2^{p-r}(p-r+1)}{r-p+1}\|\nabla u\|_{r_2}^{p-1}\|u\|_{\frac{nr_2}{n-r_2}}^{r-p+1}\|\nabla\xi\|_{t_1}^{r-p+1} \\
&\le C_2\xi
\end{aligned} \tag{4.13}$$

这里应用了 Sobolev 嵌入定理. 常数 C_2 依赖于 $n,p,r,r_2,a,b,|\Omega|$. 为符号简便我们省略了这些记号. 同样记 $\|\cdot\|_r = \|\cdot\|_{r.\Omega_\varepsilon}$.

若 $r_2 \geq n$, 由 t_1 的定义也能得到 $|I_1| \leq C_2\varepsilon$. 下面估计 $|I_2|$. 应用 (4.8) 得到

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq b\int_{\Omega_\varepsilon} |\xi \nabla u|^{p-1}|h|dx \\ &\leq b\|\xi\nabla u\|_r^{p-1}\|h\|_{\frac{r}{r-p+1}} \\ &\leq C_1(n,p)b(p-r)\|\xi\nabla u\|_r^{p-1}\|\nabla(\xi u)\|_r^{r-p+1} \end{aligned} \tag{4.14}$$

因为

$$\|\nabla(\xi u)\|_r \leq \|\xi\nabla u\|_r + \|u\nabla\xi\|_r,$$

由 t_1 的定义，若 $r_2 < n$, 则

$$\|u\nabla\xi\|_r \leq \|u\|_{\frac{nr_2}{n-r_2}}\|\nabla\xi\|_{t_1} \leq C_2\varepsilon;$$

若 $r_2 > n$, 则

$$\|u\nabla\xi\|_r \leq \|u\|_{\frac{t_1 r}{t_1-r}}\|\nabla\xi\|_{t_1} \leq C_2\varepsilon.$$

因此,

$$|I_2| \leq C_2(p-r)\|\xi\nabla u\|_r^r + C_2\varepsilon. \tag{4.15}$$

余下的是估计 $|I_3|$. 若 $\frac{r}{r-p+1} < n$, 则

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq b(p-1)\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^{p-1}|\phi||\nabla\xi|dx \\ &\leq b(p-1)\|\nabla u\|_{r_2}^{p-1}\|\phi\|_{\frac{nr}{n(r-p+1)-r}}\|\nabla\xi\|_{t_2} \\ &\leq C_2\varepsilon. \end{aligned} \tag{4.16}$$

这里我们应用了 Sobolev 嵌入定理与 Hölder 不等式. 若 $\frac{r}{r-p+1} \geq n$, 则由 t_2 的定义与 Sobolev 嵌入定理也有同样的估计.

联合 (4.11)-(4.16), 对 $p \geq 2$ 的情形，有

$$\|\xi\nabla u\| = \int_{\Omega_\varepsilon} |\xi\nabla u|^r dx \leq C_2\varepsilon + C_2(p-r)\|\xi\nabla u\|_r^r. \tag{4.17}$$

设 $r_0 = p - \frac{1}{C_2}$, 若 $\max\{r_0, r_1\} < r < p$, 则上式右端第二项被左端吸收，即

$$\|\xi\nabla u\|_r^r \leq C_2\varepsilon. \tag{4.18}$$

因此,

$$\int_B |\xi\nabla u|^r dx \leq C_2\varepsilon.$$

令 $\varepsilon \to 0$, 得到 $\nabla u = 0, a.e. x \in B$, 因此由 B 的任意性的 $\nabla u = 0$, $a.e. x \in \Omega$.

情形 2　$1 < p < 2$.

我们需要在情形 1 中由 ξ^{p-1} 代替 ξ, 即在 $R^n \setminus D$ 令 $\eta = 0$, 记 $\xi^{p-1} = 1 - \eta$, 则 $\xi^{p-1} \in C^\infty(R^n)$, $0 \le \xi \le 1$, 并且 (4.5) 对 ξ^{p-1} 成立. 在 $\bar{U}_\varepsilon$ 上 $\xi = 0$, 在 $R^n \setminus D$ 上 $\xi = 1$, 因此在 B 上 $\xi = 1$.

类似于情形 1, 我们有 (4.12), 并且注意到

$$|\nabla \xi^{p-1}| = (p-1)|\xi^{p-2}||\nabla \xi| \ge (p-1)|\nabla \xi|.$$

我们有 $\|\nabla \xi\|_t \le \frac{1}{p-1}\|\nabla \xi^{p-1}\|_t$, 于是我们有与 $|I_1|, |I_2|, |I_3|$ 的同样的估计. 所有这些不等式联合起来，得到 $\nabla u = 0, a.e. x \in \Omega$.

于是在两种情形之下我们都有：若 $\max\{r_0, r_1\} < r < p$, 则 $\nabla u = 0, a.e. x \in \Omega$. 因此在 Ω 的每一个分支上 $u \equiv$ C=Const.. 现在, 因为 $\mathrm{Cap}_t(E) = 0$ 与任何有界区域的边界不可能具有零 $t-$ 容量. 在 Ω 的每一个分支 V 上，条件 $u \in W_0^{1,r}(V; \partial\Omega \setminus E)$ 蕴涵 $C = 0$. 这样， $u = 0, a.e. x \in \Omega$. 定理 3.1 证毕.

§4.5 $\mathcal{A}$- 调和方程障碍问题的很弱解

4.5.1 局部与整体高阶可积性

设 Ω 是 $R^n (n \ge 2)$ 中的有界正则区域. 所谓正则区域是指使 Hodge 分解的估计式 (5.4)(5.5) 成立的区域. 例如， Lipschitz 区域为正则区域. 考虑下面的二阶拟线性散度型椭圆方程

$$\mathrm{div}\mathcal{A}(x, \nabla u(x)) = 0, \tag{5.1}$$

其中 $\mathcal{A} : \Omega \times \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$ 满足通常的可测性条件 (Carethéodory 条件), 映射 $x \to A(x, \xi)$ 对几乎所有 $\xi \in R^n$ 可测，映射 $x \to A(x, \xi)$ 对几乎所有的 $x \in R^n$ 连续；并且对 $1 < p < \infty$, $0 < \alpha \le \beta < \infty$ 和几乎所有的 $x \in \Omega$, $\xi \in R^n$, 有

(1) $\langle \mathcal{A}(x, \xi), \xi \rangle \ge \alpha |\xi|^p$,

(2) $|\mathcal{A}(x, \xi)| \le \beta |\xi|^{p-1}$.

设函数 $\psi : \Omega \to \mathrm{R} \cup \{\pm\infty\}$ 可测， $\theta \in W^{1,p}(\Omega)$. 令

$$\mathcal{K}^p_{\psi,\theta}(\Omega) = \{v \in W^{1,p}(\Omega) : v \ge \psi, a.e., v - \theta \in W_0^{1,p}(\Omega)\}.$$

定义 5.1 函数 $u \in \mathcal{K}^p_{\psi,\theta}(\Omega)$ 称为 $\mathcal{K}^p_{\psi,\theta}(\Omega)$- 障碍问题的弱解，如果对任意 $v \in \mathcal{K}^p_{\psi,\theta}(\Omega)$, 有

$$\int_\Omega \langle \mathcal{A}(x, \nabla u), \nabla(v-u)\rangle dx = 0, \tag{5.2}$$

其中 θ 称为边值， ψ 称为障碍.

关于 $\mathcal{K}^p_{\psi,\theta}(\Omega)$- 障碍问题弱解的若干性质参见 Heinonen, Kilpelainen, Martio [1].

下面给出 $\mathcal{A}$- 调和方程障碍问题很弱解的定义. 假设 $\theta \in W^{1,r}(\Omega)$, $\max\{1, p-1\} < r \le p$. 引入集合

$$\mathcal{K}^r_{\psi,\theta}(\Omega) = \{v \in W^{1,r}(\Omega) : v \ge \psi, a.e., v-\theta \in W^{1,r}_0(\Omega)\}.$$

对任意 $u, v \in W^{1,r}(\Omega)$, 引入关于 $|\nabla(v-u)|^{r-p}\nabla(v-u) \in L^{r/(r-p+1)}(\Omega)$ 的 Hodge 分解,

$$|\nabla(v-u)|^{r-p}\nabla(v-u) = \nabla\varphi_{v,u} + h_{v,u}, \tag{5.3}$$

其中 $\varphi_{v,u} \in W^{1,r/(r-p+1)}(\Omega)$, 且 $h \in L^{r/(r-p+1)}(\Omega)$ 是散度为零 (divergence free) 的向量，并满足下面的估计式

$$\|\nabla\varphi_{v,u}\|_{r/(r-p+1)} \le C\|\nabla(v-u)\|_r^{r-p+1}, \tag{5.4}$$

$$\|h_{v,u}\|_{r/(r-p+1)} \le C(p-r)\|\nabla(v-u)\|_r^{r-p+1}, \tag{5.5}$$

定义 5.2 函数 $u \in \mathcal{K}^r_{\psi,\theta}(\Omega)$ 称为 $\mathcal{K}^r_{\psi,\theta}(\Omega)$- 障碍问题的很弱解，如果对任意 $v \in \mathcal{K}^r_{\psi,\theta}(\Omega)$, 有

$$\int_\Omega \langle A(x, \nabla u), |\nabla(v-u)|^{r-p}\nabla(v-u)\rangle dx \ge \int_\Omega \langle A(x, \nabla u), h_{v,u}\rangle dx, \tag{5.6}$$

其中 $h_{v,u}$ 出自 Hodge 分解 (5.3).

上面定义中 ” 很弱解 ” 的含义是指 u 的 Sobolev 可积指数 r 可以小于弱解的 Sobolev 可积指数 p. 显然, 从 Hodge 分解得知, $|\nabla(v-u)|^{r-p}\nabla(v-u) - h_{v,u} = \nabla\varphi_{v,u}$ 为梯度形式. 若 $r = p$, 则由 Hodge 分解的唯一性得知 $h_{v,u} = 0$, 此时定义 5.2 与定义 5.1 一致.

定义了 $\mathcal{A}$- 调和方程障碍问题的很弱解之后，一个自然的问题是：它作为 $\mathcal{A}$- 调和方程障碍问题弱解的推广，是否保持了弱解的一些性质？下面的定理回答了这个问题.

定理 5.1 设 $\mathcal{K}^r_{\psi,\theta}(\Omega)$ 非空. 存在 $r_0\in(p-1,p)$, 使得对任意 $\mathcal{K}^r_{\psi,\theta}(\Omega)$- 障碍问题的很弱解 u 及任意的 $v\in\mathcal{K}^r_{\psi,\theta}(\Omega)$, 只要 $r>r_0$, 便有

$$\int_\Omega |\nabla u|^r dx \le C\int_\Omega |\nabla v|^r dx,$$

其中 $C=C(n,p,r_0,\frac{\beta}{\alpha})$.

上述定理表明：当 $r>r_0$ 时，在所有与 u 有相同边界值 θ, 并且以 ψ 为障碍的函数中，在相差一个常数因子 C 不计的情况下， u 具有最小的 r-Dirichlet 积分，即 u 具有最小的能量. 这当 $r=p$ 时与经典的结论一致.

$\mathcal{A}$- 调和方程 (5.1) 弱解的高阶可积性结果最早是由 Meyers, Elcrat [1] 考虑的. $\mathcal{A}$- 调和方程障碍问题弱解的存在唯一性结果已被 Heinonen, Kilpelainen, Martio [1] 得到. 一个引人注意的结果是 1994 年 Li, Martio [1] 得到的 $\mathcal{A}$- 调和方程障碍问题弱解的局部和整体高阶可积性结果. 近年来关于 $\mathcal{A}$- 调和方程障碍问题很弱解的定义以及局部与整体可积性仍未考虑. 本节将 Li Martio [1] 的结果推广到 $\mathcal{A}$- 调和方程障碍问题的很弱解.

在研究整体高阶可积性时，我们需要关于区域 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 的正则性条件，见 Li Martio [1, P26]. 称 $\partial\Omega$ 为 r-Poincaré 厚的，如果存在 $\gamma<\infty$, 使得对所有立方体 $Q(R)\subset \mathrm{R}^n, R>0$, 当 $u\in W^{1,r}(\Omega)$, $u=0$ 在 $(R^n-\Omega)\cap Q(2R)$, 并且 $Q(\frac{3}{2}R)\cap C\Omega\neq\emptyset$ (其中 $C\Omega=\mathrm{R}^n-\bar{\Omega}$) 时，有

$$\left(\int_{Q(2R)}|u|^r dx\right)^{1/r}\le\left(\int_{Q(2R)}|\nabla u|^{rn/(r+n)}dx\right)^{(r+n)/rn}.$$

本节的主要结果是下面的两个定理，它们推广了文 Li Martio [1] 的结果.

定理 5.2 存在 $r_1\in(p-1,p)$, 使得当 $r_1<r\le p$ 时, 对任意 $\psi\in W^{1,s}_{loc}(\Omega)$,$s>r$, 以及任意 $K^r_{\psi,\theta}(\Omega)$- 障碍问题的很弱解 u, 都存在 $q>r$, 使得 $u\in W^{1,q}_{loc}(\Omega)$.

定理 5.3 假设 Ω 为有界正则区域, 其边界为 $r-$Poincaré 厚的， $r\ge n/(n-1)$. 存在 $r_2\in(p-1,p)$, 使得当 $r_2<r\le p$ 时，对任意的 $\theta,\psi\in W^{1,s}(\Omega), s>r$, 以及任意 $\mathcal{K}^r_{\psi,\theta}$- 障碍问题的很弱解 u, 都存在 $q>r$, 使得 $u\in W^{1,q}(\Omega)$.

注 5.2 定理 5.2 与定理 5.3 中 $r=p$ 时即为 Li Martio [1] 中的定理 A 与定理 B.

下面给出定理 5.1, 定理 5.2 与定理 5.3 的证明.

定理 5.1 的证明 设 u 为 $\mathcal{K}^r_{\psi,\theta}$- 障碍问题的很弱解. 对任意的 $v\in\mathcal{K}^r_{\psi,\theta}(\Omega)$, 令

$$E(v,u)=|\nabla(v-u)|^{r-p}\nabla(v-u)+|\nabla u|^{r-p}\nabla u, \tag{5.8}$$

则由一个基本的关系式 (见 Iwaniec, Migliaccio, Nania, Sbordone [1, P271, (4.1) 式])

$$||X|^{-\varepsilon}X-|Y|^{-\varepsilon}Y|\le 2^{\varepsilon}\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}|X-Y|^{1-\varepsilon}, 0\le\varepsilon<1, \tag{5.9}$$

得到

$$E(v,u)\le 2^{p-r}\frac{p-r+1}{r-p+1}. \tag{5.10}$$

于是由 (5.8) 式得到

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\langle A(x,\nabla u),|\nabla u|^{r-p}\nabla u\rangle dx\\ =\ &\int_\Omega\langle A(x,\nabla u),E(v,u)\rangle dx-\int_\Omega\langle A(x,\nabla u),|\nabla(v-u)|^{r-p}\nabla(v-u)\rangle dx.\end{aligned} \tag{5.11}$$

再由 $\mathcal{K}^r_{\psi,\theta}(\Omega)$- 障碍问题很弱解的定义式 (5.6), 条件 (1), (2) 以及 (5.5) 式可得

$$\begin{aligned}\alpha\int_\Omega|\nabla u|^r dx &\le \int_\Omega\langle A(x,\nabla u),|\nabla u|^{r-p}\nabla u\rangle dx\\ &\le \beta 2^{p-r}\frac{p-r+1}{r-p+1}\int_\Omega|\nabla u|^{p-1}|\nabla v|^{r-p+1}dx-\int_\Omega\langle A(x,\nabla u),h_{v,u}\rangle dx\\ &\le \beta 2^{p-r}\frac{p-r+1}{r-p+1}\int_\Omega|\nabla u|^{p-1}|\nabla v|^{r-p+1}d+\beta\int_\Omega|\nabla u|^{p-1}|h_{v,u}|dx\\ &\le \beta 2^{p-r}\frac{p-r+1}{r-p+1}\|\nabla u\|_r^{p-1}\|\nabla v\|_r^{r-p+1}\\ &\quad +C\beta(p-r)\|\nabla u\|_r^{p-r}(\|\nabla u\|_r^{r-p+1}+\|\nabla v\|_r^{r-p+1}).\end{aligned}$$

于是利用 Young 不等式

$$ab\le\varepsilon a^{p'}+C(\varepsilon,p)b^p, \frac{1}{p'}+\frac{1}{p}, a,b\le 0, \varepsilon>0, p>1,$$

得

$$\begin{aligned}\int_\Omega|\nabla u|^r dx &\le C\|\nabla u\|_r^{p-1}\|\nabla v\|_r^{p-1}+C(p-r)\|\nabla u\|_r^r\\ &\le C\varepsilon\|\nabla u\|_r^r+C\|\nabla v\|_r^r+C(p-r)\|\nabla u\|_r^r,\end{aligned}$$

其中 $C=C(n,p,r,\frac{\beta}{\alpha})$. 取 r_0 满足 $C(p-r_0)=1$, 则当 $r_0<r$ 时，$C(p-r)=\tau_1<1$. 再取 ε 充分小，使得 $C\varepsilon+\tau_1=\tau<1$, 此时便有

$$\int_\Omega |\nabla u|^r dx \le C\int_\Omega |\nabla v|^r dx.$$

定理 5.2 的证明 设 u 为 $\mathcal{K}^r_{\psi,\theta}$- 障碍问题的很弱解， $Q(2R)\subset\Omega$ 为一立方体. 取截断函数 $\varphi\in C_0^\infty(Q(2R))$, 使得 $0\le\varphi\le 1$, $|\nabla\varphi|\le\frac{C(n)}{R}$, 并且当 $x\in Q(R)$ 时 $\varphi\equiv 1$. 考虑函数

$$v=u-C_u-\varphi^r(u-C_u-(\psi-C_\psi)),$$

这里 C_u 与 C_ψ 分别表示 u 和 ψ 在 $Q(2R)$ 上的积分平均. 因为 $v-(\theta-C_u)\in W_0^{1,r}(\Omega)$, 并且由 $u\ge\psi$, 得到 $C_u\ge C_\psi$, 于是几乎处处在 Ω 上，有

$$\begin{aligned} v &= (1-\varphi^r)(u-c_u)+\varphi^r(\psi-C_\psi)\ge(1-\varphi^r(u-C_u))+\varphi^r(\psi-C_u)\\ &\ge (1-\varphi^r)(\psi-C_u)+\varphi^r(\psi-C_u)=\psi-C_u, \end{aligned}$$

因此 $v\in\mathcal{K}^r_{\psi-C_u,\theta-C_u}(\Omega)$. 又

$$\nabla v=(1-\varphi^r)\nabla(u-C_u)+\varphi^r\nabla(\psi-C_\psi)+r\varphi^{r-1}\nabla\varphi((\psi-C_\psi-(u-C_u))).$$

令

$$E_1(v,u)=|X_1|^{-\varepsilon}X_1+|Y_1|^{-\varepsilon}Y_1, \tag{5.12}$$

其中

$$\varepsilon=p-r, X_1=\varphi^r\nabla u,$$

$$Y_1=\nabla v-\nabla u=-\varphi^r\nabla u+\varphi^r\nabla\psi+r\varphi^{r-1}\nabla\varphi(\psi-C_\psi-(u-C_u)).$$

由基本不等式 (5.9) 得到

$$\begin{aligned} |E_1(v,u)| &\le \frac{2^\varepsilon(1+\varepsilon)}{1-\varepsilon}|X_1+Y_1|^{1-\varepsilon}\\ &= \frac{2^{p-r}(p-r+1)}{r-p+1}|\varphi^r\nabla\psi+r\varphi^{r-1}\nabla\varphi((\psi-C_\psi-(u-C_u)))|^{r-p+1}. \end{aligned}$$

因为 $u-C_u$ 为 $K^r_{\psi-C_U,\theta-C_u}$ 障碍问题的很弱解，于是由 (5.12) 式以及关于 $\nabla u-\nabla v$ 的 Hodge 分解及估计式 (5.4), (5.5) 得到

$$
\begin{aligned}
& \int_\Omega \langle \mathcal{A}(x,\nabla u), |\varphi^r\nabla u|^{r-p}\varphi^r\nabla u\rangle dx \\
= & \int_{Q(2R)} \langle \mathcal{A}(x,\nabla u), |\varphi^r\nabla u|^{r-p}\varphi^r\nabla u\rangle dx \\
= & \int_{Q(2R)} \langle \mathcal{A}(x,\nabla u), E_1(v,u)\rangle dx - \int_{Q(2R)} \langle \mathcal{A}(x,\nabla u), |\nabla v-\nabla u|^{r-p}(\nabla v-\nabla u)\rangle dx \\
\leq & \ \beta\int_{Q(2R)} |\nabla u|^{p-1}|E_1(v,u)|dx - \int_{Q(2R)} \langle \mathcal{A}(x,\nabla u), h_{v,u}\rangle dx \\
\leq & \ \beta\frac{2^{p-r}(p-r+1)}{r-p+1}\int_{Q(2R)} |\nabla u|^{p-1}|\varphi^r\nabla\psi+r\varphi^{r-1}\nabla\varphi((\psi-C_\psi-(u-C_u)))|^{r-p+1}dx \\
& +\beta\int_{Q(2R)} |\nabla u|^{p-1}|h_{v,u}|dx \\
\leq & \ \beta\frac{2^{p-r}(p-r+1)}{r-p+1}\int_{Q(2R)} |\nabla u|^{p-1}|\nabla\psi|^{r-p+1}dx \\
& +\beta\frac{2^{p-r}(p-r+1)}{r-p+1}\int_{Q(2R)} |\nabla u|^{p-1}|r\varphi^{r-1}\nabla\varphi(\psi-C_\psi-(u-C_u))|^{r-p+1}dx \\
& +C\beta\left(\int_{Q(2R)}|\nabla u|^r dx\right)^{(p-1)/r}\left(\int_{Q(2R)}|h_{v,u}|^{r/(r-p+1)}dx\right)^{(r-p+1)/r} \\
\leq & \ \beta\frac{2^{p-r}(p-r+1)}{r-p+1}\left(\int_{Q(2R)}|\nabla u|^p dx\right)^{(p-1)/r}\left(\int_{Q(2R)}|\nabla\psi|^r dx\right)^{r-p+1)/r} \\
& +\beta\frac{2^{p-r}(p-r+1)}{r-p+1}\left(\int_{Q(2R)}|\nabla u|^p dx\right)^{(p-1)/r}\times \\
& \left(\int_{Q(2R)}|r\varphi^{r-1}\nabla\varphi(\psi-C_\psi-(u-C_u))|^r dx\right)^{(r-p+1)/r} \\
& +C\beta(p-r)\left(\int_{Q(2R)}|\nabla u|^r dx\right)^{(p-1)/r}\left(\int_{Q(2R)}|\nabla v-\nabla u|^r dx\right)^{(r-p+1)/r}.
\end{aligned}
\tag{5.13}
$$

将

$$
\nabla v-\nabla u=-\varphi^r\nabla u+\varphi^r\nabla\psi+r\varphi^{r-1}\nabla\varphi((\psi-C_\psi-(u-C_u)))
$$

带入上式最后一项, 并取 r_1 满足 $C\beta(p-r_1)=2^{-n}$, 则当 $r_1<r<p$ 时，$C\beta(p-r)=\tau_1<2^{-n}$. 利用 Young 不等式得到

$$
\begin{aligned}
\int_{Q(R)}|\nabla u|^r dx \leq \ & C\varepsilon\int_{Q(2R)}|\nabla u|^r dx+C\int_{Q(2R)}|\nabla\psi|^r dx+C\varepsilon\int_{Q(2R)}|\nabla u|^r dx+ \\
& C\int_{Q(2R)}|\varphi^{r-1}\nabla\varphi(\psi-C_\psi-(u-C_u))|^r dx+\tau_1\int_{Q(2R)}|\nabla u|^r dx,
\end{aligned}
\tag{5.14}
$$

其中 $C=C(p,r,r_1,\frac{\beta}{\alpha},\varepsilon)$. 再取 ε 充分小，使得 $2C\varepsilon+\tau_1=\tau_2<2^{-n}$, 于是上式化为

$$\begin{aligned}\int_{Q(R)}|\nabla u|^r dx\leq\ & \tau_2\int_{Q(2R)}|\nabla u|^r dx+C\int_{Q(2R)}|\nabla\psi|^r dx+\\ & C\int_{Q(2R)}|\varphi^{r-1}\nabla\varphi(\psi-C_\psi-(u-C_u))|^r dx.\end{aligned}\tag{5.15}$$

再估计上式的最后一项. 由通常的 Sobolev-Poincaré 不等式得到

$$\begin{aligned}&\int_{Q(2R)}|\varphi^{r-1}\nabla\varphi(\psi-C_\psi-(u-C_u))|^r dx\\ \leq\ & CR^{-r}\int_{Q(2R)}|(\psi-C_\psi-(u-C_u))|^r dx\\ \leq\ & C\int_{Q(2R)}|\nabla\psi|^r+CR^{-r}\left(\int_{Q(2R)}|\nabla u|^{nr/(n+r)}dx\right)^{(n+r)/n}.\end{aligned}$$

代入 (5.15) 式有

$$\begin{aligned}\int_{Q(R)}|\nabla u|^r dx\leq\ & \tau_2\int_{Q(2R)}|\nabla u|^r dx+C\int_{Q(2R)}|\nabla\psi|^r dx+\\ & CR^{-r}\left(\int_{Q(2R)}|\nabla u|^{nr/(n+r)}dx\right)^{(n+r)/n}.\end{aligned}\tag{5.16}$$

上式两端除以 $|Q(R)|$ 得到

$$\begin{aligned}⨍_{Q(R)}|\nabla u|^r dx\leq\ & \tau_2⨍_{Q(2R)}|\nabla u|^r dx+C⨍_{Q(2R)}|\nabla\psi|^r dx+\\ & CR^{-r}\left(⨍_{Q(2R)}|\nabla u|^{nr/(n+r)}dx\right)^{(n+r)/n},\end{aligned}\tag{5.17}$$

其中 $\tau=2^n\tau_1<1$. 因为 $\frac{nr}{n+r}<r$, 上式为一个逆 Hölder 不等式. 由引理以及通常的 Sobolev 嵌入定理知：存在 $q>r$, 使得 $u\in W^{1,q}_{loc}(\Omega)$.

定理 5.3 的证明 因为 Ω 有界，我们可以选择立方体 $Q_0=Q(2R_0)$, 使得 $\Omega\subset Q(R_0)$. 其次，设 $Q(2R)\subset Q_0$. 有两种可能情况：

a) $Q(\frac{3}{2}R)\subset\Omega$;

b) $Q(\frac{3}{2}R)\cap C\Omega\neq\emptyset$.

对于情况 a), 由定理 5.2 的证明可以得到估计式

$$\begin{aligned}\int_{Q(R)}|\nabla u|^r dx\leq\ & \tau\int_{Q(2R)}|\nabla u|^r dx+C\left(\int_{Q(\frac{3}{2}R)}|\nabla u|^{nr/(n+r)}dx\right)^{(n+r)/n}+\\ & C\int_{Q(\frac{3}{2}R)}|\nabla\psi|^r dx,\end{aligned}\tag{5.18}$$

其中 $0<\tau<1$. 这是一个逆 Hölder 不等式. 对情况 $b)$, 注意到 $\theta_1=\max\{\theta,\psi\}$ 代替 θ, 可以假设边界函数 $\theta\geq\psi$. 事实上，由 $\theta_1=(\psi-\theta)^++\theta$ 与

$$0\leq(\psi-\theta)^+\leq(u-\theta)^+\in W_0^{1,r}(\Omega)$$

得到 $(\psi-\theta)^+\in W_0^{1,r}(\Omega)$, 因此 $u-\theta_1\in W_0^{1,r}(\Omega)$. 其次，令

$$v=u-\varphi^r(u-\theta)$$

其中 $\varphi\in C_0^\infty(Q(2R))$ 为与定理 5.2 证明中相同的截断函数. 现在因为 $v-\theta\in W_0^{1,r}(\Omega)$, 而且由 $u\leq\psi$,$\theta\leq\psi$, 得到

$$v=(1-\varphi^r)u+\varphi^r\theta\leq(1-\varphi^r)\psi+\varphi^r\psi=\psi,$$

所以 $v\in\mathcal{K}^r_{\psi,\theta}$. 由于

$$\nabla v=(1-\varphi^r)\nabla u+\varphi^r\nabla\theta+r\varphi^{r-1}(\theta-u)\nabla\varphi,$$

令

$$E_2(v,u)=|X_2|^{-\varepsilon}X_2+|Y_2|^{-\varepsilon}Y_2, \tag{5.19}$$

其中

$$\varepsilon=p-r, X_2=\varphi^r\nabla u, Y_2=\nabla v-\nabla u=-\varphi^r\nabla u+\varphi^r\nabla\theta+r\varphi^{r-1}(\theta-u)\nabla\varphi.$$

则由基本不等式 (5.9) 得到

$$\begin{aligned}|E_2(v,u)| &\leq \frac{2^\varepsilon(1+\varepsilon)}{1-\varepsilon}|X_2-Y_2|^{1-\varepsilon}\\ &= \frac{2^{p-r}(p-r+1)}{r-p+1}|\varphi^r\nabla\theta+r\varphi^{r-1}(\theta-u)\nabla\varphi|^{r-p+1}.\end{aligned}$$

于是由 (5.19) 式得到

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\langle\mathcal{A}(x,\nabla u),|\varphi^r\nabla u|^{r-p}\varphi^r\nabla u\rangle dx\\ &=\int_\Omega\langle\mathcal{A}(x,\nabla u),E_2(v,u)\rangle dx-\int_\Omega\langle\mathcal{A}(x,\nabla u),|Y_2|^{-\varepsilon}Y_2\rangle dx.\end{aligned} \tag{5.20}$$

在 $Q(2R)\cap\Omega$ 上引入 $Y=\nabla v-\nabla u$ 的 Hodge 分解 (5.3), 由估计式 (5.4), (5.5) 得到

$$
\begin{aligned}
&\alpha\int_\Omega \varphi^{r(r-p+1)}|\nabla u|^r dx\\
\le\ & \int_\Omega \langle A(x,\nabla u), |\varphi^r\nabla u|^{r-p}\varphi^r\nabla u\rangle dx\\
=\ & \int_{\Omega\cap Q(2R)} \langle A(x,\nabla u), |\varphi^r\nabla u|^{r-p}\varphi^r\nabla u\rangle dx\\
\le\ & \beta\int_{\Omega\cap Q(2R)} |\nabla u|^{p-1}|E_2(v,u)|dx-\int_{\Omega\cap Q(2R)}\langle A(x,\nabla u), h_{v,u}\rangle dx\\
\le\ & \beta\frac{2^{p-r}(p-r+1)}{r-p+1}\int_{\Omega\cap Q(2R)}|\nabla u|^{p-1}|\varphi^r\nabla\theta+r\varphi^{r-1}(\theta-u)\nabla\varphi|^{r-p+1}dx+\\
&\beta\int_{\Omega\cap Q(2R)}|\nabla u|^{p-1}|h_{v,u}|dx\\
\le\ & \beta\frac{2^{p-r}(p-r+1)}{r-p+1}\|\nabla u\|^{p-1}_{r,\Omega\cap Q(2R)}\|\varphi^r\nabla\theta\|^{r-p+1}_{r,\Omega\cap Q(2R)}+\\
&\beta\frac{2^{p-r}(p-r+1)}{r-p+1}\|\nabla u\|^{p-1}_{r,\Omega\cap Q(2R)}\|r\varphi^{r-1}(\theta-u)\nabla\varphi\|^{r-p+1}_{r,\Omega\cap Q(2R)}+\\
&\beta\|\nabla u\|^{p-1}_{r,\Omega\cap Q(2R)}\|h_{v,u}\|_{r/(r-p+1),\Omega\cap Q(2R)}\\
\le\ & \left[\beta\frac{2^{p-r}(p-r+1)}{r-p+1}+C\beta(p-r)\right]\times\\
&\left[\varepsilon\|\nabla u\|^r_{r,\Omega\cap Q(2R)}+C(\varepsilon,p,r)\|\varphi^r\nabla\theta\|^r_{r,\Omega\cap Q(2R)}\right]+\\
&\left[\beta\frac{2^{p-r}(p-r+1)}{r-p+1}+C\beta(p-r)\right]\times\\
&\left[\varepsilon\|\nabla u\|^r_{r,\Omega\cap Q(2R)}+C(\varepsilon,p,r)\|r\varphi^{r-1}(\theta-u)\nabla\varphi\|^r_{r,\Omega\cap Q(2R)}\right]+\\
&C(p-r)\beta\|\nabla u\|^r_{r,\Omega\cap Q(2R)}.
\end{aligned}
$$

取 $r_2\in(p-1,p)$ 满足 $C(p-r_2)\frac{\beta}{\alpha}=2^{-n}$, 则当 $r_2\le r<p$ 时, $C(p-r)\frac{\beta}{\alpha}=\tau_1<2^{-n}$. 再取 ε 充分小，使得 $2[\frac{\beta}{\alpha}\frac{2^{p-r}(p-r+1)}{r-p+1}+\frac{\beta}{\alpha}C(p-r)]<\frac{1}{2}(2^{-n}-\tau_1)$, 则 $\tau_2=\frac{1}{2}(2^{-n}-\tau_1)+\tau_1<2^{-n}$, 此时上式成为

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega\varphi^{r(r-p+1)}|\nabla u|^r dx\\
\le\ & \tau_2\|\nabla u\|^r_{r,\Omega\cap Q(2R)}+C\|\varphi^r\nabla\theta\|^r_{r,\Omega\cap Q(2R)}+C\|r\varphi^{r-1}(\theta-u)\nabla\varphi\|^r_{r,\Omega\cap Q(2R)},
\end{aligned}
\tag{5.21}
$$

这里 $C=C(p,r_1,r,\frac{\beta}{\alpha},n,\gamma)$. 下面应用关于 $\partial\Omega$ 为 $r-$Poincaré 厚的假设估计上式最后一项. 因为 u 以 θ 为边值，我们可以将函数 $\theta-u$ 在 Ω 之外延拓为零，于是

$$
\begin{aligned}
&\|r\varphi^{r-1}(\theta-u)\nabla\varphi\|^r_{r,\Omega\cap Q(2R)}\le r\int_{\Omega\cap Q(2R)}|\nabla\varphi|^r|\theta-u|^r dx\\
&\le CR^{-r}(\int_{\Omega\cap Q(2R)}|\nabla(\theta-u)|^{nr/(n+r)}dx)^{(n+r)/n}.
\end{aligned}
\tag{5.22}
$$

注意到在 $C\Omega$ 上 $\nabla(\theta-u)=0, a.e.$, 由 Minkowski 不等式与 Hölder 不等式得到

$$
\begin{aligned}
& R^{-r}\left(\int_{\Omega\cap Q(2R)}|\nabla(\theta-u)|^{nr/(n+r)}\right)^{(n+r)/n} \\
\leq\ & R^{-r}\left[\left(\int_{\Omega\cap Q(2R)}|\nabla\theta|^{nr/(n+r)}\right)^{(n+r)/nr}+\left(\int_{\Omega\cap Q(2R)}|\nabla u|^{nr/(n+r)}\right)^{(n+r)/nr}\right]^{r} \\
\leq\ & R^{-r}\left[R\left(\int_{\Omega\cap Q(2R)}|\nabla\theta|^{r}\right)^{1/r}+\left(\int_{\Omega\cap Q(2R)}|\nabla u|^{nr/(n+r)}\right)^{(n+r)/nr}\right]^{r} \\
\leq\ & 2^{r}\left[\left(\int_{\Omega\cap Q(2R)}|\nabla\theta|^{r}\right)^{1/r}+R^{-r}\left(\int_{\Omega\cap Q(2R)}|\nabla u|^{nr/(n+r)}\right)^{(n+r)/n}\right].
\end{aligned}
\tag{5.23}
$$

由 (5.21), (5.22), (5.23) 得到

$$
\begin{aligned}
& \int_{Q(R)}|\nabla u|^{r}dx\leq\int_{\Omega}\varphi^{r(r-p+1)}|\nabla u|^{r}dx \\
\leq\ & \tau_2\int_{\Omega\cap Q(2R)}|\nabla u|^{r}+C\left[\int_{\Omega\cap Q(2R)}|\nabla\theta|^{r}+R^{-r}\left(\int_{\Omega\cap Q(2R)}|\nabla u|^{nr/(n+r)}\right)^{(n+r)/n}\right].
\end{aligned}
$$

现在在 $Q(2R)-\Omega$ 中令 $|\nabla u|=|\nabla\theta|=0$, 两边再除以 $|Q(R)|$, 则上式即为下面的逆 Hölder 不等式

$$
\begin{aligned}
& \fint_{Q(R)}|\nabla u|^{r}dx \\
\leq\ & \tau\fint_{Q(2R)}|\nabla u|^{r}dx+C\left[\left(\fint_{\Omega\cap Q(2R)}|\nabla u|^{nr/(n+r)}\right)^{(n+r)/n}+\fint_{\Omega\cap Q(2R)}|\nabla\theta|^{r}\right],
\end{aligned}
$$

其中 $\tau=2^{n}\tau_2<1$, $C=C(p,r,r_1,s,n,\frac{\beta}{\alpha},\gamma)<\infty$. 于是由引理 5.1 中的 (5.7) 式可知，存在 $t>r$, 使得 $|\nabla u|\in L^{t}(\Omega), t=t(p,r,r_1,s,n,\frac{\beta}{\alpha},\gamma)>r$.

下面需要证明 $u\in L^{\delta}(\Omega), \delta=\delta(n,r)>r$. 将 $u-\theta$ 在 Ω 之外延拓为 0. 若 $r<n$, 设 $r^*=\frac{nr}{n-r}$, 则由 Sobolev 嵌入定理得

$$
\left(\int_{\Omega}|u-\theta|^{r^*}dx\right)^{1/r^*}\leq\left(\int_{\Omega}|\nabla(u-\theta)|^{r}dx\right)^{1/r}<\infty.
$$

取 $\delta=\min\{s,nr/(n-r)\}$, 由 Minkowski 不等式和 Hölder 不等式得

$$
\begin{aligned}
\left(\int_{\Omega}|u|^{\delta}\right)^{1/\delta} &\leq \left(\int_{\Omega}|\theta|^{\delta}\right)^{1/\delta}+\left(\int_{\Omega}|u-\theta|^{\delta}\right)^{1/\delta} \\
&\leq \left(\int_{\Omega}|\theta|^{\delta}\right)^{1/\delta}+C_1\left(\int_{\Omega}|u-\theta|^{r^*}dx\right)^{1/r^*},
\end{aligned}
$$

这里 $C_1 = C_1(\mathrm{diam}(\Omega), r, n)$.

因为 $\theta \in L^s(\Omega)$, 由上式得知 $u \in L^\delta(\Omega)$. 令 $q = \min(t, \delta) > r$, 于是 $u \in L^q(\Omega)$. 若 $r \geq n$, 对任意 $r^* < \infty$ 重复上面的推导过程，得到 $u \in L^\delta(\Omega)$, 因此 $u \in W^{1,q}(\Omega)$, $q = \min\{t, s\} > p$. 证毕.

4.5.2 具有权函数的 $\mathcal{A}$- 调和方程障碍问题的很弱解

设 w 为 R^n 中的局部可积非负函数，且几乎处处有 $0 < w < \infty$. 称 w 属于 Muckenhoupt 类 A_p, $1 < p < \infty$, 或称 w 为 A_p- 权，如果存在常数 $A_p(w)$ 使得对所有球 $B \in \mathrm{R}^n$,

$$\sup_B \left(\frac{1}{|B|}\int_B w dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B w^{1/(1-p)} dx\right)^{p-1} = A_p(w) < \infty \tag{5.24}$$

称 w 属于 A_1 类，或 w 为 A_1- 权，如果存在常数 $A_1(w)$ 使得对所有球 $B \in \mathrm{R}^n$,

$$\frac{1}{|B|}\int_B w dx \leq A_1(w)\mathrm{essinf}_B w.$$

用 μ 表示如下测度

$$\mu(E) = \int_E w dx.$$

众所周知， $p > 1$ 时， $A_1 \subset A_p$. 称权 w 满足双倍条件，如果存在常数 $C > 0$ 使得对任意 R^n 中的同心球 $B \subset 2B$,

$$\mu(2B) \leq C\mu(B).$$

给定可测子集 $E \in \mathrm{R}^n$, 记 $L^p(E, w)$, $1 < p < \infty$, 为所有 E 上定义的可测函数 f, 并满足下列条件的 Banach 空间

$$\|f\|_{L^p(E,w)} = \left(\int_E |f(x)|^p w(x) dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

加权 Sobolev 类 $W^{1,p}(E, w)$ 由所有一阶广义导数属于 $L^p(E, w)$ 的函数 f 组成. 符号 $L^p_{loc}(E, w)$ 和 $W^{1,p}_{loc}(E, w)$ 不言自明.

若 $x_0 \in \Omega$, $t > 0$, 则用 B_t 表示半径为 t 中心在 x_0 的球. 对函数 $u(x)$ 和 $k > 0$, 记 $A_k = \{x \in \Omega : |u(x)| > k\}$, $A_{k,t} = A_k \cap B_t$. 设 $T_k(u)$ 为通常的水平 $k > 0$ 上的 u 的截断函数，即

$$T_k(u) = \max\{-k, \min\{k, u\}\}.$$

设 Ω 为 $\mathrm{R}^n, n \geq 2$ 中的有界正则区域. 正则区域是指具有有限测度的, 并使得 Hodge 分解的估计式 (2.1), (2.2) 成立的区域. Lipschitz 区域是正则的. 考虑 $\mathcal{A}$-调和方程

$$\operatorname{div}\mathcal{A}(x, \nabla u) = 0 \tag{5.25}$$

这里 $\mathcal{A}(x,\xi): \Omega \times \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$ 为 Carathéodory 函数, 并满足下面的假设

(i) $\langle \mathcal{A}(x,\xi), \xi\rangle \geq \alpha w(x)|\xi|^p$,

(ii) $|\mathcal{A}(x,\xi)| \leq \beta w(x)|\xi|^{p-1}$.

这里 $0 < \alpha \leq \beta < \infty$, $w \in A_1$, $w \geq k_0 > 0$. 假设 ψ 为任意定义于 Ω 中取值于 $[-\infty, +\infty]$ 的函数, 且 $\theta \in W^{1,r}(\Omega, w)$, $\max\{1, p-1\} < r \leq p$. 设

$$\mathcal{K}^r_{\psi,\theta} = \mathcal{K}^r_{\psi,\theta}(\Omega, w) = \{v \in W^{1,r}(\Omega, w) : v \geq \psi, \text{ a.e. } x \in \Omega \text{ and } v - \theta \in W^{1,r}_0(\Omega, w)\}.$$

函数 ψ 为障碍, θ 为边值.

引入 $|\nabla(v-u)|^{r-p}\nabla(v-u) \in L^{\frac{r}{r-p+1}}(\Omega, w)$ 的 Hodge 分解,

$$|\nabla(v-u)|^{r-p}\nabla(v-u) = \nabla\varphi + H \tag{5.26}$$

和下面的估计式

$$\|H\|_{L^{\frac{r}{r-p+1}}(\Omega,w)} \leq cA_p(w)^\gamma |r-p| \|\nabla(v-u)\|^{r-p+1}_{L^r(\Omega,w)}. \tag{5.27}$$

定义 5.3 $\mathcal{K}^r_{\psi,\theta}$- 障碍问题的很弱解为函数 $u \in \mathcal{K}^r_{\psi,\theta}(\Omega, w)$ 使得对任意 $v \in \mathcal{K}^r_{\psi,\theta}(\Omega, w)$, 有

$$\int_\Omega \langle \mathcal{A}(x, \nabla u), |\nabla(v-u)|^{r-p}\nabla(v-u)\rangle dx \geq \int_\Omega \langle \mathcal{A}(x,\nabla u), H\rangle dx \tag{5.28}$$

这里 H 来自于 Hodge 分解 (5.26).

本节主要结果为下面的定理.

定理 5.4 *存在 $r_1 \in (p-1, p)$ 使得对任意 $\psi \in W^{1,p}_{loc}(\Omega, w)$ 和 $r_1 < r < p$, 具有权函数 $w(x) \in A_1$ 的 $\mathcal{K}^r_{\psi,\theta}$- 障碍问题的解 u 满足下面的 Caccioppoli 型估计*

$$\int_{A_{k,\rho}} |\nabla u|^r d\mu \leq C\left[\int_{A_{k,R}} |\nabla \psi|^r d\mu + \frac{1}{(R-\rho)^r}\int_{A_{k,R}} |u|^r d\mu\right]$$

这里 $0<\rho<R<+\infty$, C 为只依赖于 n,p 和 β/α 的常数.

下面的引理来自于 Jia, Jiang [1], 它是一个加权空间中的 Hodge 分解.

引理 5.1 设 Ω 为 R^n 中的正则区域, $w(x)$ 为 A_1 权. 弱 $u\in W_0^{1,p-\varepsilon}(\Omega,w)$, $1<p<\infty, -1<\varepsilon<p-1$, 则存在 $\varphi\in W_0^{1,\frac{p-\varepsilon}{1-\varepsilon}}(\Omega,w)$ 和散度为零 (divergence-free) 的向量 $H\in L^{\frac{p-\varepsilon}{1-\varepsilon}}(\Omega,w)$ 使得

$$|\nabla u|^{-\varepsilon}\nabla u=\nabla\varphi+H,$$

且有下面的估计

$$\|\nabla\varphi\|_{L^{\frac{p-\varepsilon}{1-\varepsilon}}(\Omega,w)}\le cA_p(w)^\gamma\|\nabla u\|^{1-\varepsilon}_{L^{p-\varepsilon}(\Omega,w)} \tag{5.29}$$

$$\|H\|_{L^{\frac{p-\varepsilon}{1-\varepsilon}}(\Omega,w)}\le cA_p(w)^\gamma|\varepsilon|\|\nabla u\|^{1-\varepsilon}_{L^{p-\varepsilon}(\Omega,w)} \tag{5.30}$$

这里 γ 只依赖于 p.

下面的引理来自 Giaquinta, Giusti [1].

引理 5.2 设 $f(t)$ 为在 $0\le T_0\le t\le T_1$ 上定义的非负有界函数. 假设对 $T_0\le t<s\le T_1$, 有

$$f(t)\le A(s-t)^{-\alpha}+B+\theta f(s),$$

这里 A,B,α,θ 为非负常数, $\theta<1$. 则存在只依赖于 α 和 θ 的常数 c, 使得对 $\rho,R,T_0\le\rho<R\le T_1$, 有

$$f(\rho)\le c[A(R-\rho)^{-\alpha}+B].$$

定理 5.4 的证明 设 u 为 $\mathcal{K}^r_{\psi,\theta}$- 障碍问题的很弱解. 设 $B_{R_1}\subset\subset\Omega$, $0<R_0\le\tau<t\le R_1$ 任意固定. 固定截断函数 $\phi\in C_0^\infty(B_t)$ 使得

$$\mathrm{supp}\phi\subset B_t,\ 0\le\phi\le1,\ \phi=1 \text{ in } B_\tau \text{ and } |\nabla\phi|\le 2(t-\tau)^{-1}.$$

考虑函数

$$v=u-T_k(u)-\phi^r(u-\psi_k^+),$$

这里 $T_k(u)$ 为通常的 u 的水平 k 上的截断函数, $\psi_k^+=\max\{\psi,T_k(u)\}$. 现在 $v\in\mathcal{K}^r_{\psi-T_k(u),\theta-T_k(u)}(\Omega,w)$. 事实上, 因为 $\phi\in C_0^\infty(\Omega)$, 所以

$$v-(\theta-T_k(u))=u-\theta-\phi^r(u-\psi_k^+)\in W_0^{1,r}(\Omega,w),$$

并且在 Ω 上几乎处处有

$$v-(\psi-T_k(u))=(u-\psi)-\phi^r(u-\psi_k^+)\geq(1-\phi^r)(u-\psi)\geq 0.$$

设

$$E(v,u)=|\phi^r\nabla u|^{r-p}\phi^r\nabla u+|\nabla(v-u+T_k(u))|^{r-p}\nabla(v-u+T_k(u)). \tag{5.31}$$

由基本关系式

$$||X|^{-\varepsilon}X-|Y|^{-\varepsilon}Y|\leq 2^{\varepsilon}\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}|X-Y|^{1-\varepsilon},\ X,Y\in\mathrm{R}^n,\ 0\leq\varepsilon<1$$

以及

$$\nabla v=\nabla(u-T_k(u))-\phi^r\nabla(u-\psi_k^+)-r\phi^{r-1}\nabla\phi(u-\psi_k^+),$$

得到

$$|E(v,u)|\leq 2^{p-r}\frac{p-r+1}{r-p+1}|\phi^r\nabla u-\phi^r\nabla(u-\psi_k^+)-r\phi^{r-1}\nabla\phi(u-\psi_k^+)|^{r-p+1}. \tag{5.32}$$

由 (5.31) 得到

$$\begin{aligned}&\int_{A_{k,t}}\langle\mathcal{A}(x,\nabla u),|\phi^r\nabla u|^{r-p}\phi^r\nabla u\rangle dx\\ =\ &\int_{A_{k,t}}\langle\mathcal{A}(x,\nabla u),E(v,u)\rangle dx-\int_{A_{k,t}}\langle\mathcal{A}(x,\nabla u),|\nabla(v-u)|^{r-p}\nabla(v-u)\rangle dx.\end{aligned} \tag{5.33}$$

现在估计 (5.33) 的左侧,

$$\begin{aligned}&\int_{A_{k,t}}\langle A(x,\nabla u),|\phi^r\nabla u|^{r-p}\phi^r\nabla u\rangle dx\\ \geq\ &\int_{A_{k,\tau}}\langle A(x,\nabla u),|\nabla u|^{r-p}\nabla u\rangle dx\\ \geq\ &\alpha\int_{A_{k,\tau}}|\nabla u|^r d\mu.\end{aligned} \tag{5.34}$$

利用 (1.3) 得到

$$|\nabla(v-u+T_k(u))|^{r-p}\nabla(v-u+T_k(u))=\nabla\varphi+H \tag{5.35}$$

(1.4) 推出

$$\|H\|_{L^{\frac{r}{r-p+1}}(\Omega,w)}\leq cA_p(w)^{\gamma}|r-p|\|\nabla(v-u+T_k(u))\|_{L^r(\Omega,w)}^{r-p+1}. \tag{5.36}$$

因为 $u-T_k(u)$ 为 $\mathcal{K}^r_{\psi-T_k(u),\theta-T_k(u)}$- 障碍问题的很弱解，由定义得到

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \langle \mathcal{A}(x,\nabla(u-T_k(u))),|\nabla(v-u+T_k(u))|^{r-p}\nabla(v-u+T_k(u))\rangle dx\\
\geq\ &\int_\Omega \langle \mathcal{A}(x,\nabla(u-T_k(u))),H\rangle dx,
\end{aligned}$$

此即

$$\int_{A_{k,t}} \langle \mathcal{A}(x,\nabla u),|\nabla(v-u)|^{r-p}\nabla(v-u)\rangle dx \geq \int_{A_{k,t}} \langle \mathcal{A}(x,\nabla u),H\rangle dx. \tag{5.37}$$

联合不等式 (5.33), (5.34) 和 (5.37) 得到

$$\begin{aligned}
&\alpha\int_{A_{k,\tau}}|\nabla u|^r d\mu\\
\leq\ &\int_{A_{k,t}}\langle \mathcal{A}(x,\nabla u),E(v,u)\rangle dx-\int_{A_{k,t}}\langle \mathcal{A}(x,\nabla u),H\rangle dx\\
\leq\ &\beta\frac{2^{p-r}(p-r+1)}{r-p+1}\int_{A_{k,t}}|\nabla u|^{p-1}|\phi^r\nabla\psi_k^+-r\phi^{r-1}\nabla\phi(u-\psi_k^+)|^{r-p+1}d\mu\\
&+\beta\int_{A_{k,t}}|\nabla u|^{p-1}|H|d\mu
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\leq\ &\beta\frac{2^{p-r}(p-r+1)}{r-p+1}\int_{A_{k,t}}|\nabla u|^{p-1}|\phi^r\nabla\psi|^{r-p+1}d\mu\\
&+\beta\frac{2^{p-r}(p-r+1)}{r-p+1}\int_{A_{k,t}}|\nabla u|^{p-1}|r\phi^{r-1}\nabla\phi(u-\psi_k^+)|^{r-p+1}d\mu\\
&+\beta\int_{A_{k,t}}|\nabla u|^{p-1}|H|d\mu\\
\leq\ &\beta\frac{2^{p-r}(p-r+1)}{r-p+1}\left(\int_{A_{k,t}}|\nabla u|^r d\mu\right)^{\frac{p-1}{r}}\left(\int_{A_{k,t}}|\nabla\psi|^r d\mu\right)^{\frac{r-p+1}{r}}\\
&+\beta\frac{2^{p-r}(p-r+1)}{r-p+1}\left(\int_{A_{k,t}}|\nabla u|^r d\mu\right)^{\frac{p-1}{r}}\left(\int_{A_{k,t}}|r\phi^{p-1}\nabla\phi(u-\psi_k^+)|^r d\mu\right)^{\frac{r-p+1}{r}}\\
&+\beta\left(\int_{A_{k,t}}|\nabla u|^r d\mu\right)^{\frac{p-1}{r}}\left(\int_{A_{k,t}}|H|^{\frac{r}{r-p+1}}d\mu\right)^{\frac{r-p+1}{r}}.
\end{aligned}$$

设 $c_1=\frac{2^{p-r}(p-r+1)}{r-p+1}$, 由 (5.36) 和 Young 不等式,

$$ab\leq\varepsilon a^{p'}+c_2(\varepsilon,p)b^p,\ \frac{1}{p'}+\frac{1}{p}=1,\ a,b\geq 0,\ \varepsilon\geq 0,\ p\geq 1,$$

得到

$$\begin{aligned}
&\alpha\int_{A_{k,\tau}}|\nabla u|^r d\mu\\
\leq\ & \beta c_1\varepsilon\int_{A_{k,t}}|\nabla u|^r d\mu+\beta c_1c_2(\varepsilon,p)\int_{A_{k,t}}|\nabla\psi|^r d\mu\\
&+\beta c_1\varepsilon\int_{A_{k,t}}|\nabla u|^r d\mu+\beta c_1c_2(\varepsilon,p)\int_{A_{k,t}}|r\phi^{r-1}\nabla\phi(u-\psi_k^+)|^r d\mu\\
&+\beta cA_p(w)^\gamma(p-r)\varepsilon\int_{A_{k,t}}|\nabla u|^r d\mu\\
&+\beta cA_p(w)^\gamma(p-r)c_2(\varepsilon,p)\int_\Omega|\nabla(v-u+T_k(u))|^r d\mu,
\end{aligned}$$

这里 c 为引理 5.1 中的常数. 因为在 $\Omega\setminus A_{k,t}$ 上 $v-u+T_k(u)=0$, 由等式

$$\nabla v=\nabla(u-T_k(u))-\phi^r\nabla(u-\psi_k^+)-r\phi^{r-1}\nabla\phi(u-\psi_k^+),$$

得到

$$\begin{aligned}
\int_\Omega|\nabla(v-u+T_k(u))|^r d\mu&=\int_{A_{k,t}}|\nabla(v-u)|^r d\mu\\
=\ &\int_{A_{k,t}}|\phi^r\nabla(u-\psi_k^+)+r\phi^{r-1}\nabla\phi(u-\psi_k^+)|^r d\mu
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\leq\ & 2^{r-1}\int_{A_{k,t}}|\nabla(u-\psi_k^+)|^r d\mu+2^{r-1}r\int_{Ak,t}|\nabla\phi(u-\psi_k^+)|^r d\mu\\
\leq\ & 2^{2r-2}\int_{A_{k,t}}|\nabla u|^r d\mu+2^{2r-2}\int_{A_{k,t}}|\nabla\psi|^r d\mu+r2^{2r-2}\int_{A_{k,t}}\frac{|u^r|}{(t-\tau)^r}d\mu.
\end{aligned}$$

最后得到

$$\begin{aligned}
&\int_{A_{k,\tau}}|\nabla u|^r d\mu\\
\leq\ &\frac{\beta(2c_1+cA_p(w)^\gamma(p-r))\varepsilon+\beta cA_p(w)^\gamma c_2(\varepsilon,p)2^{2r-2}(p-r)}{\alpha}\int_{A_{k,t}}|\nabla u|^r d\mu\\
&+\frac{\beta c_1c_2(\varepsilon,p)+2^{2r-2}\beta cA_p(w)^\gamma c_2(\varepsilon,p)(p-r)}{\alpha}\int_{A_{k,t}}|\nabla\psi|^r d\mu\\
&+r\frac{\beta c_1c_2(\varepsilon,p)+2^{2r-1}\beta cA_p(w)^\gamma c_2(\varepsilon,p)(p-r)}{\alpha}\int_{A_{k,t}}\frac{|u|^r}{(t-\tau)^r}d\mu.
\end{aligned}\tag{5.38}$$

现在消去右端含有 ∇u 的第一项. 选择 ε 和 r_1 使得

$$\eta = \frac{\beta(2c_1 + cA_p(w)^\gamma(p-r))\varepsilon + \beta cA_p(w)^\gamma c_2(\varepsilon,p)2^{2r-2}(p-r)}{\alpha} < 1$$

设 ρ, R 任意固定, $R_0 \le \rho < R \le R_1$. 这样从 (5.38) 得出对满足 $\rho \le \tau < t \le R$ 的每一 t 和 τ, 有

$$\int_{A_{k,\tau}} |\nabla u|^r d\mu \le \eta \int_{A_{k,t}} |\nabla u|^r d\mu + \frac{c_3}{\alpha}\int_{A_{k,t}} |\nabla \psi| d\mu + \frac{c_4}{\alpha(t-\tau)^r}\int_{A_{k,t}} |u|^r d\mu, \quad (5.39)$$

这里

$$c_3 = \beta c_1 c_2(\varepsilon,p) + 2^{2r-2}\beta cA_p(w)^\gamma c_2(\varepsilon,p)(p-r),$$

$$c_4 = r\beta c_1 c_2(\varepsilon,p) + r2^{2r-1}\beta cA_p(w)^\gamma c_2(\varepsilon,p)(p-r).$$

在 (5.39) 中应用引理 5.2 得

$$\int_{A_{k,\rho}} |\nabla u|^r d\mu \le \frac{cc_3}{\alpha}\int_{A_{k,R}} |\nabla \psi|^r d\mu + \frac{cc_4}{\alpha(R-\rho)^r}\int_{A_{k,R}} |u|^r d\mu,$$

这里 c 有引理 5.2 给出的常数. 定理 5.4 证毕.

§4.6 $\mathcal{A}$- 调和方程障碍问题解的局部正则性

4.6.1 引言

设 Ω 是 R^n, $n \ge 2$, 中的有界开子集. 考虑二阶散度型椭圆方程

$$\mathrm{div}\mathcal{A}(x, u(x), \bigtriangledown u(x)) = 0, \quad (6.1)$$

这里 $\mathcal{A} : \Omega \times \mathrm{R} \times \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$ 是一个 Carathéodory 函数，满足凸性，增长性和齐次条件：对几乎所有的 $x \in \Omega$, $u \in \mathrm{R}$ 和 $\xi \in \mathrm{R}^n$,

(i) $\langle \mathcal{A}(x,u,\xi), \xi \rangle \ge \alpha|\xi|^p$;

(ii) $|\mathcal{A}(x,u,\xi)| \le \beta_1|\xi|^{p-1} + \beta_2|u|^m + \varphi_1(x)$;

(iii) $\mathcal{A}(x,u,0) = 0$.

这里 $\alpha > 0$, β_1 和 β_2 是某些非负常数， $1 < p < n$, $p-1 \le m \le \frac{n(p-1)}{n-p}$, $\varphi_1(x) \in L^{s/(p-1)}_{loc}(\Omega)$, $s > p$.

假设 ψ 是 Ω 上的取值于 $\mathrm{R}\cup\{\pm\infty\}$ 的函数， $\theta\in W^{1,p}(\Omega)$. 令

$$\mathcal{K}_{\psi,\theta}(\Omega)=\left\{v\in W^{1,p}(\Omega): v\geq\psi,\ \text{a.e., and } v-\theta\in W_0^{1,p}(\Omega)\right\}.$$

定义 6.1 函数 $u\in\mathcal{K}_{\psi,\theta}(\Omega)$ 称为 $\mathcal{A}$- 调和方程 (6.1) 的 $\mathcal{K}_{\psi,\theta}$ 障碍问题的解，如果对任意 $v\in\mathcal{K}_{\psi,\theta}(\Omega)$, 有

$$\int_\Omega\langle\mathcal{A}(x,u,\bigtriangledown u),\bigtriangledown(v-u)\rangle dx\geq 0. \tag{6.2}$$

Meyers, Elcrat [1] 于 1975 年最早考虑 (6.1) 的解的高阶可积性，其中的假设条件 (ii) 中 $\beta_2=0$, $\varphi_1(x)\equiv 0$. Li, Martio [1] 在同样的条件下，得到了障碍问题解的导数的局部和整体高阶可积性. Li, Martio [1] 的局部可积性结果是下面的定理.

定理 A 设算子 $\mathcal{A}$ 满足条件 (i), (ii) 和 (iii), 其中 $\beta_2=0$, $\varphi_1(x)\equiv 0$. 若 $\psi\in W_{loc}^{1,s}(\Omega)$, $s>p$. 那么 $\mathcal{K}_{\psi,\theta}$- 障碍问题的解属于 $W_{loc}^{1,q}(\Omega)$, 这里 $q=q(p,s,n,\frac{\alpha}{\beta_1})>p$.

由定理 A 的证明中可知可积指数 q 显然比 s 要小. 由上面的定理看到：如果 $\psi\in W_{loc}^{1,s}(\Omega)$, $1<p<s<n$, 那么 $u\in W_{loc}^{1,q}(\Omega)$, 对于某个比 p 大些的 q. 由 Sobolev 嵌入定理，我们有 $u\in L_{loc}^{q^*}(\Omega)$, 这里 $q^*=\frac{nq}{n-q}<s^*=\frac{ns}{n-s}$. 一个自然的问题是若障碍函数非负且属于 $W_{loc}^{1,s}(\Omega)(1<p<s<n)$, 那么 u 的局部可积性最高是多少？高红亚，田会英 [1] 回答了这个问题.

定理 B 设算子 $\mathcal{A}$ 满足条件 (i), (ii) 和 (iii), 其中 $\beta_2=0$, $\varphi_1(x)\equiv 0$. 若 $0\leq\psi\in W_{loc}^{1,s}(\Omega)$, $1<p<s<n$. 那么 $\mathcal{K}_{\psi,\theta}$- 障碍问题的解 u 属于 $L_{loc}^{s^*}(\Omega)$.

由于障碍问题有很强的背景，且在力学和工程技术上有许多应用，本节考虑 $\mathcal{K}_{\psi,\theta}$- 障碍问题的局部性质. 假设设算子 $\mathcal{A}$ 满足条件 (i), (ii) 和 (iii).

定理 6.1 设 $\mathcal{A}$ 满足条件 (i), (ii) 和 (iii). 若 $0\leq\psi\in W_{loc}^{1,s}(\Omega)$, $1<p<s<n$. 那么 $K_{\psi,\theta}$- 障碍问题的解 u 属于 $L_{loc}^{s^*}(\Omega)$.

注 6.1 注意到在上面的定理和定理 B 中我们只考虑 $1<p<n$ 的情况，因为当 $p\geq n$ 时，由 Sobolev 嵌入定理 $W_{loc}^{1,q}(\Omega)$ 中的每个函数显然属于 $L_{loc}^{t}(\Omega)$ 对于每个 $t>1$.

注 6.2 因为我们假设算子 $\mathcal{A}$ 满足增长性条件 (ii), 在定理的证明中，我们需要用 $|\nabla u|$ 来估计 $|u|$ 的某次幂的积分，为此应用 Giaquinta, Guisti [1] 中的 Sobolev 不等式.

用 p' 表示实数 $\frac{p}{p-1}$, 若 $s<n$, 设 s^* 满足 $\frac{1}{s^*}=\frac{1}{s}-\frac{1}{n}$ 的实数.

下面的引理出自 Giachetti, Porzio [1].

引理 6.1 设 $u\in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$, $\phi_0\in L^r_{loc}(\Omega)$, 其中 $1<p<n$, r 满足

$$1<r<\frac{n}{p}$$

若下面的积分估计

$$\int_{A_{k,\tau}}|\bigtriangledown u|^p dx\le C_0\left[\int_{A_{k,t}}\phi_0 dx+(t-\tau)^{-\gamma}\int_{A_{k,t}}|u|^p dx\right] \tag{6.3}$$

成立对于每个 $k\in\mathcal{N}$ 和 $R_0\le\tau<t\le R_1$, 这里 C_0 是仅依赖于 n,p,r,R_0,R_1 和 $|\Omega|$ 的常数， γ 是一个正的实常数. 那么 $u\in L^s_{loc}(\Omega)$, 其中 $s=(pr)^*$.

4.6.2 定理 6.1 的证明

设 u 是 $\mathcal{A}$- 调和方程 (6.1) 的 $\mathcal{K}_{\psi,\theta}$- 障碍问题的解. 由引理 6.1, 只需证明 u 满足积分估计 (6.3), 这里 $\gamma=p$. 固定任意球 $B_{R_1}\subset\subset\Omega$, $0<R_0\le\tau<t\le R_1$. 截断函数 $\phi\in C_0^\infty(B_{R_1})$ 满足

$$\text{supp}\phi\subset B_t, 0\le\phi\le 1,\phi\equiv 1 \text{ in } B_\tau, |\bigtriangledown\phi|\le 2(t-\tau)^{-1}$$

考虑函数

$$v=u-\phi^p(u-\psi)$$

现在 $v\in\mathcal{K}_{\psi,\theta}(\Omega)$；事实上，由于 $\phi\in C_0^\infty(B_{R_1})$,

$$v-\theta=u-\theta-\phi^p(u-\psi)\in W_0^{1,p}(\Omega),$$

且在 Ω 几乎处处有

$$v-\psi=(u-\psi)-\phi^p(u-\psi)=(1-\phi^p)(u-\psi)\ge 0.$$

这意味着 $v-T_k(u)\in\mathcal{K}_{\psi-T_k(u),\theta-T_k(u)}(\Omega)$. 由于

$$\bigtriangledown(v-T_k(u))=\bigtriangledown(u-T_k(u))-\phi^p(\bigtriangledown u-\bigtriangledown\psi)-p\phi^{p-1}\bigtriangledown\phi(u-\psi),$$

且 $u-T_k(u)$ 是 $\mathcal{A}$- 调和方程

$$\operatorname{div}\mathcal{A}(x,u-T_k(u)),\nabla(u-T_k(u))=0$$

的 $\mathcal{K}_{\psi-T_k(u),\theta-T_k(u)}$- 障碍问题的一个解，由定义 6.1, 有

$$\int_\Omega\langle\mathcal{A}(x,u-T_k(u),\bigtriangledown(u-T_k(u))),\bigtriangledown(v-u)\rangle dx\geq 0,$$

这里 $T_k(u)$ 是 u 在 $k>0$ 水平上的截断函数．由条件 (iii),

$$\mathcal{A}(x,u-T_k(u),\nabla(u-T_k(u)))=0.$$

这意味着

$$\int_{\Omega\cap\{|u|>k\}}\langle\mathcal{A}(x,u-T_k(u),\bigtriangledown u),\bigtriangledown(v-u)\rangle dx\geq 0.$$

即

$$\int_{A_{k,t}}\langle\mathcal{A}(x,u-T_k(u),\bigtriangledown u),\phi^p(\bigtriangledown u-\bigtriangledown\psi)+p\phi^{p-1}\bigtriangledown\phi(u-\psi)\rangle dx\leq 0.$$

从而

$$\begin{aligned}
&\int_{A_{k,t}}\langle\mathcal{A}(x,u-T_k(u),\bigtriangledown u),\phi^p\bigtriangledown u\rangle dx\\
\leq\ &\int_{A_{k,t}}\langle\mathcal{A}(x,u-T_k(u),\bigtriangledown u),\phi^p\bigtriangledown\psi\rangle dx\\
&+\int_{A_{k,t}}\langle\mathcal{A}(x,u-T_k(u),\bigtriangledown u),p\phi^{p-1}\bigtriangledown\phi(\psi-u)\rangle dx\\
=\ &I_1+I_2
\end{aligned}\tag{6.4}$$

我们现在分别估计 (6.4) 的左端和右端．首先，

$$\begin{aligned}
&\int_{A_{k,t}}\langle\mathcal{A}(x,u-T_k(u),\bigtriangledown u),\phi^p\bigtriangledown u\rangle dx\\
\geq\ &\int_{A_{k,\tau}}\langle\mathcal{A}(x,u-T_k(u),\bigtriangledown u),\bigtriangledown u\rangle dx\geq\alpha\int_{A_{k,\tau}}|\bigtriangledown u|^p dx,
\end{aligned}\tag{6.5}$$

这里我们用了条件 (i). 其次，由条件 (ii),

$$\begin{aligned}
|I_1| &= \left|\int_{A_{k,t}}\langle\mathcal{A}(x,u-T_k(u),\bigtriangledown u),\phi^p\bigtriangledown\psi\rangle dx\right|\\
&\leq \int_{A_{k,t}}\left[\beta_1|\bigtriangledown u|^{p-1}+\beta_2|u-T_k(u)|^m+\varphi_1\right]|\bigtriangledown\psi|dx\\
&= I_{11}+I_{12}+I_{13}.
\end{aligned}\tag{6.6}$$

由 Young 不等式

$$ab \le \varepsilon a^{p'} + C(\varepsilon,p) b^p, \quad a,b \ge 0, \varepsilon > 0, p > 1, \tag{6.7}$$

得到估计

$$I_{11} \le \beta_1 \left[\varepsilon \int_{A_{k,t}} |\bigtriangledown u|^p dx + C(\varepsilon,p) \int_{A_{k,t}} |\bigtriangledown \psi|^p dx \right] \ , \tag{6.8}$$

$$\begin{aligned} I_{12} &= \beta_2 \int_{A_{k,t}} |u - T_k(u)|^m |\bigtriangledown \psi| dx \\ &\le \beta_2 \int_{A_{k,t}} \left[\varepsilon |u - T_k(u)|^{mp'} + C(\varepsilon,p) |\bigtriangledown \psi|^p \right] dx. \end{aligned} \tag{6.9}$$

注意到若 $u \in W^{1,p}(B_t)$, $|\mathrm{supp} u| \le \frac{1}{2}|B_t|$ 就有 Sobolev 不等式 (参见 Giaquinta, Guisti [1]),

$$\left(\int_{B_t} |u|^{p^*} dx \right)^{p/p^*} \le c_1(n,p) \int_{B_t} |\bigtriangledown u|^p dx \tag{6.10}$$

因为有假设 $p-1 \le m \le \frac{n(p-1)}{n-p}$, 则 $p \le mp' \le p^*$. (6.10) 暗含着: 若 $|\mathrm{supp}(u - T_k(u))\,|_{B_t}| \le \frac{1}{2}|B_t|$,

$$\begin{aligned} & \int_{B_t} |u - T_k(u)|^{mp'} dx \\ \le\ & \|u - T_k(u)\|_{p^*}^{mp'-p} |B_t|^{1-mp'/p^*} \left(\int_{B_t} |u - T_k(u)|^{p^*} dx \right)^{p/p^*} \ . \\ \le\ & c_1(n,p) \|u - T_k(u)\|_{p^*}^{mp'-p} |B_t|^{1-mp'/p^*} \int_{A_{k,t}} |\bigtriangledown u|^p dx \end{aligned} \tag{6.11}$$

由

$$\mathrm{supp}(u - T_k(u))|_{B_t} \subset A_{k,t},$$

则

$$|\mathrm{supp}(u - T_k(u))|_{B_t}| \le |A_{k,t}|.$$

另一方面,

$$\|u\|_{p^*,B_t}^{p^*} = \int_{B_t} |u|^{p^*} dx \ge \int_{A_{k,t}} |u|^{p^*} \ge k^{p^*} |A_{k,t}|.$$

因此存在常数 $k_0 > 0$, 若 $k \ge k_0$, 则有

$$|A_{k,t}| \le \frac{1}{2}|B_t|.$$

对某个常数 k 我们有不等式 (6.11).

由 (6.9) 和 (6.11), 则

$$\begin{aligned} I_{12} \leq \; & \beta_2 c_1(n,p)\varepsilon\|u-T_k(u)\|_{p^*}^{mp'-p}|\Omega|^{1-mp'/p^*}\int_{A_{k,t}}|\bigtriangledown u|^p dx \\ & +\beta_2 C(\varepsilon,p)\int_{A_{k,t}}|\bigtriangledown \psi|^p dx. \end{aligned} \tag{6.12}$$

下面估计 I_{13}

$$I_{13}=\int_{A_{k,t}}\varphi_1|\bigtriangledown \psi|dx\leq\int_{A_{k,t}}|\varphi_1|^{p'}dx+\int_{A_{k,t}}|\bigtriangledown \psi|^p dx. \tag{6.13}$$

最后联合 (6.6), (6.8), (6.12) 和 (6.13) 就有

$$\begin{aligned} |I_1|\leq \; & \beta_1\varepsilon\int_{A_{k,t}}|\bigtriangledown u|^p dx \\ & +\beta_2 c_1(n,p)\varepsilon\|u-T_k(u)\|_{p^*}^{mp'-p}|\Omega|^{1-mp'/p^*}\int_{A_{k,t}}|\bigtriangledown u|^p dx \\ & +[(\beta_1+\beta_2)C(\varepsilon,p)+1]\int_{A_{k,t}}|\bigtriangledown \psi|^p dx+\int_{A_{k,t}}|\varphi_1|^{p'}dx. \end{aligned} \tag{6.14}$$

现在估计 $|I_2|$. 由条件 (ii) 和假设障碍函数 ψ 的非负性，有

$$\begin{aligned} |I_2| \; = \; & \left|\int_{A_{k,t}}\langle\mathcal{A}(x,u-T_k(u),\bigtriangledown u),p\phi^{p-1}\bigtriangledown\phi(\psi-u)\rangle dx\right| \\ & \leq p\int_{A_{k,t}}\left[\beta_1|\bigtriangledown u|^{p-1}+\beta_2|u-T_k(u)|^m+\varphi_1\right]|\bigtriangledown\phi||u-\psi|dx \\ & \leq p\int_{A_{k,t}}\left[\beta_1|\bigtriangledown u|^{p-1}+\beta_2|u-T_k(u)|^m+\varphi_1\right]|\bigtriangledown\phi||u|dx \\ & \leq p\beta_1\int_{A_{k,t}}|\bigtriangledown u|^{p-1}|\bigtriangledown\phi||u|dx+p\beta_2\int_{A_{k,t}}|u-T_k(u)|^m|\bigtriangledown\phi||u|dx \\ & \quad +p\int_{A_{k,t}}|\varphi_1||\bigtriangledown\phi||u|dx \\ & = I_{21}+I_{22}+I_{23}. \end{aligned} \tag{6.15}$$

I_{21} 可以得到下面的估计：

$$\begin{aligned} I_{21} \leq \; & \frac{2p\beta_1}{t-\tau}\int_{A_{k,t}}|\bigtriangledown u|^{p-1}|u|dx \\ \leq \; & 2\beta_1 p\left[\varepsilon\int_{A_{k,t}}|\bigtriangledown u|^p dx+\frac{C(\varepsilon,p)}{(t-\tau)^p}\int_{A_{k,t}}|u|^p dx\right]. \end{aligned} \tag{6.16}$$

由 (6.11) 知道若 $k \geq k_0$, 则

$$\begin{aligned} I_{22} &\leq \frac{2p\beta_2}{t-\tau}\int_{A_{k,t}}|u-T_k(u)|^m|u|dx \\ &\leq 2p\beta_2\varepsilon\int_{A_{k,t}}|u-T_k(u)|^{mp'}dx+\frac{2p\beta_2 C(\varepsilon,p)}{(t-\tau)^p}\int_{A_{k,t}}|u|^p dx \\ &\leq 2p\beta_2 c_1(n,p)\varepsilon\|u-T_k(u)\|_{p^*}^{mp'-p}|\Omega|^{1-mp'/p^*}\int_{A_{k,t}}|\bigtriangledown u|^p dx \\ &\quad +\frac{2p\beta_2 C(\varepsilon,p)}{(t-\tau)^p}\int_{A_{k,t}}|u|^p dx. \end{aligned} \tag{6.17}$$

对 I_{23} 进行估计,

$$I_{23} \leq \frac{2p}{t-\tau}\int_{A_{k,t}}|\varphi_1||u|dx \leq 2p\int_{A_{k,t}}|\varphi_1|^{p'}dx+\frac{2p}{(t-\tau)^p}\int_{A_{k,t}}|u|^p dx. \tag{6.18}$$

联合 (6.15) 与 (6.16), (6.17) , (6.18), 得到

$$\begin{aligned} |I_2| \quad &\leq 2p\beta_1\varepsilon\int_{A_{k,t}}|\bigtriangledown u|^p dx \\ &+2p\beta_2 c_1(n,p)\varepsilon\|u-T_k(u)\|_{p^*}^{mp'-p}|\Omega|^{1-mp'/p^*}\int_{A_{k,t}}|\bigtriangledown u|^p dx \\ &+\frac{2p\left[(\beta_1+\beta_2)C(\varepsilon,p)+1\right]}{(t-\tau)^p}\int_{A_{k,t}}|u|^p dx+2p\int_{A_{k,t}}|\varphi_1|^{p'}dx. \end{aligned} \tag{6.19}$$

因此，不等式 (6.4), (6.5), (6.14) 和 (6.19) 暗含着

$$\begin{aligned} &\int_{A_{k,\tau}}|\bigtriangledown u|^p dx \leq (2p+1)\frac{\beta_1}{\alpha}\varepsilon\int_{A_{k,t}}|\bigtriangledown u|^p dx \\ &+(2p+1)\frac{\beta_2}{\alpha}c_1(n,p)\varepsilon\|u-T_k(u)\|_{p^*}^{mp'-p}|\Omega|^{1-mp'/p}\int_{A_{k,t}}|\bigtriangledown u|^p dx \\ &+\frac{(\beta_1+\beta_2)C(\varepsilon,p)+1}{\alpha}\int_{A_{k,t}}|\bigtriangledown \psi|^p dx+\frac{2p+1}{\alpha}\int_{A_{k,t}}|\varphi_1|^{p'}dx \\ &+\frac{2p\left[(\beta_1+\beta_2)C(\varepsilon,p)+1\right]}{\alpha(t-\tau)^p}\int_{A_{k,t}}|u|^p dx \end{aligned} \tag{6.20}$$

现在要消去右端含有 ∇u 的第一项. 选择足够小的 ε 使得 (6.20) 右端的第一项和第二项的系数的和 θ 小于 1. 设 ρ, R 是任意确定的数满足 $R_0 \leq \rho < R \leq R_1$. 因此，由 (6.20), 我们推出对每个 t 和 τ, $\rho \leq \tau < t \leq R$, 有

$$\int_{A_{k,\tau}}|\bigtriangledown u|^p dx \leq \theta\int_{A_{k,t}}|\bigtriangledown u|^p dx+C\int_{A_{k,R}}\left[|\bigtriangledown \psi|^p+|\varphi_1|^{p'}\right]dx+\frac{C}{(t-\tau)^p}\int_{A_{k,R}}|u|^p dx,$$

其中 C 是仅依赖于 α,β_1,β_2 和 p 的常数．对于上面的不等式应用引理 5.2, 得到

$$\int_{A_{k,\rho}}|\nabla u|^p dx\le c\left[C\int_{A_{k,R}}\left[|\nabla\psi|^p+|\varphi_1|^{p'}\right]dx+\frac{C}{(R-\rho)^p}\int_{A_{k,R}}|u|^p dx\right],$$

这里 c 是引理 5.2 中的常数，因此 u 满足不等式 (6.7), 其中 $\phi_0=|\nabla\psi|^p+|\varphi_1|^{p'}$, $\gamma=p$. 由引理 6.1, 定理得证.

§4.7 泛函极小与非线性椭圆方程解的局部正则性

4.7.1 引言

使积分泛函

$$I(u;\Omega)=\int_\Omega f(x,u,Du)dx,\quad u\in W^{1,p}_{loc}(\Omega)\tag{7.1}$$

达到极小的函数 $u(x)$ 的正则性理论是现代分析学中的一个重要研究内容．参见下列经典专著： Ladyženskaya, Ural'ceva [1], Morrey [1], Gilbarg, Trudinger [1] 和 Giaquinta[1].

本节考虑积分泛函的局部无界极小和非线性椭圆方程弱解的局部 L^s- 可积性 (s 有限)．线性方程解的整体 L^s- 可积性在二十世纪六十年代被 Stampacchia[1] 证明．这个结果被 Boccardo, Giachetti[1] 推广到非线性情形． Giachetti, Porzio [1] 中证明了泛函极小和非线性椭圆方程弱解的局部 L^s- 可积性．精确的说，他们考虑了 (7.1) 型的泛函极小，其中 Ω 是 R^N 中的有界开集， f 是一个满足增长条件

$$a|\xi|^p\le f(x,s,\xi)\le b|\xi|^p+\varphi_0(x)\tag{7.2}$$

的 Carathéodory 函数．这里 $p>1$, $\varphi_0\in L^r_{loc}(\Omega)$, $r>1$. Giachetti, Porzio [1] 也考虑了 p-Laplacian 型的非线性椭圆方程

$$-\mathrm{div}\ a(x,u,Du)=-\mathrm{div}F\tag{7.3}$$

的局部解，其中 $a(x,s,\xi):\Omega\times R\times R^N$ 是一个满足结构条件

$$a(x,s,\xi)\cdot\xi\ge\gamma_0|\xi|^p\tag{7.4}$$

$$|a(x,s,\xi)| \le \gamma_1|\xi|^{p-1} + k(x) + \gamma_2|s|^{p-1} \tag{7.5}$$

的 Carathéodory 函数. 这里 $1 < p < N$, $\gamma_i, i = 0,1,2$ 是正常数, 函数 F 和 k 分别属于空间 $L^{p'}_{loc}(\Omega, R^N)$ 和 $L^{p'}_{loc}(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

本节的目的是证明具有比 (7.2) 更一般增长条件的 (7.1) 型的泛函极小的局部正则性结果, 其中假设

$$|\xi|^p - b|s|^\alpha - \varphi_0(x) \le f(x,s,\xi) \le a|\xi|^p + b|s|^\alpha + \varphi_1(x) \tag{7.6}$$

这里 $p > 1$, $\varphi_0(x) \in L^{r_1}_{loc}(\Omega)$, $\varphi_1(x) \in L^{r_2}_{loc}(\Omega)$, $r_1, r_2 > 1$, $a \ge 1$ 和 b 是正常数, $p \le \alpha < p^* = np/(n-p)$. 我们也考虑具有比 (7.4) 和 (7.5) 更一般的增长条件的 (7.3) 型方程的弱解, 其中假设

$$a(x,s,\xi)\cdot\xi \ge \gamma_0|\xi|^p - \gamma_1|s|^\alpha - \varphi_2(x) \tag{7.7}$$

$$|a(x,s,\xi)| \le \gamma_2|\xi|^{p-1} + k(x) + \gamma_3|s|^{\alpha/p'} \tag{7.8}$$

这里 $1 < p < N$, $\gamma_j, j = 0,1,2,3$ 是正常数, $\varphi_2(x) \in L^{r_3}_{loc}(\Omega)$, $r_3 > 1$, $p \le \alpha < p^*$, 而函数 F 和 k 分别属于空间 $L^{p'}_{loc}(\Omega, R^N)$ 和 $L^{p'}_{loc}(\Omega)$.

4.7.2 泛函极小

设 Ω 是 R^N 中的有界开子集, $x_0 \in \Omega$. 若 $t \in R$, 则用 B_t 表示半径为 t, 中心在 x_0 的球. 对 $k > 0$, 设

$$A_k = \{a \in \Omega : |u(x)| > k\}, \quad A_{k,t} = A_k \cap B_t \tag{7.9}$$

如果 $m < N$, m^* 是满足 $1/m^* = 1/m - 1/N$ 的实数.

定义 7.1 (7.1) 中泛函 I 的局部极小是函数 $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$, 使得对任意函数 $\psi \in W^{1,p}(\Omega)$, $\mathrm{supp}\psi \subset\subset \Omega$, 有

$$I(u; \mathrm{supp}\psi) \le I(u+\psi; \mathrm{supp}\psi) \tag{7.10}$$

定理 7.1 设泛函 I 满足条件 (7.6). 若 u 是 I 的一个局部极小点, 则 $u \in L^s_{loc}(\Omega)$, 这里 $s = (p\min\{r_1, r_2\})^*$.

证明 由引理 6.1, 只要证明 u 满足 $\beta = p$ 和 $\phi_0 = \varphi_0 + \varphi_1$ 的积分估计 (7.11). 设 $B_{R_1} \subset\subset \Omega$, $0 \le R_0 \le \tau < t \le R_1$ 任意固定. 对 $k > 0$ 设

$$A_k^+ = \{x \in \Omega : u(x) > k\}, \quad A_k^- = \{x \in \Omega : u(x) < -k\}$$

显然 $A_k = A_k^+ \bigcup A_k^-$. 记 $A_{k,t}^+ = A_k^+ \bigcap B_t$ 和 $A_{k,t}^- = A_k^- \bigcap B_t$. 设 $w = \max\{u - k, 0\}$. 在 (7.10) 中取 $\psi = -\eta w$, 这里 η 是一个满足下面条件的截断函数

$$\mathrm{supp}\eta \subset B_t,\ 0 \le \eta \le 1,\ \eta = 1 \text{ in } B_\tau,\ |D\eta| \le 2(t-\tau)^{-1} \tag{7.13}$$

从 u 的极小性得到

$$\begin{aligned}
&\int_{B_t} f(x, u, Du)dx \le \int_{B_t} f(x, u+\psi, Du + D\psi)dx \\
= &\int_{A_{k,t}^+} f(x, u - \eta w, Du - D(\eta w))dx + \int_{B_t \bigcap \{u \le k\}} f(x, u, Du)dx
\end{aligned}$$

于是

$$\int_{A_{k,t}^+} f(x, u, Du)dx \le \int_{A_{k,t}^+} f(x, u - \eta w, Du - D(\eta w))dx$$

利用假设 (7.6) 得到

$$\begin{aligned}
\int_{A_{k,t}^+} |Du|^p dx \le\ & b\int_{A_{k,t}^+} |u|^\alpha dx + \int_{A_{k,t}^+} \varphi_0 dx + a\int_{A_{k,t}^+} |Du - D(\eta w)|^p dx \\
&+ b\int_{A_{k,t}^+} |u - \eta w|^\alpha dx + \int_{A_{k,t}^+} \varphi_1 dx
\end{aligned} \tag{7.12}$$

首先估计 (7.12) 右端的第三项. 利用一个基本的不等式 $(a+b)^p \le 2^{p-1}(a^p + b^p)$, $a, b \ge 0, p \ge 1$, 和在 $A_{k,t}^+$ 中 $w^p \le u^p$ 的条件, 有

$$\begin{aligned}
&a\int_{A_{k,t}^+} |Du - D(\eta w)|^p dx = a\int_{A_{k,t}^+ \setminus A_{k,\tau}^+} |Du - D(\eta w)|^p dx \\
\le\ & 2^{p-1} a \int_{A_{k,t}^+ \setminus A_{k,\tau}^+} \left[(1-\eta)^p |Du|^p + |D\eta|^p w^p\right] dx \\
\le\ & 2^{p-1} a \int_{A_{k,t}^+ \setminus A_{k,\tau}^+} |Du|^p dx + \frac{2^{p-1}a}{(t-\tau)^p} \int_{A_{k,t}^+ \setminus A_{k,\tau}^+} w^p dx \\
\le\ & 2^{p-1} a \int_{A_{k,t}^+ \setminus A_{k,\tau}^+} |Du|^p dx + \frac{2^{p-1}a}{(t-\tau)^p} \int_{A_{k,t}^+ \setminus A_{k,\tau}^+} u^p dx
\end{aligned} \tag{7.15}$$

(7.14) 右端第一项与第四项的和可估计为

$$b\int_{A_{k,t}^+}|u|^\alpha dx+b\int_{A_{k,t}^+}|u-\eta w|^\alpha dx\le 2b\int_{A_{k,t}^+}u^\alpha dx \tag{7.16}$$

将 (7.15) 和 (7.16) 代入 (7.14) 得到

$$\begin{aligned}\int_{A_{k,t}^+}|Du|^p dx \ &\le\ 2b\int_{A_{k,t}^+}u^\alpha dx+\int_{A_{k,t}^+}[\varphi_0+\varphi_1]\,dx\\ &\quad +2^{p-1}a\int_{A_{k,t}^+\setminus A_{k,\tau}^+}|Du|^p dx+\frac{2^{p-1}a}{(t-\tau)^p}\int_{A_{k,t}^+\setminus A_{k,\tau}^+}u^p dx\end{aligned} \tag{7.17}$$

从 [8] 中得知，若 $w\in W^{1,p}(B_t)$ 且 $|\mathrm{supp}w|\le\frac{1}{2}|B_t|$, 则有 Sobolev 不等式

$$\left(\int_{B_t}w^{p^*}dx\right)^{p/p^*}\le c_1(n,p)\int_{B_t}|Dw|^p dx$$

设

$$\tilde u=\begin{cases}u, & \text{if } x\in A_{k,t}^+,\\ 0, & \text{if } x\in\Omega\setminus A_{k,t}^+\end{cases}$$

由假设 $p\le\alpha<p^*$ 得到，当 $|\mathrm{supp}\tilde u|_{B_t}|\le\frac{1}{2}|B_t|$ 时，有

$$\begin{aligned}\int_{A_{k,t}^+}u^\alpha dx\ &=\int_{B_t}\tilde u^\alpha dx\le\|\tilde u\|_{p^*,B_t}^{\alpha-p}|B_t|^{1-\alpha/p^*}\left(\int_{B_t}\tilde u^{p^*}dx\right)^{p/p^*}\\ &\le c_1\|\tilde u\|_{p^*,B_t}^{\alpha-p}|B_t|^{1-\alpha/p^*}\int_{B_t}|D\tilde u|^p dx\\ &= c_1\|\tilde u\|_{p^*}^{\alpha-p}|B_t|^{1-\alpha/p^*}\int_{A_{k,t}^+}|Du|^p dx\end{aligned}$$

选择 T 充分小，使得对 $t\le T$, 有

$$c_1\|\tilde u\|_{p^*,B_t}^{\alpha-p}|B_t|^{1-\alpha/p^*}\le\frac{1}{4b}$$

显然

$$k^{p^*}|A_k^+|\le\|\tilde u\|_{p^*,\Omega}^{p^*}$$

因此存在常数 k_0, 使得对 $k\ge k_0$, 有

$$|A_k^+|\le\frac{1}{2}|B_{T/2}|$$

对这样的 k 值，有 $|\text{supp}\tilde{u}| < \frac{1}{2}|B_{T/2}|$, 于是，若 $T/2 \le t \le T$, 则

$$\int_{A_{k,t}^+} u^\alpha dx \le \frac{1}{4b}\int_{A_{k,t}^+} |Du|^p dx \tag{7.18}$$

这样，若 $T/2 \le t \le T$, 则从 (7.17) 和 (7.18) 中得到

$$\int_{A_{k,t}^+} |Du|^p dx \le 2\int_{A_{k,t}^+}[\varphi_0+\varphi_1]dx + 2^p a\int_{A_{k,t}^+\setminus A_{k,\tau}^+}|Du|^p dx + \frac{2^p a}{(t-\tau)^p}\int_{A_{k,t}^+} u^p dx$$

现在设 $T/2 \le \varrho \le \tau < t \le R \le T$, 则

$$\int_{A_{k,\tau}^+} |Du|^p dx \le 2\int_{A_{k,R}^+}[\varphi_0+\varphi_1]dx + 2^p a\int_{A_{k,t}^+\setminus A_{k,\tau}^+}|Du|^p dx + \frac{2^p a}{(t-\tau)^p}\int_{A_{k,R}^+} u^p dx$$

两端加上 $2^p a$ 乘以左端得到

$$\begin{aligned}\int_{A_{k,\tau}^+} |Du|^p dx \quad \le \quad & \frac{2}{2^p a+1}\int_{A_{k,R}^+}[\varphi_0+\varphi_1]dx \\ & +\frac{2^p a}{2^p a+1}\int_{A_{k,t}^+}|Du|^p dx + \frac{2^p a}{2^p a+1}\cdot\frac{1}{(t-\tau)^p}\int_{A_{k,R}^+} u^p dx\end{aligned}$$

应用引理 2.2 得到

$$\int_{A_{k,\varrho}^+} |Du|^p dx \le c_2\left\{\int_{A_{k,R}^+}[\varphi_0+\varphi_1]dx + \frac{1}{(R-\varrho)^p}\int_{A_{k,R}^+} u^p dx\right\} \tag{7.19}$$

这里 c_2 只依赖于 p 和 a.

因为 $-u$ 使得积分泛函

$$\widetilde{F}(v;\Omega) = \int_\Omega \widetilde{f}(x,v,Dv)dx$$

达到极小，这里 $\widetilde{f}(x,v,p) = f(x,-v,-p)$ 满足同样的增长条件 (7.6), 不等式 (7.19) 对 $-u$ 替换成 u 也成立．这样,

$$\int_{A_{k,\varrho}^-} |Du|^p dx \le c_2\left\{\int_{A_{k,R}^-}[\varphi_0+\varphi_1]dx + \frac{1}{(R-\varrho)^p}\int_{A_{k,R}^-} u^p dx\right\} \tag{7.20}$$

(7.19) 与 (7.20) 相加得

$$\int_{A_{k,\varrho}} |Du|^p dx \le c_2\left\{\int_{A_{k,R}}[\varphi_0+\varphi_1]dx + \frac{1}{(R-\varrho)^p}\int_{A_{k,R}} |u|^p dx\right\}$$

这说明 u 满足 $\alpha = p$ 和 $\phi_0 = \varphi_0 + \varphi_1$ 的估计式 (7.11). 定理 2.1 证毕.

4.7.3 非线性椭圆方程

设 $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ 是方程 (7.3) 的局部解，这里 $a(x,s,\xi) : \Omega \times R \times R^n \to R^n$ 是一个满足结构条件 (7.7) 和 (7.8) 的 Carathéodory 函数.

定义 7.2 方程 (7.3) 的解为函数 $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$, 使得对每一个函数 $\psi \in W^{1,p}(\Omega)$, $\mathrm{supp}\psi \subset\subset \Omega$, 有

$$\int_{\mathrm{supp}\psi} a(x,u,Du) \cdot D\psi dx = \int_{\mathrm{supp}\psi} F \cdot D\psi dx \tag{7.21}$$

定理 7.2 在前面的假设条件下，若函数 F, k 和 φ_2 分别属于空间 $L^{r_1}_{loc}(\Omega, R^N)$, $L^{r_2}_{loc}(\Omega)$ 和 $L^{r_3}_{loc}(\Omega)$, 这里 $r > 1$, r_1, r_2 和 r_3 满足

$$p' < \min\{p' r_3, \min\{r_1, r_2\}\} < \frac{N}{p-1}, \tag{7.22}$$

则 u 属于 $L^s_{loc}(\Omega)$, 这里 $s = \min\{pr_3, \min\{r_1, r_2\}(p-1)]^*$.

证明 由引理 7.1, 只要证明 u 满足 $\beta = p$ 和 $\phi_0 = \varphi_0 + |F|^{p'} + |k|^{p'}$ 的积分估计 (7.12). 设 $B_{R_1} \subset\subset \Omega$, $0 \le R_0 \le \tau < t \le R_1$ 任意固定. 设 $w = \max\{u - k, 0\}$. 选择 $\psi = \eta w$ 作为 (7.21) 中的试验函数，这里截断函数 η 满足条件 (7.13). 由定义 7.2 得到

$$\int_{B_t} a(x,u,Du) \cdot D(\eta w) dx = \int_{B_t} F \cdot D(\eta w) dx \tag{7.23}$$

现在估计 (7.23) 中的各积分. 应用假设 (7.7) 得到

$$\begin{aligned} & \int_{B_t} a(x,u,Du) \cdot D(\eta w) dx \\ = & \int_{A^+_{k,t}} \eta a(x,u,Du) \cdot Du dx + \int_{A^+_{k,t}} D\eta \cdot a(x,u,Du) w dx \\ \ge & \gamma_0 \int_{A^+_{k,\tau}} |Du|^p dx - \gamma_1 \int_{A^+_{k,t}} |u|^\alpha dx - \int_{A^+_{k,t}} \varphi_2 dx \\ & - \frac{2}{t-\tau} \int_{A^+_{k,t} \setminus A^+_{k,\tau}} |a(x,u,Du)| w dx \end{aligned} \tag{7.24}$$

(7.24) 右端的最后一项可由 (7.8), Hölder 不等式和 Young 不等式估计为

$$
\begin{aligned}
& \frac{2}{t-\tau}\int_{A_{k,t}^+\setminus A_{k,\tau}^+}|a(x,u,Du)|wdx \\
\leq\ & \frac{2}{t-\tau}\int_{A_{k,t}^+\setminus A_{k,\tau}^+}\left[\gamma_2|Du|^{p-1}+k(x)+\gamma_3|u|^{\alpha/p'}\right]wdx \\
\leq\ & \gamma_2\int_{A_{k,t}^+\setminus A_{k,\tau}^+}\varepsilon|Du|^p dx+\frac{1}{p'}\int_{A_{k,t}^+}|k|^{p'}dx+\frac{\gamma_3}{p'}\int_{A_{k,t}^+}|u|^\alpha dx \\
& +\left[\gamma_2 c(\varepsilon)+\frac{\gamma_3}{p}+\frac{1}{p}\right]2^p\int_{A_{k,t}^+\setminus A_{k,\tau}^+}\frac{(u-k)^p}{(t-\tau)^p}dx
\end{aligned}
\tag{7.25}
$$

这里 ε 是一个待定的正常数. 同定理 2.1 的证明，我们知道存在一个充分小的 T 和充分大的 k_0, 使得对所有的 $T/2\leq t\leq T$ 和 $k\geq k_0$, 有

$$
\int_{B_t}|u|^\alpha dx\leq\frac{\gamma_0(p'\gamma_1+\gamma_0)}{4\gamma_0\gamma_1}\int_{A_{k,t}^+}|Du|^p dx \tag{7.26}
$$

(7.23) 的右端可估计如下

$$
\begin{aligned}
& \int_{B_t}F\cdot D(\eta w)dx \\
\leq\ & \int_{A_{k,t}^+\setminus A_{k,\tau}^+}\frac{2|F||w|}{t-\tau}dx+\int_{A_{k,t}^+}|F||Du|dx \\
\leq\ & \frac{1}{p'}\int_{A_{k,t}^+\setminus A_{k,\tau}^+}|F|^{p'}dx+\frac{2^p}{p}\int_{A_{k,t}^+\setminus A_{k,\tau}^+}\frac{(u-k)^p}{(t-\tau)^p}dx+c(\varepsilon)\int_{A_{k,t}^+}|F|^{p'}dx+\varepsilon\int_{A_{k,t}^+}|Du|^p dx
\end{aligned}
\tag{7.27}
$$

这里 $c(\varepsilon)=\varepsilon^{1/(p-1)}$. 在 (7.23) 中利用前面的估计 (7.24)~(7.27), 并利用在 $A_{k,t}^+$ 上 $u-k<u$ 的条件，得到

$$
\begin{aligned}
\gamma_0\int_{A_{k,\tau}^+}|Du|^p\leq\ & \left[\frac{\gamma_0}{4}+\varepsilon(\gamma_2+1)\right]\int_{A_{k,t}^+}|Du|^p dx \\
& +\int_{A_{k,\tau}^+}\left[\varphi_2+\frac{1}{p'}|k|^{p'}+\left(c(\varepsilon)+\frac{1}{p'}\right)|F|^{p'}\right]dx \\
& +\left[\gamma_2 c(\varepsilon)+\frac{\gamma_3}{p}+\frac{2}{p}\right]2^p\int_{A_{k,t}^+\setminus A_{k,\tau}^+}\frac{u^p}{(t-\tau)^p}dx
\end{aligned}
\tag{7.28}
$$

选择 ε 充分小使得 $\varepsilon(\gamma_2+1)<\frac{\gamma_0}{4}$, 这样 (7.28) 右端的第一项小于 $\frac{\gamma_0}{2}\int_{A_{k,t}^+}|Du|^p$.

设 ϱ, R 任意固定， $R_0 \le \varrho \le \tau < t \le R \le R_1$. 这样从 (7.28) 得到

$$\begin{aligned} & \int_{A_{k,\varrho}^+} |Du|^p dx \\ \le\ & \frac{1}{2}\int_{A_{k,t}^+} |Du|^p dx + \int_{A_{k,R}^+} \left[\varphi_2 + \frac{1}{p'}|k|^{p'} + \left(c(\varepsilon) + \frac{1}{p'}\right)|F|^{p'}\right] dx \\ & + \left[\gamma_2 c(\varepsilon) + \frac{\gamma_3}{p'} + \frac{2}{p}\right] 2^p \int_{A_{k,R}^+ \setminus A_{k,\varrho}^+} \frac{u^p}{(t-\tau)^p} dx \end{aligned} \tag{7.29}$$

利用引理 7.2 得到

$$\int_{A_{k,\varrho}^+} |Du|^p dx \le \frac{c_3}{(R-\varrho)^p} \int_{A_{k,R}^+} |u|^p dx + c_4 \int_{A_{k,R}^+} \left[\varphi_2 + |k|^{p'} + |F|^{p'}\right] dx \tag{7.30}$$

这里 c_3 和 c_4 只依赖于 p. 因为 $-u$ 是

$$-\mathrm{div}\ \tilde{a}(x, u, Du) = -\mathrm{div}\ F$$

的一个弱解，这里 $\tilde{a}(x, s, \xi) = a(x, -s, -\xi)$ 满足同样的条件 (7.7) 和 (7.8), 不等式 (7.30) 用 $-u$ 代替 u 仍成立．于是

$$\int_{A_{k,\varrho}^-} |Du|^p dx \le \frac{c_3}{(R-\varrho)^p} \int_{A_{k,R}^-} |u|^p dx + c_4 \int_{A_{k,R}^-} \left[\varphi_2 + |k|^{p'} + |F|^{p'}\right] dx \tag{3.11}$$

将 (7.31) 和 (7.30) 相加得到

$$\int_{A_{k,\varrho}} |Du|^p dx \le \frac{c_3}{(R-\varrho)^p} \int_{A_{k,R}} |u|^p dx + c_4 \int_{A_{k,R}} \left[\varphi_2 + |k|^{p'} + |F|^{p'}\right] dx$$

这样 u 满足 $\phi_0 = \varphi_2 + |F|^{p'} + |k|^{p'}$ 和 $\alpha = p$ 的条件 (7.11). 定理 7.2 由引理 7.2 得到.

§4.8 各项异性的方程的弱解与泛函极小的局部正则性

4.8.1 引言

设 Ω 是 $\mathbf{R}^N (N \ge 2)$ 上的有界开子集．设 $q_i > 1$, $i = 1, \cdots, N$. 令

$$q = \max_{1 \le i \le N} q_i, \quad p = \min_{1 \le i \le N} q_i, \quad \overline{q} : \frac{1}{\overline{q}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{q_i}.$$

本节要用到各项异性的 Sobolev 空间

$$W_{loc}^{1,q_i}(\Omega) = \left\{ v \in L_{loc}^q(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L_{loc}^{q_i}(\Omega), \forall i = 1, \cdots, N \right\}.$$

设 $x_0 \in \Omega$, $t > 0$, 我们定义 B_t 是以 x_0 为球心，以 t 为半径的球. 对于函数 $u(x)$ 和 $k > 0$, 令 $A_k = \{x \in \Omega : |u(x)| > k\}$, $A_{k,t} = A_k \cap B_t$. 而且，若 $p > 1$, 则 p' 总是实数 $\frac{p}{p-1}$, 若 $s < N$, s^* 总代表满足 $\frac{1}{s^*} = \frac{1}{s} - \frac{1}{N}$ 的实数.

本节考虑积分泛函

$$I(u; \Omega) = \int_\Omega f(x, u, Du)\, dx, \quad u \in W_{loc}^{1,q_i}(\Omega) \tag{8.1}$$

的极小点 $u(x)$ 和各项异性方程

$$-\text{div}\, \mathcal{A}(x, u, Du) = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}, \quad u \in W_{loc}^{1,q_i}(\Omega). \tag{8.2}$$

的弱解.

对于各向异性的情况， Giachetti, Porzio[1] 得到了各向异性非线性椭圆方程的弱解和各项异性泛函的极小的局部 L^s- 可和性. 确切地说，作者考虑了各向异性泛函的极小，这个泛函的典型例子就是 (8.1), f 是个 Carathéodory 函数满足增长条件

$$a \sum_{i=1}^{N} |\xi_i|^{q_i} \leq f(x, s, \xi) \leq b \sum_{i=1}^{N} |\xi_i|^{q_i} + \varphi_1(x) \tag{8.3}$$

其中函数 $\varphi_1 \in L_{loc}^r(\Omega)$, $1 < r < N/\bar{q}$. 作者也考虑了各向异性方程 (8.2) 的局部解 $u \in W_{loc}^{1,q_i}(\Omega)$, 其中 $\mathcal{A}(x, u, \xi) : \Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$ 是 Carathéodory 函数满足下面的结构条件：

$$\mathcal{A}(x, u, \xi) \cdot \xi \geq m_0 \sum_{i=1}^{N} |\xi_i|^{q_i} \tag{8.4}$$

$$|\mathcal{A}_j(x, u, \xi)| \leq m_1 \left(h(x) + \sum_{i=1}^{N} |\xi_i|^{q_i} \right)^{1-1/q_j}, \quad j = 1, \cdots, N \tag{8.5}$$

其中 $m_l, l = 0, 1$ 是正数，函数 h 属于 $L_{loc}^1(\Omega)$, 函数 f_i 分别属于空间 $L_{loc}^{(q_i)'}(\Omega)$. 在上面的条件下，作者得到了一些局部正则性结果.

本节的目的就是证明 (8.1) 型的各项异性泛函的极小在比 (8.3) 更广的增长条件下的局部正则性质 i.e., 我们假设被积函数 f 满足下面的增长条件

$$\sum_{i=1}^{N}|\xi_i|^{q_i}-b|u|^{\alpha}-\varphi_0(x)\le f(x,u,\xi)\le a\sum_{i=1}^{N}|\xi_i|^{q_i}+b|u|^{\alpha}+\varphi_1(x) \tag{8.6}$$

这里

$$\varphi_0(x)\in L^{r_1}_{loc}(\Omega),\varphi_1(x)\in L^{r_2}_{loc}(\Omega),r_1,r_2>1,a\ge 1,b\ge 0,$$
$$p\le\alpha<p^*,q<\overline{q}^*,\overline{q}<N,1<\min\{r_1,r_2\}<\frac{N}{\overline{q}}$$

我们也要在比 (8.4) 和 (8.5) 更广的增长条件下考虑 (8.2) 的方程的弱解，即假设算子 $\mathcal{A}$ 满足下面的凸性和增长条件

$$\mathcal{A}(x,u,\xi)\cdot\xi\ge b_0\sum_{i=1}^{N}|\xi_i|^{q_i}-b_1|u|^{\alpha_1}-\varphi_2(x) \tag{8.7}$$

$$|\mathcal{A}(x,u,\xi)|\le b_2\sum_{i=1}^{N}|\xi_i|^{q_i-1}+b_3|u|^{\alpha_2}+k(x) \tag{8.8}$$

这里 $b_0\ge 1$, $b_i>0,i=1,2,3$, $q<\overline{q}^*$, $\overline{q}<N$, $p\le\alpha_1<p^*$, $p-1\le\alpha_2\le\frac{N(p-1)}{N-p}$, $\varphi_2(x)\in L^{r_0}_{loc}(\Omega)$ 且 $r_0>1$, $k(x)\in L^{r_{N+1}}_{loc}(\Omega)$, $f_i\in L^{r_i}_{loc}(\Omega)$, $i=1,\cdots,N$.

注 8.1 注意我们只考虑 $\overline{q}<N$ 的情况. 否则, 由 [7] 中的引理 3.2, 每个 $W^{1,q_i}_{loc}(\Omega)$ 中的函数都属于 $L^s_{loc}(\Omega)$ (对每个固定的 $s<\infty$).

注 8.2 因为在 (8.6)(8.7) 和 (8.8) 中假设被积函数 f 和算子 $\mathcal{A}$ 满足一些增长条件与 u 有关，在证明局部正则性结果中，我们必须用 $|Du|$ 来估计 $|u|$ 的某次幂的积分. 为此，我们将要用 Sobolev 不等式，它在 [8] 中有所应用.

4.8.2 预备引理

为了证明各向异性方程的弱解和各向异性泛函的无界极小的局部可积性，需要 Giachetti, Porzio[1] 中的一个引理.

引理 8.1 设 $u\in W^{1,q_i}_{loc}(\Omega)$, $\phi_0\in L^r_{loc}(\Omega)$, 其中 $q,\overline{q}$, r 满足

$$1<r<\frac{N}{\overline{q}},q<\overline{q}^*,\overline{q}<N.$$

若积分估计

$$\int_{A_{k,\tau}}\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{q_i}dx\le c_0\left[\int_{A_{k,t}}\phi_0\,dx+(t-\tau)^{-\gamma}\int_{A_{k,t}}\sum_{i=1}^{N}|u|^{q_i}\,dx\right] \tag{8.9}$$

对于每个 $k \in \mathbf{N}$ 和 $R_0 \le \tau < t \le R_1$ 都成立，其中 c_0 是个仅依赖于 N, q_i, r, R_0, R_1 和 $|\Omega|$ 的正数， γ 是个正数．那么 $u \in L^s_{loc}(\Omega)$, 其中

$$s = \frac{\overline{q}^* q}{q - \overline{q}^*(1-1/r)}$$

4.8.3 各向异性泛函极小

下面我们证明各向异性泛函的极小的局部正则性结果.

定义 8.1 *函数 $u \in W^{1,q_i}_{loc}(\Omega)$, 如果对于任意满足 $supp\psi \subset\subset \Omega$ 的函数 $\psi \in W^{1,q_i}(\Omega)$ 都有*

$$I(u; supp\psi) \le I(u+\psi; supp\psi). \tag{8.10}$$

就称函数 u 是 (8.1) 中各向异性泛函 I 的局部极小.

定理 8.1 *设泛函 I 满足条件 (8.6). 如果 u 是泛函 I 的局部极小，那么它就属于 $L^s_{loc}(\Omega)$, where*

$$s = \frac{\overline{q}^* q}{q - \overline{q}^*(1-1/\min\{r_1, r_2\})}.$$

证明 由引理 8.1, 只需证明 u 满足积分估计 (8.9) , 其中 $\gamma = q$, $\phi_0 = \varphi_0 + \varphi_1$. 设 $B_{R_1} \subset\subset \Omega$, $0 \le R_0 \le \tau < t \le R_1$ 任意确定．不失一般性，假设 $R_1 - R_0 < 1$. 对于 $k > 0$, 令

$$A_k^+ = \{x \in \Omega : u(x) > k\}, \quad A_k^- = \{x \in \Omega : u(x) < -k\}.$$

显然， $A_k = A_k^+ \cup A_k^-$. 令 $A_{k,t}^+ = A_k^+ \cap B_t$, $A_{k,t}^- = A_k^- \bigcap B_t$. 设 $w = \max(u-k, 0)$. 在 (8.10) 中选择 $\psi = -\eta w$, 其中 η 是一个截断函数满足

$$\text{supp}\eta \subset B_t,\ 0 \le \eta \le 1,\ \eta = 1 \text{ in } B_\tau,\ |D\eta| \le 2(t-\tau)^{-1}. \tag{8.11}$$

由 u 的极小性，我们得到

$$\begin{aligned} &\int_{B_t} f(x,u,Du)\,dx \le \int_{B_t} f(x, u+\psi, Du + D\psi)\,dx \\ = &\int_{A_{k,t}^+} f(x, u-\eta w, Du - D(\eta w))\,dx + \int_{B_t \cap \{u \le k\}} f(x,u,Du)\,dx. \end{aligned}$$

This implies that

$$\int_{A_{k,t}^+} f(x,u,Du)\,dx \le \int_{A_{k,t}^+} f(x,u-\eta w, Du - D(\eta w))\,dx.$$

由 (8.6) 则有

$$\begin{aligned}
&\int_{A_{k,t}^+} \sum_{i=1}^N \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{q_i} dx \\
\le\ & b\int_{A_{k,t}^+} u^\alpha\,dx + \int_{A_{k,t}^+} \varphi_0\,dx + a\int_{A_{k,t}^+} \sum_{i=1}^N \left|\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial(\eta w)}{\partial x_i}\right|^{q_i} dx \\
& + b\int_{A_{k,t}^+} (u-\eta w)^\alpha\,dx + \int_{A_{k,t}^+} \varphi_1\,dx.
\end{aligned} \tag{8.12}$$

我们首先估计 (8.12) 右端的第三项. 应用基本的不等式

$$(a+b)^q \le 2^{q-1}(a^q+b^q), \quad a,b\ge 0,\ q\ge 1$$

我们得到

$$\begin{aligned}
& a\int_{A_{k,t}^+} \sum_{i=1}^N \left|\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial(\eta w)}{\partial x_i}\right|^{q_i} dx \\
=\ & a\int_{A_{k,t}^+\setminus A_{k,\tau}^+} \sum_{i=1}^N \left|\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial(\eta w)}{\partial x_i}\right|^{q_i} dx \\
\le\ & 2^{q-1}a\int_{A_{k,t}^+\setminus A_{k,\tau}^+} \sum_{i=1}^N \left[(1-\eta)^{q_i}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{q_i} + \left|\frac{\partial \eta}{\partial x_i}\right|^{q_i} w^{q_i}\right] dx \\
\le\ & 2^{q-1}a\int_{A_{k,t}^+\setminus A_{k,\tau}^+} \sum_{i=1}^N \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{q_i} dx + \frac{2^{2q-1}a}{(t-\tau)^{q_i}}\int_{A_{k,t}^+\setminus A_{k,\tau}^+} \sum_{i=1}^N w^{q_i}\,dx \\
\le\ & 2^{q-1}a\int_{A_{k,t}^+\setminus A_{k,\tau}^+} \sum_{i=1}^N \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{q_i} dx + \frac{2^{2q-1}a}{(t-\tau)^{q}}\int_{A_{k,t}^+\setminus A_{k,\tau}^+} \sum_{i=1}^N u^{q_i}\,dx
\end{aligned} \tag{8.13}$$

由于在 $A_{k,t}^+$ 上, $w^{q_i} \le u^{q_i}$, $t-\tau<1$. (8.12) 右端第一项和第四项的和可以进行如下估计

$$b\int_{A_{k,t}^+} u^\alpha\,dx + b\int_{A_{k,t}^+} (u-\eta w)^\alpha\,dx \le 2b\int_{A_{k,t}^+} u^\alpha\,dx. \tag{8.14}$$

把 (8.13) 和 (8.14) 代入到 (8.12), 得到

$$\begin{aligned}\int_{A_{k,t}^+}\sum_{i=1}^N\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{q_i}dx &\le \int_{A_{k,t}^+}(\varphi_0+\varphi_1)\,dx+2b\int_{A_{k,t}^+}u^\alpha\,dx\\ &+ 2^{q-1}a\int_{A_{k,t}^+\setminus A_{k,\tau}^+}\sum_{i=1}^N\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{q_i}dx+\frac{2^{2q-1}a}{(t-\tau)^q}\int_{A_{k,t}^+\setminus A_{k,\tau}^+}\sum_{i=1}^N u^{q_i}\,dx.\end{aligned} \tag{8.15}$$

由 [8], 我们知道，若 $\tilde{u}\in W^{1,p}(B_t)$, $|\mathrm{supp}\tilde{u}|\le\frac{1}{2}|B_t|$, 则有 Sobolev 不等式

$$\left(\int_{B_t}\tilde{u}^{p^*}\,dx\right)^{p/p^*}\le c_1(N,p)\int_{B_t}|D\tilde{u}|^p\,dx.$$

设

$$\tilde{u}=\begin{cases}u, & x\in A_{k,t}^+,\\ 0, & x\in\Omega\setminus A_{k,t}^+.\end{cases}$$

由假设， $p\le\alpha<p^*$ 这蕴涵着若 $|\mathrm{supp}\tilde{u}|_{B_t}|\le\frac{1}{2}|B_t|$, 则有

$$\begin{aligned}\int_{A_{k,t}^+}u^\alpha\,dx &= \int_{B_t}\tilde{u}^\alpha\,dx\le\|\tilde{u}\|_{p^*}^{\alpha-p}|B_t|^{1-\alpha/p^*}\left(\int_{B_t}\tilde{u}^{p^*}\,dx\right)^{p/p^*}\\ &\le c_1\|\tilde{u}\|_{p^*}^{\alpha-p}|B_t|^{1-\alpha/p^*}\int_{B_t}|D\tilde{u}|^p\,dx\\ &\le c_1\|\tilde{u}\|_{p^*}^{\alpha-p}|B_t|^{1-\alpha/p^*}\max\{1,2^{p/2-1}\}\int_{B_t}\sum_{i=1}^N\left|\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x_i}\right|^{q_i}dx\\ &= c_1\|\tilde{u}\|_{p^*}^{\alpha-p}|B_t|^{1-\alpha/p^*}\max\{1,2^{p/2-1}\}\int_{A_{k,t}^+}\sum_{i=1}^N\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{q_i}dx\end{aligned}$$

我们选择 T 足够小使得对于 $t\le T$, 我们得到

$$c_1\|\tilde{u}\|_{p^*}^{\alpha-p}|B_t|^{1-\alpha/p^*}\max\{1,2^{p/2-1}\}\le\frac{1}{4b}.$$

显然有

$$k^{p^*}|A_k^+|\le\|\tilde{u}\|_{p^*,\Omega}^{p^*},$$

因此，存在常数 k_0, 使得对于 $k\ge k_0$ 有

$$|A_k^+|\le\frac{1}{2}|B_{T/2}|.$$

对于这样的取值 k, 我们有 $|\mathrm{supp}\tilde{u}|<\frac{1}{2}|B_{T/2}|$, 因此若 $T/2\le t\le T$, 则

$$\int_{A_{k,t}^+}u^\alpha\,dx\le\frac{1}{4b}\int_{A_{k,t}^+}\sum_{i=1}^N\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{q_i}dx. \tag{8.16}$$

因此，由 (8.15) 和 (8.16) 我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{A_{k,t}^+}\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{q_i}dx\\
\le\ & 2\int_{A_{k,t}^+}(\varphi_0+\varphi_1)\,dx+2^q a\int_{A_{k,t}^+\setminus A_{k,\tau}^+}\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{q_i}dx\\
+\ & \frac{2^{2q}a}{(t-\tau)^q}\int_{A_{k,t}^+\setminus A_{k,\tau}^+}\sum_{i=1}^{N}|u|^{q_i}\,dx.
\end{aligned}\tag{8.17}$$

现在假设 $T/2\le\varrho\le\tau<t\le R\le T$, 我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_{A_{k,\varrho}^+}\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{q_i}dx\\
\le\ & 2\int_{A_{k,R}^+}(\varphi_0+\varphi_1)\,dx+2^q a\int_{A_{k,t}^+\setminus A_{k,\varrho}^+}\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{q_i}dx\\
&+\frac{2^{2q}a}{(t-\tau)^q}\int_{A_{k,R}^+}\sum_{i=1}^{N}|u|^{q_i}\,dx.
\end{aligned}\tag{8.18}$$

两端同时加上 $2^q a$ 倍的左端，则有

$$\begin{aligned}
&\int_{A_{k,\varrho}^+}\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{q_i}dx\\
\le\ & \frac{2}{2^q a+1}\int_{A_{k,R}^+}(\varphi_0+\varphi_1)\,dx+\frac{2^q a}{2^q a+1}\int_{A_{k,t}^+}\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{q_i}dx\\
&+\frac{2^{2q}a}{2^q a+1}\cdot\frac{1}{(t-\tau)^q}\int_{A_{k,R}^+}\sum_{i=1}^{N}|u|^{q_i}\,dx
\end{aligned}\tag{8.19}$$

现在我们应用引理 8.2, 有

$$\begin{aligned}
&\int_{A_{k,\tau}^+}\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{q_i}dx\\
\le\ & c\left\{\frac{2}{2^q a+1}\int_{A_{k,t}^+}(\varphi_0+\varphi_1)\,dx+\frac{2^{2q}a}{2^q a+1}\cdot\frac{1}{(t-\tau)^q}\int_{A_{k,t}^+}\sum_{i=1}^{N}|u|^{q_i}\,dx\right\}.
\end{aligned}\tag{8.20}$$

其中 c 依赖于 q 和 a.

因为 $-u$ 最小化泛函

$$\widetilde{F}(v;\Omega)=\int_\Omega\widetilde{f}(x,v,Dv)\,dx$$

这里 $\widetilde{f}(x,v,p)=f(x,-v,-p)$ 满足相同的增长条件 (8.6), 不等式 (8.20) 中把 u 换为 $-u$ 仍成立. 这样我们就得到

$$\begin{aligned}\int_{A_{k,\tau}^-}\sum_{i=1}^N\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{q_i}dx &\le c\left\{\frac{2}{2^q a+1}\int_{A_{k,t}^-}(\varphi_0+\varphi_1)\,dx\right.\\ &+\left.\frac{2^{2q}a}{2^q a+1}\cdot\frac{1}{(t-\tau)^q}\int_{A_{k,t}^-}\sum_{i=1}^N|u|^{q_i}\,dx\right\}.\end{aligned}\tag{8.21}$$

(8.20) 和 (8.21) 相加就有

$$\begin{aligned}\int_{A_{k,\tau}}\sum_{i=1}^N\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{q_i}dx &\le c\left\{\frac{2}{2^q a+1}\int_{A_{k,t}}(\varphi_0+\varphi_1)\,dx\right.\\ &+\left.\frac{2^{2q}a}{2^q a+1}\cdot\frac{1}{(t-\tau)^q}\int_{A_{k,t}}\sum_{i=1}^N|u|^{q_i}\,dx\right\}.\end{aligned}\tag{8.22}$$

这表明 u 满足估计 (8.9) , 其中 $\gamma=q$, $\phi_0=\varphi_0+\varphi_1$. 由引理 8.1, 定理 8.1 得证.

4.8.4 各向异性方程的局部解

接下来我们要证明各项异性方程的弱解的局部正则性结果. 设 $u\in W^{1,q_i}_{loc}(\Omega)$ 是各向异性方程 (8.2) 的局部解, 其中 $\mathcal{A}(x,u,\xi):\Omega\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 是 Carathéodory 函数满足结构条件 (8.7) 和 (1.8).

定义 8.2 设函数 $u\in W^{1,q_i}_{loc}(\Omega)$, 如果对于任意满足 $supp\psi\subset\subset\Omega$ 函数 $\psi\in W^{1,q_i}(\Omega)$, 都有

$$\int_{\mathrm{supp}\psi}\mathcal{A}(x,u,Du)\cdot D\psi\,dx=\int_{\mathrm{supp}\psi}f\cdot D\psi\,dx\tag{8.23}$$

其中 $f=(f_1,f_2,\cdots,f_N)$. 那么就称 u 是方程 *(8.2)* 的弱解.

定理 8.2 在上面的假设 *(8.7)* 和 *(1.8)* 下,, 若我们假设 $\varphi_2\in L^{r_0}_{loc}(\Omega)$, $f_i\in L^{r_i}_{loc}(\Omega)$, $i=1,2,\cdots,N$, $k\in L^{r_{N+1}}_{loc}(\Omega)$, 和 r_i, $i=0,\cdots,N+1$ 满足

$$1<r=\min_{1\le i\le N}\left\{\frac{r_i}{q_i'},r_0,\frac{r_{N+1}}{p'}\right\}<\frac{N}{\bar{q}}$$

那么 $u\in L^s_{loc}(\Omega)$, 其中

$$s=\frac{\overline{q}^*q}{q-\overline{q}^*(1-1/r)}$$

证明 由引理 8.1 只需证明 u 满足积分估计 (8.9), 其中 $\gamma = q$, $\phi_0 = \varphi_2 + |k|^{p'} + \sum_{i=1}^N |f_i|^{q_i'}$. 设 $B_{R_1} \subset\subset \Omega$, $0 \le R_0 \le \tau < t \le R_1$ 任意确定. 再次假设 $R_1 - R_0 < 1$. 设 $w = \max\{u-k, 0\}$. 选择 $\psi = \eta w$ 作为方程 (8.23) 的试验函数，其中截断函数 η 满足条件 (8.11). 由定义 8.2, 我们得到

$$\int_{A_{k,t}^+} \mathcal{A}(x,u,Du) \cdot D(\eta w)\, dx = \int_{A_{k,t}^+} f \cdot D(\eta w)\, dx. \tag{8.24}$$

我们现在估计方程 (8.24) 中的积分. 应用假设 (8.7), 由 (8.24) 我们推导出

$$\begin{aligned} & b_0 \int_{A_{k,\tau}^+} \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{q_i} dx \\ \le\ & b_1 \int_{A_{k,t}^+} |u|^{\alpha_1}\, dx + \int_{A_{k,t}^+} \varphi_2\, dx + \int_{A_{k,t}^+} f \cdot Du\, dx \\ & + \frac{2}{t-\tau} \int_{A_{k,t}^+} |f| w\, dx + \frac{2}{t-\tau} \int_{A_{k,t}^+ \setminus A_{k,\tau}^+} |\mathcal{A}(x,u,Du)| w\, dx. \end{aligned} \tag{8.25}$$

上面不等式右端第三项可以进行如下的估计,

$$\begin{aligned} \int_{A_{k,t}^+} f \cdot Du\, dx &= \int_{A_{k,t}^+} \sum_{i=1}^N f_i \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx \\ &\le \varepsilon \int_{A_{k,t}^+} \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{q_i} dx + \sum_{i=1}^N C(\varepsilon, q_i) \int_{A_{k,t}^+} |f_i|^{q_i'}\, dx \end{aligned} \tag{8.26}$$

由 Young 不等式，不等式 (8.25) 右端的第四项可以估计为

$$\frac{2}{t-\tau} \int_{A_{k,t}^+} |f| w\, dx \le \frac{2^q}{(t-\tau)^q} \int_{A_{k,t}^+} \sum_{i=1}^N (u-k)^{q_i}\, dx + \sum_{i=1}^N \int_{A_{k,t}^+} |f_i|^{q_i'}\, dx. \tag{8.27}$$

由 (8.8), 对不等式 (8.25) 右端的最后一项进行估计

$$\begin{aligned} & \frac{2}{t-\tau} \int_{A_{k,t}^+ \setminus A_{k,\tau}^+} |\mathcal{A}(x,u,Du)| w\, dx \\ \le\ & \frac{2}{t-\tau} \int_{A_{k,t}^+ \setminus A_{k,\tau}^+} \left[b_2 \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{q_i - 1} + b_3 |u|^{\alpha_2} + k \right] w\, dx \\ =\ & I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \tag{8.28}$$

由 Young's 不等式，我们推导出

$$I_1 \le b_2 \int_{A_{k,t}^+ \setminus A_{k,\tau}^+} \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{q_i} dx + \frac{b_2 2^q}{(t-\tau)^q} \int_{A_{k,t}^+ \setminus A_{k,\tau}^+} \sum_{i=1}^N (u-k)^{q_i}\, dx. \tag{8.29}$$

由 Hölder's 不等式和 Young's 不等式则有

$$
\begin{aligned}
I_2 &\leq b_3\varepsilon\int_{A_{k,t}^+\setminus A_{k,\tau}^+}|u|^{\alpha_2 p'}\,dx+\frac{C(\varepsilon,p)2^p}{(t-\tau)^p}\int_{A_{k,t}^+\setminus A_{k,\tau}^+}(u-k)^p\,dx \\
&\leq b_3\varepsilon\int_{A_{k,t}^+\setminus A_{k,\tau}^+}|u|^{\alpha_2 p'}\,dx+\frac{C(\varepsilon,p)2^p}{N(t-\tau)^q}\int_{A_{k,t}^+\setminus A_{k,\tau}^+}\sum_{i=1}^{N}(u-k)^{q_i}\,dx
\end{aligned}
\tag{8.30}
$$

其中 ε 是一个待定的正数.

$$
I_3\leq\int_{A_{k,t}^+\setminus A_{k,\tau}^+}|k|^{p'}\,dx+\frac{2^q}{N(t-\tau)^q}\int_{A_{k,t}^+\setminus A_{k,\tau}^+}\sum_{i=1}^{N}(u-k)^{q_i}\,dx. \tag{8.31}
$$

联合 (8.26)~(8.31) 和 (8.25) 就有

$$
\begin{aligned}
&b_0\int_{A_{k,\tau}^+}\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{q_i}\,dx \\
\leq\ &\int_{A_{k,t}^+}\left(\varphi_2+|k|^{p'}+\sum_{i=1}^{N}\left(C(\varepsilon,q_i)+1\right)|f_i|^{q_i'}\right)\,dx \\
&+b_1\int_{A_{k,t}^+}|u|^{\alpha_1}\,dx+b_3\varepsilon\int_{A_{k,t}^+}|u|^{\alpha_2 p'}\,dx \\
&+\varepsilon\int_{A_{k,t}^+}\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{q_i}\,dx+b_2\int_{A_{k,t}^+\setminus A_{k,\tau}^+}\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{q_i}\,dx \\
&+\left(b_2+C(\varepsilon,p)+2\right)\frac{2^q}{(t-\tau)^q}\int_{A_{k,t}^+}\sum_{i=1}^{N}(u-k)^{q_i}\,dx.
\end{aligned}
\tag{8.32}
$$

因为 $p\leq\alpha_1<p^*$ 故与定理 8.1 的证明类似，我们知道存在足够小的 T 和足够大的 k_0, 使得对于所有的 $T/2\leq t\leq T$ 和 $k\geq k_0$, 我们有

$$
\int_{A_{k,t}^+}|u|^{\alpha_1}\,dx\leq\frac{1}{2b_1}\int_{A_{k,t}^+}\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{q_i}\,dx. \tag{8.33}
$$

类似地，因为 $p-1\leq\alpha_2\leq\frac{N(p-1)}{n-p}$, 故 $p\leq\alpha_2 p'\leq p^*$, 从而,

$$
\int_{A_{k,t}^+}|u|^{\alpha_2 p'}\,dx\leq C\int_{A_{k,t}^+}\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{q_i}\,dx. \tag{8.34}
$$

因此，由 (8.32)~(8.34) 我们可以得到

$$
\begin{aligned}
& b_0 \int_{A_{k,\tau}^+} \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{q_i} dx \\
\leq \; & \int_{A_{k,t}^+} \left(\varphi_2 + |k|^{p'} + \sum_{i=1}^N \left(C(\varepsilon, q_i) + 1 \right) |f_i|^{q_i'} \right) dx \\
& + \left(\frac{1}{2} + (Cb_3 + 1)\varepsilon \right) \int_{A_{k,t}^+} \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{q_i} dx \\
& + b_2 \int_{A_{k,t}^+ \setminus A_{k,\tau}^+} \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{q_i} dx \\
& + \left(b_2 + C(\varepsilon, p) + 2 \right) \frac{2^q}{(t-\tau)^q} \int_{A_{k,t}^+} \sum_{i=1}^N (u-k)^{q_i} \, dx.
\end{aligned} \tag{8.35}
$$

两边同时加上

$$
b_2 \int_{A_{k,\tau}^+} \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{q_i} dx
$$

最后就有

$$
\begin{aligned}
& \int_{A_{k,\tau}^+} \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{q_i} dx \\
\leq \; & \frac{1}{b_0 + b_2} \int_{A_{k,t}^+} \left(\varphi_2 + |k|^{p'} + \sum_{i=1}^N \left(C(\varepsilon, q_i) + 1 \right) |f_i|^{q_i'} \right) dx \\
& + \left(\frac{1}{2} + (Cb_3 + 1)\varepsilon \right) \frac{1}{b_0 + b_2} \int_{A_{k,t}^+} \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{q_i} dx \\
& + \frac{b_2}{b_0 + b_2} \int_{A_{k,t}^+} \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{q_i} dx \\
& + \left(b_2 + C(\varepsilon, p) + 2 \right) \frac{1}{b_0 + b_2} \frac{2^q}{(t-\tau)^q} \int_{A_{k,t}^+} \sum_{i=1}^N (u-k)^{q_i} \, dx.
\end{aligned} \tag{8.36}
$$

选择 ε 足够小，使得

$$
\theta = \frac{\frac{1}{2} + (Cb_3 + 1)\,\varepsilon + b_2}{b_0 + b_2} < 1,
$$

(8.36) 蕴涵着

$$
\begin{aligned}
&\int_{A_{k,\tau}^{+}} \sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{q_i} dx \\
\le\ & C\int_{A_{k,t}^{+}}\left(\varphi_2+|k|^{p'}+\sum_{i=1}^{N}|f_i|^{q_i'}\right) dx \\
&+\theta\int_{A_{k,t}^{+}}\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{q_i} dx+\frac{C}{(t-\tau)^q}\int_{A_{k,t}^{+}}\sum_{i=1}^{N}(u-k)^{q_i}\,dx.
\end{aligned}
\tag{8.37}
$$

现在假设 $T/2\le\varrho\le\tau<t\le R\le T$, 我们得到

$$
\begin{aligned}
&\int_{A_{k,\varrho}^{+}} \sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{q_i} dx \\
\le\ & C\int_{A_{k,t}^{+}}\left(\varphi_2+|k|^{p'}+\sum_{i=1}^{N}|f_i|^{q_i'}\right) dx \\
&+\theta\int_{A_{k,R}^{+}}\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{q_i} dx+\frac{C}{(R-\varrho)^q}\int_{A_{k,t}^{+}}\sum_{i=1}^{N}(u-k)^{q_i}\,dx.
\end{aligned}
\tag{8.38}
$$

应用引理 8.2, 我们有

$$
\begin{aligned}
&\int_{A_{k,\tau}^{+}} \sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{q_i} dx \\
\le\ & cC\int_{A_{k,t}^{+}}\left(\varphi_2+|k|^{p'}+\sum_{i=1}^{N}|f_i|^{q_i'}\right) dx+\frac{cC}{(t-\tau)^q}\int_{A_{k,t}^{+}}\sum_{i=1}^{N}(u-k)^{q_i}\,dx.
\end{aligned}
\tag{8.39}
$$

因为 $-u$ 是

$$
-\mathrm{div}\,\tilde{\mathcal{A}}(x,u,Du)=-\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}
$$

的弱解, 其中 $\tilde{\mathcal{A}}(x,s,\xi)=\mathcal{A}(x,-s,-\xi)$, 满足相同的条件 (8.7) 和 (8.8), 不等式 (8.39) 把 u 换为 $-u$ 仍成立. 我们最后得到

$$
\begin{aligned}
&\int_{A_{k,\tau}^{-}} \sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{q_i} dx \\
\le\ & cC\int_{A_{k,t}^{-}}\left(\varphi_2+|k|^{p'}+\sum_{i=1}^{N}|f_i|^{q_i'}\right) dx+\frac{cC}{(t-\tau)^q}\int_{A_{k,t}^{-}}\sum_{i=1}^{N}(u-k)^{q_i}\,dx.
\end{aligned}
\tag{8.40}
$$

(8.39) 与 (8.40) 相加得到

$$\begin{aligned}&\int_{A_{k,\tau}}\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{q_i}dx\\ \le\ & cC\int_{A_{k,t}}\left(\varphi_2+|k|^{p'}+\sum_{i=1}^{N}|f_i|^{q_i'}\right)dx+\frac{cC}{(t-\tau)^q}\int_{A_{k,t}}\sum_{i=1}^{N}(u-k)^{q_i}\,dx\end{aligned}\tag{8.41}$$

因此， u 满足 (8.9), 其中 $\phi_0=\varphi_2+|k|^{p'}+\sum_{i=1}^{N}|f_i|^{q_i'}$, $\alpha=q$. 由引理 8.1, 定理 8.2 证毕.

§4.9 共轭 $\mathcal{A}$- 调和张量的双权 Caccioppoli 型不等式和弱逆 Hölder 不等式

4.9.1 引言

本节的目的是建立共轭 $\mathcal{A}$- 调和张量的双权 Caccioppoli 型估计和弱逆 Hölder 不等式. $\mathcal{A}$- 调和张量是 p- 调和张量的有意义的且是重要的推广. 同时， p- 调和张量共轭调和函数与 p- 调和函数的推广，其中 $p>1$. 最近几年，在 $\mathcal{A}$- 调和张量方面取得了很大的进步. $\mathcal{A}$- 调和张量的许多有趣的结果在势理论，拟正则映射和弹性理论等领域得到了应用. 参见 [1∼3, 7∼12 and 14]. 由于多方面原因，我们需要知道 $\mathcal{A}$- 调和张量的可积性且要估计它的积分. 这节中我们将要讨论的积分不等式可以用来研究 $\mathcal{A}$- 调和张量的可积性，估计它们的积分.

在这节中我们总是假设 Ω 是 R^n 的连通开子集. 设 Ω 是 R^n 中的连通子集, $n\ge 2$. 我们用 $e_1,e_2,\ldots,e_n$ 来表示 R^n 的标准单位基. 设 $\wedge^l=\wedge^l(\mathrm{R}^n)$ 是 l- 向量 (也称为 l- 形式) 的线性空间，由外积 $e_I=e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\cdots\wedge e_{i_l}$ 张成，这里是相对于所有的有序 l- 重 $I=(i_1,i_2,\cdots,i_l),1\le i_1<i_2<\cdots<i_l\le n$, $l=0,1,\cdots,n$. Grassman 代数 $\wedge=\bigoplus\wedge^l$ 是一个相对于外积的分次代数. 对 $\alpha=\sum\alpha^Ie_I\in\wedge$ 和 $\beta=\sum\beta^Ie_I\in\wedge$, $\wedge$ 中的内积由

$$\langle\alpha,\beta\rangle=\sum\alpha^I\beta^I$$

给出, 这里的和式对所有的有序 l- 重 $I=(i_1,i_2,\cdots,i_l)$ 和所有的整数 $l=0,1,\cdots,n$ 求. 定义 Hodge 星算子 $*:\wedge\to\wedge$ 为 $*1=e_1\wedge e_2\wedge\cdots\wedge e_n$, $\alpha\wedge*\beta=\beta\wedge*\alpha=$

$\langle\alpha,\beta\rangle(*1)$. 对所有的 $\alpha,\beta\in\wedge$. $\alpha\in\wedge$ 的范数由公式 $|\alpha|^2=\langle\alpha,\alpha\rangle=*(\alpha\wedge*\alpha)\in\wedge^0=\mathrm{R}$ 给出. Hodge 星为 $\wedge$ 中的等距同构，且 $*:\wedge^l\to\wedge^{n-l}$, $**=(-1)^{l(n-l)}:\wedge^l\to\wedge^l$. 设 $1\le p<\infty$. 我们定义加权的可测函数 f 在 E 上的 L^p- 范数为

$$\|f\|_{p,E,w^\alpha}=\left(\int_E|f(x)|^p w^\alpha dx\right)^{1/p}$$

Ω 上的 l- 形式 ω Ω 上的一个微分 l- 形式 ω 是一个在 Ω 上的取值于 $\wedge^l(\mathrm{R}^n)$ 的 chwartz 分布. 用 $D'(\Omega,\wedge^l)$ 记所有微分 l- 形式的空间， $L^p(\Omega,\wedge^l)$ 为 l- 形式

$$\omega(x)=\sum\omega_I(x)dx_I=\sum\omega_{i_1i_2\cdots i_l}(x)dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{i_l}$$

的空间, 这里对所有有序 l- 重 $I,\omega_I(x)\in L^p(\Omega,\mathrm{R})$. 这样 $L^p(\Omega,\wedge^l)$ 是一个具有范数

$$\|\omega\|_{p,\Omega}=\left(\int_\Omega|\omega(x)|^p dx\right)^{1/p}=\left(\int_\Omega\left(\sum_I|\omega_I(x)|^2\right)^{p/2}dx\right)^{1/p}$$

的 Banach 空间. 类似地， $W^{1,p}(\Omega,\wedge^l)$ 是由系数属于 $W^{1,p}(\Omega,\mathrm{R})\Omega$ 上的所有微分 l-形式组成. 符号 $W^{1,p}_{loc}(\Omega,R)$ 和 $W^{1,p}_{loc}(\Omega,\wedge^l)$ 不言自明. 对 $l=0,1,\cdots,n$, 记外导数 $d:D'(\Omega,\wedge^l)\to D'(\Omega,\wedge^{l+1})$. 其形式共轭为算子 $d^*:D'(\Omega,\wedge^{l+1})\to D'(\Omega,\wedge^l)$, 由在 $D'(\Omega,\wedge^{l+1})$, $l=0,1,\cdots,n$ 上的 $d^*=(-1)^{nl+1}*d*$ 给出.

在 $\mathcal{A}$- 调和方程的研究上有许多显著的结论，这里 $\mathcal{A}$- 调和方程

$$d^*\mathcal{A}(x,d\omega)=0 \tag{9.1}$$

其中 $\mathcal{A}:\Omega\times\wedge^{l-1}(\mathrm{R}^n)\to\wedge^l(\mathrm{R}^n)$ 满足下面的条件:

$$|\mathcal{A}(x,\xi)|\le a|\xi|^{p-1}\qquad\text{and}\qquad\langle\mathcal{A}(x,\xi),\xi\rangle\ge|\xi|^p \tag{9.2}$$

对几乎每个 $x\in\Omega$ 和 $\xi\in\wedge^l(\mathrm{R}^n)$.. 这里 $a>0$ 是一个常数， $1<p<\infty$ 是与 (9.1) 有关的固定指标. (9.1) 的解是 Sobolev 空间 $W^{1,p}_{loc}(\Omega,\wedge^{l-1})$ 的一个元素，使得对所有具有紧支集的 $\varphi\in W^{1,p}(\Omega,\wedge^{l-1})$, 有

$$\int_\Omega\langle\mathcal{A}(x,du),d\varphi\rangle dx=0. \tag{9.2}$$

定义 9.1 称 u 为 Ω 上的 $\mathcal{A}$- 调和张量，若 u 满足 Ω 上的 $\mathcal{A}$- 调和方程 (9.1).

一个微分 l- 形式 $u \in D'(\Omega, \wedge^l)$ 如果在 Ω 上满足 $du = 0$ 称其为是闭的. 类似地，一个微分 $(l+1)$- 形式 $v \in D'(\Omega, \wedge^{l+1})$ 如果满足 $d^*v = 0$ 称为是余闭的. 若微分形式 u 满足

$$d^*(|du|^{p-2}du) = 0 \qquad \text{and} \qquad d^*u = 0$$

其中 $1 < p < \infty$, 则称 u 是 p- 调和张量. 方程

$$\mathcal{A}(x, du) = d^*v \tag{9.3}$$

称为共轭 $\mathcal{A}$- 调和张量. 例如， $du = d^*v$ 类似于 R^n 上的 Cauchy-Riemann 组. 显然，如果对 u 加一个闭的形式或对 v 加一个余闭形式， $\mathcal{A}$- 调和方程仍然成立. 因此，关于 u 和 v 的任何估计都必须抹去这些形式. 若 u 是 (9.1) 在 Ω 上的解. 那么，至少局部地在球 B 上存在形式 $v \in W^{1,q}(B, \wedge^{l+1}), \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 使得 (9.3) 式成立.

定义 9.2 如果 u 和 v 在 Ω 上满足 (9.3) 且在 Ω 上 $\mathcal{A}^{-1}$ 存在，那么我们称 u 和 v 是 Ω 上的共轭 $\mathcal{A}$- 调和张量.

定义 9.3 如果 u 满足 p- 调和方程

$$div(\nabla u|\nabla u|^{p-2}) = 0,$$

其中 $p > 1$, 我们就称 u 是 p- 调和函数.

它在平面上的共轭是 q- 调和函数 v, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 且满足

$$\nabla u|\nabla u|^{p-2} = \left(\frac{\partial v}{\partial y}, -\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

注意到当 $p = q = 2$, 我们就得到了通常的共轭调和函数. 我们记 $\mathrm{R} = \mathrm{R}^1$. B 表示一个球而 σB 表示与 B 同心且满足 $diam(\sigma B) = \sigma diam(B)$ 的球. 集合 $E \subseteq \mathrm{R}^n$ 的 n- 维 Lebesgue 测度记作 $|E|$. 我们称 w 是一个权如果 $w \in L^1_{loc}(\mathrm{R}^n)$ 且 $w > 0$ a.e.. 一般地，若 w 是一个权，则记 $d\mu = wdx$. 在 [8] 中我们发现下面的结果：设 $Q \subset \mathrm{R}^n$ 是一个球或方体. 对每个 $y \in Q$ 都有一个对应的线性算子 $K_y : C^\infty(Q, \wedge^l) \to C^\infty(Q, \wedge^{l-1})$ 定义为

$$(K_y\omega)(x; \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_l) = \int_0^1 t^{l-1}\omega(tx + y - ty; x - y, \xi_1, \cdots, \xi_{l-1})dt$$

和分解

$$\omega = d(K_y) + K_y(d\omega).$$

我们定义另一个线性算子 $T_Q : C^\infty(Q, \wedge^l) \to C^\infty(Q, \wedge^{l-1})$ 通过对所有的 Q 上的点 y 求 K_y 的平均即

$$T_Q\omega = \int_Q \varphi(y) K_y \omega dy,$$

其中 $\varphi \in C_0^\infty(Q)$ 由 $\int_Q \varphi(y)dy = 1$ 来限制．我们定义 l- 形式 $\omega_Q \in D'(Q, \wedge^l)$ 为

$$\omega_Q = |Q|^{-1} \int_Q \omega(y)dy, \text{ if } l = 0, \text{ and } \omega_Q = d(T_Q\omega), \text{ if } l = 1, 2, \cdots, n,$$

对所有的 $\omega \in L^p(Q, \wedge^l), 1 \le p < \infty$.

4.9.2 局部 $A_r^{\lambda_3}(\lambda_1, \lambda_2, \Omega)$- 加权 Caccioppoli- 型估计

定义 9.4 如果权 $(w_1(x), w_2(x))$ 满足 $w_1(x) > 0, w_2(x) > 0$, a.e., 且

$$\sup_B \left(\frac{1}{|B|} \int_B w_1^{\lambda_1} dx \right) \left(\frac{1}{|B|} \int_B \left(\frac{1}{w_2} \right)^{\lambda_2/(r-1)} dx \right)^{\lambda_3(r-1)} < \infty$$

对于任意的球 $B \subset \Omega$, 这里 $r > 1$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$ 为常数. 那么就称权 $(w_1(x), w_2(x))$ 满足 $A_r^{\lambda_3}(\lambda_1, \lambda_2, \Omega)$ 条件，记作 $(w_1(x), w_2(x)) \in A_r^{\lambda_3}(\lambda_1, \lambda_2, \Omega)$.

如果选择 $w_1 = w_2 = w$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, 则得到 A_r- 权，参见 [5] 和 [6] 关于 A_r- 权的基本的性质．选择 $w_1 = w_2 = w$, $\lambda_1 = \lambda$ 和 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 则得到 $A_r(\lambda, \Omega)$-权在 [2] 有介绍．选择 $w_1 = w_2 = w$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 和 $\lambda_3 = \lambda$ 就是 $A_r^\lambda(\Omega)$- 权在 [16] 有介绍．这里我们需要下面广义的 Hölder's 不等式.

引理 9.1 设 $0 < \alpha < \infty, 0 < \beta < \infty$ 且 $s^{-1} = \alpha^{-1} + \beta^{-1}$. 若 f 和 g 是R^n上的可测函数，则对任和的 $\Omega \subset R^n$, 有

$$\|fg\|_{s,\Omega} \le \|f\|_{\alpha,\Omega} \cdot \|g\|_{\beta,\Omega}. \tag{9.4}$$

在 [10] 中， C. A. Nolder 得到了下面的局部 Caccioppoli 型估计.

定理 A. 设 u 是 Ω 上的 $\mathcal{A}$- 调和张量， $\sigma > 1$. 那么存在与 u 和 du 无关的常数 C, 使得对任意满足 $\sigma B \subset \Omega$ 的球 B 和所有的闭形式 c, 都有

$$\|du\|_{s,B} \le C diam(B)^{-1} \|u - c\|_{s,\sigma B}$$

其中 $1 < s < \infty$.

下面的弱逆 Hölder 不等式在 [10] 给出.

定理 B. 设 u 是 Ω 上的 $\mathcal{A}$- 调和张量, $\sigma > 1, 0 < s, t < \infty$. 那么存在与 u 无关的常数 C, 使得对任意满足 $\sigma B \subset \Omega$ 的球 B, 都有

$$\|u\|_{s,B} \le C|B|^{(t-s)/st}\|u\|_{t,\sigma B}.$$

现在推广定理 A, 得到下面的 $\mathcal{A}$- 调和张量的局部加权 Caccioppoli 型估计.

Theorem 9.1 设 $u \in D'(\Omega, \bigwedge^l), l = 0, 1, \cdots, n$, 是区域 $\Omega \subset R^n$ 上的 $\mathcal{A}$-调和张量, $\rho > 1$. 若 $1 < s < \infty$ 是与 $\mathcal{A}$- 调和方程有关的一个固定指标, $(w_1, w_2) \in A_r^{\lambda_3}(\lambda_1, \lambda_2, \Omega)$ 对于某些常数 $r > 1$ 和 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$. 那么存在与 u 和 du 无关的常数 C, 使得对于任意满足 $\rho B \subset \Omega$ 的球 B, 所有的闭形式 c 和任意实数 $\alpha(0 < \alpha < 1)$, 都有

$$\|du\|_{s,B,w_1^{\alpha\lambda_1}} \le Cdiam(B)^{-1}\|u - c\|_{s,\rho B,w_2^{\alpha\lambda_2\lambda_3}}. \tag{9.5}$$

(9.5) 可以表示为

$$\left(\int_B |du|^s w_1^{\alpha\lambda_1} dx\right)^{1/s} \le Cdiam(B)^{-1}\left(\int_{\rho B} |u - c|^s w_2^{\alpha\lambda_2\lambda_3} dx\right)^{1/s} \tag*{(9.5)$'$}$$

定理 9.1 的证明. 选择 $k = s/(1-\alpha)$ 故 $s < k$, $1/s = 1/k + (k-s)/sk$, 由 Hölder's 不等式和定理 A 则对于任意满足 $\rho B \subset \Omega$ 的球 B, 所有的闭形式 c 和任意实数 $\alpha(0 < \alpha < 1)$, 都有

$$\begin{aligned}
\|du\|_{s,B,w_1^{\alpha\lambda_1}} &= \left(\int_B |du|^s w_1^{\alpha\lambda_1} dx\right)^{1/s} \\
&= \left(\int_B (|du| w_1^{\alpha\lambda_1/s})^s dx\right)^{1/s} \\
&\le \left(\int_B |du|^k dx\right)^{1/k} \cdot \left(\int_B (w_1^{\alpha\lambda_1/s})^{sk/(k-s)} dx\right)^{(k-s)/sk}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \|du\|_{k,B} \cdot \left(\int_B w_1^{\lambda_1} dx\right)^{(k-s)/sk} \\
&\le C_1 \mathrm{diam}(B)^{-1}\|u - c\|_{k,\sigma B} \cdot \left(\int_B w_1^{\lambda_1} dx\right)^{(k-s)/sk}
\end{aligned} \tag{9.6}$$

由于 c 是一个闭形式， u 是 $\mathcal{A}$- 调和张量，那么 $u-c$ 仍是 $\mathcal{A}$- 调和张量令 $m=s/(1+\alpha\lambda_3(r-1))$, 则有 $m<s$. 应用定理 B, 有

$$\begin{aligned}\|u-c\|_{k,\sigma B} &\le C_2|B|^{(m-k)/mk}\cdot\|u-c\|_{m,\sigma^2 B}\\ &= C_2|B|^{(m-k)/mk}\cdot\|u-c\|_{m,\rho B}\end{aligned} \tag{9.7}$$

其中 $\rho=\sigma^2$. 把 (9.7) 代入 (9.6) 中，我们得到

$$\|du\|_{s,B,w_1^{\alpha\lambda_1}} \le C_3\mathrm{diam}(B)^{-1}|B|^{(m-k)/mk}\cdot\|u-c\|_{m,\rho B}\cdot\left(\int_B w_1^{\lambda_1}dx\right)^{(k-s)/sk} \tag{9.8}$$

由于 $1/m=1/s+(s-m)/sm$, 再次利用 Hölder's 不等式，我们有

$$\begin{aligned}&\|u-c\|_{m,\rho B}\\ &=\left(\int_{\rho B}|u-c|^m dx\right)^{1/m}\\ &=\left(\int_{\rho B}(|u-c|w_2^{\alpha\lambda_2\lambda_3/s}\cdot w_2^{-\alpha\lambda_2\lambda_3/s})^m dx\right)^{1/m}\\ &\le\left(\int_{\rho B}|u-c|^s w_2^{\alpha\lambda_2\lambda_3}dx\right)^{1/s}\cdot\left(\int_{\rho B}\left(\left(\frac{1}{w_2}\right)^{\alpha\lambda_2\lambda_3/s}\right)^{sm/(s-m)}dx\right)^{(s-m)/sm}\\ &=\|u-c\|_{s,\rho B,w_2^{\alpha\lambda_2\lambda_3}}\cdot\left(\int_{\rho B}\left(\frac{1}{w_2}\right)^{\lambda_2/(r-1)}dx\right)^{(s-m)/sm}\end{aligned} \tag{9.9}$$

这里对于所有满足 $\rho B\subset\Omega$ 的球 B 和所有的闭形式 c.

联合 (2.8) 和 (2.9), 就有

$$\begin{aligned}&\|du\|_{s,B,w_1^{\alpha\lambda_1}}\\ \le\ & C_3 diam(B)^{-1}|B|^{(m-k)/mk}\cdot\|u-c\|_{s,\rho B,w_2^{\alpha\lambda_2\lambda_3}}\cdot\left(\int_B w_1^{\lambda_1}dx\right)^{(k-s)/sk}\\ &\cdot\left(\int_{\rho B}\left(\frac{1}{w_2}\right)^{\lambda_2/(r-1)}dx\right)^{(s-m)/sm}\end{aligned} \tag{9.10}$$

由于 $(w_1, w_2) \in A_r^{\lambda_3}(\lambda_1, \lambda_2, \Omega)$, 我们有

$$
\begin{aligned}
& \left(\int_B w_1^{\lambda_1} dx\right)^{(k-s)/sk} \cdot \left(\int_{\rho B} \left(\frac{1}{w_2}\right)^{\lambda_2/(r-1)} dx\right)^{(s-m)/sm} \\
\le\ & \left(\int_{\rho B} w_1^{\lambda_1} dx\right)^{(k-s)/sk} \cdot \left(\int_{\rho B} \left(\frac{1}{w_2}\right)^{\lambda_2/(r-1)} dx\right)^{(s-m)/sm} \\
=\ & \left(\left(\int_{\rho B} w_1^{\lambda_1} dx\right) \cdot \left(\int_{\rho B} \left(\frac{1}{w_2}\right)^{\lambda_2/(r-1)} dx\right)^{k(s-m)/m(k-s)}\right)^{(k-s)/sk} \\
=\ & \left(|\rho B|^{1+k(s-m)/m(k-s)} \left(\frac{1}{|\rho B|} \int_{\rho B} w_1^{\lambda_1} dx\right)\right. \\
& \left. \cdot \left(\frac{1}{|\rho B|} \int_{\rho B} \left(\frac{1}{w_2}\right)^{\lambda_2/(r-1)} dx\right)^{\lambda_3(r-1)}\right)^{(k-s)/sk} \\
\le\ & C_4 |B|^{(k-m)/mk}
\end{aligned} \tag{9.11}
$$

把 (9.11) 代入 (2.10), 我们发现对于对于所有满足 $\rho B \subset \Omega$ 的球 B, 所有的闭形式 c 和任意的实数 $\alpha(0 < \alpha < 1)$, 有

$$
\|du\|_{s,B,w_1^{\alpha\lambda_1}} \le C diam(B)^{-1} \|u - c\|_{s,\rho B, w_2^{\alpha\lambda_2\lambda_3}}
$$

定理 9.1 证明完毕.

注意到参数定理 9.1 中的 $\alpha, \lambda_1, \lambda_2$ 和 λ_3 可以是任意实数满足 $0 < \alpha < 1$ 和 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$. 因此通过赋予 $\alpha, \lambda_1, \lambda_2$ 和 λ_3 不同的值，就可以得到不同的加权 Caccioppoli 型估计.

在定理 9.1 中选择 $\alpha = 1/r$, 我们就有下面的结论.

推论 9.1 设 $u \in D'(\Omega, \bigwedge^l), l = 0, 1, \cdots, n$, 是区域 $\Omega \subset R^n$ 上的 $\mathcal{A}$- 调和张量， $\rho > 1$. 若 $1 < s < \infty$ 是与 $\mathcal{A}$- 调和方程有关的一个固定指标， $(w_1, w_2) \in A_r^{\lambda_3}(\lambda_1, \lambda_2, \Omega)$ 对于某些常数 $r > 1$ 和 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$. 那么存在与 u 和 du 无关的常数 C, 使得对于所有的满足 $\rho B \subset \Omega$ 的球 B 和所有的闭形式 c, 有

$$
\|du\|_{s,B,w_1^{\lambda_1/r}} \le C \mathrm{diam}(B)^{-1} \|u - c\|_{s,\rho B, w_2^{\lambda_2 \lambda_3/r}}. \tag{9.12}
$$

在定理 9.1 中选择 $\alpha = 1/s$ 下面的结论成立.

推论 9.2 设 $u \in D'(\Omega, \bigwedge^l), l = 0, 1, \cdots, n$, 是区域 $\Omega \subset R^n$ 上的 $\mathcal{A}$- 调和张量， $\rho > 1$. 若 $1 < s < \infty$ 是与 $\mathcal{A}$- 调和方程有关的一个固定指标， $(w_1, w_2) \in$

$A_r^{\lambda_3}(\lambda_1, \lambda_2, \Omega)$ for some $r > 1$ and $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$. 那么存在与 u 和 du 无关的常数 C, 使得对于所有的满足 $\rho B \subset \Omega$ 的球 B 和所有的闭形式 c, 有

$$\|du\|_{s,B,w_1^{\lambda_1/s}} \le C\text{diam}(B)^{-1}\|u-c\|_{s,\rho B,w_2^{\lambda_2\lambda_3/s}}. \tag{9.13}$$

若在定理 9.1 中选择 $\lambda_1 = 1$, 就有下面的结论.

推论 9.3 设 $u \in D'(\Omega, \bigwedge^l), l = 0, 1, \cdots, n$, 是区域 $\Omega \subset R^n$ 上的 $\mathcal{A}$- 调和张量, $\rho > 1$. 若 $1 < s < \infty$ 是与 $\mathcal{A}$- 调和方程有关的一个固定指标, $(w_1, w_2) \in A_r^{\lambda_3}(\lambda_2, \Omega)$ for some $r > 1$ and $\lambda_2, \lambda_3 > 0$. 那么存在与 u 和 du 无关的常数 C, 使得对于所有的满足 $\rho B \subset \Omega$ 的球 B, 所有的闭形式 c 和任意实数 α $(0 < \alpha < 1)$, 有

$$\|du\|_{s,B,w_1^{\alpha}} \le C\text{diam}(B)^{-1}\|u-c\|_{s,\rho B,w_2^{\alpha\lambda_2\lambda_3}}. \tag{9.15}$$

若在定理 9.1 中选择 $\lambda_2 = 1$, 就有下面的结论.

推论 9.4 设 $u \in D'(\Omega, \bigwedge^l), l = 0, 1, \cdots, n$, 是区域 $\Omega \subset R^n$ 上的 $\mathcal{A}$- 调和张量, $\rho > 1$. 若 $1 < s < \infty$ 是与 $\mathcal{A}$- 调和方程有关的一个固定指标, $(w_1, w_2) \in A_r^{\lambda_3}(\lambda_1, \Omega)$ for some $r > 1$ and $\lambda_1, \lambda_3 > 0$. 那么存在与 u 和 du 无关的常数 C, 使得对于所有的满足 $\rho B \subset \Omega$ 的球 B, 所有的闭形式 c 和任意实数 α $(0 < \alpha < 1)$, 有

$$\|du\|_{s,B,w_1^{\alpha\lambda_1}} \le C\text{diam}(B)^{-1}\|u-c\|_{s,\rho B,w_2^{\alpha\lambda_3}}. \tag{9.16}$$

若在定理 9.1 中选择 $\lambda_3 = 1$, 就有下面的结论.

推论 9.5 设 $u \in D'(\Omega, \bigwedge^l), l = 0, 1, \cdots, n$, 是区域 $\Omega \subset R^n$ 上的 $\mathcal{A}$- 调和张量, $\rho > 1$. 若 $1 < s < \infty$ 是与 $\mathcal{A}$- 调和方程有关的一个固定指标, $(w_1, w_2) \in A_r(\lambda_1, \lambda_2, \Omega)$ for some $r > 1$ and $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. 那么存在与 u 和 du 无关的常数 C, 使得对于所有的满足 $\rho B \subset \Omega$ 的球 B, 所有的闭形式 c 和任意实数 α $(0 < \alpha < 1)$, 有

$$\|du\|_{s,B,w_1^{\alpha\lambda_1}} \le C\text{diam}(B)^{-1}\|u-c\|_{s,\rho B,w_2^{\alpha\lambda_2}}. \tag{9.17}$$

4.9.3 $A_r^{\lambda_3}(\lambda_1, \lambda_2, \Omega)$- 加权弱逆 Hölder 不等式

现在我们把定理 B 推广为下面的加权形式.

定理 9.2 设 $u \in D'(\Omega, \bigwedge^l), l = 0, 1, \cdots, n$, 是区域 $\Omega \subset R^n$ 上的 $\mathcal{A}$- 调和张量, $\sigma > 1$. 若 $1 < s, t < \infty$, 且 $(w_1, w_2) \in A_r^{\lambda_3}(\lambda_1, \lambda_2, \Omega)$ 对于某个 $r > 1$ 和

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$. 那么存在与 u 无关的常数 C, 使得对于任意的满足 $\sigma B \subset \Omega$ 的球 B 和任意实数 α $(0 < \alpha < 1)$, 都有

$$\left(\int_B |u|^s w_1^{\alpha\lambda_1} dx\right)^{1/s} \leq C|B|^{(t-s)/st} \left(\int_{\sigma B} |u|^t w_2^{\alpha t\lambda_2\lambda_3/s} dx\right)^{1/t}. \tag{9.18}$$

注意到 (9.18) 可以表示为下面的对称的形式

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B |u|^s w_1^{\alpha\lambda_1} dx\right)^{1/s} \leq C \left(\frac{1}{|B|}\int_{\sigma B} |u|^t w_2^{\alpha t\lambda_2\lambda_3/s} dx\right)^{1/t} \tag*{(9.18)$'$}$$

定理 9.2 的证明与定理 9.1 类似. 为了完整性，我们给出它的证明.

定理 9.2 的证明. 选择 $k = s/(1-\alpha)$ 故 $s < k$, $1/s = 1/k + (k-s)/sk$, 应用 Hölder's 不等式，则有对于任意的满足 $\sigma B \subset \Omega$ 的球 B, 有

$$\begin{aligned}
\left(\int_B |u|^s w_1^{\alpha\lambda_1} dx\right)^{1/s} &= \left(\int_B (|u| w_1^{\alpha\lambda_1/s})^s dx\right)^{1/s} \\
&\leq \|u\|_{k,B} \left(\int_B (w_1^{\alpha\lambda_1/s})^{sk/(k-s)} dx\right)^{(k-s)/sk} \\
&= \|u\|_{k,B} \left(\int_B w_1^{\lambda_1} dx\right)^{(k-s)/sk}
\end{aligned} \tag{9.19}$$

下面选择 $m = st/(s + \alpha t\lambda_3(r-1))$ 则 $m < t$. 由定理 B, 我们得到

$$\|u\|_{k,B} \leq C_1|B|^{(m-k)/mk}\|u\|_{m,\sigma B} \tag{9.20}$$

由于 $1/m = 1/t + (t-m)/mt$, 再次应用 Hölder 不等式，我们得到

$$\begin{aligned}
\|u\|_{m,\sigma B} &= \left(\int_{\sigma B} (|u| w_2^{\alpha\lambda_2\lambda_3/s} \cdot w_2^{-\alpha\lambda_2\lambda_3/s})^m dx\right)^{1/m} \\
&\leq \left(\int_{\sigma B} |u|^t w_2^{\alpha t\lambda_2\lambda_3/s} dx\right)^{1/t} \left(\int_{\sigma B} \left(\left(\frac{1}{w_2}\right)^{\alpha\lambda_2\lambda_3/s}\right)^{mt/(t-m)} dx\right)^{(t-m)/mt} \\
&= \left(\int_{\sigma B} |u|^t w_2^{\alpha t\lambda_2\lambda_3/s} dx\right)^{1/t} \left(\int_{\sigma B} \left(\frac{1}{w_2}\right)^{\lambda_2/(r-1)} dx\right)^{(t-m)/mt}
\end{aligned} \tag{9.21}$$

联合 (9.19), (9.20) 和 (9.21), 从而得到下面的估计：

$$
\begin{aligned}
&\left(\int_B |u|^s w_1^{\alpha\lambda_1} dx\right)^{1/s} \\
\leq\ & C_1|B|^{(m-k)/mk}\left(\int_{\sigma B} |u|^t w_2^{\alpha t\lambda_2\lambda_3/s} dx\right)^{1/t}\left(\int_B w_1^{\lambda_1} dx\right)^{(k-s)/sk} \\
&\left(\int_{\sigma B}\left(\frac{1}{w_2}\right)^{\lambda_2/(r-1)} dx\right)^{(t-m)/mt}
\end{aligned}
\tag{9.22}
$$

由于 $(w_1, w_2) \in A_r^{\lambda_3}(\lambda_1, \lambda_2, \Omega)$, 我们发现

$$
\begin{aligned}
&\left(\int_B w_1^{\lambda_1} dx\right)^{(k-s)/sk}\left(\int_{\sigma B}\left(\frac{1}{w_2}\right)^{\lambda_2/(r-1)} dx\right)^{(t-m)/mt} \\
&\leq \left(\int_{\sigma B} w_1^{\lambda_1} dx\right)^{(k-s)/sk}\left(\int_{\sigma B}\left(\frac{1}{w_2}\right)^{\lambda_2/(r-1)} dx\right)^{(t-m)/mt} \\
&= \left(|\sigma B|^{1+sk(t-m)/mt(k-s)}\left(\frac{1}{|\sigma B|}\int_{\sigma B} w_1^{\lambda_1} dx\right)\right. \\
&\qquad \left.\cdot\left(\frac{1}{|\sigma B|}\int_{\sigma B}\left(\frac{1}{w_2}\right)^{\lambda_2/(r-1)} dx\right)^{\lambda_3(r-1)}\right)^{(k-s)/sk} \\
&\leq C_2|B|^{\frac{1}{s}-\frac{1}{k}+\frac{1}{m}-\frac{1}{t}}
\end{aligned}
\tag{9.23}
$$

最后，把 (9.23) 代入 (9.22), 我们得到

$$
\left(\int_B |u|^s w_1^{\alpha\lambda_1} dx\right)^{1/s} \leq C|B|^{(t-s)/st}\left(\int_{\sigma B} |u|^t w_2^{\alpha t\lambda_2\lambda_3/s} dx\right)^{1/t}.
$$

对于定理 9.2, 也有一些推论. 如果在定理 9.2 中选择 $\alpha = 1/r$, 我们得到下面的结论.

推论 9.6 设 $u \in D'(\Omega, \bigwedge^l), l = 0, 1, \cdots, n$, 是区域 $\Omega \subset R^n$ 上的 $\mathcal{A}$- 调和张量, $\sigma > 1$. 若 $1 < s, t < \infty$, $(w_1, w_2) \in A_r^{\lambda_3}(\lambda_1, \lambda_2, \Omega)$ 对于某个 $r > 1$ 和 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$. 那么存在与 u 无关的常数 C, 使得对于任意的满足 $\sigma B \subset \Omega$ 的球 B, 都有

$$
\left(\int_B |u|^s w_1^{\lambda_1/r} dx\right)^{1/s} \leq C|B|^{(t-s)/st}\left(\int_{\sigma B} |u|^t w_2^{t\lambda_2\lambda_3/rs} dx\right)^{1/t}. \tag{9.24}
$$

如果在定理 9.2 中选择 $\alpha = 1/s$, 我们得到下面的结论.

推论 9.7 设 $u \in D'(\Omega, \bigwedge^l), l = 0, 1, \cdots, n$, 是区域 $\Omega \subset R^n$ 上的 $\mathcal{A}$- 调和张量, $\sigma > 1$. 若 $1 < s, t < \infty$, $(w_1, w_2) \in A_r^{\lambda_3}(\lambda_1, \lambda_2, \Omega)$ 对于某个 $r > 1$ 和 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$. 那么存在与 u 无关的常数 C, 使得对于任意的满足 $\sigma B \subset \Omega$ 的球 B, 都有

$$\left(\int_B |u|^s w_1^{\lambda_1/s} dx\right)^{1/s} \leq C|B|^{(t-s)/st} \left(\int_{\sigma B} |u|^t w_2^{t\lambda_2\lambda_3/s^2} dx\right)^{1/t}. \tag{9.25}$$

如果在定理 9.2 中选择 $\alpha = 1/t$, 我们得到下面的结论.

推论 9.8 设 $u \in D'(\Omega, \bigwedge^l), l = 0, 1, \cdots, n$, 是区域 $\Omega \subset R^n$ 上的 $\mathcal{A}$- 调和张量, $\sigma > 1$. 若 $1 < s, t < \infty$, $(w_1, w_2) \in A_r^{\lambda_3}(\lambda_1, \lambda_2, \Omega)$ 对于某个 $r > 1$ 和 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$. 那么存在与 u 无关的常数 C, 使得对于任意的满足 $\sigma B \subset \Omega$ 的球 B, 都有

$$\left(\int_B |u|^s w_1^{\lambda_1/t} dx\right)^{1/s} \leq C|B|^{(t-s)/st} \left(\int_{\sigma B} |u|^t w_2^{\lambda_2\lambda_3/s} dx\right)^{1/t}. \tag{9.26}$$

如果在定理 9.2 中选择 $\lambda_1 = 1$, 我们得到下面的结果.

推论 9.9 设 $u \in D'(\Omega, \bigwedge^l), l = 0, 1, \cdots, n$, 是区域 $\Omega \subset R^n$ 上的 $\mathcal{A}$- 调和张量, $\sigma > 1$. 若 $1 < s, t < \infty$, $(w_1, w_2) \in A_r^{\lambda_3}(\lambda_2, \Omega)$ 对于某个 $r > 1$ 和 $\lambda_2, \lambda_3 > 0$. 那么存在与 u 无关的常数 C, 使得对于任意的满足 $\sigma B \subset \Omega$ 的球 B 和任意区间 $(0, 1)$ 上的实数 α, 都有

$$\left(\int_B |u|^s w_1^{\alpha} dx\right)^{1/s} \leq C|B|^{(t-s)/st} \left(\int_{\sigma B} |u|^t w_2^{\alpha t\lambda_2\lambda_3/s} dx\right)^{1/t}. \tag{9.27}$$

如果在定理 9.2 中选择 $\lambda_2 = 1$, 我们得到下面的结果.

推论 9.10 设 $u \in D'(\Omega, \bigwedge^l), l = 0, 1, \cdots, n$, 是区域 $\Omega \subset R^n$ 上的 $\mathcal{A}$- 调和张量, $\sigma > 1$. 若 $1 < s, t < \infty$, $(w_1, w_2) \in A_r^{\lambda_3}(\lambda_1, \Omega)$ 对于 $r > 1$ 和 $\lambda_1, \lambda_3 > 0$. 那么存在与 u 无关的常数 C, 使得对于任意的满足 $\sigma B \subset \Omega$ 的球 B 和任意区间 $(0, 1)$ 上的实数 α, 都有

$$\left(\int_B |u|^s w_1^{\alpha\lambda_1} dx\right)^{1/s} \leq C|B|^{(t-s)/st} \left(\int_{\sigma B} |u|^t w_2^{\alpha t\lambda_3/s} dx\right)^{1/t}. \tag{9.28}$$

如果在定理 9.2 中选择 $\lambda_3 = 1$, 我们得到下面的结果.

推论 9.11 设 $u \in D'(\Omega, \bigwedge^l), l = 0, 1, \cdots, n$, 是区域 $\Omega \subset R^n$ 上的 $\mathcal{A}$- 调和张量, $\sigma > 1$. 若 $1 < s, t < \infty$, $(w_1, w_2) \in A_r(\lambda_1, \lambda_2, \Omega)$ 对于 $r > 1$, and $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. 那

么存在与 u 无关的常数 C, 使得对于任意的满足 $\sigma B\subset\Omega$ 的球 B 和任意区间 $(0,1)$ 上的实数 α, 都有

$$\left(\int_B |u|^s w_1^{\alpha\lambda_1}dx\right)^{1/s}\le C|B|^{(t-s)/st}\left(\int_{\sigma B}|u|^t w_2^{\alpha t\lambda_2/s}dx\right)^{1/t}. \tag{9.29}$$

4.9.4 整体加权积分不等式

我们需要在文 [10] 中给出的 Whitney 覆盖的性质来证明全局的结果.

引理 9.2 每个 Ω 都有一个方体的 Whitney 覆盖 $\nu=Q_i$ 满足

$$\bigcup_i Q_i=\Omega,\quad \sum_{Q\in\ \nu}\chi_{\sqrt{5/4}Q}\le N\chi_\Omega$$

对于所有的 $x\in R^n$ 和某个 $N>1$, 且如果 $Q_i\bigcap Q_j\neq\phi$, 那么存在方体 R (这个方体不一定是 ν 中的一个) 包含于 $Q_i\bigcap Q_j$ 使得 $Q_i\bigcup Q_j\subset NR$. 而且，若 Ω 是 δ-John 区域，则存在一个特别的方体 $Q_0\in\nu$ 可以通过 ν 中的方体连 $Q_0,Q_1,\cdots,Q_k=Q$ 与每个方体 $Q\in\nu$ 相连，且使得 $Q\subset\sigma Q_i$, $i=0,1,2,\cdots,k$, 对于某个 $\sigma=\sigma(n,\delta)$.

在一个有界的区域我们来证明 $\mathcal{A}$- 调和张量的 $A_r^{\lambda_3}(\lambda_1,\lambda_2,\Omega)$- 权的 Caccioppoli 型估计和弱逆 Hölder 不等式.

定理 9.3 设 $u\in D'(\Omega,\bigwedge^l), l=0,1,\cdots,n$, 是区域 $\Omega\subset R^n$ 上的 $\mathcal{A}$- 调和张量，且它有一个有限的开覆盖 $\nu=\{B_1,\cdots,B_m\}$, 其中 B_i 是开球， $i=1,\cdots,m$. 若 $\rho>1$, $1<s<\infty$ 是与 $\mathcal{A}$- 调和方程有关的固定指标，$(w_1,w_2)\in A_r^{\lambda_3}(\lambda_1,\lambda_2,\Omega)$ 对于 $r>1$ *and* $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3>0$. 那么存在与 u 和 du 无关的常数 C 使得对于所有的闭形式 c 和任意的实数 α $(0<\alpha<1)$, 都有

$$\|du\|_{s,\Omega,w_1^{\alpha\lambda_1}}\le C\mathrm{diam}(\Omega)^{-1}\|u-c\|_{s,\Omega,w_2^{\alpha\lambda_2\lambda_3}}. \tag{9.30}$$

定理 9.3 的证明. 设 $\nu=\{B_1,\cdots,B_m\}$ 是有界区域 $\Omega\subset\mathrm{R}^n$ 的开覆盖，$d_i=diam(B_i)>0$, $i=1,\cdots,m$. 假设 $d=\min\{d_1,\cdots,d_m\}$. 由于 Ω 有界，故存在

常数 C_1 使得 $\frac{1}{d} \le \frac{C_1}{diam(\Omega)}$. 由定理 9.1 和引理 9.2, 我们得到

$$
\begin{aligned}
& \|du\|_{s,\Omega,w_1^{\alpha\lambda_1}} \\
= & \left(\int_\Omega |du|^s w_1^{\alpha\lambda_1} dx\right)^{1/s} \\
\le & \sum_{Q\in\ \nu} \left(\int_Q |du|^s w_1^{\alpha\lambda_1} dx\right)^{1/s} \\
\le & \sum_{Q\in\ \nu} C_2 \mathrm{diam}(Q)^{-1} \left(\int_{\rho Q} |u-c|^s w_2^{\alpha\lambda_2\lambda_3} dx\right)^{1/s} \\
\le & C_3 \mathrm{diam}(\Omega)^{-1} \sum_{Q\in\ \nu} \left(\int_{\rho Q} |u-c|^s w_2^{\alpha\lambda_2\lambda_3} dx\right)^{1/s} \\
\le & C_4 \mathrm{diam}(\Omega)^{-1} \left(\int_\Omega |u-c|^s w_2^{\alpha\lambda_2\lambda_3} dx\right)^{1/s}
\end{aligned}
$$

定理 9.3 证毕.

我们推广定理 9.2 为下面的全局的加权的形式.

定理 9.4 设 $u \in D'(\Omega, \bigwedge^l), l = 0, 1, \cdots, n$, 是区域 $\Omega \subset R^n$ 上的 $\mathcal{A}$- 调和张量, $\sigma > 1$. 若 $1 < s \le t < \infty$, $(w_1, w_2) \in A_r^{\lambda_3}(\lambda_1, \lambda_2, \Omega)$ 对于 $r > 1$ 和 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$. 那么存在与 u 无关的常数 C 使得任意的实数 α $(0 < \alpha < 1)$, 都有

$$
\left(\int_\Omega |u|^s w_1^{\alpha\lambda_1} dx\right)^{1/s} \le C|\Omega|^{(t-s)/st} \left(\int_\Omega |u|^t w_2^{\alpha t\lambda_2\lambda_3/s} dx\right)^{1/t}
$$

证明 由定理 9.2 和引理 9.2 得到

$$
\begin{aligned}
& \left(\int_\Omega |u|^s w_1^{\alpha\lambda_1} dx\right)^{1/s} \\
\le & \sum_{Q\in\nu} \left(\int_Q |u|^s w_1^{\alpha\lambda_1} dx\right)^{1/s} \\
\le & \sum_{Q\in\nu} C_1 |Q|^{(t-s)/st} \left(\int_{\sigma Q} |u|^t w_2^{\alpha t\lambda_2\lambda_3/s} dx\right)^{1/t} \\
\le & C_1 |\Omega|^{(t-s)/st} \sum_{Q\in\nu} \left(\int_{\sigma Q} |u|^t w_2^{\alpha t\lambda_2\lambda_3/s} dx\right)^{1/t} \\
\le & C_2 |\Omega|^{(t-s)/st} \left(\int_\Omega |u|^t w_2^{\alpha t\lambda_2\lambda_3/s} dx\right)^{1/t}
\end{aligned}
$$

定理 9.4 证毕.

§4.10 $\mathcal{A}$- 调和方程障碍问题很弱解的局部正则性

4.10.1 引言与结果叙述

首先介绍正则区域 [1] 的定义. 设 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $n \geq 2$, $G = G(x,y)$ 是 Ω 上的 Green's 函数. 对于 $F = (f^1, f^2, \cdots, f^n) \in C_0^\infty(\Omega, \mathbf{R}^n)$, 积分

$$u(x) = -\int_\Omega \nabla_y G(x,y) F(y)\, dy$$

定义了 Poisson $\Delta u = \mathrm{div} F$ 方程的一个解，这里 u 在 Ω 的边界为零. 因此， u 的梯度可以表示为奇异积分

$$\nabla u(x) = -\int_\Omega \nabla_x \nabla_y G(x,y) F(y)\, dy = (\mathcal{H}_\Omega F)(x)$$

如果算子 $\mathcal{H}_\Omega$ 对于 $1 < r < \infty$, 在所有的 $L^r(\Omega, \mathbf{R}^n)$- 空间是有界的，那我们就称区域 Ω 是正则的. 如果 Ω 是正则的，那么 Hodge 分解的估计式 (10.3) 和 (10.4) 就满足，参见 [1]. 在本节中，我们总假设 Ω 是有界正则区域我们考虑二阶退化的椭圆方程 ($\mathcal{A}$- 调和方程)

$$\mathrm{div}\mathcal{A}(x, u(x), \nabla u(x)) = 0, \tag{10.1}$$

这里 $\mathcal{A}(x,u,\xi) : \Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ 是个 Carathéodory 函数满足下面的凸性和增长条件：

(i) $\langle \mathcal{A}(x,u,\xi), \xi \rangle \geq \alpha |\xi|^p$,

(ii) $|\mathcal{A}(x,u,\xi)| \leq \beta_1 |\xi|^{p-1} + \beta_2 |u|^m + \varphi_1(x)$,

其中 $1 < p < n$, α, β_1, β_2 是某些正数， $p - 1 \leq m \leq \frac{n(p-1)}{n-r}$, $\varphi_1(x) \in L^{s/(p-1)}(\Omega)$, 这里 $r < p < s$.

假设 ψ 是 Ω 上取值于 $\mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ 的任意函数, $\theta \in W^{1,r}(\Omega)$ 其中 $\max\{1, p-1\} < r \leq p$. 令

$$\mathcal{K}^r_{\psi,\theta} = \mathcal{K}^r_{\psi,\theta}(\Omega) = \{v \in W^{1,r}(\Omega) : v \geq \psi, \text{ a.e., and } v - \theta \in W_0^{1,r}(\Omega)\}.$$

函数 ψ 是障碍而 θ 决定了边界值.

我们介绍 $|\nabla(v-u)|^{r-p}\nabla(v-u) \in L^{\frac{r}{r-p+1}}(\Omega)$ 的 Hodge 分解,这里 $v, u \in \mathcal{K}^r_{\psi,\theta}(\Omega)$, 参见 [1],

$$|\nabla(v-u)|^{r-p}\nabla(v-u) = \nabla \phi_{v,u} + h_{v,u}, \tag{10.2}$$

其中 $\phi_{v,u}\in W_0^{1,\frac{r}{r-p+1}}(\Omega)$, $h_{v,u}\in L^{\frac{r}{r-p+1}}(\Omega)$ 是散度自由向量函数，且下面的估计成立

$$\|\nabla\phi_{v,u}\|_{\frac{r}{r-p+1}}\le c\|\nabla(v-u)\|_r^{r-p+1}, \tag{10.3}$$

$$\|h_{v,u}\|_{\frac{r}{r-p+1}}\le c(p-r)\|\nabla(v-u)\|_r^{r-p+1}. \tag{10.4}$$

定义 1[2] *如果对于任意的 $v\in\mathcal{K}_{\psi,\theta}^r(\Omega)$ 函数 $u\in\mathcal{K}_{\psi,\theta}^r(\Omega)$ 称为 $\mathcal{K}_{\psi,\theta}^r$- 障碍问题的一个很弱解，如果对任意的 $v\in\mathcal{K}_{\psi,\theta}^r(\Omega)$, 都有*

$$\int_\Omega\langle\mathcal{A}(x,u,\nabla u),|\nabla(v-u)|^{r-p}\nabla(v-u)\rangle\,dx\ge\int_\Omega\langle\mathcal{A}(x,u,\nabla u),h_{v,u}\rangle\,dx, \tag{10.5}$$

其中 $h_{v,u}$ 出自 Hodge 分解 (10.2).

注 10.1 上面定义中的 " 很弱 " 是指解 u 的可积指数 r 比自然指数 p 要小. 在上面的定义中若 $r=p$ 那么由 Hodge 分解的唯一性就有 $h_{v,u}=0$, 这时很弱解就成了通常的弱解.

Meyers 和 Elcrat [3] 于 1975 年最早考虑 (10.1) 解的高阶可积性，也可以参见 [4]. 障碍问题中的导数的局部和全局的高阶可积性的问题由 Li 和 Martio [5] 在 1994 年得到解决，应用所谓的逆 Hölder 不等式. Iwaniec 和 Sbordone [1] 在 1994 年考虑了 $\mathcal{A}$- 调和方程很弱解的正则性理论. 这方面的另外一种方法由 J.L.Lewis [6] 给出. Gao, Wang and Zhao [2] 给出了障碍问题很弱解的定义，且得到了它们的局部和全局的可积性结果. Li and Gao [7] 在 2003 年得到了障碍问题很弱解的局部正则性结果. 由于障碍问题有很强的背景，这里我们继续考虑 $\mathcal{A}$- 调和方程 (10.1) 的障碍问题的局部正则性质. 我们假设算子不仅依赖于 x 和 ∇u, 也依赖于 u, 通过假设算子 $\mathcal{A}$ 满足某些条件，例如上面给出的 (i) 和 (ii). 这节的主要结果是下面的定理.

定理 10.1 *设 $\mathcal{K}_{\psi,\theta}^r(\Omega)$ 非空. 存在常数 $r_1=r_1(n,m,p,\alpha,\beta_1,\beta_2,|\Omega|)\in(p-1,p)$, 满足对任意的 $r_1<r<p$, 若 $0\le\psi\in W_{loc}^{1,s}(\Omega)$, $r<s<n$, 那么 $\mathcal{K}_{\psi,\theta}^r$- 障碍问题的解 u 属于 $L_{loc}^{s^*}(\Omega)$, 其中 s^* satisfies $\frac{1}{s^*}=\frac{1}{s}-\frac{1}{n}$.*

注 10.2 注意到我们只考虑 $r < n$ 的情况，因为当 $r \geq n$, 由 Sobolev 定理，每个 $W^{1,r}(\Omega)$ 中的函数显然属于 $L^t(\Omega)$, 对每个 $t > 1$.

注 10.3 因为在定理的证明中我们假设算子 $\mathcal{A}$ 满足某些一般化的条件，所以必须用 $|\nabla u|$ 来估计 $|u|$ 的某个幂的积分．为了解决这个困难，我们将要用 [8] 中有所应用的 Sobolev 不等式.

现在我们介绍这节要用的一些符号．设 $x_0 \in \Omega$, $t > 0$. 记 B_t 为以 x_0 为球心，以 t 为半径的开球对于函数 $u(x)$ 和 $k > 0$ 令 $A_k = \{x \in \Omega : |u(x)| > k\}$, $A_{k,t} = A_k \cap B_t$. 而且， p' 总表示实数 $\frac{p}{p-1}$, 若 $s < n$, s^* 是实数且满足 $\frac{1}{s^*} = \frac{1}{s} - \frac{1}{n}$. 我们回忆两个引理，它们将在定理 10.1 的证明中得到应用.

引理 10.1[9] 设 $u \in W^{1,r}_{loc}(\Omega)$, $\varphi_0 \in L^q_{loc}(\Omega)$, 其中 $1 < r < n$, q 满足

$$1 < q < \frac{n}{r}.$$

若积分估计 Assume that the following integral estimate holds

$$\int_{A_{k,\tau}} |\nabla u|^r \, dx \leq C_0 \left[\int_{A_{k,t}} \varphi_0 \, dx + (t-\tau)^{-\gamma} \int_{A_{k,t}} |u|^r \, dx \right], \tag{10.6}$$

对于任意的 $x_0 \in \Omega$ 和每个 $k \in \mathbf{N}$, $R_0 \leq \tau < t \leq R_1$ 成立，其中 C_0 是仅依赖于 n, q, r, R_0, R_1 and $|\Omega|$ 的正数， γ 也是一个正数．那么 $u \in L^{s^*}_{loc}(\Omega)$, 其中 $s = qr$.

引理 10.2[10] 设 $f(\tau)$ 是定义在 $0 \leq R_0 \leq t \leq R_1$ 上的非负有界函数．若对于 $R_0 \leq \tau < t \leq R_1$ 有

$$f(\tau) \leq A(t-\tau)^{-\gamma} + B + \theta f(t), \tag{10.7}$$

这里 A, B, γ, θ 是非负常数，且 $\theta < 1$. 那么存在仅与 γ 和 θ 的常数 c, 使得对于每个 ρ, R, $R_0 \leq \rho < R \leq R_1$, 有

$$f(\rho) \leq c[A(R-\rho)^{-\gamma} + B]. \tag{10.8}$$

4.10.2 定理的证明

设 u 是 $\mathcal{K}^r_{\psi,\theta}$- 障碍问题的很弱解．由引理 10.1 只需证明 u 满足不等式 (10.6), 其中 $\gamma = r$. 设 $B_{R_1} \subset\subset \Omega$, $0 \leq R_0 \leq \tau < t \leq R_1$ 是任意确定的．固定截断函数

$\phi \in C_0^\infty(B_{R_1})$ 满足

$$\text{supp } \phi \subset B_t,\ 0 \le \phi \le 1,\ \phi = 1 \text{ in } B_\tau \text{ and } |\nabla \phi| \le 2(t-\tau)^{-1}.$$

考虑函数

$$v = u - \phi^r(u-\psi).$$

现在 $v \in \mathcal{K}^r_{\psi,\theta}(\Omega)$；事实上，

$$v - \theta = u - \theta - \phi^r(u-\psi) \in W_0^{1,r}(\Omega),$$

由于 $u \in \mathcal{K}^r_{\psi,\theta}(\Omega)$, $\phi \in C_0^\infty(B_{R_1})$, 和

$$v - \psi = (u-\psi) - \phi^r(u-\psi) = (1-\phi^r)(u-\psi) \ge 0,$$

在 Ω 上 a.e.. 对于任意确定的 $k > 0$, 令

$$v_0 = \begin{cases} u, & \text{if } u < k, \\ v, & \text{if } u \ge k. \end{cases}$$

很容易看到 $v_0 \in \mathcal{K}^r_{\psi,\theta}(\Omega)$.. 由定义 10.1, 我们有

$$\int_\Omega \langle \mathcal{A}(x,u,\nabla u), |\nabla(v_0-u)|^{r-p}\nabla(v_0-u)\rangle\, dx \ge \int_\Omega \langle \mathcal{A}(x,u,\nabla u), \widetilde{h}_{v,u}\rangle\, dx.$$

其中 $\widetilde{h}_{v,u} = 0$ 若 $u < k$, $\widetilde{h}_{v,u} = h_{v,u}$ 若 $u \ge k$. 由 Hodge 分解的唯一性很容易得到此结论. 因此

$$\begin{aligned} & \int_{A_{k,t}} \langle \mathcal{A}(x,u,\nabla u), |\nabla(v-u)|^{r-p}\nabla(v-u)\rangle\, dx \\ \ge & \int_{A_{k,t}} \langle \mathcal{A}(x,u,\nabla u), h_{v,u}\rangle\, dx. \end{aligned} \tag{10.9}$$

令

$$E(v,u) = |\phi^r \nabla u|^{r-p}\phi^r\nabla u + |\nabla(v-u)|^{r-p}\nabla(v-u). \tag{10.10}$$

由基本不等式

$$\big||X|^{-\varepsilon}X - |Y|^{-\varepsilon}Y\big| \le 2^\varepsilon \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}|X-Y|^{1-\varepsilon}, \quad X, Y \in \mathbf{R}^n, 0 \le \varepsilon < 1, \tag{10.11}$$

和 $\nabla(v-u)=-\phi^r\nabla(u-\psi)-r\phi^{r-1}(u-\psi)\nabla\phi$, 可以得到

$$|E(v,u)|\le 2^{p-r}\frac{p-r+1}{r-p+1}\left|\phi^r\nabla\psi-r\phi^{r-1}(u-\psi)\nabla\phi\right|^{r-p+1}. \tag{10.12}$$

联合 (10.9) 和 (10.10) 有

$$\begin{aligned}&\int_{A_{k,t}}\langle\mathcal{A}(x,u,\nabla u),|\phi^r\nabla u|^{r-p}\phi^r\nabla u\rangle\,dx\\ \le\ &\int_{A_{k,t}}\langle\mathcal{A}(x,u,\nabla u),E(v,u)\rangle\,dx-\int_{A_{k,t}}\langle\mathcal{A}(x,u,\nabla u),h_{v,u}\rangle\,dx.\end{aligned} \tag{10.13}$$

(10.13) 的左边可以进行如下估计

$$\begin{aligned}&\int_{A_{k,t}}\langle\mathcal{A}(x,u,\nabla u),|\phi^r\nabla u|^{r-p}\phi^r\nabla u\rangle\,dx\\ \ge\ &\int_{A_{k,\tau}}\langle\mathcal{A}(x,u,\nabla u),|\nabla u|^{r-p}\nabla u\rangle\,dx\\ \ge\ &\alpha\int_{A_{k,\tau}}|\nabla u|^r\,dx,\end{aligned} \tag{10.14}$$

这里应用了条件 (i). 由 (10.11), 条件 (ii) 和 ψ 的非负性，则有

$$\begin{aligned}&\int_{A_{k,t}}\langle\mathcal{A}(x,u,\nabla u),E(v,u)\rangle\,dx-\int_{A_{k,t}}\langle\mathcal{A}(x,u,\nabla u),h_{v,u}\rangle\,dx\\ &\le\frac{2^{p-r}(p-r+1)}{r-p+1}\int_{A_{k,t}}\left[\beta_1|\nabla u|^{p-1}+\beta_2|u|^m+\varphi_1\right]|\phi^r\nabla\psi\\ &\quad-r\phi^{r-1}(u-\psi)\nabla\phi|^{r-p+1}\,dx+\int_{A_{k,t}}\left[\beta_1|\nabla u|^{p-1}+\beta_2|u|^m+\varphi_1\right]|h_{v,u}|\,dx\\ &\le\frac{2^{p-r}(p-r+1)}{r-p+1}\int_{A_{k,t}}\left[\beta_1|\nabla u|^{p-1}+\beta_2|u|^m+\varphi_1\right]|\nabla\psi|^{r-p+1}\,dx\\ &\quad+\frac{2^{p-r+1}r(p-r+1)}{r-p+1}\int_{A_{k,t}}\left[\beta_1|\nabla u|^{p-1}+\beta_2|u|^m+\varphi_1\right]\left(\frac{|u|}{t-\tau}\right)^{r-p+1}\,dx\\ &\quad+\int_{A_{k,t}}\left[\beta_1|\nabla u|^{p-1}+\beta_2|u|^m+\varphi_1\right]|h_{v,u}|\,dx.\end{aligned} \tag{10.15}$$

现在要估计上面不等式右端的每一项. 由 Young 不等式

$$ab\le\varepsilon a^{\tilde{p}'}+C(\varepsilon,\tilde{p})b^{\tilde{p}},\quad \frac{1}{\tilde{p}}+\frac{1}{\tilde{p}'}=1,\ a,b\ge 0,\ \varepsilon\ge 0,\ \tilde{p}>1, \tag{10.16}$$

得到

$$\begin{aligned}&\int_{A_{k,t}}\beta_1|\nabla u|^{p-1}|\nabla\psi|^{r-p+1}\,dx\\ \le\ &\beta_1\left[\varepsilon\int_{A_{k,t}}|\nabla u|^r\,dx+C(\varepsilon,r,p)\int_{A_{k,t}}|\nabla\psi|^r\,dx\right],\end{aligned} \tag{10.17}$$

和

$$\int_{A_{k,t}} \beta_2 |u|^m |\nabla\psi|^{r-p+1}\, dx \le \beta_2 \int_{A_{k,t}} \left[\varepsilon |u|^{\frac{mr}{p-1}} + C(\varepsilon, r, p)|\nabla\psi|^r\right] dx. \qquad (10.18)$$

我们注意到若 $w \in W^{1,r}(B_t)$, $|\mathrm{supp} w| \le \frac{1}{2}|B_t|$, 我们就有 Sobolev 不等式 (也可以参见 [8]),

$$\left(\int_{B_t} |w|^{r^*}\, dx\right)^{r/r^*} \le c_1(n,r) \int_{B_t} |\nabla w|^r\, dx.$$

令

$$T_k(u) = \begin{cases} 0, & \text{if } u > k, \\ u, & \text{if } u \le k. \end{cases}$$

由假设 $p-1 \le m \le \frac{n(p-1)}{n-r}$, 则有 $r \le \frac{mr}{p-1} \le r^*$ 上面的不等式暗含着若 $|\mathrm{supp}(u - T_k(u))\,|_{B_t}| \le \frac{1}{2}|B_t|$,

$$\begin{aligned}
\int_{A_{k,t}} |u|^{\frac{mr}{p-1}} &= \int_{B_t} |u - T_k(u)|^{\frac{mr}{p-1}}\, dx \\
&\le \|u - T_k(u)\|_{r^*}^{\frac{(m-p+1)r}{p-1}} |B_t|^{1-\frac{m(n-r)}{n(p-1)}} \left(\int_{B_t} |u - T_k(u)|^{r^*}\, dx\right)^{r/r^*} \qquad (10.19)\\
&\le c_1(n,r) \|u - T_k(u)\|_{r^*}^{\frac{(m-p+1)r}{p-1}} |B_t|^{1-\frac{m(n-r)}{n(p-1)}} \int_{A_{k,t}} |\nabla u|^r\, dx,
\end{aligned}$$

由于 $\mathrm{supp}(u - T_k(u))|_{B_t} \subset A_{k,t}$, 我们有 $|\mathrm{supp}(u - T_k(u))|_{B_t}| \le |A_{k,t}|$. 另一方面，有

$$\|u\|_{r^*, B_t}^{r^*} = \int_{B_t} |u|^{r^*}\, dx \ge \int_{A_{k,t}} |u|^{r^*} \ge k^{r^*} |A_{k,t}|.$$

因此存在常数 $k_0 > 0$, 满足对于 $k \ge k_0$ 有 $|A_{k,t}| \le \frac{1}{2}|B_t|$. 我们也能够假设对于这样的 k_0,

$$\int_{A_{k_0,t}} |u|^{r^*}\, dx \le 1. \qquad (10.20)$$

这是 Levi's 引理的一个推论．对于这样的值 k 我们有不等式

$$\begin{aligned}
\int_{A_{k,t}} |u|^{\frac{mr}{p-1}} dx &= \int_{B_t} |u - T_k(u)|^{\frac{mr}{p-1}}\, dx \\
&\le c_1(n,r) \|u - T_k(u)\|_{r^*}^{\frac{(m-p+1)r}{p-1}} |B_t|^{1-\frac{m(n-r)}{n(p-1)}} \int_{A_{k,t}} |\nabla u|^r\, dx \\
&\le c_1(n,r) \|u - T_k(u)\|_{r^*}^{\frac{(m-p+1)r}{p-1}} |\Omega|^{1-\frac{m(n-r)}{n(p-1)}} \int_{A_{k,t}} |\nabla u|^r\, dx \qquad (10.21)\\
&\le c_1(n,r) |\Omega|^{1-\frac{m(n-r)}{n(p-1)}} \int_{A_{k,t}} |\nabla u|^r\, dx \\
&= C \int_{A_{k,t}} |\nabla u|^r\, dx,
\end{aligned}$$

其中 C 是仅依赖于 n, r, m, p, k_0 和 $|\Omega|$ 的常数.

由 (10.18) 和 (10.21) 得到

$$
\begin{aligned}
& \int_{A_{k,t}} \beta_2 |u|^m |\nabla \psi|^{r-p+1}\, dx \\
\leq\ & \beta_2 C\varepsilon \int_{A_{k,t}} |\nabla u|^r\, dx + \beta_2 C(\varepsilon, r, p) \int_{A_{k,t}} |\nabla \psi|^r\, dx.
\end{aligned} \tag{10.22}
$$

由 Hölder 和 Young 不等式，我们有

$$
\int_{A_{k,t}} \varphi_1 |\nabla \psi|^{r-p+1}\, dx \leq \int_{A_{k,t}} \varphi_1^{\frac{r}{p-1}}\, dx + \int_{A_{k,t}} |\nabla \psi|^r\, dx. \tag{10.23}
$$

再次应用 Young 不等式，我们得到

$$
\begin{aligned}
& \int_{A_{k,t}} \beta_1 |\nabla u|^{p-1} \left(\frac{|u|}{t-\tau} \right)^{r-p+1} dx \\
\leq\ & \beta_1 \left[\varepsilon \int_{A_{k,t}} |\nabla u|^r\, dx + \frac{C(\varepsilon, r, p)}{(t-\tau)^r} \int_{A_{k,t}} |u|^r\, dx \right].
\end{aligned} \tag{10.24}
$$

(10.21) 蕴涵着

$$
\begin{aligned}
& \int_{A_{k,t}} \beta_2 |u|^m \left(\frac{|u|}{t-\tau} \right)^{r-p+1} dx \\
\leq\ & \beta_2 \left[\varepsilon \int_{A_{k,t}} |u|^{\frac{mr}{p-1}}\, dx + \frac{C(\varepsilon, p)}{(t-\tau)^r} \int_{A_{k,t}} |u|^r\, dx \right] \\
\leq\ & \beta_2 C\varepsilon \int_{A_{k,t}} |\nabla u|^r\, dx + \frac{\beta_2 C(\varepsilon, p)}{(t-\tau)^r} \int_{A_{k,t}} |u|^r\, dx.
\end{aligned} \tag{10.25}
$$

由 Hölder 和 Young 不等式得到

$$
\int_{A_{k,t}} \varphi_1 \left(\frac{|u|}{t-\tau} \right)^{r-p+1} dx \leq \int_{A_{k,t}} \varphi_1^{\frac{r}{p-1}}\, dx + \frac{1}{(t-\tau)^r} \int_{A_{k,t}} |u|^r\, dx. \tag{9.26}
$$

由 (10.4), Hölder 和 Young 不等式，得

$$\begin{aligned}
&\int_{A_{k,t}} \beta_1 |\nabla u|^{p-1} |h_{v,u}|\, dx \\
\leq\ & \beta_1 \left(\int_{A_{k,t}} |\nabla u|^r\, dx \right)^{\frac{p-1}{r}} c(p-r) \left(\int_{A_{k,t}} \left| \phi^r \nabla (u-\psi) + r\phi^{r-1}(u-\psi)\nabla\phi \right|^r\, dx \right)^{\frac{r-p+1}{r}} \\
\leq\ & \beta_1 \varepsilon \int_{A_{k,t}} |\nabla u|^r\, dx + C(\varepsilon, r, p) c(p-r) \int_{A_{k,t}} \left| \phi^r \nabla (u-\psi) + r\phi^{p-1}(u-\psi)\nabla\phi \right|^r\, dx \\
\leq\ & \beta_1 \varepsilon \int_{A_{k,t}} |\nabla u|^r\, dx \\
& + C(\varepsilon, r, p) c(p-r) \left[\int_{A_{k,t}} |\nabla u|^r\, dx + \int_{A_{k,t}} |\nabla \psi|^r\, dx + \frac{(2r)^r}{(t-\tau)^r} \int_{A_{k,t}} |u|^r\, dx \right],
\end{aligned} \tag{10.27}$$

(10.15) 的右端最后的两项可以如下估计,

$$\begin{aligned}
&\int_{A_{k,t}} \beta_2 |u|^m |h_{v,u}|\, dx \\
\leq\ & \beta_2 \left(\int_{A_{k,t}} |u|^{\frac{mr}{p-1}}\, dx \right)^{\frac{p-1}{r}} \left(\int_{A_{k,t}} |h_{v,u}|^{\frac{r}{r-p+1}}\, dx \right)^{\frac{r-p+1}{r}} \\
\leq\ & \beta_2 \left[\varepsilon \int_{A_{k,t}} |u|^{\frac{mr}{p-1}}\, dx + C(\varepsilon, r, p) c(p-r) \int_{A_{k,t}} \left| \phi^r \nabla (u-\psi) - r\phi^{r-1}(u-\psi)\nabla\phi \right|^r\, dx \right] \\
\leq\ & \beta_2 C \varepsilon \int_{A_{k,t}} |\nabla u|^r\, dx \\
& + C(\varepsilon, r, p) c(p-r) \left[\int_{A_{k,t}} |\nabla u|^r\, dx + \int_{A_{k,t}} |\nabla \psi|^r\, dx + \frac{(2r)^r}{(t-\tau)^r} \int_{A_{k,t}} |u|^r\, dx \right],
\end{aligned} \tag{10.28}$$

和

$$\begin{aligned}
&\int_{A_{k,t}} \varphi_1 |h_{v,u}|\, dx \\
\leq\ & \|\varphi_1\|_{\frac{r}{p-1}} \|h_{v,u}\|_{\frac{r}{r-p+1}} \\
\leq\ & \int_{A_{k,t}} \varphi_1^{\frac{r}{p-1}}\, dx + c(p-r) \left[\int_{A_{k,t}} |\nabla u|^r\, dx + \int_{A_{k,t}} |\nabla \psi|^r\, dx + \frac{(2r)^r}{(t-\tau)^r} \int_{A_{k,t}} |u|^r\, dx \right].
\end{aligned} \tag{10.29}$$

联合估计 (10.13)-(10.15), (10.17), (10.22)-(10.29), 我们得到

$$\begin{aligned}
\int_{A_{k,\tau}} |\nabla u|^r\, dx \ \leq\ & C\varepsilon \int_{A_{k,t}} |\nabla u|^r\, dx + C(p-r) \int_{A_{k,t}} |\nabla u|^r\, dx \\
& + C \int_{A_{k,t}} |\nabla \psi|^r\, dx + C \int_{A_{k,t}} \varphi_1^{\frac{r}{p-1}}\, dx + \frac{C}{(t-\tau)^r} \int_{A_{k,t}} |u|^r\, dx,
\end{aligned} \tag{10.30}$$

其中 C 是仅依赖于 $n, r, m, p, k_0, \alpha, \beta_1, \beta_2$ 和 $|\Omega|$ 的常数.

现在我们想消去右端的第一项，它包含 ∇u. 选择 r_1 充分接近 p, 使得 $C(p-r_1)=1$. 对于这样的 r_1, 若 $r_1<r<p$, 那么 $C(p-r)<1$. 选择 $\varepsilon>0$ 使得 $\theta=C(p-r)+C\varepsilon<1$. 因此， (10.30) 化为

$$\begin{aligned}
&\int_{A_{k,\tau}}|\nabla u|^r\,dx\\
\leq\ &\theta\int_{A_{k,t}}|\nabla u|^r\,dx+C\int_{A_{k,t}}\left[|\nabla\psi|^r+\varphi_1^{\frac{r}{p-1}}\right]\,dx+\frac{C}{(t-\tau)^r}\int_{A_{k,t}}|u|^r\,dx.
\end{aligned}\tag{10.31}$$

固定 ρ, R 满足 $R_0\leq\rho<R\leq R_1$. 因此，由 (10.31), 我们推导出对于每个满足 $\rho\leq\tau<t\leq R$ 的 t 和 τ, 我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{A_{k,\tau}}|\nabla u|^r\,dx\\
\leq\ &\theta\int_{A_{k,t}}|\nabla u|^r\,dx+C\int_{A_{k,R}}\left[|\nabla\psi|^r+\varphi_1^{\frac{r}{p-1}}\right]\,dx+\frac{C}{(t-\tau)^r}\int_{A_{k,R}}|u|^r\,dx.
\end{aligned}\tag{10.32}$$

对 (10.32) 应用引理 10.2, 我们就有

$$\int_{A_{k,\tau}}|\nabla u|^r\,dx\leq c\left[C\int_{A_{k,R}}\left[|\nabla\psi|^r+\varphi_1^{\frac{r}{p-1}}\right]\,dx+\frac{C}{(t-\tau)^r}\int_{A_{k,R}}|u|^r\ dx\right],$$

其中 c 是由引理 10.2 给出的常数. 因此， u 满足不等式 (10.6) , 其中 $\varphi_0=|\nabla\psi|^r+\varphi_1^{\frac{r}{p-1}}$, $\gamma=r$. 再由引理 10.1, 得到了定理.

§4.11 散度 - 旋度场的正则性及其在 $\mathcal{A}$- 调和方程中的应用

本节证明散度 - 旋度向量场 $(B,E)\in L_{loc}^{q(1-\varepsilon)}(\Omega,\mathrm{R}^n)\times L_{loc}^{p(1-\varepsilon)}(\Omega,\mathrm{R}^n)$ 的高阶可积性，这里 $1<p,q<\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, ε 充分小， $\mathrm{div}B=0$, $\mathrm{curl}E=0$ 满足逆不等式

$$|\ B\ |^q+|\ E\ |^p\leq C\langle B,E\rangle+|\ F\ |^q,$$

其中 $F\in L^r(\Omega,\mathrm{R}^n), r>q(1-\varepsilon)$. 给出了上述结果在弱拟正则映射和非齐次 $\mathcal{A}$- 调和方程

$$\mathrm{div}\mathcal{A}(x,\nabla u)=\mathrm{div}F$$

很弱解中的应用.

4.11.1 引言及预备引理

设 Ω 为 R^n, $n \geq 2$ 中的有界开集. 本文利用散度 - 旋度场的不等式，考虑方程

$$\operatorname{div}\mathcal{A}(x, \nabla u) = \operatorname{div}\ F, \tag{11.1}$$

很弱解的高阶可积性理论，这里

$$|\mathcal{A}(x,z)|^q + |z|^p \leq M\langle \mathcal{A}(x,z), z\rangle, \quad x \in \Omega, \tag{11.2}$$

$1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $M > 0$ 为常数.

生成 p- 调和方程

$$\operatorname{div}\ |\nabla u|^{p-2}\nabla u = 0, \tag{11.3}$$

的映射 $\mathcal{A}(x,z) = |z|^{p-2}z$ 满足 $M = 2$ 时的 (11.2) 式.

由 [1~3] 知，建立 (11.1) 的很弱解 $u \in W^{1,p-\varepsilon}_{loc}(\Omega)$ $(\varepsilon > 0)$ 的 $W^{1,p+\varepsilon}_{loc}(\Omega)$ 正则性的经典方法是将 Coccioppoli 不等式 (由著名的 Iwaniec-Hodge 分解方法或 McShane 扩张方法得到)

$$⨍_Q |\nabla u|^{p-\varepsilon}dx \leq C\left[⨍_{2Q}\left|\frac{u-u_{2Q}}{2R}\right|^{p-\varepsilon}dx + ⨍_{2Q}|F|^q dx\right]$$

与 Poincaré-Sobolev 不等式

$$\left(⨍_{2Q}\left|\frac{u-u_{2Q}}{2R}\right|^{\tilde{p}}dx\right)^{\frac{1}{\tilde{p}}} \leq C\left(⨍_{2Q}|\nabla u|^{\frac{n\tilde{p}}{n+\tilde{p}}}dx\right)^{\frac{n+\tilde{p}}{n\tilde{p}}}$$

结合起来得到一个非齐次逆 Hölder 不等式

$$⨍_Q |\ \nabla u\ |^{p-\varepsilon}\ dx \leq C\left\{\left(⨍_{2Q}|\ \nabla u\ |^{\frac{n(p-\varepsilon)}{n+p-\varepsilon}}\ dx\right)^{\frac{n+p-\varepsilon}{n}} + ⨍_{2Q}|\ F\ |^q\ dx\right\},$$

这里 $⨍_Q f dx$ 表示 f 在 Q 上的积分平均， $⨍_Q f dx = \frac{1}{|Q|}\int_Q f dx$, Q 为 R^n 中方体，边与坐标轴平行，边长为 R, $2Q$ 为与 Q 同心，边与坐标轴平行，边长为 $2R$ 的方体. 高阶可积性结果由著名的 Giaquinta-Modica[4,5] 技巧得到.

本文基于散度 - 旋度场的不等式，给出正则性结果的另一个证明.

考虑散度 - 旋度向量场 $B=(B_1,B_2,\cdots,B_n)\in L^q_{loc}(\Omega,\mathrm{R}^n)$, $E=(E_1,E_2,\cdots,E_n)\in L^p_{loc}(\Omega,\mathrm{R}^n)$, $1<p,q<\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 即在分布意义下,

$$\operatorname{div} B=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial B_i}{\partial x_i}=0,\qquad \operatorname{curl} E=\left(\frac{\partial E_i}{\partial x_j}-\frac{\partial E_j}{\partial x_i}\right)_{i,j=1,\cdots,n}=0.$$

下面的基本估计式是 [6] 建立的, 本文的形式见 [7, 定理 2.1].

引理 1.1 设 $1<p,q<\infty$ 为 Hölder 共轭对, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $1<r,s<\infty$ 为 Sobolev 共轭对, $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1+\frac{1}{n}$. 存在常数 $C_n=C_n(p,s)$ 使得任意试验函数 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\begin{aligned}&\left|\fint_Q\varphi\frac{\langle B,E\rangle}{|\ B\ |^\varepsilon|\ E\ |^\varepsilon}dx\right|\\ \le\ & C_n\varepsilon\|\varphi\|_\infty\left(\fint_{2Q}|E|^{p(1-\varepsilon)}\mathrm{dx}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\fint_{2Q}|B|^{q(1-\varepsilon)}\mathrm{dx}\right)^{\frac{1}{q}}\\ &+C_n\|\varphi\|_\infty\left(\fint_{2Q}|E|^{s(1-\varepsilon)}\mathrm{dx}\right)^{\frac{1}{s}}\left(\fint_{2Q}|B|^{r(1-\varepsilon)}\mathrm{dx}\right)^{\frac{1}{r}},\end{aligned}\tag{11.4}$$

这里 $0\le 2\varepsilon\le\min\{\frac{p-1}{p},\frac{q-1}{q},\frac{r-1}{r},\frac{s-1}{s}\}$, $\operatorname{div} B=0,\operatorname{curl} E=0$.

4.11.2 高阶可积性及应用

定理 11.1 设 $\Omega\subset\mathrm{R}^n$, $0\le\varepsilon<\min\{\frac{1}{p},\frac{1}{q}\}$, $(B,E)\in L^{q(1-\varepsilon)}_{loc}(\Omega,\mathrm{R}^n)\times L^{p(1-\varepsilon)}_{loc}(\Omega,\mathrm{R}^n)$, $1<p,q<\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $\operatorname{div} B=0,\operatorname{curl} E=0$, 且

$$|E(x)|^p+|B(x)|^q\le M\langle B(x),E(x)\rangle,\quad \text{a.e. }\Omega,\tag{11.5}$$

这里 $M>0$ 为常数. 则存在 $\overline{\varepsilon}=\overline{\varepsilon}(n,M)$ 使得对所有的 $0<\varepsilon<\overline{\varepsilon}$, $(B,E)\in L^{q(1+\varepsilon)}_{loc}(\Omega,\mathrm{R}^n)\times L^{p(1+\varepsilon)}_{loc}(\Omega,\mathrm{R}^n)$, 且对任意 $Q\subset 2Q\subset\subset\Omega$,

$$\left(\fint_Q(|E|^p+|B|^q)^{1+\varepsilon}dx\right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}}\le C\left(\fint_Q(|E|^p+|B|^q)^{1-\varepsilon}dx\right)^{\frac{1}{p(1-\varepsilon)}},$$

这里 $C=C(n,p,M)$ 为正常数.

证明 固定方体 Q 使得 $2Q\subset\subset\Omega$. 由 (11.5) 得

$$\begin{aligned}&\fint_Q\left((|E|^p+|B|^q)^{\frac{1}{p}}\right)^{p(1-\varepsilon)}dx=\fint_Q(|E|^p+|B|^q)^{1-\varepsilon}dx\\ &=\fint_Q\frac{|E|^p+|B|^q}{(|E|^p+|B|^q)^\varepsilon}dx\le C\fint_Q\frac{\langle B,E\rangle}{(|E|^p+|B|^q)^\varepsilon}dx.\end{aligned}\tag{11.6}$$

由 Young 不等式

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ a, b \geq 0,$$

得到

$$|B|^q + |E|^p > \frac{1}{q}|B|^q + \frac{1}{p}|E|^p \geq |B||E|.$$

在引理 1.1 中取试验函数 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ 满足 $0 \leq \varphi \leq 1$, 且在 Q 中 $\varphi \equiv 1$. 由上面的不等式, (2.2) 和 $r = \frac{nq}{n+1}$ 与 $s = \frac{np}{n+1}$ 的不等式 (1.4) 知, 对充分小的 ε,

$$\begin{aligned}
& \fint_Q \left((|E|^p + |B|^q)^{\frac{1}{p}}\right)^{p(1-\varepsilon)} dx \leq C \fint_Q \frac{\langle B, E\rangle}{|E|^\varepsilon |B|^\varepsilon} dx \\
\leq\ & C_n\varepsilon \left(\fint_{2Q} |E|^{p(1-\varepsilon)} dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\fint_{2Q} |B|^{q(1-\varepsilon)} dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
& + C_n \left(\fint_{2Q} |E|^{\frac{np(1-\varepsilon)}{n+1}} dx\right)^{\frac{n+1}{np}} \left(\fint_{2Q} |B|^{\frac{nq(1-\varepsilon)}{n+1}} dx\right)^{\frac{n+1}{nq}} \\
\leq\ & C_n\varepsilon \fint_{2Q} (|E|^p + |B|^q)^{1-\varepsilon} dx + C_n \left(\fint_{2Q} (|E|^p + |B|^q)^{\frac{n(1-\varepsilon)}{n+1}} dx\right)^{\frac{n+1}{n}} \\
=\ & C_n\varepsilon \fint_{2Q} \left((|E|^p + |B|^q)^{\frac{1}{p}}\right)^{p(1-\varepsilon)} dx + C_n \left(\fint_{2Q} \left((|E|^p + |B|^q)^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{np(1-\varepsilon)}{n+1}} dx\right)^{\frac{n+1}{n}}
\end{aligned}$$

设 $g = (|E|^p + |B|^q)^{\frac{1}{p}}$, 由上面的不等式得到

$$\fint_Q g^{p(1-\varepsilon)} dx \leq C_n\varepsilon \fint_{2Q} g^{p(1-\varepsilon)} dx + C_n \left(\fint_{2Q} g^{\frac{np(1-\varepsilon)}{n+1}} dx\right)^{\frac{n+1}{n}}. \tag{11.7}$$

因为 $\frac{np(1-\varepsilon)}{n+1} < p(1-\varepsilon)$, (11.7) 是一个逆 Hölder 不等式. 取 ε 充分小使得 $\theta = C_n\varepsilon < 1$. 现在应用引理 6.1 来提高 g 的可积次数. 存在 $\sigma_0 = \sigma_0(n, p)$ 使得对所有 $0 < \sigma < \sigma_0$,$g \in L_{loc}^{p(1-\varepsilon)+\sigma}(\Omega)$, 且

$$\left(\fint_Q g^{p(1-\varepsilon)+\sigma} dx\right)^{\frac{1}{p(1-\varepsilon)+\sigma}} \leq C \left(\fint_{2Q} g^{p(1-\varepsilon)} dx\right)^{\frac{1}{p(1-\varepsilon)}}.$$

对固定的 g, 记 I 为所有使得 $g \in L_{loc}^{\tilde{p}}(\Omega)$ 的指数 $\tilde{p} \in [p(1-\varepsilon), p]$ 的集合. 由假设, 集合 I 包含 $p_1 = p(1-\varepsilon)$. 下面证明 I 等于区间 $[p(1-\varepsilon), p]$. 由一致估计 (11.7) 知集合 I 为闭的. 不等式 (11.7) 与引理 1.2 蕴含 g 事实上属于 $L_{loc}^{\tilde{p}}(\Omega)$, 其中指数 $\tilde{p} > p_1$. 因此, 集合 I 为闭的和开的, 这样就与集合 $[p(1-\varepsilon), p]$ 重合. 上面的结果对 $\tilde{p} = p$ 也成立, 再次应用引理 2.2, 存在 $p_2 > p$ 使得 $g \in L_{loc}^{p_2}(\Omega)$. 定理 11.1 证毕.

作为定理 11.1 正则性结果的应用，考虑有界开集 $\Omega \subset \mathrm{R}^n$ 中的方程,

$$\mathrm{div}\mathcal{A}(x, \nabla u) = 0, \tag{11.8}$$

这里 $\mathcal{A} : \Omega \times \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$ 是一个微分算子， $x \to \mathcal{A}(x,z)$ 对所有 $z \in \mathrm{R}^n$ 可测，$z \to \mathcal{A}(x,z)$ 对几乎所有 $x \in \Omega$ 连续，函数 $\mathcal{A}(x,z)$ 满足通常的增长性条件

$$\langle \mathcal{A}(x,z), z\rangle \geq |z|^p \tag{11.9}$$

$$|\mathcal{A}(x,z)| \leq \beta |z|^{p-1}, \beta \geq 1. \tag{11.10}$$

由 (11.9) 和 (11.10) 知存在常数 $C(\beta) = (1+\beta^q)$ 使得对几乎所有的 $x \in \Omega$, 有

$$|\mathcal{A}(x,z)|^q + |z|^p \leq C(\beta)\langle \mathcal{A}(x,z), z\rangle, \tag{11.11}$$

这里 x, z 为 R^n 中的任意向量.

齐次 $\mathcal{A}$- 调和方程 (11.7) 很弱解的正则性结果已在 [1] 中利用 Iwaneic-Hodge 分解的方法得到. 现在我们提供 Iwaniec-Martin 结果的另一证明.

推论 11.1 设 $0 < \varepsilon < \frac{1}{p}$, $u \in W^{1,p(1-\varepsilon)}_{loc}(\Omega)$ 为方程 (2.4) 的很弱解. 存在 $\bar\varepsilon = \bar\varepsilon(\beta, n)$, 使得对所有 $0 < \varepsilon < \bar\varepsilon, u \in W^{1,p(1+\varepsilon)}_{loc}(\Omega)$, 且对任意 $Q \subset 2Q \subset\subset \Omega$,

$$\left(\fint_Q |\nabla u|^{p(1+\varepsilon)} dx \right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \leq C \left(\fint_{2Q} |\nabla u|^{p(1-\varepsilon)} dx \right)^{\frac{1}{p(1-\varepsilon)}},$$

这里 C 为依赖于 β 和 n 的正常数.

证明 置 $E(x) = \nabla u(x)$, $B(x) = \mathcal{A}(x, \nabla u)$. 在分布意义下 div $B = 0$,curl $E = 0$. 由 (11.11),

$$|E(x)|^p + |B(x)|^q = |\nabla u|^p + |\mathcal{A}(x, \nabla u)|^q \leq C(\beta) \langle \mathcal{A}(x, \nabla u), \nabla u\rangle,$$

这样 E, B 为散度 - 旋度向量场. 应用定理 11.1 得到

$$\begin{aligned} &\left[\fint_Q (|\mathcal{A}(x, \nabla u)|^q + |\nabla u|^p)^{1+\varepsilon} dx \right]^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}} \\ \leq\ & C \left[\fint_{2Q} (|\mathcal{A}(x, \nabla u)|^q + |\nabla u|^p)^{1-\varepsilon} dx \right]^{\frac{1}{p(1-\varepsilon)}}. \end{aligned} \tag{11.12}$$

应用 (11.9),(11.10), 上面的不等式蕴涵

$$
\begin{aligned}
&\left[\fint_{2Q}(|\mathcal{A}(x,\nabla u)|^q+|\nabla u|^p)^{1-\varepsilon}dx\right]^{\frac{1}{p(1-\varepsilon)}}\\
&\le\left[\fint_{2Q}(|\mathcal{A}(x,\nabla u)|^{q(1-\varepsilon)}+|\nabla u|^{p(1-\varepsilon)})dx\right]^{\frac{1}{p(1-\varepsilon)}}\\
&\le\left(\fint_{2Q}\beta^{q(1-\varepsilon)}|\nabla u|^{p(1-\varepsilon)}+|\nabla u|^{p(1-\varepsilon)}dx\right)^{\frac{1}{p(1-\varepsilon)}}\\
&=C(\beta)\left(\fint_{2Q}|\nabla u|^{p(1-\varepsilon)}dx\right)^{\frac{1}{p(1-\varepsilon)}}.
\end{aligned}
\tag{11.13}
$$

联合 (11.12) 和 (11.13) 得

$$
\left(\fint_{Q}|\nabla u|^{p(1+\varepsilon)}dx\right)^{\frac{1}{p(1+\varepsilon)}}\le C(\beta)\left(\fint_{2Q}|\nabla u|^{p(1-\varepsilon)}dx\right)^{\frac{1}{p(1-\varepsilon)}}
$$

证毕.

定理 11.1 可应用到另一个有趣情形, 即弱 K- 拟正则映射 $f=(f^1,f^2\cdots,f^n)\in W_{loc}^{1,n(1-\varepsilon)}(\Omega,\mathrm{R}^n)$,

$$
|Df(x)|^n\le KJ(x,f),\quad K\ge 1,
$$

这里 $|Df(x)|$ 表示微分矩阵 $Df(x)$ 的范数，$J(x,f)=\det Df(x)$ 为 Jacobi 行列式. 将 Jacobi 行列式写为 $J(x,f)=\langle B(x),E(x)\rangle$, 这里 $E=\nabla f^i=(f^i_{x_1},f^i_{x_2},\cdots,f^i_{x_n})$,$B=\mathcal{A}(x,\nabla f^i)=\langle G^{-1}\nabla f^i,\nabla f^i\rangle^{\frac{n-2}{2}}G^{-1}\nabla f^i$, $\forall i=1,2,\cdots,n$. [8] 已证明对这样的 B,E,(2.1) 成立，其中 $p=n$, 同时 $\operatorname{div} B=0,\operatorname{curl} E=0$. 由定理 2.1, 对充分小的 ε, $f\in W_{loc}^{1,n(1+\varepsilon)}(\Omega,\mathrm{R}^n)$, 这就是 Iwaniec[8] 的著名结果.

4.11.3 非齐次方程的正则性

考虑 $(B,E)\in L_{loc}^{q(1-\varepsilon)}(\Omega,\mathrm{R}^n)\times L_{loc}^{p(1-\varepsilon)}(\Omega,\mathrm{R}^n)$, $1<p,q<\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 使得

$$
\operatorname{div}B=0,\operatorname{curl}E=0,\tag{11.14}
$$

$$
|B(x)|^q+|E(x)|^p\le M\langle B(x),E(x)\rangle+|F(x)|^q,\tag{11.15}
$$

这里 $F\in L^r_{loc}(\Omega,\mathrm{R}^n)$, $r>q(1-\varepsilon)$, ε 充分小， $M>0$ 为常数.

定理 11.2 设 $0\le\varepsilon<\min\{\frac{1}{p},\frac{1}{q}\}$,$B,E$ 为满足 (3.1),(3.2) 的散度 - 旋度场. 则存在 $\bar\varepsilon=\bar\varepsilon(n,p,r)$ 和 $\bar\eta=\bar\eta(n,p,r)$, 使得若 $0\le\varepsilon<\bar\varepsilon$, 则对所有的 $0\le\eta<\bar\eta$,

$(B,E)\in L_{loc}^{q(1-\varepsilon)+\eta}(\Omega,\mathrm{R}^n)\times L_{loc}^{p(1-\varepsilon)+\eta}(\Omega,\mathrm{R}^n)$, 且对任意 $Q\subset 2Q\subset\subset\Omega$, 有

$$\begin{aligned}&\left(\fint_Q(|B|^q+|E|^p)^{\frac{p(1-\varepsilon)+\eta}{p}}dx\right)^{\frac{1}{p(1-\varepsilon)+\eta}}\\ \le\ & C\left\{\left(\fint_{2Q}(|B|^q+|E|^p)^{1-\varepsilon}dx\right)^{\frac{1}{p(1-\varepsilon)}}+\left(\fint_{2Q}(|F|^{\frac{1}{p-1}})^{p(1-\varepsilon)+\eta}dx\right)^{\frac{1}{p(1-\varepsilon)+\eta}}\right\},\end{aligned}\tag{11.16}$$

这里 C 为依赖于 n,p,r 和 M 的正常数.

证明 固定方体 Q 使得 $2Q\subset\Omega$, 置

$$Q^+=\{x\in\Omega:\langle B,E\rangle\ge 0,\text{a.e.}\},$$

$$Q^-=\{x\in\Omega:\langle B,E\rangle\le 0,\text{a.e.}\}.$$

由 Young 不等式和 (11.15), 有

$$\begin{aligned}&\int_{Q^-}\frac{-\langle B,E\rangle}{|B|^\varepsilon|E|^\varepsilon}dx\le\int_{Q^-}(|B||E|)^{1-\varepsilon}dx\le\int_{Q^-}\left(\frac{1}{q}|B|^q+\frac{1}{p}|E|^p\right)^{1-\varepsilon}dx\\ &\le\int_{Q^-}(C\langle B,E\rangle+|F|^q)^{1-\varepsilon}dx\le\int_{Q^-}|F|^{q(1-\varepsilon)}dx\le\int_Q|F|^{q(1-\varepsilon)}dx,\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&\int_Q\frac{\langle B,E\rangle}{|B|^\varepsilon|E|^\varepsilon}dx=\int_{Q^+}\frac{\langle B,E\rangle}{|B|^\varepsilon|E|^\varepsilon}dx+\int_{Q^-}\frac{\langle B,E\rangle}{|B|^\varepsilon|E|^\varepsilon}dx\\ &\ge\int_{Q^+}\frac{\langle B,E\rangle}{(|B|^q+|E|^p+|F|^q)^\varepsilon}dx-\int_Q|F|^{q(1-\varepsilon)}dx\end{aligned}$$

应用 $1<p,q<\infty,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 和 $r=\frac{nq}{n+1},s=\frac{np}{n+1}$ 的引理 1.1, 上面的不等式成为

$$\begin{aligned}&\fint_Q\frac{\langle B,E\rangle}{(|B|^q+|E|^p+|F|^q)^\varepsilon}dx\\ \le\ &\frac{1}{|Q|}\int_{Q^+}\frac{\langle B,E\rangle}{(|B|^q+|E|^p+|F|^q)^\varepsilon}dx\\ \le\ &\fint_Q\frac{\langle B,E\rangle}{|B|^\varepsilon|E|^\varepsilon}dx+\fint_Q|F|^{q(1-\varepsilon)}dx\\ \le\ &C_n\varepsilon\fint_{2Q}(|B|^q+|E|^p)^{1-\varepsilon}dx+C_n\left(\fint_{2Q}(|B|^q+|E|^p)^{\frac{n(1-\varepsilon)}{n+1}}dx\right)^{\frac{n+1}{n}}\\ &+2^n\fint_{2Q}|F|^{q(1-\varepsilon)}dx\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \ C_n\varepsilon \fint_{2Q}(|B|^q+|E|^p+|F|^q)^{1-\varepsilon}dx + C_n\left(\fint_{2Q}(|B|^q+|E|^p+|F|^q)^{\frac{n(1-\varepsilon)}{n+1}}dx\right)^{\frac{n+1}{n}}\\
&\quad +2^n\fint_{2Q}|F|^{q(1-\varepsilon)}dx.
\end{aligned}
$$

由 (11.15),

$$
\langle B,E\rangle \ge \frac{1}{C}(|B|^q+|E|^p-|F|^q) = \frac{1}{C}(|B|^q+|E|^p+|F|^q) - \frac{2}{C}|F|^q,
$$

因此

$$
\begin{aligned}
&\fint_Q \frac{\langle B,E\rangle}{(|B|^q+|E|^p+|F|^q)^\varepsilon}dx\\
\ge\ & \frac{1}{C}\fint_Q(|B|^q+|E|^p+|F|^q)^{1-\varepsilon}dx - \frac{2}{C}\fint_Q\frac{|F|^q}{(|B|^q+|E|^p+|F|^q)^\varepsilon}dx.
\end{aligned}
$$

这蕴涵着

$$
\begin{aligned}
&\fint_Q(|B|^q+|E|^p+|F|^q)^{1-\varepsilon}dx\\
\le\ & C\fint_Q\frac{\langle B,E\rangle}{(|B|^q+|E|^p+|F|^q)^\varepsilon}dx + 2\fint_Q\frac{|F|^q}{(|B|^q+|E|^p+|F|^q)^\varepsilon}dx\\
\le\ & C_n\varepsilon\fint_{2Q}(|B|^q+|E|^p+|F|^q)^{1-\varepsilon}dx + C_n\left(\fint_{2Q}(|B|^q+|E|^p+|F|^q)^{\frac{n(1-\varepsilon)}{n+1}}dx\right)^{\frac{n+1}{n}}\\
&+C_n\fint_{2Q}|F|^{q(1-\varepsilon)}dx.
\end{aligned}
$$

置 $g=(|B|^q+|E|^p+|F|^q)^{\frac{1}{p}}$, 上面的不等式蕴涵

$$
\begin{aligned}
&\fint_Q g^{p(1-\varepsilon)}dx\\
\le\ & C_n\varepsilon\fint_{2Q}g^{p(1-\varepsilon)}dx + C_n\left(\fint_{2Q}g^{\frac{np(1-\varepsilon)}{n+1}}\right)^{\frac{n+1}{n}} + C_n\fint_{2Q}(|F|^{\frac{1}{p-1}})^{p(1-\varepsilon)}dx.
\end{aligned}
$$

因此由引理 1.2, 存在 $\bar\varepsilon=\bar\varepsilon(n,p,r)$ 和 $\bar\eta=\bar\eta(n,p,r)$, 使得若 $0\le\varepsilon<\bar\varepsilon$, 则对所有的 $0\le\eta<\bar\eta$, $g\in L^{p(1-\varepsilon)+\eta}_{loc}(\Omega)$, 且

$$
\begin{aligned}
&\left(\fint_Q g^{p(1-\varepsilon)+\eta}dx\right)^{\frac{1}{p(1-\varepsilon)+\eta}}\\
\le\ & C\left\{\left(\fint_{2Q}g^{p(1-\varepsilon)}dx\right)^{\frac{1}{p(1-\varepsilon)}} + \left(\fint_{2Q}(|F|^{\frac{1}{p-1}})^{p(1-\varepsilon)+\eta}dx\right)^{\frac{1}{p(1-\varepsilon)+\eta}}\right\}.
\end{aligned}
$$

这样

$$\begin{aligned}
&\left[\fint_Q (|B|^q+|E|^p)^{\frac{p(1-\varepsilon)+\eta}{p}}dx\right]^{\frac{1}{p(1-\varepsilon)+\eta}} \le \left(\fint_Q g^{p(1-\varepsilon)+\eta}dx\right)^{\frac{1}{p(1-\varepsilon)+\eta}}\\
\le\ & C\left\{\left(\fint_{2Q}(|B|^q+|E|^p+|F|^q)^{1-\varepsilon}dx\right)^{\frac{1}{p(1-\varepsilon)}}+\left(\fint_{2Q}(|F|^{\frac{1}{p-1}})^{p(1-\varepsilon)+\eta}dx\right)^{\frac{1}{p(1-\varepsilon)+\eta}}\right\}\\
\le\ & C\left\{\left(\fint_{2Q}(|B|^q+|E|^p)^{1-\varepsilon}dx\right)^{\frac{1}{p(1-\varepsilon)}}+\left(\fint_{2Q}|F|^{q(1-\varepsilon)}dx\right)^{\frac{1}{p(1-\varepsilon)}}\right.\\
&\quad\left.+\left(\fint_{2Q}(|F|^{\frac{1}{p-1}})^{p(1-\varepsilon)+\eta}dx\right)^{\frac{1}{p(1-\varepsilon)+\eta}}\right\}\\
\le\ & C\left\{\left(\fint_{2Q}(|B|^q+|E|^p)^{1-\varepsilon}dx\right)^{\frac{1}{p(1-\varepsilon)}}+\left(\fint_{2Q}(|F|^{\frac{1}{p-1}})^{p(1-\varepsilon)+\eta}dx\right)^{\frac{1}{p(1-\varepsilon)+\eta}}\right\}
\end{aligned}$$

证毕.

考虑有界开集 $\Omega\subset \mathrm{R}^n$ 中的方程

$$\mathrm{div}\mathcal{A}(x,\nabla u)=\mathrm{div}F, \tag{11.17}$$

这里 $F\in L^r_{loc}(\Omega), r>q(1-\varepsilon)$, ε 充分小, $\mathcal{A}:\Omega\times \mathrm{R}^n\to \mathrm{R}^n$ 为满足第二节中假设的映射.

推论 11.1 设 $0\le\varepsilon<\min\{\frac{1}{p},\frac{1}{q}\}$,$u\in W^{1,p(1-\varepsilon)}_{loc}(\Omega)$ 为方程 (3.4) 的很弱解. 则存在 $\bar\varepsilon=\bar\varepsilon(n,p,r)$ 和 $\bar\eta=\bar\eta(n,p,r)$, 使得若 $0\le\varepsilon<\bar\varepsilon$, 则对所有 $0\le\eta<\bar\eta$, $u\in W^{1,p(1-\varepsilon)+\eta}_{loc}(\Omega)$, 且对任意 $Q\subset 2Q\subset\subset\Omega$,

$$\begin{aligned}
&\left(\fint_Q|\nabla u|^{p(1-\varepsilon)+\eta}dx\right)^{\frac{1}{p(1-\varepsilon)+\eta}}\\
&\le C\left\{\left(\fint_{2Q}|\nabla u|^{p(1-\varepsilon)}dx\right)^{\frac{1}{p(1-\varepsilon)}}+\left(\fint_{2Q}(|F|^{\frac{1}{p-1}})^{p(1-\varepsilon)+\eta}dx\right)^{\frac{1}{p(1-\varepsilon)+\eta}}\right\}
\end{aligned} \tag{11.18}$$

这里 C 为依赖于 n,p,r 的正常数.

另外, 若 $F\in L^r_{loc}(\Omega)$, $r>q$, 则 $u\in W^{1,p'}_{loc}(\Omega)$, $p'>p$, 因此 u 为 (11.17) 通常意义下的弱解.

证明 置 $E=\nabla u$ 和 $B=\mathcal{A}(x,\nabla u)-F$, 在分布意义下 div $B=0$ 和 curl $E=0$,

且

$$\begin{aligned}
|E|^p+|B|^q &= |\nabla u|^p+(|\mathcal{A}(x,\nabla u)-F|)^q\\
&\le |\nabla u|^p+2^{q-1}|\mathcal{A}(x,\nabla u)|^q+2^{q-1}|F|^q\\
&\le C(\beta,q)\langle \mathcal{A}(x,\nabla u),\nabla u\rangle+2^{q-1}|F|^q\\
&= C(\beta,q)\langle \mathcal{A}(x,\nabla u)-F,\nabla u\rangle+C(\beta,q)\langle F,\nabla u\rangle+2^{q-1}|F|^q.
\end{aligned}$$

利用 Young 不等式，因为

$$\begin{aligned}
\langle F,\nabla u\rangle &= 2\langle F,\nabla u\rangle-\langle F,\nabla u\rangle\le 2|F||\nabla u|-\langle F,\nabla u\rangle\\
&= 2\left\{[2C(\beta)]^{\frac{1}{p}}|F|\frac{|\nabla u|}{[2C(\beta)]^{\frac{1}{p}}}\right\}-\langle F,\nabla u\rangle\\
&\le 2\left\{\left[2C(\beta)\right]^{\frac{1}{p-1}}|F|^q+\frac{|\nabla u|^p}{2C(\beta)}\right\}-\langle F,\nabla u\rangle\\
&\le C(\beta,p)|F|^q+\frac{|\nabla u|^p}{C(\beta)}-\langle F,\nabla u\rangle\\
&\le C(\beta,p)|F|^q+\frac{|\nabla u|^p+|\mathcal{A}(x,\nabla u)|^q}{C}-\langle F,\nabla u\rangle\\
&\le C(\beta,p)|F|^q+\langle \mathcal{A}(x,\nabla u),\nabla u\rangle-\langle F,\nabla u\rangle\\
&= C(\beta,p)|F|^q+\langle \mathcal{A}(x,\nabla u)-F,\nabla u\rangle,
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
&|E|^p+|B|^q\\
\le\ & C(\beta,q)\langle \mathcal{A}(x,\nabla u)-F,\nabla u\rangle+C(\beta,q)|F|^q\\
=\ & C(\beta,q)\langle B,E\rangle+C(\beta,q)|F|^q,
\end{aligned}$$

即 E,B 为满足 (3.1) 和 (3.2) 的散度 - 旋度向量场 ($\tilde{F}=C(\beta,p)|F|^q$ 代替 $|F|^q$). 由定理 11.1 得到 $|E|^p+|B|^q$ 的高阶可积性，对 $|\nabla u|$, 估计式 (11.18) 由 (11.17) 直接得到.

另外，若 $F \in L^r_{loc}(\Omega)$,$r > q$, 则由迭代知 u 事实上属于 $W^{p'}_{loc}(\Omega)$,$p' > p$. 过程同定理 2.1 的证明，略.

注 本文 $p = q = 2$ 的特殊情形已在 [9] 中得到.

本章注记：本章第 4.1 节取自 Iwnaiec, Martin[1] 和高红亚，吴泽民 [1]; 第 4.2 节取自高红亚，王艳艳 [1]; 第 4.3 节来源于高红亚 [3]; 第 4.4 节来源于高红亚，叶玉全，谢素英 [1]; 第 4.5 节取自高红亚，王岷，赵洪亮 [1]; 第 4.6 节来自于自高红亚，王岷，赵洪亮 [2]; 第 4.7 节来源于高红亚，褚玉明，顾广泽 [1]; 第 4.8 节来自于高红亚，褚玉明 [1]; 第 4.9 节来源于高红亚，陈艳敏 [1]; 第 4.10 节来源于高红亚，褚玉明 [1]; 第 4.11 节来源于高红亚，韩晓盼 [1]

参 考 文 献

R.A.Adams

[1] Sobolev spaces, Academic Press, 1975.

L.Boccardo and D.Giachetti

[1] Alcune osservazioni sulla regolaritá delle soluzioni di problemi nonlineari e applicazioni, Ricerche di Matematica, 1985, XXXIV, 309-323.

B.Bojarski and T.Iwaniec

[1] Analytical foundations of the theory of quasiconformal mappings in R^n, ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A.I.Math., 1983, 8, 257-324.

S.S.Chern and W.H.Chen (陈省身和陈维桓)

[1] 微分几何讲义，北京大学出版社， 2002.

S.K.Donalson and D.P.Sullivan

[1] Quasiconformal 4-manifolds, Acta Math. 1989,163, 181-252.

D.Franke, O.Martio, V.M.Miklyukov, M.Vorinen and R.Wisk

[1] Quasiregular mapping and $\mathcal{WT}$-classes of differential forms on Riemannian manifolds, Pacific J. of Math., 2002, 202, 73-90.

A.N.Fang (方爱农)

[1] The finite deformation and Beltrami equation in R^n, 数学进展， 1997, 26(2), 178-188.

H.Flanders

[1] Differential Forms. Academic Press, 1963.

H.Y.Gao (高红亚)

[1] 弱 (K_1, K_2)- 拟正则映射的正则性，中国科学， A 辑， 2003, 33(1), 83-88.

[2] Weighted integral inequalities for conjugate A-harmonic tensors, J. Math. Anal. Appl., 2003, 281(1), 253-263.

[3] 弱拟正则映射的若干性质，数学学报， 2002, 45 (1), 901-906.

[4] A- 调和方程很弱解的正则性，数学学报， 2001, 44 (4), 605-610.

[5] 拟正则映射与相关问题研究，上海交通大学博士学位论文， 2000.

H.Y.Gao and Y.M.Chen (高红亚和陈艳敏)

[1] 共轭 $\mathcal{A}$- 调和张量新的加权积分不等式，数学年刊， 2006, 27A(5), 625-634.

H.Y.Gao, Y.M.Chu and G.Z.Gu (高红亚，褚玉明和顾广泽)

[1] 泛函极小与非线性椭圆方程解的局部正则性，数学学报， 2008, 51(2), 411-416.

H.Y.Gao, G.Z.Gu and M.Y.Shi (高红亚、顾广泽和史明宇)

[1] 退化弱拟正则映射的 Caccioppoli 型不等式，系统科学与数学， 2008, 28(5), 548-553

H.Y.Gao, J.Guo, Y.L.Zuo and Y.M.Chu (高红亚，郭静，左亚丽和褚玉明)

[1] Local regularity results in obstacle problems, Acta Math. Sci., 2010, 30B(2), 208-214.

H.Y.Gao and X.P.Han (高红亚和韩晓盼)

[1] 散度 - 旋度场的正则性及其应用，数学物理学报， 2011, 31A(2), 378-386.

H.Y.Gao, Q.H.Huang and F.Qian (高红亚，黄秋花和钱芳)

[1] Regularity for weakly $(K_1, K_2(x))$-quasiregular mappings of several n-dimensional variables, Frontiers of Mathematics in China, 2011, 6(2), 241-251.

H.Y.Gao and L.R.Hou (高红亚和侯兰茹)

[1] 共轭 $\mathcal{A}$- 调和张量的双权积分不等式，数学物理学报， 2008, 28A(2), 341-348.

[2] Some new integral inequalities for conjugate $\mathcal{A}$-harmonic tensors, Applied Mathematics, A Journal of Chinese Universities, 2008, 23B(1), 43-50.

[3] Two generalizations of Hardy-Littlewood maximal operator, Applied Mathematics, A journal of Chinese Universities, 2006, 21(1), 59-63.

H.Y.Gao and T.Li (高红亚和李彤)

[1] On degenerate weakly (K_1, K_2)-quasiregular mappings, Acta Math. Sci., 2008, 28B(1): 163-170.

H.Y.Gao, C.Liu and J.W.Li (高红亚，刘超和李军伟)

[1] Hölder continuity and differentiability almost everywhere of (K_1, K_2)-quasiregular mappings, submitted.

H.Y.Gao, H.H.Liu and S.Q.Zhou (高红亚，刘海红和周树清)

[1] 弱 $(K_1, K_2(x))$- 拟正则映射的高阶可积性，数学学报， 2009, 52(5), 847-852.

H.Y.Gao, J.J.Qiao and Y.M.Chu (高红亚，乔金静和褚玉明)

[1] Local regularity and local boundedness results for very weak solutions of obstacle problems, Journal of Inequlaties and Applications, 2010, Articla ID 878769, 1-12.

H.Y.Gao, J.J.Qiao, Y.Wang and Y.M.Chu (高红亚，乔金静，王勇和褚玉明)

[1] Local regularity results for minima of anisotropic functionals and solutions of anisotropic equations, Journal of Inequlaties and Applications, 2008, 2008(1): 1-12.

H.Y.Gao and H.Y.Tian (高红亚和田会英)

[1] Local regularity result for solutions of obstacle problems, Acta Math. Sci., 2004, 24 B (1): 71-74.

H.Y.Gao, H.M.Wang and G.Z.Gu (高红亚、王红敏和顾广泽)

[1] Beltrami 方程组弱解分量函数的弱单调性，数学物理学报， 2009, 29A(2), 309-313.

H.Y.Gao and Y.Y.Wang (高红亚和王艳艳)

[1] Weak WT_2-class of differential forms and weakly $\mathcal{A}$-harmonic tensors, Applied Mathematics, A Journal of Chinese Universities, 2010, 25(3), 359-366.

H.Y.Gao and J.P.Wang (高红亚和王建普)

[1] 外幂的可积性，数学学报， 2006, 49(4), 39-44.

H.Y.Gao, M.Wang and H.L.Zhao (高红亚，王岷和赵洪亮)

[1] 一类拟线性椭圆型方程很弱解的局部正则性，应用数学学报， 2003, 26(2), 208-213.

H.Y.Gao and Z.M.Wu (高红亚和吴泽民)

[1] 关于双特征 Beltrami 方程，数学物理学报， 2002, 22A(4), 433-440.

H.Y.Gao Hongya, S.Y.Xie and Y.Q.Ye (高红亚，谢素英和叶玉全)

[1] 弱 $(L_1, L_2) - BLD$- 映射的正则性，数学年刊， 2002, 23(1), 109-114.

H.Y.Gao, S.Q.Zhou and Y.Q.Meng (高红亚，周树清和孟玉芹)

[1] A new inequality for weakly $(K_1, K-2)$-quasiregular mappings, Acta Math. Sin. English Series, 2007, 23(12), 2241-2246.

H.Y.Gao, Y.Q.Ye and S.Y.Xie (高红亚，叶玉全和谢素英)

[1] On very weak solutions of $\mathcal{A}$-harmonic equation with very weak boundary values, Acta Math. Sci., 2002, 22B (1), 41-46.

H.Y.Gao and L.F.Zhao (高红亚和赵丽芳)

[1] 双特征 Beltrami 方程组广义解的 Caccioppoli 不等式，数学学报， 2009, 52(2), 253-258.

H.Y.Gao and H.Zhang (高红亚和张华)

[1] New weighted Poincaré-type inequalities for differential forms, J. Ineq. Appl., 2005, 2005(2), 165-174.

H.Y.Gao and H.L.Zhao (高红亚和赵洪亮)

[1] 保向形式 Jacobi 行列式的可积性，中国科学， A 辑， 2005, 35(9), 1060-1070.

F.W.Gehring

[1] The L^p-integrability of the partial derivatives of a quasiconformal mapping, Acta. Math., 1973, 130, 165-277.

D.Giachetti and M.M.Porzio

[1] Local regularity results for minima of functionals of the calculus of variation, Nonlinear Analysis, TMA, 2000, 39, 463-482.

M.Giaquinta

[1] Multiple integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic systems, Ann. of Math. Stud. 105, Princeton Univ. Press, 1983.

M.Giaquinta and E.Giusti

[1] On the regularity of the minima of variational integrals, Acta Math., 1982, 148, 31-46.

D.Gilbarg and N.S.Trudinger

[1] Elliptic partial differential equations of second order, Springer-Verlag, 1983.

L.Greco and T.Iwaniec

[1] New inequalities for the Jacobian, Ann. Inst. H.Poincaré, 1994, 11(1), 17-35.

L.Greco, T.Iwaniec and C.Sbordone

[1] Inverting the p-harmonic operator, Manuscripta Math., 1997, 92, 249-258

L.I.Hedberg

[1] On certain convolution inequalities, Proc. Amer. Math. Soc., 1972, 36, 505-510.

J.Heinonen, T.Kilpelainen and O.Martio

[1] Nonlinear potenial theory of degenerate elliptic equations. Clarendon Press, 1993.

T.Iwaniec

[1] p-harmonic tensors and quasiregular mappings, Ann. of Math., 136 (1992), 586-624.

[2] Nonlinear differential forms, Lectures in Jyväskylä, 1998.

[3] Projections onto gradient fields and L^p estimates for degenerate elliptic operator, Studia Math., T.LXXV (1983), 293-312.

[4] Hilbert transform in the complex plane and area inequalities for certain quadratic differentials, Mich. Math. J., 34 (1987), 407-434.

[5] On L^p integrability in PDEs and quasiregular mappings for large exponents, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math., 7 (1982), 301-322.

[6] L^p-theory of quasiregular mappings, Lecture Notes in Math., 1508, Springer-Verlag, 1992.

[7] Nonlinear commutators and Jacobians, J. Fourier Anal. Appl., 3 (1997), Special Issue, 775-796.

[8] The Gehring Lemma, Ann. Arbor, MI, 1995,181-204, Springer, New York, 1998.

[9] The failure of lower semicontinuity for the linear dilatation, Bull. London Math. Soc., 1998, 1, 55-61.

T.Iwaniec, P.Koskela and J.Onninen

[1] Mappings of finite distortions: monotonicity and continuity, Invent. Math., 2001, 144, 507-531.

T.Iwaniec and A.Lutoborski

[1] Integral estimates for null Lagrangians, Arch. Rat. Mech. Anal., 1993, 125, 25-79.

T.Iwaniec and G.Martin

[1] Quasiregular mappings in even dimensions, Acta Math., 1993, 170, 29-81.

[2] Geometric function theory and nonlinear analysis, Clarendon Press, Oxford, 2001.

T.Iwaniec, L.Migliaccio, L.Nania and C.Sbordone

[1] Integrability and removability results for quasiregular mappings in high dimensions, Math. Scand., 1994, 75, 263-279.

T.Iwaniec and C.Sbordone

[1] On the integrability of the Jacobian under minimal hypothesis, Arch. Rat. Mech. Anal., 1992, 119, 129-143.

[2] Weak minima of variational integrals, J. Reine Angew Math., 1994, 454, 143-161.

H.Y.Jia and L.Y.Jiang

[1] On non-linear elliptic equation with weight, Nonlinear Anal. TMA., 2005, 61, 477-483.

J.Kurki

[1] Invariant sets for $\mathcal{A}$-harmonic measure, Ann. Acad. Sci. Ser. A I Math., 1995, 20: 433-436.

O.A.Ladyženskaya, N.N.Ural'ceva

[1] Linear and quasilinear elliptic equations, New York, London, Academic Press, 1968.

J.L.Lewis

[1] On the weak solutions of certain elliptic systems, Comm. Part. Diff. Equa., 1993, 18(9/10), 1515-1537.

G.B.Li and O.Martio

[1] Uniqueness of solutions with very weak boundary values, Nonlinear Analysis, TMA, 2002, 51(4), 693-701.

J.Li and H.Y.Gao (李娟和高红亚)

[1] Weighted integral inequalities for differential forms, J. Math. Koyto Univ., 2004, 44(4), 715-727.

J.L.Li and H.Y.Gao (李聚玲和高红亚)

[1] 退化弱 (L_1, L_2)-BLD 映射的正则性，数学学报， 2004, 47(6), 1107-1114.

M.A.Lavrent'ev

[1] Sur un crit'ere différentiel des transformations homéomorphes des domaines á trois dimensions, C.R.(Dokl.) Acad. Sci. URSS 1938, 20, 241-242.

J.J.Manfredi

[1] Weakly monotone functions, J.Geom. Anal., 1994, 3, 393-402.

O.Martio, S.Rickman and J.Väisälä

[1] Topological and metric properties of quasiregular mappings, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A.I. Math., 1971, 448, 1-31.

[2] Definitions of quasiregular mappings, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A.I. Math., 1969, 448, 1-40.

[3] Distortion and singularities for quasiregular mappings, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A.I. Math., 1970, 465, 1-13.

N.Meyers and G.Elcrat

[1] Some results on regularity for solutions of nonlinear elliptic systems and quasi-regular functions, Duke Math. J., 1975, 42, 121-136.

C.B.Morrey

[1] Multiple integrals in the calculus of variations, Springer, 1968.

G.D.Mostow

[1] Quasi-conformal mappings in n-space and the rigidity of hyperbolic space forms, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 1968, 34, 53-104.

S.A.Müller

[1] A surprising higher integrability property with mappings with positive determinant, Bull. Amer. Math. Soc., 1989, 21, 245-248.

[2] Higher integrability of determiants and weak convergence in L^1, J. Reine Angew. Math., 1990, 412, 20-34.

J.Onninen

[1] A note on the isoperimetric inequality, Preprint.

Yu.G.Reshetnyak

[1] Space mappings with bounded distortion, Trans. Math. Monographs, Amer. Math. Soc., Providence R.I., 1989.

S.L.Sobolev

[1] Applications of functional analysis in mathematical physics, Izdat. Leningrad. Gos. Univ., Leningrad, 1950; English trandl., Amer. Math. Soc., Provindence, R.I., 1963.

G.Stampacchia

[1] Equations elliptiques du second ordre á coefficients discontinus, Séminaire de Mathématiques Supérieures, Les Presses de I'Université de Montréal, Montréal, 1966.

B.Stroffolini

[1] On weakly A-harmonic tensors, Studia Math., 1995, 114(3), 289-301.

I.N.Vekya

[1] Generalized analytic functions, Oxford: Pergamon, 1962.

S.K.Vodopyanov and V.M.Goldshtein

[1] Lattice isomorphisms of the space W_n^1 and quasiconformal mappings, Sibirsk Mat. Zh., 1975, 16, 224-246.

[2] Quasiconformal mappings and space of functions with first generalized derivatives, Sibirsk Mat. Zh., 1976, 17, 515-531.

[3] Prolongement des fonction de classes L_p^1 et applications quasi conforme, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B, 1980, 290, 435 -456.

Z.M.Wu and A.N.Fang (吴泽民和方爱农)

[1] 距离空间上的模与容量，数学年刊， 2001, 22 (1), 65-70.

S.L.Zhao and S.Z.Zheng (赵书乐和郑神州)

[1] 具 VMO 系数的拟线性椭圆方程的 $L^{p,\lambda}$ 正则性，数学学报， 2007, 50(1): 17-24.

S.Z.Zheng (郑神州)

[1] 自然增长下的具 VMO 系数拟线性椭圆组的部分正则性，数学年刊， 2008, 29A(1), 49-58.

[2] 弱拟正则映射的正则性，数学年刊， 2004, 25A(6), 799-804.

[3] 双特征的 Beltrami 方程和拟正则映射，数学学报， 1997, 40(5), 745-750.

S.Z.Zheng and A.N.Fang (郑神州和方爱农)

[1] (K_1, K_2)- 拟正则映射的 L^p 可积性，数学学报， 1998, 41(5), 1019-1024.

[2] 关于退化的拟正则映射，数学年刊， 1998, 19A(6), 741-748.

[3] 一类非线性椭圆组很弱解的正则性，数学学报， 1998, 42(1), 119-124.

S.Z.Zheng and L.P.Zhang (郑神州和章腊萍)

[1] 次临界增长 P- 调和组的处处内部正则性，数学学报， 2008, 51(5), 1001-1014.

S.Z.Zheng and S.L.Zhao (郑神州和赵书乐)

[1] Regularity for $\mathcal{A}$-harmonic systems with gradient below the critical growth, Acta Math. Sin., 2006, 22(6), 1757-1766.

S.Q.Zhou, H.Y.Gao and H.R.Zhu (周树清，高红亚和朱焕然)

[1] 一类拟线性椭圆方程的很弱解的唯一性，数学年刊， 2007, 28A(1), 121-130.

W.P.Zimer

[1] Weakly differentiable functions, Springer-Verlag, 1989.