目　录

第一章　基础知识

为了便于学习下面各章节的内容，本章先对有关的基本概念和知识作一般性介绍．除了补充若干测度与积分的事实外，还引进了算子弱有界性概念，讨论了卷积算子的初步结果．最后，扼要地陈述了 Fourier 变换的（L^1 及 L^2）一般理论，以及 $\boldsymbol{R}^n$ 上调和函数的某些性质．对于文中的各种算例，如能熟识，必将有所助益．

§1　积分公式与分布函数

本书所论述的课题主要是在 n 维欧氏空间 $\boldsymbol{R}^n$ 上进行，其上之测度为 Lebesgue 测度或 Borel 测度 μ．但其中许多命题对一般测度空间(X,μ)均成立，此时总假定 μ 是可数可加的、σ-有限的正测度．

在计算或估计一个积分时，诸如换元、交换积分次序以及化为一元函数的积分等都是有效的方法，现将其中的一些内容介绍如下：

我们知道，利用 $\boldsymbol{R}^n$ 中的球坐标系可得积分公式

$$\begin{aligned}&\int_{\boldsymbol{R}^n} f(x)\mathrm{d}x\\&\quad=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} f(rx')(\sin\varphi_1)^{n-2}(\sin\varphi_2)^{n-3}\cdots\\&\qquad\qquad\times\sin\varphi_{n-2}r^{n-1}\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi_1\cdots\mathrm{d}\varphi_{n-1},\end{aligned}$$

其中，$0\leqslant\varphi_k\leqslant\pi(k=1,2,\cdots,n-2)$，$0\leqslant\varphi_{n-1}\leqslant 2\pi$，$r=|x|$，$x'=(x_1',x_2',\cdots,x_{n-1}')\in\Sigma$（$\Sigma$ 表示 $\boldsymbol{R}^n$ 中的单位球面），这里采用球坐标：$x_1'=\cos\varphi_1$，$x_2'=\sin\varphi_1\cos\varphi_2$，$\cdots$，$x_{n-1}'=\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1}$，

$x'_n = \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cdots \sin\varphi_{n-2} \sin\varphi_{n-1}$. 若记

$$\int_0^\pi \int_0^\pi \cdots \int_0^{2\pi} (\sin\varphi_1)^{n-2} \cdots \sin\varphi_{n-2} \mathrm{d}\varphi_1 \cdots \mathrm{d}\varphi_{n-1} = \int_\Sigma \mathrm{d}x',$$

则有
$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\mathrm{d}x = \int_\Sigma \int_0^\infty f(rx') r^{n-1} \mathrm{d}r\mathrm{d}x'.$$

这一公式对于 f 是向径函数，即 $f(x)=f(|x|)$ 时的计算尤为方便.

例 记 ω_n 为 $\mathbf{R}^n$ 中单位球面的面积，Ω_n 为 $\mathbf{R}^n$ 中单位球体的体积，则 $n>1$ 时有

$$\omega_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2), \quad \Omega_n = \pi^{n/2}/\Gamma(1+n/2).$$

证明 一方面，我们有

$$I = \int_{\mathbf{R}^n} \mathrm{e}^{-|x|^2} \mathrm{d}x = \prod_{k=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x_k^2} \mathrm{d}x_k = \left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t\right\}^n = \pi^{n/2}.$$

另一方面，又有

$$I = \int_\Sigma \int_0^\infty \mathrm{e}^{-r^2} r^{n-1} \mathrm{d}r\mathrm{d}x' = \frac{1}{2}\omega_n \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} \cdot t^{n/2-1} \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\omega_n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right).$$

从而可知
$$\omega_n = 2\pi^{n/2}\Big/\Gamma\left(\frac{n}{2}\right).$$

此外，由于

$$\Omega_n = \int_{|x|\leqslant 1} \mathrm{d}x = \int_\Sigma \int_0^1 r^{n-1} \mathrm{d}r\mathrm{d}x' = \frac{\omega_n}{n},$$

故得
$$\Omega_n = 2\pi^{n/2}\Big/n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \pi^{n/2}\Big/\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right).$$

对于积分交换次序，我们有比 Fubini 定理更广的 Minkowski 不等式：

定理 1 设 (X,μ)，(Y,ν) 是两个测度空间，$f(x,y)$ 在 $X\times Y$ 上是关于 $\mu\times\nu$ 的可测函数. 若对 a.e. $y\in Y$，函数 $f(\cdot,y)\in L^p(X,\mu)$，$1\leqslant p\leqslant\infty$，且

$$\int_Y \|f(\cdot,y)\|_{L^p(X,\mu)} \mathrm{d}\nu(y) = A < \infty,$$

则 $$\left\|\int_Y f(\cdot,y)\mathrm{d}\nu(y)\right\|_{L^p(X,\mu)} \leqslant \int_Y \|f(\cdot,y)\|_{L^p(X,\mu)}\mathrm{d}\nu(y).$$

证明 $p=\infty$时结论显然成立.

设 $p<\infty$,且记 p'是 p 的共轭指标. 令

$$F(x) = \int_Y |f(x,y)|\mathrm{d}\nu(y).$$

从而只需指出:对一切满足$\|g\|_{L^{p'}(X,\mu)}=1$的简单函数 $g(x)$,有

$$\sup_g \left|\int_X F(x)g(x)\mathrm{d}\mu(x)\right| \leqslant \sup_g \int |F(x)||g(x)|\mathrm{d}\mu(x) \leqslant A.$$

为此,应用 Fubini 定理以及 Hölder 不等式,有

$$\begin{aligned}
&\int_X |F(x)||g(x)|\mathrm{d}\mu(x) \\
&\leqslant \int_X \left\{\int_Y |f(x,y)|\mathrm{d}\nu(y)\right\}|g(x)|\mathrm{d}\mu(x) \\
&\leqslant \int_Y \left\{\int_X |f(x,y)||g(x)|\mathrm{d}\mu(x)\right\}\mathrm{d}\nu(y) \\
&\leqslant \int_Y \|f(\cdot,y)\|_{L^p(X,\mu)}\|g\|_{L^{p'}(X,\mu)}\mathrm{d}\nu(y) = A.
\end{aligned}$$

证毕.

下面我们引入分布函数的概念,并通过它将积分化为$(0,\infty)$上的 Riemann-Stieltjes 积分.

定义 设 $f(x)$是(X,μ)上的可测函数,记 $E_f(\lambda)=\{x\in X: |f(x)|>\lambda\}$,$\lambda>0$,并称

$$f_*(\lambda) = \mu(E_f(\lambda))$$

为 f 的**分布函数**.

关于分布函数,我们有下述初等性质:

(i) $f_*(\lambda)$是递减且右连续的函数.

(ii) 若$|f(x)|\leqslant|g(x)|$,则 $f_*(\lambda)\leqslant g_*(\lambda)$.

(iii) 若$\{f_n(x)\}$是非负可测函数列,且有

$$f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \cdots \leqslant f_n(x) \leqslant \cdots \to f(x) \quad (n \to \infty),$$

则

$$(f_1)_*(\lambda) \leqslant (f_2)_*(\lambda) \leqslant \cdots \leqslant (f_n)_*(\lambda) \cdots \to f_*(\lambda) \quad (n \to \infty).$$

(iv) 若 $|f(x)| \leqslant |g(x)| + |\varphi(x)|$，则

$$f_*(\lambda) \leqslant g_*(\lambda/2) + \varphi_*(\lambda/2).$$

(v) 对任意的 $0<p<\infty$ 以及 $\lambda>0$，有

$$f_*(\lambda) \leqslant \lambda^{-p}\int_{E_f(\lambda)} |f(x)|^p \mathrm{d}\mu(x).$$

(vi) 若 $f\in L^p$，$1\leqslant p<\infty$，则

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda^p f_*(\lambda) = 0 = \lim_{\lambda\to 0}\lambda^p f_*(\lambda).$$

(vii) 若 $\int_0^\infty \lambda^{p-1} f_*(\lambda)\mathrm{d}\lambda<\infty$，则

$$\lambda^p f_*(\lambda) \to 0 \ (\lambda \to +\infty \text{ 或 } \lambda \to 0).$$

证明 (i) 设 $\{\lambda_n\}$ 是递减正数列且以 λ 为极限，则

$$E_f(\lambda) = \bigcup_{n=1}^\infty E_f(\lambda_n).$$

由于 $\{E_f(\lambda_n)\}$ 是递增集合列，故知

$$\lim_{n\to\infty} f_*(\lambda_n) = f_*(\lambda).$$

这说明 $f_*(\lambda)$ 是右连续函数.

(vi) 从不等式

$$\lambda^p f_*(\lambda) \leqslant \int_{E_f(\lambda)} |f(x)|^p \mathrm{d}\mu(x) \leqslant \int_X |f(x)|^p \mathrm{d}\mu(x)$$

可知 $\mu(E_f(\lambda))=f_*(\lambda)\to 0 \ (\lambda\to+\infty)$. 因此可推有

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_{E_f(\lambda)} |f(x)|^p \mathrm{d}\mu(x) = 0.$$

从而又知 $\lambda^p f_*(\lambda)\to 0 \ (\lambda\to+\infty)$.

取定 $\sigma>0$ 且 $\lambda<\sigma$，我们有

$$\lim_{\lambda\to 0} \lambda^p f_*(\lambda) = \lim_{\lambda\to 0} \lambda^p (f_*(\lambda) - f_*(\sigma))$$

$$= \lim_{\lambda\to 0} \lambda^p \mu(\{x \in X: \lambda < |f(x)| \leqslant \sigma\})$$

$$\leqslant \int_{\{x\in X: |f(x)|\leqslant\sigma\}} |f(x)|^p \mathrm{d}\mu(x).$$

由 σ 的任意性可知 $\lambda^p f_*(\lambda)\to 0$ $(\lambda\to 0)$.

(vii) 从不等式

$$f_*(\lambda)\lambda^p(1-2^{-p}) \leqslant p\int_{\lambda/2}^{\lambda} t^{p-1} f_*(t)\mathrm{d}t$$

可知结论成立.

定理 2 设 $f(x)$是(X,μ)上的可测函数,且$1\leqslant p<\infty$,则

(i) $\int_X |f(x)|^p \mathrm{d}\mu(x) = p\int_0^{\infty} \lambda^{p-1} f_*(\lambda)\mathrm{d}\lambda$;

(ii) 若 $f(x)$是有限值的,且对一切 $\lambda>0$有 $f_*(\lambda)<\infty$,则

$$\int_X |f(x)|^p \mathrm{d}\mu(x) = -\int_0^{\infty} \lambda^p \mathrm{d}f_*(\lambda).$$

证明 先证明(ii). 由条件知右端的积分是有意义的,而左端的积分可按下述方式表成 Lebesgue 积分和:令 $0<\varepsilon<2\varepsilon<\cdots<m\varepsilon<\cdots$,以及

$$E_j = \{x \in X: (j-1)\varepsilon \leqslant |f(x)| < j\varepsilon\}, \quad j = 1,2,\cdots,$$

则 $\mu(E_j)=f_*((j-1)\varepsilon)-f_*(j\varepsilon)$,且有

$$\int_X |f(x)|^p \mathrm{d}\mu(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{j=1}^{+\infty}(j\varepsilon)^p\mu(E_j)$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{j=1}^{+\infty}(j\varepsilon)^p[f_*(j\varepsilon)-f_*((j-1)\varepsilon)]$$

$$= -\int_0^{\infty}\lambda^p \mathrm{d}f_*(\lambda).$$

其次证(i). 若等式两端的积分值是无限的,则等式显然成立. 若其中的一个积分是有限的,则显然 $f_*(\lambda)<+\infty$,而且 $f(x)$ 是几乎处处有限的. 从而知(ii)中积分等式成立. 再由 $\lambda^p f_*(\lambda)\to 0$ $(\lambda\to 0$或$+\infty)$以及分部积分公式即知

$$-\int_0^{\infty}\lambda^p\mathrm{d}f_*(\lambda)=p\int_0^{\infty}\lambda^{p-1}f_*(\lambda)\mathrm{d}\lambda-\lambda^p f_*(\lambda)\Big|_0^{\infty}$$

$$=p\int_0^{\infty}\lambda^{p-1}f_*(\lambda)\mathrm{d}\lambda.$$

定义　设 $f(x)$是(X,μ)上的可测函数，$0<p<\infty$，令

$$[f]_p=\sup_{\lambda>0}\{\lambda f_*^{1/p}(\lambda)\},$$

并记$[f]_p<\infty$的 f 之全体为 L_*^p，称为**弱 L^p 空间**；又认定 $p=\infty$ 为 $L_*^{\infty}=L^{\infty}$.

显然，由不等式

$$\lambda f_*^{1/p}(\lambda)\leqslant\left\{\int_{E_f(\lambda)}|f(x)|^p\mathrm{d}\mu(x)\right\}^{1/p},\quad \lambda>0$$

可知 $L^p\subset L_*^p$. 但反之不然，例如：

$f(x)=x^{-1/p}$，$X=(0,\infty)$，$\mathrm{d}\mu=\mathrm{d}x$. 我们有

$$f_*(\lambda)=|\{x\in(0,\infty):x^{-1/p}>\lambda\}|=\lambda^{-p},$$

即 $\lambda f_*^{1/p}(\lambda)=1$. 因此，$f\in L_*^p$. 然而若以

$$f_*(\lambda)=\lambda^{-p}$$

代入$\|f\|_p^p=p\int_0^{\infty}\lambda^{p-1}f_*(\lambda)\mathrm{d}\lambda$，则得$+\infty$.

注　由于$[f]_p$ 不满足三角不等式，故 L_*^p 不是赋范线性空间，但根据不等式

$$(f+g)_*(\lambda)\leqslant f_*(\lambda/2)+g_*(\lambda/2),$$

$$(a+b)^{1/p}\leqslant a^{1/p}+b^{1/p}\quad(a,b\geqslant 0,p>1)$$

可得

$$[f+g]_p\leqslant 2([f]_p+[g]_p).$$

从而知 $p>1$时 L_*^p是拟赋范线性空间. L_*^p也称为 Marcinkiewicz 类.

最后，我们介绍一个关于凸函数的积分公式.

定理 3(Jensen 不等式)　设 $\Phi(u)$是$[\alpha,\beta]$上的(下)凸函数，定义在$[a,b]$上的函数 $f(x)$满足

$$\alpha\leqslant f(x)\leqslant\beta,$$

非负函数 $p(x)$满足

$$P = \int_a^b p(x)\mathrm{d}x > 0,$$

则在下述积分存在的情况下，我们有

$$\Phi\left(\frac{1}{P}\int_a^b f(x)p(x)\mathrm{d}x\right) \leqslant \frac{1}{P}\int_a^b \Phi[f(x)]p(x)\mathrm{d}x.$$

证明 我们令 $\gamma = \frac{1}{P}\int_a^b f(x)p(x)\mathrm{d}x$，显然 $\alpha \leqslant \gamma \leqslant \beta$.

首先，设 $\alpha < \gamma < \beta$，并记过点 $(\gamma, \Phi(\gamma))$ 的支撑直线的斜率为 k，则由 Φ 的凸性可知

$$\Phi(u) - \Phi(\gamma) \geqslant k(u - \gamma), \quad \alpha \leqslant u \leqslant \beta.$$

现在以 $f(x)$ 代替 u，且在上式两端乘以函数 $p(x)$，再对 x 在 $[a,b]$ 上作积分，可得

$$\int_a^b \Phi[f(x)]p(x)\mathrm{d}x - \Phi(\gamma)\int_a^b p(x)\mathrm{d}x$$
$$\geqslant k\int_a^b f(x)p(x)\mathrm{d}x - k\gamma\int_a^b p(x)\mathrm{d}x = 0.$$

由此知

$$\Phi(\gamma) \leqslant \frac{1}{P}\int_a^b \Phi[f(x)]p(x)\mathrm{d}x.$$

其次，若 $\gamma = \beta$，则在 $p(x) > 0$ 的一切 x 上有 $f(x) = \beta$. 从而不等式显然成立. $\gamma = \alpha$ 的情形类推.

注 若 Φ 是上凸函数，则不等式反向.

§2 算子的强 (p,q) 型与弱 (p,q) 型

2.1 定义与指标选择

在讨论一般算子的有界性时，我们总是假定算子在测度空间 (X,μ) 上的某个可测函数类上是有定义的，且取值于 (Y,ν) 上的可测函数.

定义 设算子 T 定义在 $L^p(X,\mu)$ 上，若存在常数 $C = C_{p,q}$，$0 < p \leqslant \infty$，$0 < q \leqslant \infty$，使得

$$\|Tf\|_{L^q(Y)} \leqslant C\|f\|_{L^p(X)},$$

则称 T 为**强(p,q)型**，简称为**(p,q)型**. 其中 C 的最小者称为 T 的(界型)常数(或记为$\|T\|$). 若满足

$$(Tf)_*(\lambda) = \nu(\{y \in Y: |Tf(y)| > \lambda\})$$

$$\leqslant \left\{\frac{C}{\lambda}\|f\|_{L^p(X)}\right\}^q, \quad q < \infty, \lambda > 0,$$

则称 T 为弱(p,q)型. 换句话说，若对 $f \in L^p(X)$，有 $Tf \in L^q_*(Y)$，而且

$$[Tf]_q \leqslant C\|f\|_p,$$

则称 T 为弱(p,q)型，称 C 之最小者为 T 的(界型)常数.

显然，如果 T 是强(p,q)型的，那么 T 也是弱(p,q)型的，但反之不然.

顺便指出，今后我们将特别对 $p \geqslant 1$的情形感兴趣，这可从下面两个结果中看到一些理由.

定义 设算子 T 满足

$$|T(f+g)(x)| \leqslant |Tf(x)| + |Tg(x)|,$$

$$|T(Cf)(x)| \leqslant |C|\,|Tf(x)|, C \text{ 是常数},$$

则称 T 为**次线性算子**.

定理 4 设 T 是(p,q)型的次线性算子，且$0<p<1, q \geqslant 1$，则 $T \equiv 0$.

证明 对任一测度有限的可测集 E，作分解

$$E = \bigcup_{i=1}^{m} E_i, \quad \mu(E_1) = \mu(E_2) = \cdots = \mu(E_m),$$

$$E_i \cap E_j = \varnothing, \quad i \neq j,$$

则根据条件作简单计算可得

$$\|T\chi_{E_i}\|_q \leqslant \|T\| m^{-1/p} \mu(E)^{1/p},$$

(χ_E 表示集合 E 上的特征函数)由此得

$$\|T\chi_E\|_q = \left\|T\left(\sum_{i=1}^{m}\chi_{E_i}\right)\right\|_q \leqslant \sum_{i=1}^{m}\|T\chi_{E_i}\|_q \leqslant \|T\| m^{1-1/p} \mu(E)^{1/p}.$$

从而易知$\|T\|=0$.

定理 5(Day) 设$0<p<1$,则 $L^p(X)$上不存在非零的有界线性泛函.

证明 首先,设 $\mu(X)<\infty$. 此时有

$$L^1(X)\subset L^p(X),\quad \lim_{p\nearrow 1}\|f\|_p=\|f\|_1.$$

因此,若将 L^p 上的连续线性泛函 $l(\cdot)$限制在 $L^1(X)$上时,则存在 $g\in L^\infty$,使得

$$l(f)=\int_X g(x)f(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

现在假定 g 不是零元,则有 $E\subset X$, $\mu(E)>0$以及 $\delta>0$,使得 $|g(x)|\geqslant\delta$ $(x\in E)$. 从而对任意的 $\varepsilon>0$,可取 $E_\varepsilon\subset E$,使得

$$0<\mu(E_\varepsilon)\leqslant\varepsilon.$$

由此知存在可测集列$\{E_n\}$,满足

$$E_n\subset E,\quad \mu(E_n)=\varepsilon_n\to 0\quad (n\to\infty).$$

作函数列

$$f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{\overline{g(x)}}{\varepsilon_n|g(x)|}, & x\in E_n,\\ 0, & x\overline{\in}E_n.\end{cases}$$

显然有

$$l(f_n)=\int_{E_n}g(x)f_n(x)\mathrm{d}\mu(x)=\int_{E_n}\varepsilon_n^{-1}|g(x)|\mathrm{d}\mu(x)\geqslant\delta.$$

另一方面,又有

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n\|_p=\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n^{\frac{1}{p}-1}=0.$$

这一矛盾说明 g 是零元.

对于一般的 $f\in L^p(X)$,可用有界可测函数作逼近,由于 $L^1(X)$在 $L^p(X)$中是稠密的,故 l 在 L^p 上也为零泛函.

其次,设 $\mu(X)=\infty$,作

$$X_1\subset X_2\subset\cdots\subset X,\quad X=\bigcup_{n=1}^{\infty}X_n,\quad \mu(X_n)<\infty,$$

且对 $f\in L^p(X)$，令

$$f_n(x)=\chi_{X_n}(x)f(x)\quad(n=1,2,\cdots).$$

显然有
$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x).$$

因为对 $\{f_n\}\subset L^p(X_n)$ 来说，已知 $l(f_n)=0$，从而可得

$$l(f)=\lim_{n\to\infty}l(f_n)=0.$$

2.2 (p,q)型积分算子举例

现在让我们列举若干例子来看一看 L^p 空间上算子有界性的情形. 当然，这些积分算子本身也有着重要意义.

例 1 设 (X,μ)，(Y,ν) 是两个测度空间，$K(x,y)$ 是 $X\times Y$ 上的可测函数，且存在常数 A，B，使得

$$\int_X|K(x,y)|^r\mathrm{d}\mu(x)\leqslant A,\quad \text{a.e. } y\in Y,$$

$$\int_Y|K(x,y)|^r\mathrm{d}\nu(y)\leqslant B,\quad \text{a.e. } x\in X,$$

作积分算子 T：

$$Tf(x)=\int_Y K(x,y)f(y)\mathrm{d}\nu(y),\quad f\in L^p(Y),$$

其中
$$\frac{1}{p}+\frac{1}{r}=\frac{1}{q}+1,\quad 1\leqslant p,q,r\leqslant\infty,$$

则
$$\|Tf\|_{L^q(X)}\leqslant A^{\frac{1}{q}}B^{1-\frac{1}{p}}\|f\|_{L^p(Y)}.$$

证明 不妨假定 $K(x,y)\geqslant 0$，$f(y)\geqslant 0$ 以及 $q<\infty$，我们有

$$\begin{aligned}
&\int_Y K(x,y)f(y)\mathrm{d}\nu(y)\\
&=\int_Y K(x,y)^{1-\frac{r}{q}}K(x,y)^{\frac{r}{q}}f(y)^{\frac{p}{q}}f(y)^{1-\frac{p}{q}}\mathrm{d}\nu(y)\\
&=\left\{\int_Y K(x,y)^r\mathrm{d}\nu(y)\right\}^{1-\frac{1}{p}}\left\{\int_Y K(x,y)^r f(y)^p\mathrm{d}\nu(y)\right\}^{\frac{1}{q}}\\
&\quad\times\left\{\int_Y f(y)^p\mathrm{d}\nu(y)\right\}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

（这里用了对于指标$(1/r-1/q)+(1/p-1/q)+1/q=1$的 Hölder 不等式，再由条件可知）

$$\leqslant B^{1-\frac{1}{p}}\|f\|_{L^p(Y)}^{1-\frac{p}{q}}\cdot\left\{\int_Y K(x,y)^r f(y)^p \mathrm{d}\nu(y)\right\}^{\frac{1}{q}}.$$

对于$L^q(Y)$的模，我们有

$$\|Tf\|_{L^q(Y)}^q\leqslant\left\{B^{1-\frac{1}{p}}\|f\|_{L^p(Y)}^{1-\frac{p}{q}}\right\}^q\cdot\iint_{X\times Y}K(x,y)^r f(y)^p\mathrm{d}\nu(y)\mathrm{d}\mu(x)$$

$$\leqslant\left\{B^{1-\frac{1}{p}}\|f\|_{L^p(Y)}^{1-\frac{p}{q}}\right\}^q\cdot A\|f\|_{L^p(Y)}^p$$

$$=\left\{A^{\frac{1}{q}}B^{1-\frac{1}{p}}\|f\|_{L^p(Y)}\right\}^q.$$

上述结果的一个重要特例是$r=1$的情形，以及当$X=Y=\boldsymbol{R}^n$，μ与ν皆为 Lebesgue 测度，且$K(x,y)=K(x-y)$时，我们有如下结论：

若$g\in L^r$，$f\in L^p$，且$1/q=1/r+1/p-1$，则

$$\|g*f\|_q\leqslant\|g\|_r\|f\|_p,$$

其中$q=1$即 Young 不等式.

例 2（Hardy-Littlewood-Polya 定理） 设$K(x,y)$是$(0,\infty)\times(0,\infty)$上的可测函数，而且满足

(i) 对一切$\lambda>0$有

$$K(\lambda x,\lambda y)=\lambda^{-1}K(x,y);$$

(ii) $\int_0^\infty|K(x,1)|x^{-1/p}\mathrm{d}x=C<\infty$，$1\leqslant p\leqslant\infty$.

令$1/p+1/p'=1$，$f\in L^p((0,\infty))$，$g\in L^{p'}((0,\infty))$，并作

$$Tf(y)=\int_0^\infty K(x,y)f(x)\mathrm{d}x,$$

$$Sg(x)=\int_0^\infty K(x,y)g(y)\mathrm{d}y,$$

则

$$\|Tf\|_p\leqslant C\|f\|_p,\quad\|Sg\|_{p'}\leqslant C\|g\|_{p'}.$$

证明 令$z=x/y$，$f_z(y)=f(yz)$，我们有

$$\int_0^{\infty}|K(x,y)f(x)|\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}|K(yz,y)f(yz)|y\mathrm{d}z$$
$$=\int_0^{\infty}|K(z,1)||f_z(y)|\mathrm{d}z.$$

注意到

$$\|f_z\|_p=\left\{\int_0^{\infty}|f(yz)|^p\mathrm{d}y\right\}^{1/p}$$
$$=\left\{\int_0^{\infty}z^{-1}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right\}^{1/p}=z^{-1/p}\|f\|_p,$$

可得(用广义 Minkowski 不等式)

$$\|Tf\|_p\leqslant\int_0^{\infty}|K(z,1)|\|f_z\|_p\mathrm{d}z$$
$$\leqslant\|f\|_p\int_0^{\infty}|K(z,1)|z^{-\frac{1}{p}}\mathrm{d}z\leqslant C\|f\|_p.$$

2.3 Колмогоров 不等式与 Zygmund 不等式

我们已经知道一个算子 T 的(p,q)型与弱(p,q)型的区别,其中指出:对于 $f\in L^p(X)$,T 的弱(p,q)型不能保证$|Tf|^q$ 属于 $L^1(Y)$.虽然如此,但下述两个重要结果却揭示出其中特定的深刻联系.

定理 6(**Колмогоров 不等式**) (i) 若 T 是弱(p,q)型:

$$(Tf)_*(\lambda)\leqslant\left(\frac{C}{\lambda}\|f\|_p\right)^q,\quad\lambda>0,$$

则对任意的 $F\subset Y$ 且 $\nu(F)<\infty$,有

$$\left\{\int_F|Tf(y)|^r\mathrm{d}\nu(y)\right\}^{\frac{1}{r}}\leqslant C\left(\frac{q}{q-r}\right)^{\frac{1}{r}}\nu(F)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}}\|f\|_p,$$

其中 $1\leqslant p,q<\infty,0<r<q$;

(ii) 反过来,若存在 $0<r<q$ 以及正常数 C,使得对一切可测集 $F\subset Y$:$\nu(F)<\infty,f\in L^p(X)$,有

$$\left\{\int_F|Tf(y)|^r\mathrm{d}\nu(y)\right\}^{\frac{1}{r}}\leqslant C\nu(F)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}}\|f\|_p,$$

则 T 是弱(p,q)型.

以上结果对 $q=\infty$也成立,此时约定 $q/(q-r)=1$.

证明 (i) 记

$$(Tf)_*^F(\lambda)=\nu(\{y\in F:|Tf(y)|>\lambda\})=\nu(E_{Tf}(\lambda)\cap F),$$

则有$(Tf)_*^F(\lambda)\leqslant\nu(F)$以及

$$(Tf)_*^F(\lambda)\leqslant(Tf)_*(\lambda)\leqslant\frac{C^q}{\lambda^q}\|f\|_p^q.$$

从而可得

$$\int_F|Tf(y)|^r\mathrm{d}\nu(y)=r\int_0^\infty\lambda^{r-1}(Tf)_*^F(\lambda)\mathrm{d}\lambda$$

$$\leqslant r\int_0^N\lambda^{r-1}\nu(F)\mathrm{d}\lambda+r\int_N^\infty\lambda^{r-1}\frac{C^q}{\lambda^q}\|f\|_p^q\,\mathrm{d}\lambda$$

$$=\nu(F)N^r+C^q\|f\|_p^q\frac{r}{q-r}N^{r-q}.$$

现在取 $$N=C\|f\|_p\nu(F)^{-\frac{1}{q}},$$

即得所证.

(ii) 取 $F=E_{Tf}(\lambda),\nu(F)<\infty$,则

$$\lambda^r\nu(F)\leqslant\int_F|Tf(y)|^r\mathrm{d}\nu(y)\leqslant C\nu(F)^{1-\frac{r}{q}}\|f\|_p^r.$$

从而得 $$\nu(F)\leqslant\frac{C}{\lambda^q}\|f\|_p^q,\quad\lambda>0.$$

由此易知 T 是弱(p,q)型.

现举一例说明 Колмогоров 不等式的应用.

例 3 设 $1<p<\infty,X=Y=[0,1],\{T_t\}_{0<t<1}$是一族弱$(p,p)$型算子,且其界型常数 $C(t)$满足

$$\int_0^1C(t)^{\frac{1}{s}}\mathrm{d}t=b<\infty,\quad 1<s<p.$$

作算子 T: $$Tf(x)=\int_0^1|T_tf(x)|\mathrm{d}t,$$

则 T 是弱(p,p)型.

证明 由题设以及定理 6 的(i),我们有

$$\int_F |T_t f(x)|^s \mathrm{d}x \leqslant C(t)\ \frac{p}{p-s}\ |F|^{1-\frac{s}{p}}\|f\|_p^s,\quad |F|<\infty,$$

其中$|F|$表示点集$F\subset[0,1]$的 Lebesgue 测度,或写成

$$\|T_t f(\cdot)\chi_F(\cdot)\|_s \leqslant C(t)^{\frac{1}{s}}\left(\frac{p}{p-s}\right)^{\frac{1}{s}}|F|^{\frac{1}{s}-\frac{1}{p}}\|f\|_p.$$

从而可知

$$\begin{aligned}\int_F |Tf(x)|^s \mathrm{d}x &= \left\|\int_0^1 T_t f(\cdot)\chi_F(\cdot)\mathrm{d}t\right\|_s^s \\ &\leqslant \left\{\int_0^1 \|T_t f(\cdot)\chi_F(\cdot)\|_s\, \mathrm{d}t\right\}^s \\ &\leqslant \left\{\int_0^1 C(t)^{\frac{1}{s}}\mathrm{d}t\right\}^s \frac{p}{p-s}|F|^{1-\frac{s}{p}}\|f\|_p^s.\end{aligned}$$

由此以及根据定理 6 之(ii),即得所证.

定理 7(Zygmund 不等式) 设算子 T 是弱(p,p)型且是弱(q,q)型,$1\leqslant p<q<\infty$,则对任意的 $F\subset Y$,$\nu(F)<\infty$,$f\in L^p\ln^+L$,有 $Tf\in L^p(F)$,而且

$$\begin{aligned}&\int_F |Tf(y)|^p \mathrm{d}\nu(y)\\ &\quad\leqslant C\left\{\nu(F)+\int_X |f(x)|^p(1+\ln^+|f(x)|)\mathrm{d}\mu(x)\right\}.\end{aligned}$$

证明 令$(Tf)_*^F(\lambda)=\nu(E_{Tf}(\lambda)\cap F)$,显然有

$$(Tf)_*^F(\lambda)\leqslant \nu(F),\quad (Tf)_*^F(\lambda)\leqslant (Tf)_*(\lambda).$$

从而知

$$\begin{aligned}&\int_F |Tf(y)|^p \mathrm{d}\nu(y)\\ &\quad= p\int_0^\infty \lambda^{p-1}(Tf)_*^F(\lambda)\mathrm{d}\lambda = 2^p p\int_0^\infty \lambda^{p-1}(Tf)_*^F(2\lambda)\mathrm{d}\lambda\\ &\quad\leqslant 2^p p\int_0^1 \lambda^{p-1}\nu(F)\mathrm{d}\lambda + 2^p p\int_1^\infty \lambda^{p-1}(Tf)_*^F(2\lambda)\mathrm{d}\lambda.\end{aligned}$$

记上式右端第一、二个积分为 I_1,I_2,则有 $I_1\leqslant\nu(F)$. 为估计

I_2，令

$$f_\lambda(x)=\begin{cases}f(x), & |f(x)|\leqslant\lambda,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\qquad f^\lambda(x)=f(x)-f_\lambda(x),$$

并把题设条件写为

$$(Tf)_*(\lambda)\leqslant\frac{C_1^p}{\lambda^p}\|f\|_p^p,\quad (Tf)_*(\lambda)\leqslant\frac{C_2^q}{\lambda^q}\|f\|_q^q.$$

我们有

$$\begin{aligned}
I_2&\leqslant\int_1^\infty\lambda^{p-1}(Tf^\lambda)_*^p(\lambda)\mathrm{d}\lambda+\int_1^\infty\lambda^{p-1}(Tf_\lambda)_*^p(\lambda)\mathrm{d}\lambda\\
&\leqslant\int_1^\infty\lambda^{p-1}\frac{C_1^p}{\lambda^p}\left(\int_X|f^\lambda(x)|^p\mathrm{d}\mu(x)\right)\mathrm{d}\lambda\\
&\quad+\int_1^\infty\lambda^{p-1}\frac{C_2^q}{\lambda^q}\left(\int_X|f_\lambda(x)|^q\mathrm{d}\mu(x)\right)\mathrm{d}\lambda\\
&=C_1^p\int_X|f(x)|^p\left(\int_1^{|f(x)|}\lambda^{-1}\mathrm{d}\lambda\right)\mathrm{d}\mu(x)\\
&\quad+C_2^q\int_X|f(x)|^q\left(\int_{|f(x)|}^\infty\lambda^{p-q-1}\mathrm{d}\lambda\right)\mathrm{d}\mu(x).
\end{aligned}$$

因为$|f(x)|>1$，所以

$$\int_1^{|f(x)|}\lambda^{-1}\mathrm{d}\lambda=\ln^+|f(x)|,$$

这里，当$|f(x)|\leqslant 1$时，$\ln^+|f(x)|=0$.

$$\begin{aligned}\int_F|Tf(y)|^p\mathrm{d}\nu(y)\leqslant{}&2^p\cdot p\nu(F)+2^p pC_1^p\int_X|f(x)|^p\ln^+|f(x)|\mathrm{d}\mu(x)\\
&+\frac{2^p pC_2^q}{q-p}\int_X|f(x)|^p\mathrm{d}\mu(x).\end{aligned}$$

最后，只需令

$$C=2^p p\left(1+C_1^p+\frac{C_2^q}{q-p}\right),$$

即得所证的结果.

注　对于$q=\infty$也有相应的定理成立.

定义 记满足

$$\int_X |f(x)|^p (\ln^+ |f(x)|)^q \mathrm{d}\mu(x) < \infty$$

的 f 之全体为 $L^p(\ln^+ L)^q$，其中

$$\ln^+ t = \begin{cases} \ln t, & t > 1, \\ 0, & 0 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

特别地，当 $p=q=1$ 时，$L\ln^+ L$ 称为 Zygmund 类（1929年引入）. 顺便指出，当 $\mu(E)<\infty$ 且 $\varepsilon>0$ 时，我们有

$$L^{p+\varepsilon}(E) \subset L^p \ln^+ L(E) \subset L^p(E), \quad 1 \leqslant p < \infty.$$

§3 卷 积

设 $f(x)$，$g(x)$ 是定义在 $\boldsymbol{R}^n$ 上的两个可测函数，若它们的乘积 $f(x-y)g(y)$ 对 a.e. $x \in \boldsymbol{R}^n$ 是 $y \in \boldsymbol{R}^n$ 的可积函数，则称

$$f * g(x) = \int_{\boldsymbol{R}^n} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y$$

为 f 与 g 的卷积（函数）.

注 对 $\boldsymbol{R}^n$ 上函数定义平移 $\tau_h f(x) = f(x-h)$，则卷积的一个重要性质是平移不变性，即

$$(\tau_h f) * g = f * (\tau_h g) = \tau_h (f * g).$$

卷积型的算子在积分型算子中占有特殊的地位，如在 Fourier 级数的研究中出现的很多算子，虽不是上述严格定义下的卷积，但都是卷积型，即是平移不变算子，如 Hilbert 变换

$$Hf(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y)}{x-y}\mathrm{d}y,$$

位势算子

$$I_\alpha f(x) = C_n \int_{\boldsymbol{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\mathrm{d}y, \quad 0 < \alpha < n,$$

以及由偏微分方程理论导出的算子

$$Tf(x) = \int_{\mathbf{R}^n} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^n} f(y)\mathrm{d}y$$

等等.不仅如此,卷积作为一种运算在解析数学领域中有着重要的应用.简言之,至少有以下几个方面:

(i) 对于 $f,g\in L^1(\mathbf{R}^n)$,虽然 $f\cdot g$ 不一定属于 $L^1(\mathbf{R}^n)$,但卷积 $f*g\in L^1(\mathbf{R}^n)$($\|f*g\|_1\leqslant\|f\|_1\|g\|_1$),从而若采用卷积作为乘积看,可使 $L^1(\mathbf{R}^n)$成为一个代数,或严格点说,它的 Fourier 变换 $\widehat{L^1}(\mathbf{R}^n)$成为一个代数,它成为 Banach 代数研究的出发点.

(ii) 若 f 与 g 中之一是可微的,则其卷积也是可微的,且其阶相同.从而在一定意义上说,卷积获得了其组成因子的"良好"性质,这就为函数正则化方法提供了基础(即用光滑函数逼近一般函数,在偏微分方程中称之为光滑子).

(iii) 卷积运算与 Fourier 变换的相互作用使其在后一领域中扮演了重要角色.

下面就卷积函数族在逼近恒等理论以及卷积算子在 L^p 空间上的有界性指标等基本结果作一介绍,有关 Fourier 变换的理论则在下一节中论述.

3.1 展缩函数族

定义 设 $\varphi\in L^1(\mathbf{R}^n)$,$\varepsilon>0$,令

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

称 φ_ε 为 φ 的**展缩函数(族)**.显然,我们有

(i) $\int_{\mathbf{R}^n}\varphi_\varepsilon(x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^n}\varphi(x)\mathrm{d}x$;

(ii) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\delta}\varphi_\varepsilon(x)\mathrm{d}x=0,\quad \delta>0.$

例 1 设 $\varphi(x)=\chi_{(-1,1)}(x)$,则

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases}\frac{1}{\varepsilon}, & |x|<\varepsilon,\\ 0, & |x|\geqslant\varepsilon;\end{cases}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varphi_\varepsilon(x) = \delta(x). \quad \text{(Dirac } \delta\text{- 函数)}$$

现在,以展缩 φ_ε 为核作卷积

$$\varphi_\varepsilon * f(x) = \int_{\mathbf{R}^n}\varphi_\varepsilon(x-y)f(y)\mathrm{d}y,$$

我们的问题是：$\varphi_\varepsilon * f(x)$当 $\varepsilon\to 0$时在何种条件下以何种意义收敛于 $f(x)$?这里,仅就 L^p 意义下的收敛问题作一介绍,至于点态收敛的问题则放到第二章中去讨论.

定理 8 设 $\varphi\in L^1(\mathbf{R}^n)$,$\int_{\mathbf{R}^n}\varphi(x)\mathrm{d}x=1$,$f\in L^p(\mathbf{R}^n)$,则

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|\varphi_\varepsilon * f - f\|_p = 0, \quad p\geqslant 1.$$

证明 因为

$$\begin{aligned}
&\varphi_\varepsilon * f(x) - f(x)\\
&= \int_{\mathbf{R}^n}\varphi_\varepsilon(y)f(x-y)\mathrm{d}y - f(x)\int_{\mathbf{R}^n}\varphi_\varepsilon(y)\mathrm{d}y\\
&= \int_{\mathbf{R}^n}\varphi_\varepsilon(y)[f(x-y)-f(x)]\mathrm{d}y\\
&= \int_{\mathbf{R}^n}[f(x-\varepsilon y)-f(x)]\varphi(y)\mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

所以根据广义 Minkowski 不等式可知

$$\begin{aligned}
\|\varphi_\varepsilon * f - f\|_p &\leqslant \int_{\mathbf{R}^n}\|\tau_{\varepsilon y}f - f\|_p|\varphi(y)|\mathrm{d}y\\
&= \left\{\int_{|y|\leqslant r} + \int_{|y|>r}\right\}\|\tau_{\varepsilon y}f - f\|_p|\varphi(y)|\mathrm{d}y\\
&= I_1 + I_2,
\end{aligned}$$

其中 $\tau_h f(x)=f(x-h)(h\in\mathbf{R}^n)$称为平移算子.

对于任给的 $\eta>0$,由于 $f\in L^p$,而且

$$\|\tau_{\varepsilon y}f - f\|_p \leqslant 2\|f\|_p, \quad \varphi\in L^1,$$

故可选 r 充分大,使得 $I_2<\eta/2$. 固定如此的 r,又可选 $\varepsilon_0>0$,使得当 $0<\varepsilon<\varepsilon_0$时,对任意的 $|y|<r$,有

$$\|\tau_{\varepsilon y}f - f\|_p < \eta/2.$$

从而我们有 $I_1+I_2<\eta$.

注　根据上述结论的意义，我们也称函数族$\{\varphi_\varepsilon(x)\}$为卷积单位或逼近恒等.

3.2　指标限定

设 T 是以 K 为积分核的卷积算子：

$$Tf(x)=\int_{\mathbf{R}^n}K(x-y)f(y)\mathrm{d}y.$$

引理 9　T 与平移算子 τ_h 是可交换的：

$$\tau_h(Tf)=T(\tau_h f).$$

证明略.

引理 10　若 $f\in L^p(\mathbf{R}^n)$，$1\leqslant p<\infty$，则

$$\lim_{|h|\to\infty}\int_{\mathbf{R}^n}|f(x)+f(x-h)|^p\mathrm{d}x=2\int_{\mathbf{R}^n}|f(x)|^p\mathrm{d}x.$$

证明　对于任给的 $\varepsilon>0$，对 f 作分解：

$$f(x)=g(x)+\varphi(x),$$

其中 $g\in C_c(\mathbf{R}^n)$（$C_c(\mathbf{R}^n)$表示 $\mathbf{R}^n$ 上具有紧支集的连续函数），$\|\varphi\|_p<\varepsilon/4$. 易知存在 $A>0$，当$|h|\geqslant A$ 时，$g(x)$与 $g(x-h)$的支集不相交. 因此我们有（$|h|\geqslant A$ 时）

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbf{R}^n}|g(x)+g(x-h)|^p\mathrm{d}x\\&=\int_{\mathbf{R}^n}|g(x)|^p\mathrm{d}x+\int_{\mathbf{R}^n}|g(x-h)|^p\mathrm{d}x\\&=2\int_{\mathbf{R}^n}|g(x)|^p\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

另一方面，由 $f=g+\varphi$ 可知

$$|\|f\|_p-\|g\|_p|\leqslant\|\varphi\|_p<\varepsilon/4.$$

又由 $f(x)+f(x-h)=[g(x)+g(x-h)]+[\varphi(x)+\varphi(x-h)]$可知

$$|\|f+\tau_h f\|_p-\|g-\tau_h g\|_p|\leqslant\|\varphi+\tau_h\varphi\|_p\leqslant 2\|\varphi\|_p<\varepsilon/2.$$

从而当$|h|\geqslant A$ 时，有

$$\left|\|f+\tau_h f\|_p - 2^{1/p}\|g\|_p\right| < \varepsilon/2.$$

综上所述，可知

$$\begin{aligned}
&\left|\|f+\tau_h f\|_p - 2^{1/p}\|f\|_p\right| \\
&\quad \leqslant \left|\|f+\tau_h f\|_p - 2^{1/p}\|g\|_p\right| + \left|2^{1/p}\|g\|_p - 2^{1/p}\|f\|_p\right| \\
&\quad < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

引理得证.

定理 11 设 T 是一个强(p,q)型的卷积算子，若 $p>q$，则 $T\equiv 0$.

证明 根据 T 与 τ_h 的可交换性，我们有

$$\|\tau_h(Tf)+Tf\|_q = \|T(\tau_h f + f)\|_q \leqslant \|T\|\|\tau_h f + f\|_p.$$

再根据上述引理，令 $|h|\to\infty$ 可得

$$\|Tf\|_q \leqslant 2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|T\|\|f\|_p.$$

这说明 $\|T\|=0$（注意 $p>q$）.

定理 12 设 $K\in L_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^n)$，令

$$Tf(x) = \int_{\boldsymbol{R}^n} K(x-y)f(y)\mathrm{d}y$$

（当 $f(x)$ 是具有紧支集的简单函数时，$Tf(x)$ 存在）. 若 T 是(p,p)型，$1<p<2$，则 T 也是(p',p')型，其中$1/p+1/p'=1$.

证明 注意到

$$\|Tf\|_{p'} = \sup_{\|g\|_p=1}\left|\int_{\boldsymbol{R}^n} Tf(x)\cdot g(x)\mathrm{d}x\right|$$

以及

$$\begin{aligned}
\int_{\boldsymbol{R}^n} Tf(x)g(x)\mathrm{d}x &= \int_{\boldsymbol{R}^n} g(x)\left\{\int_{\boldsymbol{R}^n} K(x-y)f(y)\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}x \\
&= \int_{\boldsymbol{R}^n} f(y)\left\{\int_{\boldsymbol{R}^n} K(x-y)g(x)\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}y \\
&= \int_{\boldsymbol{R}^n} f(-y)\left\{\int_{\boldsymbol{R}^n} K(y-x)g(-x)\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}y \\
&= \int_{\boldsymbol{R}^n} Tg_1(y)\cdot f_1(y)\mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

其中 $g_1(x)=g(-x)$，$f_1(x)=f(-x)$，那么由 Hölder 不等式可知

$$\int_{\mathbf{R}^n} |Tf(x)||g(x)|dx \leqslant \|Tg_1\|_p \|f_1\|_{p'}$$

$$\leqslant C\|g_1\|_p \|f_1\|_{p'} = C\|g\|_p \|f\|_{p'}.$$

由此即得

$$\|Tf\|_{p'} \leqslant C\|f\|_{p'}.$$

注 若 T 是 (p,q) 型线性算子，$1\leqslant p\leqslant q\leqslant\infty$，且与平移算子可交换，则存在惟一的缓增广义函数 K，使得

$$Tf(x) = K * f(x), \quad f \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n),$$

$\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 上的速降函数空间.

§4 $\mathbf{R}^n$ 上的 Fourier 变换

Fourier 分析的基本思想之一是开发对称性，也就是说，当我们在一个具有群运算的空间上作分析时，那么一个好主意就是：探求某种基本函数系（或其他分析对象），它们在群的作用下，其变换由一个简单方式决定. 然后，再试图将任意的函数分解为这些基本函数系的和或积分.

例如 $\mathbf{R}^n$，是加法群，其作用为平移. 我们考察的函数如下：它们在平移的变换下等于一个绝对值为 1 的因子作乘法. 即对函数 f，对每个 $x\in\mathbf{R}^n$，存在 $\varphi(x)$ 满足 $|\varphi(x)|=1$，使得

$$f(x+y) = \varphi(x)f(y).$$

由此立即得知，$f(x)=\varphi(x)\cdot f(0)$. 就是说，一旦 $f(0)$ 给定，f 完全由 φ 决定，且由

$$\varphi(x+y)f(0) = f(x+y) = \varphi(x)\varphi(y)f(0),$$

可知除非 $f=0$，否则总有 $\varphi(x+y)=\varphi(x)\cdot\varphi(y)$. 扼要地说，欲求出如上所述的所有 f，只需寻找其绝对值为 1，且满足泛函方程

$$\varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y), \quad x,y \in \mathbf{R}^n$$

的函数 φ. 对此，我们有下述之完全解答：

设 $\varphi(x)$是 $\boldsymbol{R}^n$ 上的可测函数,且有关系

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)\varphi(y),\quad x,y\in\boldsymbol{R}^n;\quad |\varphi(x)|=1,$$

则存在 $\xi\in\boldsymbol{R}^n$,使得

$$\varphi(x)=\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}x\cdot\xi},$$

其中 $x\cdot\xi$ 表示向量 x 与 ξ 的内积.

证明 首先,设 $n=1$. 取 $a\in\boldsymbol{R}^1$,使得

$$A=\int_0^a\varphi(t)\mathrm{d}t\neq 0.$$

我们有

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=A^{-1}\int_0^a\varphi(x)\varphi(t)\mathrm{d}t\\&=A^{-1}\int_0^a\varphi(x+t)\mathrm{d}t=A^{-1}\int_x^{x+a}\varphi(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

由此知 $\varphi\in C^1(\boldsymbol{R}^1)$,而且

$$\varphi'(x)=A^{-1}[\varphi(x+a)-\varphi(x)]=B\varphi(x),$$
$$B=A^{-1}(\varphi(a)-1).$$

这说明$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^{-Bx}\varphi(x))=0$,即 $\mathrm{e}^{-Bx}\varphi(x)$等于一个常数. 由 $\varphi(0)=1$ 又知 $\varphi(x)=\mathrm{e}^{Bx}$. 因为$|\varphi(x)|=1$,所以 B 是一个纯虚数,可记为 $B=2\pi\mathrm{i}\xi$,某个 $\xi\in\boldsymbol{R}^1$.

其次,对 $n>1$,我们令 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的标准基. 由于在 $\boldsymbol{R}^1$上 $\psi_j(t)=\varphi(te_j)$满足

$$\psi_j(t+s)=\psi_j(t)\psi_j(s),$$

故 $\psi_j(t)=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}t\xi_j}$. 从而知

$$\varphi(x)=\varphi\Big(\sum_{j=1}^n x_je_j\Big)=\prod_{j=1}^n\psi_j(x_j)=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x\cdot\xi},$$

其中 $\qquad x=(x_1,\cdots,x_n),\quad \xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n).$

注 $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x\cdot\xi}$给出 $\boldsymbol{R}^n$ 作为加法群的全体不可约表示,它的参数 ξ 跑遍 $\boldsymbol{R}^n$.

现在,我们来探求函数的分解问题,即考虑

$$\hat{f}(\xi)=\int_{\boldsymbol{R}^n} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi i\xi\cdot x}\mathrm{d}x,\quad f(x)=\int_{\boldsymbol{R}^n}\hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{2\pi i x\cdot\xi}\mathrm{d}\xi.$$

这个问题在一定范围内总是有解的，当然，首先要认定积分的存在性以及在何种意义下存在.下面分别就 $L^1(\boldsymbol{R}^n)$ 及 $L^2(\boldsymbol{R}^n)$ 两种情形作一初步介绍.

4.1 $L^1(\boldsymbol{R}^n)$ 中的 Fourier 变换

定义 设 $f\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$，则称

$$\hat{f}(x)=\mathscr{F}(f)(x)=\int_{\boldsymbol{R}^n} f(y)\mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot y}\mathrm{d}y$$

为 f 的 **Fourier 变换**，其中 $x\cdot y$ 表示向量 x 与 y 的内积.

关于 $L^1(\boldsymbol{R}^n)$ 中 f 的 Fourier 变换，易知下述性质成立：

(i) $\mathscr{F}$ 是 $L^1(\boldsymbol{R}^n)$ 上的线性算子，且有

$$\|\mathscr{F}(f)\|_\infty\leqslant\|f\|_1;$$

若 $f(x)\geqslant 0$，还可知 $\|\mathscr{F}(f)\|_\infty=\|f\|_1=\hat{f}(0)$.

(ii) ($\mathscr{F}$ 与 τ_h 之间的关系)

$$\widehat{(\tau_h f)}(x)=\mathrm{e}^{-2\pi i h\cdot x}\hat{f}(x);$$

$$\tau_h\hat{f}(x)=\widehat{(\mathrm{e}^{2\pi i h\cdot y}f(y))}(x).$$

(iii) 设 x_k 是向量 x 的第 k 个坐标，且 $x_k f\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$，则

$$\frac{\partial\hat{f}(x)}{\partial x_k}=\widehat{(-2\pi i x_k f(y))}(x).$$

(iv) 若 $f\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$ 同时又有 $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$，则

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^\wedge(x)=2\pi i x_k\cdot\hat{f}(x).$$

(v) 设 $f,g\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$，则

$$\widehat{(f*g)}(x)=\hat{f}(x)\cdot\hat{g}(x).$$

(用 Fubini 定理直接计算)

定理 13 设 $f\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$，则 $\hat{f}(x)$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 上的一致连续函数.

证明 根据等式

$$\hat{f}(x+h)-\hat{f}(x)=\int_{R^n} f(y)[\mathrm{e}^{-2\pi i h\cdot y}-1]\mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot y}\mathrm{d}y$$

可知

$$|\hat{f}(x+h)-\hat{f}(x)|\leqslant\int_{R^n}|f(y)||\mathrm{e}^{-2\pi i h\cdot y}-1|\mathrm{d}y$$

$$\leqslant\int_{|y|\leqslant r}|f(y)||\mathrm{e}^{-2\pi i h\cdot y}-1|\mathrm{d}y+2\int_{|y|>r}|f(y)|\mathrm{d}y.$$

对于任给的 $\varepsilon>0$，可取充分大的 r，使得上式右端第二个积分小于 $\varepsilon/2$. 再取定如此之 r，显然只要 $|h|$ 充分小，可使

$$|\mathrm{e}^{-2\pi i h\cdot y}-1|<\varepsilon/2,\quad |y|\leqslant r.$$

从而只要 $|h|$ 充分地小，就可使 $|\hat{f}(x+h)-\hat{f}(x)|$ 可以任意地小且与 x 无关.

定理 14（**Riemann-Lebesgue 引理**） 设 $f\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$，则

$$\lim_{|x|\to\infty}\hat{f}(x)=0.$$

证明 (i) $n=1$时，令 $f(x)=\chi_{(a,b)}(x)$，则

$$\hat{f}(x)=\frac{\mathrm{e}^{-2\pi i b x}-\mathrm{e}^{-2\pi i a x}}{2\pi i x}.$$

此时结论成立. 显然，如果 $f(x)$有形式

$$f(x)=f_1(x_1)f_2(x_2)\cdots f_n(x_n),$$

则($x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$)

$$\hat{f}(x)=\hat{f}_1(x_1)\hat{f}_2(x_2)\cdots\hat{f}_n(x_n).$$

由此知当 $f(x)$为长方体 I 上的特征函数时，必有 $\hat{f}(x)\to 0$($|x|\to\infty$). 从而进一步，本定理对阶梯函数($\chi_I(x)$的线性组合)是成立的.

(ii) 对于 $f\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$，$\varepsilon>0$，存在阶梯函数 $\varphi(x)$，使得

$$\|f-\varphi\|_1<\varepsilon/2.$$

由于 $\hat{f}(x)=\widehat{(f-\varphi)}(x)+\hat{\varphi}(\xi)$，故当 $|x|$ 充分大时有

$$|\hat{f}(x)|\leqslant|\widehat{(f-\varphi)}(x)|+|\hat{\varphi}(x)|$$

$$\leqslant\|f-\varphi\|_1+|\hat{\varphi}(x)|<\varepsilon.$$

注 这无疑是 Fourier 变换的重要结果,但由于历史原因,仍称之为 Riemann-Lebesgue 引理.

定理 15(乘法公式) 设 $f,g\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$,则

$$\int_{\boldsymbol{R}^n}\hat{f}(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_{\boldsymbol{R}^n}f(x)\hat{g}(x)\mathrm{d}x.$$

由上可知,$f\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$的 Fourier 变换 $\hat{f}(x)$是一致连续且 $\hat{f}(x)\to 0(|x|\to\infty)$. 但$\hat{f}$不一定属于 $L^1(\boldsymbol{R}^n)$,而且即使一个函数 $g(x)$具备后两条性质,也不一定是 $L^1(\boldsymbol{R}^n)$中函数 f 的 Fourier 变换. 请看下面的例子.

例 1 设 $n=1$,并令

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\ln x}, & x>\mathrm{e},\\[2ex] \dfrac{x}{\mathrm{e}}, & 0\leqslant x\leqslant \mathrm{e},\end{cases}$$

$$g(x)=-g(-x),\quad x<0.$$

显然,$g(x)$在 $\boldsymbol{R}^1$ 上是一致连续的且 $g(x)\to 0(|x|\to\infty)$.

假定存在 $f\in L^1(\boldsymbol{R}^1)$,使得 $\hat{f}(x)=g(x)$,即

$$g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(y)\mathrm{e}^{-2\pi ixy}\mathrm{d}y.$$

由于 $g(x)$是奇函数,故上式又可写成

$$g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(y)\mathrm{e}^{2\pi ixy}\mathrm{d}y.$$

由此知

$$\begin{aligned}g(x)&=\mathrm{i}\int_{-\infty}^{+\infty}f(y)\sin(2\pi xy)\mathrm{d}y\\&=\int_0^{+\infty}F(y)\sin(2\pi xy)\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

其中 $F(y)=\mathrm{i}[f(y)-f(-y)]\in L^1((-\infty,\infty))$. 对上式在$(\mathrm{e},N)$上作积分,

$$\int_{\mathrm{e}}^{N}\frac{g(x)}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}F(y)\left\{\int_{\mathrm{e}}^{N}\frac{\sin 2\pi xy}{x}\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}y.$$

注意到

$$\left|\int_a^b \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\right| \leqslant C, \quad \lim_{N\to\infty}\int_0^N \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2},$$

根据控制收敛定理，可知上式右端积分当 $N\to\infty$时是收敛的. 然而，我们又有

$$\lim_{N\to\infty}\int_e^N \frac{g(x)}{x}\mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty}\int_e^N \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} = \infty.$$

这一矛盾说明上面的假定不成立.

下面我们来具体计算两个重要的 Fourier 变换的例子.

例 2 设 $f(x)=\mathrm{e}^{-\pi|x|^2}$，则

$$\hat{f}(x) = \mathrm{e}^{-\pi|x|^2}.$$

证明 只需看 $n=1$的情形，我们有

$$\begin{aligned}\hat{f}(x) &= \int_{\mathbf{R}^1}\mathrm{e}^{-\pi|y|^2}\mathrm{e}^{-2\pi ixy}\mathrm{d}y = \mathrm{e}^{-\pi x^2}\int_{\mathbf{R}^1}\mathrm{e}^{\pi x^2}\mathrm{e}^{-\pi(y^2+2ixy)}\mathrm{d}y \\ &= \mathrm{e}^{-\pi x^2}\int_C \mathrm{e}^{-\pi z^2}\mathrm{d}z,\end{aligned}$$

其中 $z=y+\mathrm{i}x$; C: $y+\mathrm{i}x$, $-\infty<y<\infty$. 由 Cauchy 积分定理知上式最后一个积分为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\pi x^2}\mathrm{d}x = 1.$$

从而结论得证.

注 $\mathrm{e}^{-\pi|x|^2}$称为 Gauss 函数，它是惟一一个 Fourier 变换的不动点.

例 3 设 $f(x)=\mathrm{e}^{-2\pi|x|}$，则

$$\hat{f}(x) = C_n\frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}, \quad C_n = \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\pi^{-\frac{n+1}{2}}.$$

证明 首先，利用公式

$$\mathrm{e}^{-s} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos sx}{1+x^2}\mathrm{d}x, \quad s>0$$

可得表示 e^{-s}的另一积分公式如下：

$$
\begin{aligned}
e^{-s} &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\cos sx\left\{\int_0^{\infty}e^{-(1+x^2)t}dt\right\}dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-t}\left\{\int_0^{\infty}\cos sx e^{-x^2t}dx\right\}dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-t}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{isx}e^{-tx^2}dx\right\}dt \\
&\xlongequal{(x=2\pi y)} \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-t}\left\{2\pi\int_{-\infty}^{\infty}e^{2\pi i ys}e^{-4\pi^2y^2t}dy\right\}dt \\
&\xlongequal{(\text{用例 }2)} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}e^{-\frac{s^2}{4t}}dt.
\end{aligned}
$$

其次，应用上述所得 e^{-s} 的积分公式，可知

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(x) &= \int_{\mathbf{R}^n}e^{-2\pi|y|}e^{-2\pi i x\cdot y}dy \\
&= \int_{\mathbf{R}^n}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}e^{-\frac{\pi^2|y|^2}{t}}dt\right\}e^{-2\pi i x\cdot y}dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\left\{\int_{\mathbf{R}^n}e^{-\frac{\pi^2|y|^2}{t}}e^{-2\pi i x\cdot y}dy\right\}dt \\
&= \pi^{-\frac{n+1}{2}}\int_0^{\infty}e^{-t}t^{\frac{n-1}{2}}e^{-t|x|^2}dt \\
&= \pi^{-\frac{n+1}{2}}(1+|x|^2)^{-\frac{n+1}{2}}\int_0^{\infty}e^{-s}s^{\frac{n-1}{2}}ds \\
&= \pi^{-\frac{n+1}{2}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)(1+|x|^2)^{-\frac{n+1}{2}}.
\end{aligned}
$$

注 函数 $e^{-2\pi|x|}$ 的 Fourier 变换称为 Poisson 核，它与上一个例子中 Gauss 核一样，在很多数学领域中极其有用.

Fourier 变换理论的核心问题之一是它的反演问题，在这里我们介绍一个结果如下：

定理 16（Fourier 变换的逆定理） 若 $f\in L^1(\mathbf{R}^n)$，$\hat{f}\in L^1(\mathbf{R}^n)$，则

$$
\mathscr{F}^{-1}(\hat{f})(x)=\mathscr{F}(\mathscr{F}^{-1}f)(x)=f(x),\quad \text{a.e. } x\in\mathbf{R}^n,
$$

其中 $\mathscr{F}^{-1}(g)(x)$ 表示

$$\mathscr{F}^{-1}(g)(x)=\int_{\boldsymbol{R}^n} g(y)\mathrm{e}^{2\pi i x\cdot y}\mathrm{d}y.$$

有时 $\mathscr{F}^{-1}(g)$也记作 $\check{g}$.

证明 给定 $t>0$,令

$$\varphi(\xi)=\mathrm{e}^{2\pi i x\cdot\xi}\cdot\mathrm{e}^{-\pi t^2|\xi|^2},\quad \xi,x\in\boldsymbol{R}^n.$$

根据 Fourier 变换的性质,并令 $g(x)=\exp(-\pi|x|^2)$,可知(注意上例)

$$\hat{\varphi}(y)=t^{-n}\mathrm{e}^{-\pi\frac{|x-y|^2}{t^2}}=g_t(x-y),$$

其中 $g_t(x)=t^{-n}g\left(\dfrac{x}{t}\right)$. 从而由乘法公式得到

$$\begin{aligned}\int_{\boldsymbol{R}^n}\mathrm{e}^{-\pi t^2|\xi|^2}\cdot\mathrm{e}^{2\pi i x\cdot\xi}\hat{f}(\xi)\mathrm{d}\xi&=\int_{\boldsymbol{R}^n}\hat{f}(\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi\\&=\int_{\boldsymbol{R}^n}f(y)\hat{\varphi}(y)\mathrm{d}y=\int_{\boldsymbol{R}^n}f(y)g_t(x-y)\mathrm{d}y\\&=g_t*f(x).\end{aligned}$$

由于 $\exp(-\pi|x|^2)$在 $\boldsymbol{R}^n$ 上的积分等于1,故根据逼近恒等定理我们有

$$\lim_{t\to0}\|g_t*f-f\|_1=0.$$

另一方面,因为 $\hat{f}\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$,所以由控制收敛定理又可得

$$\lim_{t\to0}\int_{\boldsymbol{R}^n}\mathrm{e}^{-\pi t^2|\xi|^2}\mathrm{e}^{2\pi i x\cdot\xi}\hat{f}(\xi)\mathrm{d}\xi=\int_{\boldsymbol{R}^n}\hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{2\pi i x\cdot\xi}\mathrm{d}\xi.$$

这就说明 $f(x)=\mathscr{F}^{-1}(\hat{f})(x)$, a. e. $x\in\boldsymbol{R}^n$. 同理有$\widehat{(\check{f})}(x)=f(x)$, a. e. $x\in\boldsymbol{R}^n$.

注 1 若 $f\in L^1$, $\hat{f}\in L^1$,则 $\mathscr{F}^{-1}(\hat{f})(x)$是一致连续且当 $|x|\to\infty$时趋于零. 因此,改变在一个零测集上的值后,$f(x)$就成为一个连续函数,且使得对一切 $x\in\boldsymbol{R}^n$ 有 $\mathscr{F}^{-1}(\hat{f})(x)=f(x)$.

注 2 若 $f\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$且 $\hat{f}=0$,则

$$f(x)=0,\quad \text{a.e. } x\in\boldsymbol{R}^n.$$

注 3 对任意的非负整数 k 以及多重指标 α,令

$$\|f\|_{(k,\alpha)} = \sup_{x\in\boldsymbol{R}^n}(1 + |x|)^k|\partial^\alpha f(x)|,$$

$$\mathscr{S} = \{f \in C^{(\infty)}(\boldsymbol{R}^n): \|f\|_{(k,\alpha)} < \infty, \text{一切 } k, \alpha\}.$$

并称 $\mathscr{S}$ 为 Schwartz 空间(速降函数空间).

易证：若 $f\in\mathscr{S}$，则 $\hat{f}\in\mathscr{S}$；$\mathscr{S}$ 在 $L^1(\boldsymbol{R}^n)$中是稠密的.

4.2 $L^2(\boldsymbol{R}^n)$中的 Fourier 变换

大家知道，对于 $f\in L^2(\boldsymbol{R}^n)$，其用于定义 Fourier 变换的积分不一定存在(按通常收敛的意义). 虽然如此，它仍可按某种较自然的方法来导出，而且由于 L^2是 Hilbert 空间，其 Fourier 变换的理论是最完善的.

我们的思路是这样的：考虑到 $L^1\cap L^2(\boldsymbol{R}^n)$在 $L^2(\boldsymbol{R}^n)$(以及 $L^1(\boldsymbol{R}^n)$)中稠密，而且是 $L^2(\boldsymbol{R}^n)$(以及 $L^1(\boldsymbol{R}^n)$)中的线性子空间，于是从 L^1的 Fourier 变换出发再拓广于 L^2是一条可行的途径.

引理 17 设 $f\in L^1\cap L^2(\boldsymbol{R}^n)$，则 $\hat{f}\in L^2(\boldsymbol{R}^n)$，且有

$$\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2.$$

证明 令 $\mathfrak{X}=\{f\in L^1(\boldsymbol{R}^n): \hat{f}\in L^1(\boldsymbol{R}^n)\}$，显然，由 L^1中的反演定理，可知 $\mathfrak{X}\subset L^2(\boldsymbol{R}^n)$. 又因速降函数属于 $\mathfrak{X}$，所以 $\mathfrak{X}$ 在 $L^2(\boldsymbol{R}^n)$中稠密.

若 $f,g\in\mathfrak{X}$，且记 $h(x)=\overline{\hat{g}(x)}$，则

$$\hat{h}(\xi) = \int_{\boldsymbol{R}^n}\overline{\hat{g}(x)}\mathrm{e}^{-2\pi i\xi\cdot x}\mathrm{d}x = \overline{\int_{\boldsymbol{R}^n}\hat{g}(x)\mathrm{e}^{2\pi i\xi\cdot x}\mathrm{d}x} = \overline{g(\xi)}.$$

由此知

$$\int_{\boldsymbol{R}^n}f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x = \int_{\boldsymbol{R}^n}f(x)\hat{h}(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{\boldsymbol{R}^n}\hat{f}(x)h(x)\mathrm{d}x = \int_{\boldsymbol{R}^n}\hat{f}(x)\overline{\hat{g}(x)}\mathrm{d}x.$$

取 $g(x)=f(x)$，则得$\|\hat{f}\|_2=\|f\|_2$.

现在，设 $f\in L^1\cap L^2(\boldsymbol{R}^n)$，并作 $g(x)=\exp(-\pi|x|^2)$. 由 Young 不等式知，$g_t * f\in L^1\cap L^2(\boldsymbol{R}^n)$. 注意到

$$(\widehat{g_t * f})(\xi) = e^{-\pi|\xi|^2}\hat{f}(\xi),$$

而且$\hat{f}(\xi)$是有界的，易知$g_t * f \in \mathfrak{X}$. 从而由上述推证知

$$\|\widehat{g_t * f}\|_2 = \|g_t * f\|_2.$$

根据逼近恒等定理，可知当$t \to 0$时，$g_t * f$依L^1以及L^2的意义收敛到f. 因此，当$t \to 0$时，$\widehat{g_t * f}$是一致且依L^2意义收敛到$\hat{f}$. 由此得引理结论

$$\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2.$$

如果我们用线性算子$\mathscr{F}: L^1 \cap L^2 \to L^2$的角度去考察上一引理，那么上述结论指出：$\mathscr{F}$是一个定义在$L^2(\boldsymbol{R}^n)$中稠密子集上的连续线性算子. 这样，就可应用 Hahn-Banach 延拓定理来定义一般L^2中函数的 Fourier 变换.

实际上，对$f \in L^2(\boldsymbol{R}^n)$，可作

$$f_k \in L^1 \cap L^2(\boldsymbol{R}^n) \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

使得

$$\lim_{k \to \infty}\|f_k - f\|_2 = 0.$$

由$\|\hat{f}_k - \hat{f}_j\|_2 = \|f_k - f_j\|_2$可知，存在$L^2(\boldsymbol{R}^n)$中函数，不妨记为$\hat{f}$，使得

$$\lim_{k \to \infty}\|\hat{f}_k - \hat{f}\|_2 = 0.$$

易知

$$\|\hat{f}\|_2 = \lim_{k \to \infty}\|\hat{f}_k\|_2 = \lim_{k \to \infty}\|f_k\|_2 = \|f\|_2.$$

注意，上述理论说明：对一般的$f \in L^2$，其 Fourier 变换$\hat{f}$是作为$\{\hat{f}_k\}$的L^2极限来定义的，其中$\{f_k\}$是$L^1 \cap L^2$中以f为L^2极限的任一函数列. 例如我们可以取

$$f_k(x) = \begin{cases} f(x), & |x| \leqslant k, \\ 0, & |x| > k. \end{cases} \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

而其 Fourier 变换为

$$\hat{f}_k(x) = \int_{|y| \leqslant k} f(y) e^{-2\pi i x \cdot y} dy.$$

下述定理说明 L^1中的乘法公式也可推广到 L^2中来.

定理 18(乘法公式) 设 $f,g\in L^2(\boldsymbol{R}^n)$,则

$$\int_{\boldsymbol{R}^n}\hat{f}(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_{\boldsymbol{R}^n}f(x)\hat{g}(x)\mathrm{d}x.$$

证明 因为对于 $L^1\cap L^2(\boldsymbol{R}^n)$中函数,乘法公式是成立的,所以我们取定 $g\in L^1\cap L^2(\boldsymbol{R}^n)$,而对 $f\in L^2(\boldsymbol{R}^n)$,取 $\{f_k\}\subset L^1\cap L^2(\boldsymbol{R}^n)$,使得

$$\lim_{k\to\infty}\|f_k-f\|_2=0.$$

由 $\hat{g}\in L^2$以及弱收敛定理可知

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\boldsymbol{R}^n}f_k(x)\hat{g}(x)\mathrm{d}x=\int_{\boldsymbol{R}^n}f(x)\hat{g}(x)\mathrm{d}x.$$

另一方面,又有

$$\int_{\boldsymbol{R}^n}f_k(x)\hat{g}(x)\mathrm{d}x=\int_{\boldsymbol{R}^n}\hat{f}_k(x)g(x)\mathrm{d}x,$$

以及 $$\lim_{k\to\infty}\int_{\boldsymbol{R}^n}\hat{f}_k(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_{\boldsymbol{R}^n}\hat{f}(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

即得 $$\int_{\boldsymbol{R}^n}\hat{f}(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_{\boldsymbol{R}^n}f(x)\hat{g}(x)\mathrm{d}x.$$

最后,对于 g 也取 $\{g_k\}\subset L^1\cap L^2(\boldsymbol{R}^n)$,使得 $\|g_k-g\|_2\to 0$ $(k\to\infty)$,再用类似的方法处理即可得证.

关于 Fourier 变换理论的反演问题,L^2比 L^1显示出更大的优越性.实际上,我们有下面的结论.

定理 19 $\mathscr{F}$ 是 $L^2(\boldsymbol{R}^n)$上的酉算子.

证明 已知 $\mathscr{F}$ 是等距的,从而只需阐明 $\mathscr{F}$ 是满映射即可.为此,令

$$E=\{f:\ f=\hat{g},\quad g\in L^2(\boldsymbol{R}^n)\},$$

显然,E 是 $L^2(\boldsymbol{R}^n)$的一个子空间.不仅如此,E 还是 $L^2(\boldsymbol{R}^n)$的一个闭子空间.事实上,若有 $\{\hat{f}_k\}\subset E$ 而且 $\|\hat{f}_k-g\|_2\to 0$ $(k\to\infty$, $g\in L^2(\boldsymbol{R}^n))$,则由于 $\|f_k-f_i\|_2=\|\hat{f}_k-\hat{f}_i\|_2$以及 $L^2(\boldsymbol{R}^n)$是完备空间,故$\{f_k\}$是 $L^2(\boldsymbol{R}^n)$的一个 Cauchy 列,且存在 $f\in L^2$, $\hat{f}=g$.

现在假定 $E\neq L^2$，则有 $\varphi\in L^2(\boldsymbol{R}^n)$，$\varphi\neq 0$，使得

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} f(x)\,\overline{\varphi(x)}\mathrm{d}x = 0,\quad f\in E,$$

即对一切 $g\in L^2(\boldsymbol{R}^n)$，有

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} \hat{g}(x)\,\overline{\varphi(x)}\mathrm{d}x = 0.$$

从而根据乘法公式导致

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} g(x)\ \overset{\triangle}{\varphi}\ (x)\mathrm{d}x = \int_{\boldsymbol{R}^n} \hat{g}(x)\,\overline{\varphi(x)}\mathrm{d}x = 0,\quad \varphi\in L^2.$$

特别取 $g=\hat{\varphi}\in L^2(\boldsymbol{R}^n)$，知

$$\|\hat{\varphi}\|_2 = 0 = \|\varphi\|_2.$$

即 $\varphi(x)=0$，a.e.. 这一矛盾说明 $E=L^2$.

注 上述定理称为 Plancherel 定理而乘法公式称为 Plancherel 恒等式.（这是 $\boldsymbol{R}^n$ 上 Fourier 分析的最主要结论，也是进一步理论研究和应用的基础. 在其他李群上研究调和分析的主要目标也是 Plancherel 定理. 这正如初等数学中的勾股定理一样、实际上各种各样的 Plancherel 定理都是勾股定理的推广.）

定理 20 记 $\mathscr{F}^{-1}$为 $\mathscr{F}: L^2(\boldsymbol{R}^n)\mapsto L^2(\boldsymbol{R}^n)$的逆，则

$$(\mathscr{F}^{-1}f)(x) = (\mathscr{F}f)(-x),\quad f\in L^2(\boldsymbol{R}^n).$$

特别地，如果$\{f_k\}$定义为

$$f_k(x) = \int_{|y|\leqslant k} \hat{f}(x)\mathrm{e}^{2\pi i x\cdot y}\mathrm{d}y,$$

则

$$\lim_{k\to\infty}\|f_k - f\|_2 = 0.$$

证明 首先，我们有 $\mathscr{F}^{-1}=\mathscr{F}^*$（共轭算子），且 $\mathscr{F}$ 与 $\mathscr{F}^*$是等距的. 其次由 $L^1\cap L^2(\boldsymbol{R}^n)$在 $L^2(\boldsymbol{R}^n)$中的稠密性，可知只需对 $\hat{f}\in L^1\cap L^2$加以证明即可.

此时，有

$$\begin{aligned} f^{\#}(x) &\triangleq \int_{\boldsymbol{R}^n} \hat{f}(y)\mathrm{e}^{2\pi i x\cdot y}\mathrm{d}y \\ &= \lim_{k\to\infty} f_k(x)\ (L^2\text{ 的极限}) \end{aligned}$$

$$= (\mathscr{F}\hat{f})(-x).$$

由此知，对任意的 $g\in L^1\cap L^2(\boldsymbol{R}^n)$，有

$$\begin{aligned}\langle g,f^{\#}\rangle &= \int_{\boldsymbol{R}^n} g(x)\left\{\overline{\int_{\boldsymbol{R}^n}\hat{f}(y)\mathrm{e}^{2\pi i x\cdot y}\mathrm{d}y}\right\}\mathrm{d}x \\ &= \int_{\boldsymbol{R}^n}\left\{\int_{\boldsymbol{R}^n} g(x)\mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot y}\mathrm{d}x\right\}\overline{\hat{f}(y)}\mathrm{d}y \\ &= \langle \mathscr{F}g,\ \hat{f}\rangle = \langle g,\ \mathscr{F}^*f\rangle.\end{aligned}$$

另一方面，又有（$\mathscr{F}$ 是酉算子）

$$\langle g,f^{\#}\rangle = \langle \mathscr{F}g,\ \mathscr{F}f\rangle = \langle g,f\rangle.$$

由此知 $f^{\#}(x)=f(x)$ a.e.. 即

$$(\mathscr{F}\hat{f})(-x) = f(x),\ \text{a.e.},\quad \hat{f}(-x) = (\mathscr{F}^{-1}f)(x).$$

推论（惟一性） 设 $f\in L^2(\boldsymbol{R}^n)$，若 $\hat{f}(x)\equiv 0$，则 $f(x)=0$，a.e. $x\in\boldsymbol{R}^n$.

类似于 $L^1(\boldsymbol{R}^n)$ 中的卷积的 Fourier 变换，我们也有

定理 21 若 $f,g\in L^2(\boldsymbol{R}^n)$，则 $(f*g)\widehat{\ }(x)=\hat{f}(x)\cdot\hat{g}(x)$.

证明 易知 $\hat{f}\cdot\hat{g}\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$，令 $\varphi(y)=\overline{g(x-y)}$，则有

$$\hat{\varphi}(\xi) = \overline{\hat{g}(\xi)}\mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi},\quad \xi\in\boldsymbol{R}^n.$$

注意到 $\mathscr{F}$ 在 $L^2(\boldsymbol{R}^n)$ 上是酉算子，可知

$$\begin{aligned}f*g(x) &= \int_{\boldsymbol{R}^n} f(y)\,\overline{\varphi(y)}\mathrm{d}y = \int_{\boldsymbol{R}^n}\hat{f}(\xi)\,\overline{\hat{\varphi}(\xi)}\mathrm{d}\xi \\ &= \int_{\boldsymbol{R}^n}\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)\mathrm{e}^{2\pi i x\cdot\xi}\mathrm{d}\xi = \mathscr{F}^{-1}(\hat{f}\hat{g})(x).\end{aligned}$$

4.3 $L^p(\boldsymbol{R}^n)(1<p<2)$ 中的 Fourier 变换

在 $L^1(\boldsymbol{R}^n)$ 及 $L^2(\boldsymbol{R}^n)$ 的 Fourier 变换理论的基础上，我们就可以导入 $L^p(\boldsymbol{R}^n)(1<p<2)$ 的 Fourier 变换.

令 $L^1-L^2=\{f:\ f=f_1+f_2, f_1\in L^1(\boldsymbol{R}^n), f_2\in L^2(\boldsymbol{R}^n)\}$ 并定义 L^1+L^2 中函数 f 的 Fourier 变换为

$$\hat{f} = \hat{f}_1 + \hat{f}_2,$$

其中$\hat{f}_1$是$L^1(\boldsymbol{R}^n)$中的 Fourier 变换，$\hat{f}_2$是$L^2(\boldsymbol{R}^n)$中的 Fourier 变换.

这一定义是合理的. 事实上，若有

$$f = f_1 + f_2 = g_1 + g_2, \quad f_1, g_1 \in L^1, \ f_2, g_2 \in L^2(\boldsymbol{R}^n),$$

则$f_1 - g_1 = g_2 - f_2$. 由于此式两端皆属于$L^1 \cap L^2$，故知这两种分解的差的 Fourier 变换是一致的. 由$\hat{f}_1 - \hat{g}_1 = \hat{g}_2 - \hat{f}_2$可知

$$\hat{f}_1 + \hat{f}_2 = \hat{g}_1 + \hat{g}_2.$$

此外，我们还有

$$L^p \subset L^1 + L^2 \quad (1 < p < 2).$$

事实上，对于$f \in L^p(\boldsymbol{R}^n)$，作分解$f = f_1 + f_2$，其中

$$f_2(x) = \begin{cases} f(x), & |f(x)| \leqslant 1, \\ 0, & |f(x)| > 1, \end{cases} \quad f_1 = f - f_2.$$

则有

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} |f_2(x)|^2 \mathrm{d}x \leqslant \int_{\boldsymbol{R}^n} |f_2(x)|^p \mathrm{d}x \leqslant \int_{\boldsymbol{R}^n} |f(x)|^p \mathrm{d}x < \infty,$$

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} |f_1(x)| \mathrm{d}x \leqslant \int_{\boldsymbol{R}^n} |f_1(x)|^p \mathrm{d}x \leqslant \int_{\boldsymbol{R}^n} |f(x)|^p < \infty.$$

这说明$f_2 \in L^2(\boldsymbol{R}^n)$，$f_1 \in L^1(\boldsymbol{R}^n)$. 于是就有

$$\hat{f} = \hat{f}_1 + \hat{f}_2.$$

这样，对$1 < p < 2$，$L^p(\boldsymbol{R}^n)$中的函数就可以导入 Fourier 变换，然而，对于$p > 2$，上述方法失效. 不过，在广义函数的意义下，$L^p(p > 2)$仍可导入 Fourier 变换，只是此时它不再是普通意义下的函数了.

§5 调和函数的基本性质

设$u(x) = u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$定义于区域$D \subset \boldsymbol{R}^n$上. 若

$$\Delta u(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} u(x)\right) = 0, \quad x \in D,$$

则称 u 是 D 上的调和函数.

定理 22(调和函数的平均值性质)　设 $u(x)$在区域 $D\subset\mathbf{R}^n$ 上调和,若$\overline{B(x_0,r)}\subset D$,则

$$u(x_0)=\frac{1}{\omega_n}\int_{\Sigma}u(x_0+rx')\mathrm{d}x'.$$

证明　记

$$f(s)=\frac{1}{\omega_n}\int_{\Sigma}u(x_0+sx')\mathrm{d}x'.$$

显然,f 是$(0,r]$上的可微函数,且有

$$f'(s)=\frac{1}{\omega_n}\int_{\Sigma}\sum_{j=1}^{n}u'_{x_j}(x_0+sx')x'_j\mathrm{d}x'.$$

易知其中的被积函数等于 $D_{x'}u(x_0+sx')$,这是 u 在点 x_0+sx' 处外法线方向上的导数,从而又有

$$f'(s)=\frac{1}{s^{n-1}\omega_n}\int_{\partial B(x_0,s)}D_{x'}u(x)\mathrm{d}\sigma_s(x),$$

其中 σ_s 表示球面上的 Lebesgue 测度.

现在,应用 Green 公式,可得

$$f'(s)=\frac{1}{s^{n-1}\omega_n}\int_{B(x_0,s)}\Delta u(x)\mathrm{d}x=0.$$

这说明　　$f(s)=$ 常数,　$s\in(0,r]$.

因为　　$\lim\limits_{s\to 0}f(s)=u(x_0)$,　$\lim\limits_{s\to r}f(s)=f(r)$,

所以有 $f(r)=u(x_0)$,即得所证.

推论 1　设 u 与 D 同上定理所述,则对$\overline{B(x_0,r)}\subset D$,有

$$u(x_0)=\frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0,r)}u(x)\mathrm{d}x.$$

推论 2　设 $u\in C^{(2)}(D)$,且在 D 上具有平均值性质,则 u 是 D 上调和函数.

证明　固定 $x_0\in D$,且$\overline{B(x_0,r)}\subset D$,则由

$$u(x_0)=\frac{1}{\omega_n}\int_{\Sigma}u(x_0+rx')\mathrm{d}x'$$

可知，上式右端对 r 求导等于零. 因为 $u\in C^{(2)}(D)$，所以

$$0=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}\left(\frac{1}{\omega_n}\int_\Sigma u(x_0+rx')\mathrm{d}x'\right)$$

$$=\frac{1}{\omega_n}\int_\Sigma\sum_{j,k=1}^n u''_{jk}(x_0+rx')x'_jx'_k\mathrm{d}x'.$$

考虑在 $r=0$ 点的导数，又有

$$0=\text{上式右端}=\frac{1}{\omega_n}\sum_{j,k=1}^n\left\{\int_\Sigma x'_jx'_k\mathrm{d}x'\right\}u''_{jk}(x).$$

注意到

$$\int_\Sigma x'_jx'_k\mathrm{d}x'=0,j\neq k;\quad\int_\Sigma(x'_j)^2\mathrm{d}x'=\frac{\omega_n}{n},$$

易知
$$0=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n u''_{jj}(x)=\frac{1}{n}\Delta u.$$

推论 3 设 $D\subset\boldsymbol{R}^n$ 且是一个区域，$u(x)$是 D 上的局部可积函数，且在 D 上具有平均值性质，则 $u(x)$ 在 D 上调和(由此知 $u\in C^{(\infty)}(D)$).

证明 因为结论是属于一个局部性的问题，所以不妨假定 D 是一个球，且 $u\in L^1(\overline{D})$. 我们令 $u(x)=0(x\overline{\in}\overline{D})$，则 u 在全空间 $\boldsymbol{R}^n$ 上有定义.

取 $\varphi\in C^{(\infty)}(\boldsymbol{R}^n)$是一个向径函数，且满足

$$\int_{\boldsymbol{R}^n}\varphi(x)\mathrm{d}x=1,\quad\mathrm{supp}\varphi\subset B(0,1).$$

并考察展缩函数族$\{\varphi_\varepsilon(x)\}$，作卷积 $u*\varphi_\varepsilon(x)$，显然当 ε 充分小时，对 $0<r\leqslant\varepsilon$，有

$$u*\varphi_\varepsilon(x)=\int_0^\varepsilon\varphi_\varepsilon(r)\left\{\int_\Sigma u(x-ry')\mathrm{d}y'\right\}r^{n-1}\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^\varepsilon\varphi_\varepsilon(r)\omega_nu(x)r^{n-1}\mathrm{d}r.$$

从而得

$$u*\varphi_\varepsilon(x)=u(x)\omega_n\int_0^\varepsilon\varphi_\varepsilon(r)r^{n-1}\mathrm{d}r=u(x).$$

由于$u * \varphi_k(x)$属于$C^{(\infty)}(\boldsymbol{R}^n)$,故由上面的推论即得所证.

定理 23(调和函数的极值原理)　设$u(x)$在区域$D\subset\boldsymbol{R}^n$上调和,且

$$M = \sup_{x\in D} u(x) < \infty,$$

则$u(x)<M, x\in D$或$u(x)=$常数.

证明　假定存在$x_0\in D$,使得

$$u(x) \leqslant u(x_0) = M, \quad x \in D.$$

则取$r>0$,使得$\overline{B(x_0,r)}\subset D$,我们有

$$\frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0,r)} u(x)\mathrm{d}x = u(x_0) = M.$$

因为u是连续函数,所以必有

$$u(x) = M, \quad x \in B(x_0,r).$$

这说明点集

$$E = \{x \in D: u(x) = M\}$$

是非空开集.但是点集

$$D\backslash E = \{x \in D: u(x) < M\}$$

也是开集.从而根据D的连通性,可知

$$D\backslash E = \varnothing.$$

即得所证.

推论(惟一性)　设$D\subset\boldsymbol{R}^n$是一个有界区域,$u_1(x)$与$u_2(x)$在$\overline{D}$上连续,在D上调和.若

$$u_1(x) = u_2(x), \quad x \in \partial D,$$

则$u_1(x)=u_2(x), x\in D$.

证明　只需考虑$u(x)=u_1(x)-u_2(x)$,显然

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial D.$$

从而由上定理知

$$u(x) = 0, \quad x \in D.$$

定理 24(Liouville)　设$u(x)$是$\boldsymbol{R}^n$上的有界调和函数,则$u(x)=$常数.

证明 对 R^n 中的任意两点 x_1, x_2，由平均值定理可知

$$u(x_1) - u(x_2) = \frac{1}{|B(x_1,r)|}\int_{B(x_1,r)} u(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{|B(x_2,r)|}\int_{B(x_2,r)} u(x)\mathrm{d}x.$$

取 r 充分大，并大于 $d=|x_1-x_2|$，我们有

$$|u(x_1) - u(x_2)| \leqslant \frac{n\|u\|_\infty}{\omega_n r^n}|B(x_1,r)\triangle B(x_2,r)|.$$

因为

$$|B(x_1,r)\backslash B(x_2,r)| \leqslant |B(0,1)|(r^n - (r-d)^n) \leqslant \frac{\omega_n}{n}nr^{n-1}d = \omega_n r^{n-1}d.$$

所以我们有

$$|u(x_1) - u(x_2)| \leqslant \frac{2n\|u\|_\infty d}{r}.$$

令 $r\to\infty$ 即得所证.

定理 25（反射原理） 设 D 是 R^{n+1} 中关于 R^n 对称（即 $(x_1,\cdots,x_n,y)\in D$ 蕴含 $(x_1,\cdots,x_n,-y)\in D$）的一个区域，$u(x,y)$ 是 D 上的连续函数，且满足

$$u(x,y) = -u(x,-y).$$

若 u 在 $D^+=\{(x,y)\in D: y>0\}$ 上调和，则 u 在整个 D 上调和.

证明 我们只需指出 u 在 D 上满足平均值性质.

(i) 对 $x_0\in D^+$，$\overline{B(x_0,r)}\subset D^+$，由调和性可知 $u(x_0)$ 等于 $u(x)$ 在球面 $\partial B(x_0,r)$ 上的平均. 从而对于 $D^-=\{(x,-y)\in D: y>0\}$ 中相应 $x_0\in D^+$ 之点处，也有相应的球面平均值性质.

(ii) 对于 $x_0=(x_1,\cdots,x_n,0)\in D$，则因 $u(x_0)=0$，可知 $u(x)$ 在 $\overline{B(x_0,r)}\subset D$ 的球面平均值也为 0. 证毕.

推论 记 $R_+^{n+1}=\{(x_1,\cdots,x_n,y)\in R^{n+1}: y>0\}$，设 $u(x,y)$ 在 $\overline{R_+^{n+1}}$ 上连续，且在 R_+^{n+1} 上调和，又满足

$$u(x,0)=0,\quad x\in \boldsymbol{R}^n.$$

若 u 在 $\boldsymbol{R}_+^{n+1}$ 上有界，则

$$u(x,y)=0,\quad (x,y)\in \boldsymbol{R}_+^{n+1}.$$

习　题

1. 设 $f(x),g(x)$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 上的非负可测函数，且有 $f(x)\leqslant 1$，$\int_{\boldsymbol{R}^n} g(x)\mathrm{d}x=1$，$1\leqslant p<\infty$，证明

$$1\leqslant\left\{\int_{\boldsymbol{R}^n} f(x)g(x)\mathrm{d}x\right\}^{1/p}+\left\{\int_{\boldsymbol{R}^n}(1-f(x)^{1/p})^p g(x)\mathrm{d}x\right\}^{1/p}.$$

提示：考察 $[0,1]$ 上的函数 $\Phi(u)=(1-u^{1/p})^p$，并用 Jensen 不等式.

2. 设 $f\in L^r([0,1])$，$r>0$，证明

$$\lim_{p\to 0}\|f\|_p=\exp\left\{\int_0^1 \ln|f(x)|\mathrm{d}x\right\}.$$

提示：应用 Jensen 不等式于对数函数，另一方面应用不等式 $\ln x\leqslant x-1$.

3. 设 $0<p<\infty$，$f\in L_*^p(\boldsymbol{R}^n)$，$|f(x)|\leqslant M(x\in\boldsymbol{R}^n)$，证明：$f\in L^q(\boldsymbol{R}^n)$，$p<q$.

4. 设 $0<p<\infty$，$f\in L_*^p(\boldsymbol{R}^n)$，且有

$$|\{x\in\boldsymbol{R}^n:\ f(x)\neq 0\}|<\infty,$$

证明：$f\in L^q(\boldsymbol{R}^n)$，$0<q<p$.

5. 设 $E\subset\boldsymbol{R}^n$，$|E|>0$，$f(x)$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 上非负可测函数. 若对 $0<r<1$，有

$$\left|\left\{x\in\boldsymbol{R}^n:\ \int_{\boldsymbol{R}^n} f(y)\chi_E(x-y)\mathrm{d}y>\lambda\right\}\right|\leqslant\frac{C}{\lambda^r},\quad \lambda>0,$$

证明

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} f(y)\mathrm{d}y\leqslant\left(\frac{C}{|E|(1-r)}\right)^{1/r}.$$

6. 设 $1\leqslant p,q$，T 是 $L^p(\boldsymbol{R}^n)\to L^q(\boldsymbol{R}^n)$ 的正线性算子，则 T 是 (p,q) 型.

7. 设 $Tf(x)=a(x)f(x), a\in L^r(\boldsymbol{R}^n), 1\leqslant r\leqslant\infty$，证明：对 $1\leqslant p\leqslant\infty, 1/q=1/r+1/p$，$T$ 是(p,q)型.

8. 设 $1\leqslant p,q<\infty$，令

$$C=\left(\int_{\boldsymbol{R}^n}\left\{\int_{\boldsymbol{R}^n}|K(x,y)|^q\mathrm{d}x\right\}^{p'/q}\mathrm{d}y\right)^{1/p'}<\infty,$$

$$Tf(x)=\int_{\boldsymbol{R}^n}K(x,y)f(y)\mathrm{d}y,$$

证明：$\|Tf\|_q\leqslant C\|f\|_p$.

9. 设 $1<p<+\infty$，考察 $f\in L^p([0,\infty))$，定义

$$Tf(x)=\int_0^\infty\frac{f(y)}{x+y}\mathrm{d}y,$$

证明：$\|Tf\|_p\leqslant C_p\|f\|_p$.

提示：用 Hardy-Littlewood-Polya 定理.

10. 设 $1<p\leqslant\infty$，考察 $f\in L^p([0,\infty))$，令

$$I_\alpha f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}f(t)\mathrm{d}t,\quad \alpha>0, x\geqslant 0;$$

$$J_\alpha f(x)=x^{-\alpha}I_\alpha f(x).$$

证明
$$\|J_\alpha f\|_p\leqslant\frac{\Gamma(1-p^{-1})}{\Gamma(\alpha+1-p^{-1})}\|f\|_p.$$

提示：同上题，考虑 $K(x,y)=(x-y)^{\alpha-1}x^{-\alpha}\chi_{(0,x)}(y)$.

11. 设 $1\leqslant r\leqslant q\leqslant\infty$，$r<\infty$，若由

$$T_rf(x)=\int_{\boldsymbol{R}^n}|K(x,y)|^rf(y)\mathrm{d}y,\quad \frac{1}{q}=\frac{1}{p}+\frac{1}{r}-1$$

定义的算子是$(q/r,q/r)$型，证明算子 T：

$$Tf(x)=\int_{\boldsymbol{R}^n}K(x,y)f(y)\mathrm{d}y$$

是(p,q)型.

12. 设 $g(x), w(x)$在$(0,\infty)$上是非负可测函数，$w(x)$是递减的，证明：对 $0<r<\infty, p\geqslant 1$有

$$\left\{\int_0^\infty\left(\int_0^x g(y)\mathrm{d}y\right)^p x^{-1-r}w(x)\mathrm{d}x\right\}^{1/p}$$

$$\leqslant \frac{p}{r}\left\{\int_0^\infty [xg(x)]^p x^{-1-r} w(x)\mathrm{d}x\right\}^{1/p}.$$

13. 设算子列$\{T_k\}$是一致弱(1,1)型：

$$|\{x \in \boldsymbol{R}^n : |T_k f(x)| > \lambda\}| \leqslant C\lambda^{-1}\|f\|_1, \ \lambda > 0.$$

对于正数列$\{C_k\}$，定义

$$Tf(x) = \sum_{k=1}^\infty C_k T_k f(x), \quad \sum_{k=1}^\infty C_k^{1/2} < \infty.$$

证明 T 是弱(1,1)型.

14. 设 T: $L^2(\boldsymbol{R}^n) \to L^2(\boldsymbol{R}^n)$是有界线性算子，且有$\|Tf\|_2 = A\|f\|_2$. 若又有

$$\|Tf\|_p \leqslant C\|f\|_p, \quad f \in L^2 \cap L^p, \ p \geqslant 1,$$

证明：$\|f\|_{p'} \leqslant CA^{-2}\|Tf\|_{p'}$，这里$1/p + 1/p' = 1$.

15. 设 T: $L^p(\boldsymbol{R}^n) \to L^q(\boldsymbol{R}^n)$是有界线性算子，$0<p<q$. 若 $p<r<q$，$\|u\|_{(r/p)'} = 1 = \|v\|_{(q/r)'}$，证明算子 S:

$$Sf(x) = v(x)^{1/r} \cdot T(g \cdot u^{1/p})(x)$$

是(r,r)型.

16. 设 $K \in L^1 \cap L^\infty(\boldsymbol{R}^n)$，$f \in L^1(\boldsymbol{R}^n)$，令

$$K_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} K(x/\varepsilon), \quad \varepsilon > 0,$$

记 A 是$(0,\infty)$中的稠密集，证明

$$\sup_{\varepsilon>0} |K_\varepsilon * f(x)| = \sup_{\varepsilon \in A} |K_\varepsilon * f(x)|.$$

17. 证明次线性算子 T 同时是弱(1,1)型与(∞,∞)型的充分必要条件为：对一切 $f \in L^1 + L^\infty$有

$$|\{x \in \boldsymbol{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}|$$

$$\leqslant \frac{C_1}{\lambda}\int_{\lambda/(2C_2)}^\infty |\{x \in \boldsymbol{R}^n : |f(x)| > t\}|\mathrm{d}t,$$

其中 C_1与 C_2各为 T 的弱(1,1)界型常数与(∞,∞)界型常数.

18. 设 T 是一个算子，且对每一个 $\lambda > 0$，T 可分解为 $T = T_1 + T_2$，其中

$$\|T_1 f\|_\infty \leqslant \lambda/2; \quad \|T_2 f\|_p \leqslant C\lambda^{1-q/p}\|f\|_p.$$

证明 T 是弱(p,q)型.

19. 设 $f\in L^1(\boldsymbol{R}^1)$,且有

$$\int_{\boldsymbol{R}^1}|f(x+t)-f(x)|\mathrm{d}x\leqslant|t|^2,\quad t\in\boldsymbol{R}^1.$$

证明 $f(x)=0$,a. e. $x\in\boldsymbol{R}^1$.

提示:应用$\|\hat{f}\|_\infty\leqslant\|f\|_1$可知$\|(\mathrm{e}^{2\pi it}-1)\hat{f}\|_\infty\leqslant|t|^2$.

20. 设 $E\subset\boldsymbol{R}^1$,$|E|>0$,且当 $x,y\in E$ 时,有

$$(x+y)/2\in E.$$

证明 E 中含有非空开集.

提示:不妨设$|E|<\infty$,并作

$$f(x)=\int_{\boldsymbol{R}^1}\chi_E(2x-y)\cdot\chi_E(y)\mathrm{d}y,$$

则 $f(x/2)=\chi_E*\chi_E(x)$,且显然 f 不是零元.

21. 举例证明存在 $f_n\in L^2(\boldsymbol{R}^1)$,$\|f_n\|=1$,$n=1,2,\cdots$,且当 $n\to\infty$时,$f_n*\tilde{f}_n(x)$在紧集上一致收敛于1,其中$\tilde{f}_n(x)=\overline{f_n(-x)}$.

提示:令 $g_n(x)=\sqrt{n}\,\chi_{E_n}(x)$,$E_n=[-1/2n,1/2n]$,并作 $f_n(x)=\hat{g}_n(x)$.

参 考 文 献

[1] H. L. Royden, Real Analysis, MacMillan, New York, 1964.

[2] G. B. Folland, Real Analysis, John Wiley and Sons, New York, 1984.

[3] A. Zygmund, Sur les fonctions conjuguées, *Fund. Math.*, **13**(1929), 284～303.

[4] 河田龙夫,Fourier 分析,周民强译,高等教育出版社,1982.

[5] 周民强,实变函数,北京大学出版社,1985.

第二章　Hardy-Littlewood 极大函数及其应用

1930年，Hardy-Littlewood 在一维周期区间上给出了（一个函数的平均）极大函数的概念，Wiener 又在1939年将其移植于 n 维欧氏空间. 此后，由于它的广泛应用，现已发展成为比较成熟的理论. Hardy-Littlewood 极大算子是 Fourier 分析领域中最基本的和最重要的算子之一，本章除了介绍一般框架外，作为应用还讨论了它与某些重要算子的密切关系. 顺便指出，文中所介绍的覆盖技术是研究算子弱有界性的基本途径；Lebesgue 微分定理的证明思想也是处理算子列点态收敛所使用的普遍方法.

§1　Hardy-Littlewood 极大函数的定义及其初等性质

在 n 维欧氏空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中，记 Q 为闭或半开闭的（正）方体，其边、面平行于坐标轴；记 $Q(x,r)$ 表示中心在点 x 且其边长为 $r>0$ 的方体. $|Q|$ 表示 Q 的 Lebesgue 测度. 在 $Q=Q(x,r)$ 时，tQ 表示 $Q(x,tr)$，$t>0$.

定义　设 $f\in L_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^n)$，$x\in\boldsymbol{R}^n$，令 Q 是含 x 的任一方体，称

$$Mf(x)=\sup_{x\in Q}\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(y)|\mathrm{d}y$$

为 f 的定义在 $\boldsymbol{R}^n$ 上的 **Hardy-Littlewood 极大函数**，简记为 **H-L 极大函数**，称 M 为 **H-L 极大算子**.

这里的极大是一种取平均值的极大，因此，它可以具有各种不同的形式而便于满足各种需要. 在下面，仅就最简单的两种情形介绍如下：

例如，令

$$\overline{M}f(x)=\sup_{r>0}\frac{1}{|Q(x,r)|}\int_{Q(x,r)}|f(y)|\mathrm{d}y,$$

并称其为 H-L 中心极大函数，相应地，称 $\overline{M}$ 为 H-L 中心极大算子. 显然有

$$\overline{M}f(x)\leqslant Mf(x),\quad x\in\boldsymbol{R}^n.$$

另一方面，由于对包含点 x 且边长为 r 的任意方体，可作方体 $Q(x,2r)$，使得

$$Q\subset Q(x,2r),\quad \frac{|Q|}{|Q(x,2r)|}=2^{-n}.$$

故根据不等式

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(y)|\mathrm{d}x\leqslant\frac{|Q(x,2r)|}{|Q|}\frac{1}{|Q(x,2r)|}\int_{Q(x,2r)}|f(y)|\mathrm{d}y$$

立即可知

$$Mf(x)\leqslant 2^n\overline{M}f(x),\quad x\in\boldsymbol{R}^n.$$

这说明此两种极大函数是可以互相控制的.

又记 $B(x,r)$为 $\boldsymbol{R}^n$ 中以 x 为中心且以 r 为半径的球体，令

$$\overline{M}_Bf(x)=\sup_{r>0}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|f(y)|\mathrm{d}y,$$

称为 H-L 中心(球形)极大函数. 类似地，也可定义 H-L 一般(球形)极大函数.

由于对球体 $B(x,r)$，可作方体 $Q(x,2r)$，使得 $B(x,r)\subset Q(x,2r)$；而对方体 $Q(x,r)$，又可作球体 $B(x,\sqrt{n}\,r/2)$包含 $Q(x,r)$，故参照上面的推理方法，可知 $\overline{M}_Bf(x)$与 $\overline{M}f(x)$也是可以比较的.

由此可知，在$(\boldsymbol{R}^n,\mathrm{d}x)$上，只要知道了上述各式 H-L 极大算子之一的情形，就可获得其他平均极大算子的相应信息.

我们有下列初等性质：

(i) H-L 极大函数是下半连续函数，当然也必是可测函数. 现在以 $\overline{M}f(x)$为例给予证明. 下面指出对任意的 $\lambda>0$，点集

$$E_{\overline{M}f}(\lambda) = \{x \in \boldsymbol{R}^n : \overline{M}f(x) > \lambda\}$$

是开集. 换句话说,$\boldsymbol{R}^n \backslash E_{\overline{M}f}(\lambda)$是闭集.

现在假定$\{x_k\}$是$\boldsymbol{R}^n \backslash E_{\overline{M}f}(\lambda)$中的一个点列,而且$x_k \to x$($k \to \infty$),从而问题归结为证明:对任意的以$x$为中心的方体$Q = Q(x,r)$,$r>0$,有

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|\mathrm{d}y \leqslant \lambda.$$

取$Q_k = Q(x_k,r)$,并作函数列

$$f_k(y) = f(y)\chi_{Q_k \Delta Q}(y),$$

$$Q_k \Delta Q = (Q_k \backslash Q) \cup (Q \backslash Q_k),$$

显然有

$$|f_k(y)| \leqslant |f(y)|, \quad \lim_{k\to\infty} f_k(y) = 0.$$

从而根据 Lebesgue 控制收敛定理,可得

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f_k(y)|\mathrm{d}y = 0.$$

但另一方面,又有

$$\frac{1}{|Q|}\int_{Q_k} |f(y)|\mathrm{d}y = \frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k} |f(y)|\mathrm{d}y \leqslant \lambda.$$

于是在不等式

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|\mathrm{d}y &\leqslant \frac{1}{|Q|}\int_{Q\Delta Q_k} |f(y)|\mathrm{d}y + \frac{1}{|Q|}\int_{Q_k} |f(y)|\mathrm{d}y \\ &\leqslant \frac{1}{|Q|}\int_Q |f_k(y)|\mathrm{d}y + \lambda\end{aligned}$$

中令$k \to \infty$,即可得证.

(ii) M是$L_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^n)$上的次线性算子,即对$f, g \in L_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^n)$,有

$$M(f+g)(x) \leqslant Mf(x) + Mg(x),$$

$$M(\alpha f)(x) = |\alpha| Mf(x), \quad \alpha \text{是常数}.$$

(iii) M是(∞,∞)型,即

$$\|Mf\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty.$$

§2 覆盖方法，H-L 极大算子在 $L^p(\boldsymbol{R}^n)$上的有界性

2.1 可数覆盖与弱(1,1)型

在本节中，我们将证明 H-L 极大算子 M 是从 L^1到弱 L^1空间 L^1_*上的有界算子，所用的方法是所谓的可数覆盖技术.

首先，让我们阐明以下事实：如果 $f\in L^1(\boldsymbol{R}^1)$，而 $f(x)$不是几乎处处等于零的，那么 $Mf\overline{\in}L^1(\boldsymbol{R}^1)$.

实际上，可选 N 充分大，使得

$$\int_{-N}^{N}|f(x)|\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{2}\|f\|_1.$$

再取 x，使得 $|x|\geqslant N$，且令 $I=[-2|x|,2|x|]$. 我们有

$$\begin{aligned}Mf(x)&\geqslant\frac{1}{|I|}\int_I|f(y)|\mathrm{d}y=\frac{1}{4|x|}\int_{-2|x|}^{2|x|}|f(y)|\mathrm{d}y\\&\geqslant\frac{1}{4|x|}\int_{-N}^{N}|f(y)|\mathrm{d}y\geqslant\frac{1}{8|x|}\|f\|_1.\end{aligned}$$

这说明对充分大的$|x|$，有

$$Mf(x)\geqslant\frac{C}{|x|},\quad C=\frac{1}{8}\|f\|_1>0.$$

上述议论启示我们去探求 $Mf(x)$的分布函数$|E_{Mf}(\lambda)|$的大小. 为此目的，按常规是用覆盖的方法. 例如对每一点 $x\in E_{Mf}(\lambda)$，可作一方体 Q，使 Q 包含 x，甚至考虑到 $E_{Mf}(\lambda)$是开集，还可使 $Q\subset E_{Mf}(\lambda)$. 即使如此，由于这样的覆盖(方体)族数量太大，致使无法估计其测度之总和. 克服这一困难的办法，就是从中选取一部分并仍保持某种覆盖性质. 下面介绍的著名 Besicovitch 覆盖定理正是这类所谓可数覆盖技术的一种，还有一些将在习题中谈及.

定理 1(Besicovitch 覆盖) 设 $E\subset\boldsymbol{R}^n$ 是一个有界集. 若对每一个 $x\in E$，存在方体 $Q=Q(x,r(x))$，则从中必可选出方体列$\{Q_k=Q(x_k,r(x_k))\}$，满足

(i) $\bigcup_k Q_k \supset E$;

(ii) $\sum_k \chi_{Q_k}(x) \leqslant \theta_n$, $x \in \boldsymbol{R}^n$,其中常数 θ_n 与 E 无关.

证明 不失一般性,可设

$$l_0 = \sup\{r(x): x \in E\} < \infty.$$

取 $x_1 \in E$,使得 $r(x_1) > (3/4)l_0$,并选定 $Q_1 = Q(x_1, r(x_1))$. 再令

$$l_1 = \sup\{r(x): x \in E \backslash Q_1\}.$$

取 $x_2 \in E \backslash Q_1$,使得 $r(x_2) > (3/4)l_1$,并选定 $Q_2 = Q(x_2, r(x_2))$,…,其中

$$l_{k-1} = \sup\left\{r(x): x \in E \backslash \bigcup_{i=1}^{k-1} Q_i\right\}, \quad x_k \in E \backslash \bigcup_{i=1}^{k-1} Q_i,$$

使得 $r(x_k) > (3/4)l_{k-1}$,并选定方体

$$Q_k = Q(x_k, r(x_k)),$$

…. 如此继续下去,可得 $\{Q_k\}$.

如果 $\{Q_k\}$ 是无穷列,那么必有

$$\lim_{k \to \infty} r(x_k) = 0.$$

事实上,若此结论不成立,则存在 $\varepsilon_0 > 0$ 以及子列 $\{k_i\}$,使得

$$r(x_{k_i}) > \varepsilon_0, \quad i = 1, 2, \cdots.$$

从而注意到

$$\frac{1}{3}Q_{k_i} \cap \frac{1}{3}Q_{k_j} = \varnothing \quad (i \neq j),$$

可知 $\bigcup_i (1/3)Q_{k_i}$ 的测度为 ∞. 但是,我们有

$$\bigcup_i \frac{1}{3}Q_{k_i} \subset \{x \in \boldsymbol{R}^n: d(x, E) \leqslant l_0\},$$

且知上式右端为有限测度集,这导致矛盾.

现在可以证明结论(i)了. 如果(i)不成立,即有 $x_0 \in E \backslash \bigcup_k Q_k \neq \varnothing$,那么根据题设就有 $r(x_0) > 0$. 这与选取过程和 $r(x_k) \to 0$ $(k \to \infty)$ 矛盾.

为证(ii),任取 $x\in \boldsymbol{R}^n$,并通过 x 作 n 个互相垂直的超平面,每个超平面均平行于坐标轴.这样,又把 $\boldsymbol{R}^n$ 划分为2^n 个(新的)象限.对于任意固定的一个象限来说,$\{Q_k\}$中凡是中心在此象限内且又包含点 x 的方体至多有一个.由此可知 $\theta_n=2^n$.

如果$\{Q_k\}$是有穷列,即存在自然数 N,使得

$$E\setminus\bigcup_{i=1}^{N}Q_i=\varnothing.$$

此时,(i),(ii)显然成立.

注 1 在上述定理中,如果 E 是无界集,但具有条件:

$$\sup\{r(x):\ x\in E\}<\infty,$$

那么结论仍然成立,只是常数 θ_n 要加以适当地改动,但仍只与 n 有关而与 E 无关.事实上,我们只需首先将 $\boldsymbol{R}^n$ 分解为可数个边长为定值 l 的互不相交的方体$\{Q^{(j)}\}$之并集,然后对每个有界集 $Q^{(j)}\cap E$ 应用上述定理,可得可数个方体$\{Q_i^{(j)}\}$.显然有

$$E\subset\bigcup_j\bigcup_i Q_i^{(j)}.$$

此外,不难证明,方体列$\{Q_i^{(j)}\}$对不同的点集 $Q^{(j)}\cap E$ 之相重数目仍是有限制的.

注 2 在上述定理中,如果覆盖族是由长方体组成,而且它们之间皆可互相比较的(即平移后可互相包含),那么结论仍然成立.

现在来证明极大算子 M 的弱(1,1)有界性.

定理 2 存在常数$C>0$,使对任意的$\lambda>0$以及 $f\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$,有

$$|\{x\in\boldsymbol{R}^n:\ Mf(x)>\lambda\}|\leqslant\frac{C}{\lambda}\|f\|_1,$$

其中 C 只与维数 n 有关.

证明 令 $E_{Mf}(\lambda)=\{x\in\boldsymbol{R}^n:\ Mf(x)>\lambda\}$,则根据 $Mf(x)$的定义,对每一个 $x\in E_{Mf}(\lambda)$,存在包含 x 的方体 Q',使得

$$\frac{1}{|Q'|}\int_{Q'}|f(y)|\,\mathrm{d}y>\lambda.$$

再作一方体 $Q=Q(x)$,它以 x 为中心且边长为 Q'的边长的两倍.

显然 $Q\supset Q'$，而且 $|Q|=2^n|Q'|$. 从而

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|\mathrm{d}y \geqslant \frac{|Q'|}{|Q|}\frac{1}{|Q'|}\int_{Q'}|f(y)|\mathrm{d}y > 2^{-n}\lambda. \qquad (1)$$

由 $f\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$以及 $|Q|\leqslant 2^n\lambda^{-1}\|f\|_1<\infty$，可知对于点集 $E_{Mf}(\lambda)$之覆盖族$\{Q(x)\}_{x\in E(\lambda)}$满足 Besicovitch 覆盖定理的条件(见前注1)，从而存在$\{Q_k\}$，

$$E_{Mf}(\lambda)\subset\bigcup_k Q_k,\quad \sum_k\chi_{Q_k}(x)\leqslant\theta_n.$$

注意到每一个 Q_k 都满足(1)，因此我们有

$$\begin{aligned}|E_{Mf}(\lambda)| &\leqslant \left|\bigcup_k Q_k\right|\leqslant\sum_k|Q_k|\\ &\leqslant\sum_k\frac{2^n}{\lambda}\int_{Q_k}|f(y)|\mathrm{d}y=\frac{2^n}{\lambda}\sum_k\int_{\boldsymbol{R}^n}|f(y)|\chi_{Q_k}(y)\mathrm{d}y\\ &=\frac{2^n}{\lambda}\int_{\boldsymbol{R}^n}|f(y)|\sum_k\chi_{Q_k}(y)\mathrm{d}y\leqslant\frac{2^n\theta_n}{\lambda}\|f\|_1.\end{aligned}$$

即得所证.

2.2 强(p,p)型$(1<p<\infty)$

对于 $1<p<\infty$，M 是(p,p)型的. 证明这一结论的方法，可利用一个改进了的弱性不等式进行直接估算.

引理 3 设 $f\in L_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^n)$，则对 $\lambda>0$有

$$|E_{Mf}(\lambda)|\leqslant\frac{C}{\lambda}\int_{E_f(\lambda/2)}|f(x)|\mathrm{d}x.$$

证明 对函数 f 作如下分解：$f=f_1+f_2$，

$$f_1(x)=\begin{cases}f(x), & |f(x)|>\dfrac{\lambda}{2},\\ 0, & |f(x)|\leqslant\dfrac{\lambda}{2},\end{cases}\qquad f_2=f-f_1.$$

显然有 $Mf(x)\leqslant Mf_1(x)+Mf_2(x)\leqslant Mf_1(x)+\lambda/2$，从而知

$$|E_{Mf}(\lambda)|\leqslant\left|\left\{x\in\boldsymbol{R}^n:\ Mf_1(x)>\frac{\lambda}{2}\right\}\right|$$

$$\leqslant \frac{2C}{\lambda}\int_{\boldsymbol{R}^n}|f_1(x)|\mathrm{d}x = \frac{2C}{\lambda}\int_{E_f(\lambda/2)}|f(x)|\mathrm{d}x.$$

定理 4 设 $1<p<\infty$，存在 $C=C(p)>0$，使得

$$\|Mf\|_p \leqslant C\|f\|_p, \quad f \in L^p(\boldsymbol{R}^n).$$

证明 应用上述引理，我们有

$$\begin{aligned}\int_{\boldsymbol{R}^n} Mf(x)^p\mathrm{d}x &= p\int_0^\infty \lambda^{p-1}|E_{Mf}(\lambda)|\mathrm{d}\lambda \\ &\leqslant 2C\cdot p\int_0^\infty \lambda^{p-2}\left\{\int_{E_f(\lambda/2)}|f(x)|\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}\lambda \\ &\leqslant 2C\cdot p\int_0^\infty \lambda^{p-2}\left\{\int_{\boldsymbol{R}^n}|f(x)|\chi_{E_f(\lambda/2)}(x)\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}\lambda \\ &= 2C\cdot p\int_{\boldsymbol{R}^n}|f(x)|\left\{\int_0^{2|f(x)|}\lambda^{p-2}\mathrm{d}\lambda\right\}\mathrm{d}x \\ &= 2C\left(2^{p-1}\frac{p}{p-1}\right)\int_{\boldsymbol{R}^n}|f(x)|^p\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

即得所证.

2.3 关于测度 μ 的 H-L 极大算子

前面讨论的 H-L 极大函数是以 Lebesgue 测度定义的，一个有用的推广是用测度 μ 给出的：

$$M_\mu f(x) = \sup_{x\in Q}\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q|f(y)|\mathrm{d}\mu(y),$$

这里，假定 μ 是 Borel 测度. 由于在论述算子 M 的许多性质中，曾多次用到一个初等事实，即 $|2Q|=2^n|Q|$，故为了获得类似的结果，我们还需假定 μ 具有所谓倍测度性质：存在常数 D，使对任意方体 Q，有

$$\mu(2Q) \leqslant D\cdot\mu(Q).$$

顺便指出，由 μ 的倍测度性质，还可进一步推出下述结果：对任意 $\alpha>0$，必存在 $\beta>0$，使得当两个方体 Q_1 与 Q_2 相交而且满足

$$|Q_1| \leqslant \alpha|Q_2|$$

时，则有

$$\mu(Q_1)\leqslant\beta\mu(Q_2).$$

实际上，记 Q_1，Q_2的边长为 r_1，r_2，则由条件知 $r_1\leqslant\alpha^{1/n}r_2$. 作以 x_2为中心的方体 Q，易知

$$Q(x_2,r_2+2\alpha^{\frac{1}{n}}r_2)\supset Q_1\cup Q_2.$$

由此即可导出 β，且结论成立.

此外，我们总是认定 $\mu(Q)>0$，$Q\subset\boldsymbol{R}^n$ 是任一方体，并且设有界集的测度总是有限的.

定理 5（M_μ 是弱$(L^1(\boldsymbol{R}^n,\mu),L^1(\boldsymbol{R}^n,\mu))$） 设 $f\in L_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^n,\mu)$，则对 $\lambda>0$有

$$\mu(\{x\in\boldsymbol{R}^n:M_\mu f(x)>\lambda\})\leqslant\frac{C}{\lambda}\|f\|_{L^1(\boldsymbol{R}^n,\mu)},$$

其中常数 C 与 λ，f 无关.

证明 类似于证明前述的 M 是弱(1,1)型的过程，这里不再重述.

此外，M_μ 还是$(L^p(\boldsymbol{R}^n,\mu),L^p(\boldsymbol{R}^n,\mu))$型，$1<p\leqslant\infty$.

§3 Lebesgue 微分定理与点态收敛的极大函数法

3.1 Lebesgue 微分定理

我们知道，对于 $f\in L_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^1)$，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\int_a^x f(y)\mathrm{d}y\right\}=f(x),\quad \text{a.e. } x\in\boldsymbol{R}^1.$$

这一结果在微积分理论中占有重要地位. 然而要把这一微分定理推广到 $\boldsymbol{R}^n$ 上，情况就变得复杂了. 首先，这是一个点态极限的问题，如果采用一般的不定积分，那么就要处理 n 个变量的多元极限过程，致使该结论不再成立. 因此，我们就转而考虑其中最简单的一种情形，即在各个方向上同步逼近，也就是说讨论在方体上的不定积分. 此时，Lebesgue 微分定理就归结为研究函数族

$$L_r f(x) = \frac{1}{|Q(x,r)|}\int_{Q(x,r)} f(y)\mathrm{d}y$$

当 $r\to 0$ 时极限是否存在以及等于什么的问题?

首先,我们知道,如果 $f(x)$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 上的连续函数,那么必有

$$\lim_{r\to 0} L_r f(x) = f(x), \quad x \in \boldsymbol{R}^n.$$

其次,对一般情形,我们有下述定理:

定理 6 设 $f\in L_{\text{loc}}(\boldsymbol{R}^n)$,则

(i) 极限

$$\lim_{r\to 0} L_r f(x)$$

是几乎处处存在的;

(ii) $\lim\limits_{r\to 0} L_r f(x) = f(x)$, a.e. $x\in\boldsymbol{R}^n$;

(iii) $|f(x)|\leqslant Mf(x)$, a.e. $x\in\boldsymbol{R}^n$.

证明 因为在 $\boldsymbol{R}^n$ 上的几乎处处收敛问题可以归结为球 $B(0,N)$ 内的几乎处处收敛问题,所以不妨假定 $f\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$.

(i) 令

$$\Omega f(x) = \overline{\lim_{r\to 0}}\, L_r f(x) - \underline{\lim_{r\to 0}}\, L_r f(x),$$

显然有 $|\Omega f(x)|\leqslant 2\sup\limits_{r>0}|L_r f(x)|\leqslant 2Mf(x)$. 我们的目的是要证明点集

$$\{x\in\boldsymbol{R}^n;\ \Omega f(x)>0\}$$

为零测集,实际上只需证明对任意的 $\lambda>0$,

$$(\Omega f)_*(\lambda) = |\{x\in\boldsymbol{R}^n:\ \Omega f(x)>\lambda\}|$$

为零即可. 为此,对任给的 $\varepsilon>0$,作分解 $f(x)=g(x)+h(x)$,其中 $g(x)$ 为具有紧支集的连续函数,而 $\|h\|_1<\varepsilon$. 由于

$$\Omega f(x)\leqslant \Omega g(x)+\Omega h(x) = \Omega h(x),$$

故知 $(\Omega f)_*(\lambda)\leqslant(\Omega h)_*(\lambda)\leqslant(Mh)_*(\lambda/2)$. 根据算子 M 的弱(1,1)型,可得

$$(\Omega f)_*(\lambda)\leqslant\frac{2C}{\lambda}\|h\|_1<\frac{2C}{\lambda}\varepsilon.$$

由 ε 的任意性，我们有

$$(\Omega f)_*(\lambda) = 0.$$

(ii) 首先，根据可积函数的积分连续性，我们有

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0}\|L_r f - f\|_1 &= \lim_{r\to 0}\int_{\boldsymbol{R}^n}\left|\frac{1}{|Q(x,r)|}\int_{Q(x,r)} f(y)\mathrm{d}y - f(x)\right|\mathrm{d}x \\ &= \lim_{r\to 0}\int_{\boldsymbol{R}^n}\frac{1}{|Q(0,r)|}\left|\int_{Q(0,r)}[f(x-y) - f(x)]\mathrm{d}y\right|\mathrm{d}x \\ &\leqslant \lim_{r\to 0}\frac{1}{|Q(0,r)|}\int_{Q(0,r)}\left\{\int_{\boldsymbol{R}^n}|f(x-y) - f(x)|\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}y = 0.\end{aligned}$$

由此知存在 $\{L_r f(x)\}$ 中的子列几乎处处收敛于 $f(x)$. 注意到(i)中的结论，可知

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{|Q(x,r)|}\int_{Q(x,r)} f(y)\mathrm{d}y = f(x), \quad \text{a.e. } x\in\boldsymbol{R}^n.$$

(iii) 由(ii)直接推出.

注 1 若 $x\in\boldsymbol{R}^n$ 满足

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{|Q(x,r)|}\int_{Q(x,r)} f(y) - f(x)|\mathrm{d}y = 0,$$

则称 x 为 f 的 Lebesgue 点. 因此，上述定理告诉我们：$\boldsymbol{R}^n$ 中几乎处处都是 $f\in L^1$ 的 Lebesgue 点.

注 2 上述定理是针对以 x 为中心的方体而言的，实际上，对非中心的情形也有同样的结论. 设 $x\in Q$，记 $Q\searrow x$ 表示方体 Q 逐渐缩小到 x 的过程，则对 $f\in L_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^n)$ 有

$$\lim_{Q\searrow x}\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|\mathrm{d}y = f(x), \quad \text{a.e. } x\in\boldsymbol{R}^n.$$

这只需注意到当 Q' 是以 x 为中心且以 Q 的边长之两倍为边长时，可得不等式

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y) - f(x)|\mathrm{d}y \leqslant 2^n\frac{1}{|Q'|}\int_{Q'}|f(y) - f(x)|\mathrm{d}y.$$

此外，对于 H-L 球形极大函数以及 $M_\mu f(x)$，Lebesgue 微分定理也仍是成立的.

3.2 点态收敛的极大函数法

问题 设有定义在 $L^p(\boldsymbol{R}^n)$ 上的算子列 $\{T_r\}_{r>0}$，问极限 $\lim\limits_{r\to 0}T_rf(x)$ 是否几乎处处存在？如果极限存在并记为 $Tf(x)$，那么 T 有什么性质？

我们假定：对于 $L^p(\boldsymbol{R}^n)$ 中的一个稠密集 S，对几乎处处的 $x\in\boldsymbol{R}^n$，总有

$$\lim_{r\to 0}T_rg(x) = Tg(x),\quad g\in S. \tag{2}$$

为使这一结论能推广于 $L^p(\boldsymbol{R}^n)$，我们采用所谓极大函数法，也就是在证明 Lebesgue 微分定理时所使用的方法. 令

$$T^*f(x) = \sup_{r>0}|T_rf(x)|,\quad f\in L^p(\boldsymbol{R}^n),$$

$T^*f(x)$ 称为 $\{T_rf(x)\}$ 的极大函数，T^* 称为极大算子. 又记

$$\Omega f(x) = \overline{\lim_{r\to 0}}T_rf(x) - \underline{\lim_{r\to 0}}T_rf(x).$$

显然，$\Omega f(x)\leqslant 2T^*f(x)$. 为证(2)式对 $f\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$ 成立，只需指出对任意的 $\lambda>0$，有

$$(\Omega f)_*(\lambda) = |\{x\in\boldsymbol{R}^n:\Omega f(x)>\lambda\}| = 0.$$

对任给 $\varepsilon>0$，取 $g\in S$，使得

$$\|f-g\|_p<\varepsilon,$$

于是从 $\Omega f(x)\leqslant\Omega g(x)+\Omega(f-g)(x)$ 得到

$$\Omega f(x)\leqslant\Omega(f-g)(x)\leqslant 2T^*(f-g)(x).$$

由此知

$$(\Omega f)_*(\lambda)\leqslant|\{x\in\boldsymbol{R}^n: T^*(f-g)(x)>\lambda/2\}|.$$

至此，若再假定 T^* 是弱 (p,p) 型的，即

$$(T^*f)_*(\lambda)\leqslant\left(\frac{C}{\lambda}\|f\|_p\right)^p, \tag{3}$$

则可得

$$(\Omega f)_*(\lambda)\leqslant\left(\frac{C}{\lambda}\|f-g\|_p\right)^p<\left(\frac{C}{\lambda}\varepsilon\right)^p.$$

由 ϵ 的任意性即得 $(\Omega f)_*(\lambda)=0$.

从上面的分析可以看出，极大函数方法的要点在于(2)，(3)两条假设.

现在，假定已经证得：对几乎处处的 $x\in \boldsymbol{R}^n$，有

$$\lim_{r\to 0} T_r f(x) = Tf(x),$$

那么由于 $|T_r f(x)|\leqslant T^* f(x)$（一切 $r>0$），故知

$$|Tf(x)| \leqslant T^* f(x), \quad \text{a.e. } x \in \boldsymbol{R}^n,$$

而且 T 是弱(p,p)型. 此外，若 T^* 是(p,p)型，则有

$$\lim_{r\to 0}\|T_r f - f\|_p = 0.$$

下面以 $f\in L^2([0,2\pi])$的 Fourier 级数为例，以示极大函数与点态收敛的某种联系. 这一结果属于 Calderón，他先于 Carleson (1966)研究 L^2中函数的 Fourier 级数之几乎处处收敛问题. 为此，先给一个引理：

引理 7(**Calderón**)　设$\{E_k\}$是 $T=(-\pi,\pi]$中的子集列，满足

$$\sum_{k=1}^{+\infty}|E_k| = +\infty,$$

则存在$\{x_k\}\subset T$，使得 T 中几乎每一个点 x 属于点集列$\{x_k+E_k\}$中的无穷多个.

证明　为阐明结论为真，就是要从 T 中选出点列$\{x_k\}$，使得点集列$\{x_k+E_k\}$的上限集之补集

$$\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}(x_k+E_k)\Big)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}(x_k+E_k)^c$$

为零测集，也就是要证明对每个 n，有

$$\Big|\bigcap_{k=n}^{\infty}F_k\Big| = 0, \quad F_k = T\setminus(x_k+E_k).$$

考虑 $n=1$，并估计有限个 F_k 的交

$$F = \bigcap_{k=1}^{m}F_k$$

的测度. 我们作 F 的特征函数 $\chi_F(t)$，显然

$$\chi_F(t) = \chi_{F_1}(t - x_1)\cdots\chi_{F_m}(t - x_m),$$

其中 $x_1,\cdots,x_m$ 是待定的点组. 从而知

$$\begin{aligned}|F| &= \int_T \chi_F(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_T \chi_{F_1}(t - x_1)\cdots\chi_{F_m}(t - x_m)\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{4}$$

若视 χ_F 为 $m+1$ 个变量 $t,x_1,\cdots,x_m$ 的函数,并作积分

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(2\pi)^m}\int_{T^{m+1}}\chi_F(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_m \\ &= \int_T\left\{\frac{1}{2\pi}\int_T\chi_{F_1}(t - x_1)\mathrm{d}x_1\right\}\cdots\left\{\frac{1}{2\pi}\int_T\chi_{F_m}(t - x_m)\mathrm{d}x_m\right\}\mathrm{d}t \\ &= 2\pi\left[\prod_{k=1}^{m}\left(1 - \frac{|E_k|}{2\pi}\right)\right] \to 0\ (m\to\infty).\end{aligned} \tag{5}$$

(注意$\sum_k |E_k| = +\infty$)因此,可取 m_1使得

$$(5)\text{ 式右端} < 1/2,$$

且易知可从 T 中选出 $x_1,x_2,\cdots,x_m$,使得

$$|F| < 1/2.$$

这是因为如果每个 $x_i(i=1,2,\cdots,m)$在取遍 T 中任一点时,有 $|F|\geqslant 1/2$,那么对(4)式积分所导出的(5)式(还有常数)就有

$$(5)\text{ 的左端} \geqslant 1/2.$$

这与(5)式右端结论矛盾.

于是,我们得到了点组 $x_1^{(1)},x_2^{(1)},\cdots,x_{m_1}^{(1)}$,使得

$$\left|\bigcap_{k=1}^{m_1}(T\setminus(x_k^{(1)} + E_k))\right| < \frac{1}{2}.$$

一般说来,可在 T 中选出点组

$$x_{m_{(j-1)}+1}^{(j)},\cdots,x_{m_j}^{(j)},$$

使得

$$\left|\bigcap_{k=m_{(j-1)}+1}^{m_j}(T\setminus(x_k^{(j)} + E_k))\right| < \frac{1}{2^j},$$

$$j = 2,3,\cdots;\quad m_j\to\infty.$$

现在，对每个 n，有 $m_{j-1}>n$，使得

$$\left|\bigcap_{n}^{\infty}F_k\right|\leqslant\left|\bigcap_{m_{j-1}+1}^{m_j}F_k\right|<\frac{1}{2^j}.$$

由此即知引理成立.

定理 8 设 $f\in L^2(T)$ 且是以 2π 为周期的函数，记其 Fourier 级数的部分和为

$$S_nf(x)=\sum_{k=-n}^{n}c_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx},$$

其极大函数为

$$S^*f(x)=\sup_{n\geqslant 1}|S_nf(x)|,$$

则 $S_nf(x)$ 几乎处处收敛的充分必要条件是：S^* 是弱(2,2)型.

证明 根据前述的理论，充分性显然，下面阐明必要性，且使用反证法.

假定 S^* 不是弱(2,2)型，即对每个 $C>0$，存在 $f_C\in L^2(T)$，$\|f_C\|_2=1$ 以及 $\lambda_C>0$，使得

$$|\{x\in T:S^*f_C(x)>\lambda_C\}|>C/\lambda_C^2.$$

(i) 我们选择 $C_n\to\infty(n\to\infty)$ 以及三角多项式(注意，三角多项式族在 $L^2(T)$ 中稠密)P_n，$\|P_n\|_2=1$，还有 $\lambda_n>0$，使得

$$2\pi\geqslant|\{x\in T:S^*P_n(x)>\lambda_n\}|>C_n/\lambda_n^2.$$

显然有 $\lambda_n\to+\infty\ (n\to\infty)$.

(ii) 再从 $\{\lambda_n\}$ 中选取一个新序列 $\{\lambda_{n_k}\}$，其中自然数 n_k 满足

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\lambda_{n_k}^2}<\infty,\quad\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{C_{n_k}}{\lambda_{n_k}^2}=\infty.\tag{6}$$

这一构造方法如下：

首先，取 n_1^*，使得 $C_{n_1^*}\geqslant 2^1$. 注意到 $C_{n_1^*}/\lambda_{n_1^*}^2\leqslant 2\pi$，又取 k_1 使得

$$1\leqslant k_1\frac{C_{n_1^*}}{\lambda_{n_1^*}^2}<2\pi.$$

从而就定出新序列前 k_1 个项为(相同)

$$\lambda_{n_1^*},\ \lambda_{n_1^*},\ \cdots,\ \lambda_{n_1^*}.$$

其次，取 $n_2^* > n_1^*$，使得 $C_{n_2^*} \geqslant 2^2$. 同理取 k_2 使得

$$1 \leqslant k_2 \frac{C_{n_2^*}}{\lambda_{n_2^*}^2} < 2\pi,$$

从而又可定出新序列的后继 k_2 个项(相同)

$$\lambda_{n_2^*},\ \lambda_{n_2^*},\ \cdots,\ \lambda_{n_2^*}.$$

如此继续作下去，并记新序列为 $\{\lambda_{n_k}\}$，易知(6)成立.

此外，若记

$$E_k = \{x \in T:\ S^* P_{n_k}(x) > \lambda_{n_k}\},$$

则有

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |E_k| = +\infty.$$

(iii) 选择快速递增的自然数子列 $\{m_k\}$，使得三角多项式列

$$e^{im_k x} P_{n_k}(x), \quad k = 1, 2, \cdots$$

都是不同阶的，又根据引理 7 选择 T 中点列 $\{x_k\}$，并作级数

$$S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{im_k x} P_{n_k}(x - x_k) \frac{1}{\lambda_{n_k}}.$$

因为我们知道

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_{n_k}^2} < \infty, \quad \|P_{n_k}\|_2 = 1,$$

所以不难推出(对任意 p, q)

$$\left\| \sum_{k=p+1}^{q} e^{im_k \cdot} P_{n_k}(\cdot - x_k) \right\|_2 = \sum_{k=p+1}^{q} \frac{1}{\lambda_{n_k}^2}.$$

这说明 $S(x)$ 是某个函数 $f \in L^2(T)$ 的 Fourier 级数.

(iv) 若 $x - x_k \in E_k$，则由 E_k 的定义可知

$$S^* P_{n_k}(x - x_k) > \lambda_{n_k}.$$

因此，在 Fourier 级数 $S(x)$ 的尾项中之任一完全段其绝对值均大于1. 但另一方面，根据引理 7，T 中几乎每个 x 均属于点集列 $\{x_k + E_k\}$ 中的无穷多个. 这说明对几乎每个 x，$S(x)$ 不收敛，矛盾.

必要性成立.

§4　逼近恒等,Poisson 积分与调和函数的边值

H-L 极大函数的重要应用之一是它以控制函数的方式联系着其他算子值函数,这一点应归功于 $Mf(x)$ 是在平均值意义下取得极大. 在本节中,我们将通过逼近恒等的问题来谈谈这一方面的内容. 最后扼要介绍 Poisson 积分与调和函数的边值问题.

4.1　逼近恒等

定理 9　设 $\varphi\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$,且是非负递减的向径函数($\varphi(x)=\varphi(|x|)$). 令 $\varphi_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$,$\varepsilon>0$,以及

$$\Phi^* f(x)=\sup_{\varepsilon>0}\left|\int_{\boldsymbol{R}^n}\varphi_\varepsilon(x-y)f(y)\mathrm{d}y\right|,$$

则存在常数 C,使得

$$\Phi^* f(x)\leqslant C\|\varphi\|_1 Mf(x).$$

证明　(i) 为了能够充分利用函数的递减性,在估计中应将整体分割为部分的总和. 其次,应注意对向径函数在 $\boldsymbol{R}^n$ 上的积分实质上只是在 $(0,\infty)$ 上的积分. 我们有

$$\|\varphi\|_1=\int_{\boldsymbol{R}^n}\varphi(|x|)\mathrm{d}x=\omega_n\int_0^\infty\varphi(r)r^{n-1}\mathrm{d}r,$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\varphi(2^k)\frac{2^{kn}-2^{(k-1)n}}{n}&=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\varphi(2^k)\int_{2^{k-1}}^{2^k}r^{n-1}\mathrm{d}r\\&\leqslant\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{2^{k-1}}^{2^k}\varphi(r)r^{n-1}\mathrm{d}r\\&=\int_0^\infty\varphi(r)r^{n-1}\mathrm{d}r=\omega_n^{-1}\|\varphi\|_1.\end{aligned}$$

(ii) $$\left|\int_{\boldsymbol{R}^n}\varphi_\varepsilon(x-y)f(y)\mathrm{d}y\right|\leqslant\varepsilon^{-n}\int_{\boldsymbol{R}^n}|f(x-y)|\varphi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)\mathrm{d}y$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{-n} \int_{2^k < |y| \leqslant 2^{k+1}} |f(x-y)| \varphi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) dy$$

$$\leqslant \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{-n} \varphi\left(\frac{2^k}{\varepsilon}\right) \int_{B(0,2^{k+1})} |f(x-y)| dy$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2^{(k+1)n}}{\varepsilon^n} \varphi\left(\frac{2^k}{\varepsilon}\right) \frac{1}{2^{(k+1)n}} \int_{B(0,2^{k+1})} |f(x-y)| dy$$

$$\leqslant \frac{2^n n C_n}{(1-2^{-n})} \cdot Mf(x) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi\left(\frac{2^k}{\varepsilon}\right) \frac{1}{n} \left(\frac{2^{kn}}{\varepsilon^n} - \frac{2^{(k-1)n}}{\varepsilon^n}\right)$$

$$\leqslant C \cdot \omega_n^{-1} \|\varphi\|_1 \cdot Mf(x). \text{(}C\text{ 只与 }n\text{ 有关)}$$

从而可知

$$\Phi^* f(x) \leqslant C\|\varphi\|_1 Mf(x).$$

上述定理要求核 φ 是递减的向径函数，在这些条件不满足时，还有下面的补充结果.

推论 设 $\varphi \in L^1(\boldsymbol{R}^n)$，作函数

$$\psi(x) = \sup_{|y| \geqslant |x|} \{|\varphi(y)|\},$$

称为 φ 的非负递减的最小向径控制函数. 若 $\psi \in L^1(\boldsymbol{R}^n)$，则

$$\Phi^* f(x) \leqslant C\|\psi\|_1 Mf(x).$$

证明 只需注意到

$$\Phi^* f(x) \leqslant \Psi^*(|f|)(x) \leqslant C\|\psi\|_1 Mf(x)$$

即可，其中

$$\Psi^* f(x) = \sup_{\varepsilon>0} |\psi_\varepsilon * f(x)|.$$

现在可以给出逼近恒等的一个结果了.

定理 10 设 $\varphi \in L^1(\boldsymbol{R}^n)$，且 $\|\varphi\|_1 = 1$，φ 的非负递减的最小向径控制函数 $\psi \in L^1(\boldsymbol{R}^n)$，则对 $f \in L^p(\boldsymbol{R}^n)$，$p \geqslant 1$，有

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varphi_\varepsilon * f(x) = f(x), \quad \text{a.e. } x \in \boldsymbol{R}^n.$$

证明 首先，对 L^p 中的具有紧支集的连续函数，易知结论是成立的. 其次，由上述推论知道，

$$\Phi^* f(x) \leqslant C\|\psi\|_1 Mf(x).$$

因此，Φ^* 是弱(p,p)的，定理得证.

例（Cesaro 求和） 设 $f(x)$是 $\boldsymbol{R}^1$上以2π 为周期的可积函数，记其 Fourier 级数的部分和为

$$S_n(f;x) = \sum_{|j|\leqslant n} c_j e^{ijx},$$

其中 c_j 是 f 的 Fourier 系数. 作 Cesaro 和

$$\begin{aligned}\sigma_n(f;x) &= \frac{1}{n+1}\{S_0(f;x) + S_1(f;x) + \cdots + S_n(f;x)\}\\ &= \varphi_n * f(x),\end{aligned}$$

其中

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2.$$

$\varphi_n(x)$称为 Fejér 核，满足$\|\varphi\|_1=1$以及

$$\varphi_n(x) \leqslant \frac{2\pi}{2(n+1)x^2}, \quad 0 \leqslant |x| \leqslant \pi.$$

现在，作偶函数 ψ，其中

$$\psi(x) = \chi_{[0,1]}(-x) + \frac{1}{x^2}\chi_{(1,\infty)}(x), \quad x \in [0,\infty).$$

显然 $\psi\in L^1(\boldsymbol{R}^1)$且是非负递减的向径函数，且有

$$\varphi_n(x) \leqslant C \cdot n^{-1}\psi(nx).$$

从而我们有

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n(f;x) = f(x), \quad \text{a. e. } x \in \boldsymbol{R}^1.$$

4.2 Poisson 积分与调和函数的边值

考察在半空间 $\boldsymbol{R}_+^{n+1}=\{(x,t):x\in\boldsymbol{R}^n,t>0\}$上的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}\Delta u(x,t) = \Delta_x u(x,t) + \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0,\\ u(x,0) = f(x)\end{cases}$$

的解. 用 Fourier 变换，记 $\widehat{u(\cdot,t)}(\xi)=h(\xi,t)$，可得方程

$$\begin{cases} -4\pi^2|\xi|^2 h(\xi,t)+\dfrac{\partial^2 h(\xi,t)}{\partial t^2}=0, \\ h(\xi,0)=\hat{f}(\xi). \end{cases}$$

在 $t\to\infty$ 时有界的条件下，此常系数线性常微分方程有惟一解

$$h(\xi,t)=\hat{f}(\xi)e^{-2\pi|\xi|t}.$$

设其逆 Fourier 变换为 $u(x,t)$：

$$u(x,t)=\int_{\boldsymbol{R}^n}\hat{f}(\xi)e^{-2\pi|\xi|t}e^{2\pi i\xi\cdot x}d\xi,$$

并期望它是原方程的解. 根据第一章 §4 可知：若记 $P(x)$ 为 $\exp(-2\pi|x|)$ 的 Fourier 变换，则 $\exp(-2\pi t|\xi|)$ 的 Fourier 变换为

$$P_t(x)=t^{-n}P\left(\frac{x}{t}\right),\quad P(x)=C_n\frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}},$$

而 $\exp(-2\pi t|x|)\cdot\exp(2\pi i x\cdot y)$ 关于变量 x 在 $\boldsymbol{R}^n$ 上的 Fourier 变换则是 $P_t(x-y)=P_t(y-x)$. 因此，根据乘法公式可得

$$u(x,t)=\int_{\boldsymbol{R}^n}f(\xi)P_t(x-\xi)d\xi=P_t*f(x),$$

或写成

$$u(x,t)=C_n\cdot t\int_{\boldsymbol{R}^n}\frac{1}{(t^2+|x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}}f(y)dy.$$

我们称 $P_t(x)$ 为 Poisson 核（$\boldsymbol{R}_+^{n+1}$ 上），$P_t*f(x)$ 称为 f 的 Poisson 积分. 易知下述性质成立：

(i) $P(x)$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 上的非负递减的向径函数；

(ii) $\int_{\boldsymbol{R}^n}P_t(x)dx=1$, $t>0$;

(iii) $P_t(x)$ 是 $\boldsymbol{R}_+^{n+1}$ 上的调和函数.

综合以上所述，我们有下述意义下的关于 $\boldsymbol{R}_+^{n+1}$ 上的 Dirichlet 问题的解：$f\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$,

$$\lim_{t\to0}u(x,t)=\lim_{t\to0}P_t*f(x)=f(x),\quad \text{a.e. } x\in\boldsymbol{R}^n.$$

关于在边界上 Poisson 积分的点收敛问题，实际上还有更强

的结论：非切向收敛.

对于 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个点 x 以及 $m>0$，我们称点集

$$\Gamma_m(x)=\{(y,t)\in \boldsymbol{R}_+^{n+1}:|y-x|<mt\}$$

是以 x 为顶点且口径为 m 的(开)锥.

定义 设 $u(y,t)$ 是定义在 $\boldsymbol{R}_+^{n+1}$ 上的函数，$x\in\boldsymbol{R}^n$. 对每一个 m，若点 (y,t) 在 $\Gamma_m(x)$ 中当 $t\to 0$ 时(即 $(y,t)\to(x,0)$)，$u(y,t)$ 趋于值 l，则称 $u(y,t)$ 当 $t\to 0$ 时是以**非切向收敛**于 l 的，并记为

$$u(y,t)\to l,\quad (y,t)\xrightarrow{\text{N.T.}}(x,0).$$

为了讨论 Poisson 积分，自然还是要考察极大函数

$$P_{\nabla,m}^*f(x)=\sup_{(y,t)\in\Gamma_m(x)}|P_t*f(x)|,$$

并且企图用 H-L 极大函数来控制. 为此，引进下述极大函数：

$$Mf(x,t)=\sup\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(y)|\mathrm{d}y: Q\text{ 包含 }x\text{ 且边长 }\geqslant t\right\},$$

其中 $t>0$. 不难证明

$$|P_t*f(x)|\leqslant C\cdot Mf(x,t).$$

实际上，我们有

$$\begin{aligned}
&|P_t*f(x)|\\
&\leqslant C_n\int_{|y-x|\leqslant t}\frac{t}{(t^2+|x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}}|f(y)|\mathrm{d}y\\
&\quad+C_n\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{2^kt<|y-x|\leqslant 2^{k+1}t}\frac{t}{(t^2+|x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}}|f(y)|\mathrm{d}y\\
&\leqslant C_n\left\{\frac{1}{t^n}\int_{|y-x|\leqslant t}|f(y)|\mathrm{d}y+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t}{(2^kt)^{n+1}}\int_{|y-x|<2^{k+1}t}|f(y)|\mathrm{d}y\right\}\\
&\leqslant C_n\left\{Mf(x,t)+2^n\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k}\cdot Mf(x,t)\right\}\\
&\leqslant C\cdot Mf(x,t).
\end{aligned}$$

引理 11 $P_{\nabla,m}^*f(x)\leqslant C_m\cdot Mf(x),\ x\in\boldsymbol{R}^n$.

证明 设 $(y,t)\in\Gamma_m(x)$，$x\in\boldsymbol{R}^n$. 若 Q 是包含点 $y\in\boldsymbol{R}^n$ 且边长

$\geqslant t$ 的方体，则因 $|y-x|<mt$，所以有 $x\in(2m+1)Q$. 从而得

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(z)|\mathrm{d}z\leqslant\frac{(2m+1)^n}{|(2m+1)Q|}\int_{(2m+1)Q}|f(z)|\mathrm{d}z$$
$$\leqslant(2m+1)^n Mf(x).$$

由此知 $Mf(y,t)\leqslant(2m+1)^n Mf(x)$. 联系前面已证的不等式，即知

$$P_{\nabla,m}^* f(x)\leqslant C_m Mf(x).$$

在这一引理的基础上，用前面所讨论的极大函数法，立即可得下述非切向收敛的结论：

定理 12 设 $f\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$，$p\geqslant1$，则

$$P_t*f(y)\to f(x),\quad (y,t)\xrightarrow{\text{N.T.}}x,\quad \text{a.e.}\ x\in\boldsymbol{R}^n.$$

4.3 Poisson 积分的特征

从 § 4 第 2 小节得知，对 $f\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$，$1<p<\infty$，其 Poisson 积分 $u(x,t)=P_t*f(x)$ 是 $\boldsymbol{R}_+^{n+1}$ 上以 f 为边值的调和函数. 此时，显然有

$$\int_{\boldsymbol{R}^n}|u(x,t)|^p\mathrm{d}x\leqslant\|f\|_p^p,\quad t>0.$$

实际上，这一有界性条件还刻画出 Poisson 积分的特征. 为了阐明这一点，在第一章调和函数的某些性质的基础上，我们还要介绍以下几个结果再做准备.

引理 13 设 $u(x,t)$ 在 $\boldsymbol{R}_+^{n+1}=\{(x,t)\in\boldsymbol{R}^{n+1}:\ x\in\boldsymbol{R}^n,t>0\}$ 上调和，且存在 C：$0<C<\infty$ 以及 p：$1\leqslant p\leqslant\infty$，使得

$$\|u(\cdot,t)\|_p\leqslant C,\quad 一切\ t>0,$$

则存在常数 $A=A(n,p)$，使得

$$\|u(\cdot,t)\|_\infty=\sup_{x\in\boldsymbol{R}^n}|u(x,t)|\leqslant ACt^{-\frac{n}{p}},\quad t>0.$$

证明 在 $\boldsymbol{R}_+^{n+1}$ 上应用平均值性质，可得

$$u(x,t)=u(x,t)\cdot(n+1)\left(\frac{t}{2}\right)^{-(n+1)}\int_0^{t/2}r^n\mathrm{d}r$$

$$= (n+1)\left(\frac{t}{2}\right)^{-(n+1)}\frac{1}{\omega_{n+1}}$$

$$\times\int_0^{t/2}\left\{\int_{\Sigma_{n-1}}u(x_1+ry_1',\cdots,x_n+ry_n',t+rs')\mathrm{d}y'\right\}r^n\mathrm{d}r$$

$$=\frac{2^{n+1}}{t^{n+1}}\frac{1}{\Omega_{n+1}}\int_{|y|\leqslant t/2}u(x_1+y_1,\cdots,x_n+y_n,t+s)\mathrm{d}t,$$

其中 ω_{n+1}和 Σ_{n+1}表示 $\boldsymbol{R}^{n+1}$中之单位球面积和单位球面，$y=(y_1,\cdots,y_n,s)$. 从而得

$$|u(x,t)|\leqslant\left(\frac{2}{t}\right)^{n+1}\frac{1}{\Omega_{n+1}}\int_{|(x,y)-(\xi,\eta)|\leqslant t/2}|u(\xi,\eta)|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta,$$

其中$(\xi,\eta)=(x_1+y_1,\cdots,x_n+y_n,t+s)$，$\Omega_{n+1}$表示 $\boldsymbol{R}^{n+1}$中单位球体积. 根据 Hölder 不等式，有

$$|u(x,t)|\leqslant\left(\frac{2}{t}\right)^{n+1}\frac{1}{\Omega_{n+1}}\left\{\int_{|(x,y)-(\xi,\eta)|\leqslant t/2}|u(\xi,\eta)|^p\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\right\}^{1/p}$$

$$\times\left(\Omega_{n+1}\left(\frac{t}{2}\right)^{n+1}\right)^{1/p'}$$

$$\leqslant\left(\frac{2}{t}\right)^{\frac{n+1}{p}}\Omega_{n+1}^{-\frac{1}{p}}\left\{\int_{t/2}^{3t/2}\left(\int_{\xi\in\boldsymbol{R}^n}|u(\xi,\eta)|^p\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\eta\right\}^{1/p}$$

$$\leqslant\left(\frac{2}{t}\right)^{\frac{n+1}{p}}\Omega_{n+1}^{-\frac{1}{p}}\left\{\int_{t/2}^{3t/2}C^p\mathrm{d}\eta\right\}^{1/p}=\left(\frac{2^{n+1}}{\Omega_{n+1}}\right)^{1/p}Ct^{-\frac{n}{p}}.$$

令 $A=(2^{n+1}/\Omega_{n+1})^{1/p}$即得所证.

引理 14 设$u(x,t)$在$\boldsymbol{R}_+^{n+1}$上调和，且在$\boldsymbol{R}_+^{n+1}$内的一切半真子空间上均有界，则

$$\int_{\boldsymbol{R}^n}P_{t_2}(x-y)u(y,t_1)\mathrm{d}y=u(x,t_1+t_2).$$

证明 对任意固定的 $t_0>0$，记

$$V(x,t)=u(x,t+t_0),\quad t\geqslant 0,$$

$$W(x,t)=\int_{\boldsymbol{R}^n}P_t(x-y)u(y,t_0)\mathrm{d}y,\quad (x,t)\in\boldsymbol{R}_+^{n+1}.$$

我们只需指出 V 与 W 相同.

显然，V 是 $\boldsymbol{R}_+^{n+1}$ 上的连续、有界的调和函数. 又令

$$W(x,0)=u(x,t_0),$$

则 $W(x,t)$是$\overline{\boldsymbol{R}_+^{n+1}}$上的连续、有界函数，且在 $\boldsymbol{R}_+^{n+1}$ 上调和. 从而知道函数

$$U=V-W$$

在 $\boldsymbol{R}_+^{n+1}$ 上调和，且在$\overline{\boldsymbol{R}_+^{n+1}}$上连续、有界，还有

$$U(x,0)=0,\quad x\in\boldsymbol{R}^n.$$

于是，根据第一章定理 26 的推论，可知

$$V(x,t)=W(x,t),\quad (x,t)\in\boldsymbol{R}_+^{n+1}.$$

现在，可以给出主要结果了.

定理 15 设 $u(x,t)$是 $\boldsymbol{R}_+^{n+1}$上的调和函数，且存在$C>0$，以及 p：$1<p\leqslant\infty$，使得

$$\|u(\cdot,t)\|_p\leqslant C,\quad t>0,$$

则 $u(x,t)$是某个函数 $f\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$的 Poisson 积分.

证明 因为任一 Banach 空间的对偶空间中之单位球是弱 * 紧的(Banach-Alaoglu 定理)，所以存在 $f\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$以及 $t_k\to0(k\to\infty)$，使得函数列$\{u(\cdot,t_k)\}$弱收敛于 f，即对每一个 $g\in L^{p'}(\boldsymbol{R}^n)$，$1/p+1/p'=1$，有

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\boldsymbol{R}^n}u(x,t_k)g(x)\mathrm{d}x=\int_{\boldsymbol{R}^n}f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

因为 $P_t\in L^{p'}(\boldsymbol{R}^n)$，$t>0$，所以我们有

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\boldsymbol{R}^n}P_t(x-y)u(y,t_k)\mathrm{d}y=\int_{\boldsymbol{R}^n}P_t(x-y)f(y)\mathrm{d}y.$$

但由引理14可知

$$\int_{\boldsymbol{R}^n}P_t(x-y)u(y,t_k)\mathrm{d}y=u(x,t+t_k),$$

又有 $$\lim_{k\to\infty}u(x,t+t_k)=u(x,t).$$

从而得到 $$u(x,t)=\int_{\boldsymbol{R}^n}P_t(x-y)f(y)\mathrm{d}y.$$

§5 分数次积分算子与 H-L 分数次极大算子

5.1 Poisson 方程的特解与 Riesz 位势

许多物理问题常导致对 Poisson 方程

$$\Delta u = f \tag{7}$$

的研究，由于算子 Δ 的线性性质，除了需要讨论调和函数外，问题归结为求方程(7)的特解. 为此，就有所谓基本解的概念.

设 $F \in L_{\text{loc}}(\boldsymbol{R}^n)$. 若对属于 $C^{(\infty)}(\boldsymbol{R}^n)$ 又具有紧支集的函数 φ，满足

$$\Delta\varphi * F = \varphi, \tag{8}$$

则称 F 为 Laplace 算子 Δ 的基本解. 用分布语言说，即 $\Delta F = \delta$，其中 δ 是 Dirac 测度，物理上常采用这个写法.

若 F 满足方程(8)，则

$$u_0 = f * F$$

就是方程(7)的特解.

实际上，记

$$\langle g, \varphi\rangle = \int_{\boldsymbol{R}^n} g(x)\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

则根据分部积分公式立即可得

$$\langle\Delta(f * F), \varphi\rangle = \langle f * F, \Delta\varphi\rangle = \langle f, \Delta\varphi * F\rangle = \langle f, \varphi\rangle,$$

其中 $\varphi \in C^{(\infty)}(\boldsymbol{R}^n)$ 且具有紧支集. 这说明

$$\Delta(f * F) = f.$$

此外，在 $u * F$ 存在的意义下，上述特解还是惟一的.

例 当 $n>2$ 时，在 $\boldsymbol{R}^n$ 上的函数

$$F(x) = \frac{-1}{(n-2)\omega_n}|x|^{2-n}$$

是 Δ 的基本解，其中 ω_n 表示 $\boldsymbol{R}^n$ 中单位球面面积.

证明 不失一般性，只需证明

$$\langle \Delta\varphi, F\rangle = \varphi(0),$$

其中 $\varphi\in C^{\infty}(\boldsymbol{R}^n)$且具有紧支集. 为此,作函数

$$F^{\varepsilon}(x) = -\frac{1}{(n-2)\omega_n}(|x|^2+\varepsilon^2)^{\frac{2-n}{2}},$$

我们有
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\langle F - F^{\varepsilon}, \Delta\varphi\rangle = 0,$$

$$\Delta F^{\varepsilon}(x) = \frac{n\varepsilon^2}{\omega_n}(|x|^2+\varepsilon^2)^{-\frac{n+2}{2}}.$$

记 $\psi(x)=(n/\omega_n)(|x|^2+\varepsilon^2)^{-\frac{n+2}{2}}$,则

$$\psi_{\varepsilon}(x) = \varepsilon^{-n}\psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \Delta F^{\varepsilon}(x), \quad \|\psi\|_1 = 1.$$

从而可知

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\langle \psi_{\varepsilon}, \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\boldsymbol{R}^n}\psi_{\varepsilon}(0-y)\varphi(y)\mathrm{d}y = \varphi(0).$$

上述基本解 $F(x)$的 Fourier 变换是$-|x|^2$.

特别地,当 $n=3$时,$F(x)=-(4\pi|x|)^{-1}$. 此时,(7)的特解 $u_0=f*F$ 称为 f 的 Newton 位势. 然而,更一般地说,是考虑 Riesz 位势,或称为分数次积分.

定义 设 $0<\alpha<n$,令

$$I_{\alpha}f(x) = \int_{\boldsymbol{R}^n}\frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}f(y)\mathrm{d}y,$$

$I_{\alpha}f(x)$称为 f 的**分数次积分(函数)**,I_{α} 称为**分数次积分算子**(这里略去积分号前的常数 $C_{\alpha}=\pi^{n/2}2^{\alpha}\Gamma(\alpha/2)/\Gamma(n/2-\alpha/2)$).

5.2 分数次积分算子的有界性

为了讨论分数次积分算子 I_{α} 在 $L^p(\boldsymbol{R}^n)$上的有界性问题,由于其核$|x|^{\alpha-n}$的齐次性在与变量倍缩运算 Π_{δ}: $\Pi_{\delta}f(x)=f(\delta x)$,$\delta>0$的结合中所表现出来的特征,可使我们能预测其指标的某种先验关系. 也就是说,我们有

$$\Pi_{\delta^{-1}}I_{\alpha}\Pi_{\delta} = \delta^{-\alpha}I_{\alpha}, \quad \|\Pi_{\delta}f\|_p = \delta^{-n/p}\|f\|_p,$$

$$\|\Pi_{\delta^{-1}}I_{\alpha}f\|_q = \delta^{n/q}\|I_{\alpha}f\|_q.$$

现在假定 I_α 是(p,q)型，则得

$$\begin{aligned}\|I_\alpha f\|_q &= \delta^\alpha\|\Pi_{\delta^{-1}}I_\alpha\Pi_\delta f\|_q \leqslant \delta^\alpha\cdot\delta^{n/q}\|I_\alpha\Pi_\delta f\|_q \\ &\leqslant \delta^{\alpha+n/q}\cdot C\|\Pi_\delta f\|_p \leqslant C\cdot\delta^{\alpha+n/q-n/p}\|f\|_p.\end{aligned}$$

由此知必须有指标关系

$$\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{n}$$

成立.

定理 16 设 $f\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$，$1<p<\dfrac{n}{\alpha}$，则

(i) $I_\alpha f(x)\leqslant C\|f\|_p^{\alpha p/n}Mf(x)^{1-\alpha p/n}$；

(ii) $\|I_\alpha f\|_q\leqslant C\|f\|_p$，$\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{p}-\dfrac{\alpha}{n}$，

其中 $C=C(\alpha,p,q)$.

证明 (i) 不妨假定 $f(x)\geqslant 0$. 取 $r>0$待定，作

$$I_\alpha f(x)=\left(\int_{|y|<r}+\int_{r\leqslant|y|}\right)\frac{f(x-y)}{|y|^{n-\alpha}}\mathrm{d}y=J_1+J_2.$$

对于 J_1，把函数 J_1写为

$$J_1=r^\alpha\int_{\boldsymbol{R}^n}\varphi_r(y)f(x-y)\mathrm{d}y,$$

其中 $\varphi_r(y)$是函数 $\varphi(y)=|y|^{\alpha-n}\chi_{B(0,1)}(y)$的展缩函数. 因为 $\varphi(y)$是非负递减且可积的向径函数，所以有

$$J_1\leqslant C_1r^\alpha Mf(x).$$

对于 J_2，注意到$(n-\alpha)p'>n$，从而由 Hölder 不等式得到

$$\begin{aligned}|J_2| &\leqslant\left(\int_{r\leqslant|y|}|y|^{(\alpha-n)p'}\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p'}}\|f\|_p \\ &\leqslant C_2\cdot r^{\frac{n}{p'}-(n-\alpha)}\|f\|_p.\end{aligned}$$

由此知 $$I_\alpha f(x)\leqslant C(r^\alpha Mf(x)+r^{\alpha-\frac{n}{p}}\|f\|_p).$$

为使上式右端取极小，比较好的方法就是选择 r 使两项相等，即取

$$r=\left(\frac{\|f\|_p}{Mf(x)}\right)^{p/n},$$

于是我们有

$$I_\alpha f(x) \leqslant C\|f\|_p^{\alpha p/n} Mf(x)^{1-\alpha p/n}.$$

(ii) 因为$(n-\alpha p)q=pn$,所以由上式可推出

$$\|I_\alpha f\|_q \leqslant C\|f\|_p^{\alpha p/n} \cdot \|Mf\|_p^{1-\alpha p/n}.$$

从而由 M 的(p,p)型得到

$$\|I_\alpha f\|_q \leqslant C\|f\|_p^{\alpha p/n}\|f\|_p^{1-\alpha p/n} = C\|f\|_p.$$

定理证毕.

注 若有$\|I_\alpha f\|_r \leqslant C\|f\|_p$, 则 $r\leqslant q$. 实际上, 取 $f(y)=\chi_{B(0,\eta)}(y)$, $|x|\leqslant\eta/2$,则

$$I_\alpha f(x) = \int_{|y|\leqslant\eta} \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}\mathrm{d}y \geqslant \int_{|y-x|\leqslant\eta/2} \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}\mathrm{d}y = C\eta^\alpha.$$

因此根据假设可得

$$C\eta^{\alpha+\frac{n}{r}} \leqslant \left\{\int_{|y|\leqslant\eta/2} |I_\alpha f(y)|^r \mathrm{d}y\right\}^{1/r} \leqslant C\|f\|_p = C\eta^{\frac{n}{p}}.$$

然而,当 $\eta\to0$时此不等式只能在 $\alpha+\dfrac{n}{r}\geqslant\dfrac{n}{p}$,即 $r\leqslant q$ 时成立.

当 $p=1$时,我们有下述结论:

定理 17 设 $f\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$, $\dfrac{1}{q}=1-\dfrac{\alpha}{n}$,则对 $\lambda>0$有

$$|E_{I_\alpha f}(\lambda)| = |\{x\in\boldsymbol{R}^n: I_\alpha f(x)>\lambda\}| \leqslant C(\lambda^{-1}\|f\|_1)^q.$$

证明 根据上一定理之(i)在 $p=1$时的结果[①],以及 M 的弱(1,1)型,我们有

$$|E_{I_\alpha f}(\lambda)| = |\{x\in\boldsymbol{R}^n: Mf(x) > (\lambda C^{-1}\|f\|^{-\frac{\alpha}{n}})^{\frac{n}{n-\alpha}}\}|$$

$$\leqslant C\|f\|_1\|f\|_1^{+\frac{\alpha}{n-\alpha}} \cdot \lambda^{-\frac{n}{n-\alpha}} = C(\lambda^{-1}\|f\|_1)^q.$$

定理证毕.

注 上述弱有界性结果是不能改进的,例如 $n=1$, $1/q=1-\alpha$,作函数

① $p=1$时定理16之(i)仍成立.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\dfrac{1}{\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)^{1+1/q}}, & 0<x<\dfrac{1}{2},\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则 $f\in L^1$，但 $f\overline{\in}L^q$.

5.3 H-L 分数次极大算子

我们提出这样的问题：$I_\alpha f(x)$是否可直接被相应的 H-L 极大函数所控制？

考虑到 $I_\alpha f(x)$中的核 $|x|^{\alpha-n}$是非负递减的向径函数，这就暗示我们可以模仿 §4中处理逼近恒等课题时所用的方法，但此时在类似的计算过程中，将会遇到量$\frac{1}{r^{n-\alpha}}\int_{|y|<r}|f(x-y)|\mathrm{d}y$. 它使我们自然地去引进极大函数

$$M_\eta f(x)=\sup_{x\in Q}\frac{1}{|Q|^{1-\eta/n}}\int_Q|f(y)|\mathrm{d}y,$$

我们称 $M_\eta f(x)$为 H-L **分数次极大函数.**

引理 18 设 $\varphi(x)$是非负递减向径函数，且对 $n>\varepsilon>0$有

$$\int_{R^n}\frac{\varphi(x)}{|x|^\varepsilon}\mathrm{d}x<\infty,$$

则

$$\begin{aligned}I(t,\varepsilon,x)&=\left|\int_{R^n}f(x-n)\frac{1}{t^{n-\varepsilon}}\varphi\left(\frac{y}{t}\right)\mathrm{d}y\right|\\&\leqslant C_\varepsilon\cdot M_\varepsilon f(x).\end{aligned}$$

证明

$$\begin{aligned}I(t,\varepsilon,x)&\leqslant\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{2^{-(k+1)}r\leqslant|y|<2^{-k}r}|f(x-y)|\frac{1}{t^{n-\varepsilon}}\varphi\left(\frac{y}{t}\right)\mathrm{d}y\\&\leqslant\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{t^{n-\varepsilon}}\varphi\left(\frac{2^{-(k+1)}r}{t}\right)\int_{B(0,2^{-k}r)}|f(x-y)|\mathrm{d}y\\&=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{(2^{-k}r)^{n-\varepsilon}}{t^{n-\varepsilon}}\varphi\left(\frac{2^{-(k+1)}r}{t}\right)\frac{1}{(2^{-k}r)^{n-\varepsilon}}\int_{B(x,2^{-k}r)}|f(y)|\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$$\leqslant C'_\varepsilon M_\varepsilon f(x)\cdot\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{2^{-k}r}{t}\right)^{n-\varepsilon}\varphi\left(\frac{2^{-(k+1)}r}{t}\right)$$

$$\leqslant C'_\varepsilon M_\varepsilon f(x)\cdot\int_{R^n}\frac{\varphi(x)}{|x|^\varepsilon}\mathrm{d}x,$$

引理得证.

定理 19(**Welland**) 设 $f\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$,且$0<\varepsilon<\alpha<\alpha+\varepsilon<n$,则

$$|I_\alpha f(x)|\leqslant C(M_{\alpha-\varepsilon}f(x)M_{\alpha+\varepsilon}f(x))^{1/2},$$

其中 $C=C(\alpha,\varepsilon)$.

证明 作

$$|I_\alpha f(x)|\leqslant\left\{\int_{|y|<t}+\int_{t\leqslant|y|}\right\}\frac{|f(x-y)|}{|y|^{n-\alpha}}\mathrm{d}y=I_1+I_2.$$

对于 I_1,令 $\varphi(x)=|x|^{\alpha-n}\chi_{B(0,1)}(x)$,显然有

$$\int_{R^n}\frac{\varphi(x)}{|x|^{\alpha-\varepsilon}}\mathrm{d}x=\omega_n\int_0^1 r^{\varepsilon-1}\mathrm{d}r<\infty.$$

从而得到

$$I_1=t^\varepsilon\int_{R^n}\frac{1}{t^{n-(\alpha-\varepsilon)}}\varphi\left(\frac{y}{t}\right)|f(x-y)|\mathrm{d}y\leqslant Ct^\varepsilon M_{\alpha-\varepsilon}f(x).$$

对于 I_2,令 $\varphi(x)=|x|^{\alpha-n}\chi_{R^n\setminus B(0,1)}(x)$,显然有

$$\int_{R^n}\frac{\varphi(x)}{|x|^{\alpha+\varepsilon}}\mathrm{d}x=\omega_n\int_1^\infty r^{-\varepsilon-1}\mathrm{d}r<\infty.$$

从而得到

$$I_2=t^{-\varepsilon}\int_{R^n}\frac{1}{t^{n-(\alpha-\varepsilon)}}\varphi\left(\frac{y}{t}\right)|f(x-y)|\mathrm{d}y\leqslant C_\varepsilon t^{-\varepsilon}M_{\alpha+\varepsilon}f(x).$$

因此,我们有

$$|I_\alpha f(x)|\leqslant C_\varepsilon\cdot(t^\varepsilon M_{\alpha-\varepsilon}f(x)+t^{-\varepsilon}M_{\alpha+\varepsilon}f(x)).$$

现在取 $t^\varepsilon=(M_{\alpha+\varepsilon}f(x)/M_{\alpha-\varepsilon}f(x))^{\frac{1}{2}}$,即得所证.

关于 H-L 分数次极大算子 M_η,我们有下述结果:

定理 20 设 $\eta>0,1\leqslant p<n/\eta,\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{p}-\dfrac{\eta}{n}$,则 M_η 是弱(p,q)型.

证明 不妨设$\|f\|_p=1,0<\varepsilon<1$,我们有

$$\frac{1}{|Q|^{1-\eta/n}}\int_Q |f(y)|\mathrm{d}y$$
$$\leqslant |Q|^{-1+\eta/n}|Q|^{1-1/p}\left\{\int_Q |f(y)|^p\mathrm{d}y\right\}^{1/p}$$
$$\leqslant |Q|^{\frac{\eta}{n}-\frac{1}{p}}\left\{\int_Q |f(y)|^p\mathrm{d}y\right\}^{\frac{\varepsilon}{p}}.$$

取 $\varepsilon=1-\eta p/n$，则 $\varepsilon/p=1/p-\eta/n=\dfrac{1}{q}$. 从而可得

$$M_\eta f(x)\leqslant M(|f|^p)^{\frac{1}{q}}.$$

由此知
$$|\{x\in \boldsymbol{R}^n: M_\eta f(x)>\lambda\}|\leqslant \frac{C}{\lambda^q}.$$

即得所证.

在上述定理中，若 $p=n/\eta$，即 $q=\infty$，则 $M_\eta f(x)\leqslant\|f\|_p$. 因此，我们有结论

$$\|M_\eta f\|_\infty\leqslant\|f\|_p.$$

习　　题

1. 设 $P_1\subset P_2\subset\cdots\subset P_k$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中以原点为中心的长方体，E 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的有界集，且对每一个 $x\in E$，存在整数 $i(x)$：$1\leqslant i(x)\leqslant k$，以及长方体 $P_x=P_{i(x)}+x$. 证明：在 E 中可选出有限个点：$x_1,x_2,\cdots,x_m$，使得

(i) $E\subset\bigcup\limits_{j=1}^m P_{x_j}$；　　(ii) $\sum\limits_{j=1}^m \chi_{P_{x_j}}(x)\leqslant 2^n$.

2. 设 $k\in\mathbf{Z}$（整数集），记格点集 $\Lambda_k=2^{-k}Z^n$（即其坐标为整数的 2^{-k} 倍），记边长为 2^{-k} 顶点属于 Λ_k 的方体全体为 D_k，并称

$$D=\bigcup_{k=-\infty}^{\infty}D_k$$

为二进方体集. 显然，若有 $Q_1,Q_2\in D$，而且 $|Q_1|\leqslant|Q_2|$，则或者 $Q_1\subset Q_2$，或者 Q_1 与 Q_2 不相交. 此外，每一个 $Q\in D_k$ 都是 D_{k+1} 中 2^n 个互不相交的方体之并. 现在提问如下：

设 G 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的开集，且 $G\neq\boldsymbol{R}^n, G\neq\varnothing$. 证明：存在互不相交的二进方体列 $\{Q_k\}$，使得

(i) $G\subset\bigcup_{k=1}Q_k$;　(ii) $2\leqslant d(Q_k,\partial G)/d(Q_k)\leqslant 6$，其中 $d(Q_k)$ 表示 Q_k 的直径，∂G 表示 G 的边界.

这一开集分解称为 Whitney 分解.

提示：对 $x\in G$，取包含 x 并满足

$$d(x,\partial G)\geqslant 3d(Q_x)$$

的最大二进方体，并再考虑 Q_x 的"母"二进方体.

3. 设 $f\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$，证明对 $0<\delta<1$ 和 $\lambda>0$ 有

$$|\{x\in\boldsymbol{R}^n: Mf(x)>\lambda\}|\leqslant\frac{C}{(1-\delta)\lambda}\int_{E_f(\delta\lambda)}|f(x)|\mathrm{d}x.$$

4. 设 $0<\delta<1$，$E\subset\boldsymbol{R}^n$ 是可测集，证明对非负可测函数 $f(x)$，有

$$\int_E Mf(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{\delta}|E|+\frac{C}{1-\delta}\int_{\boldsymbol{R}^n}f(x)\ln^+f(x)\mathrm{d}x.$$

5. 举例说明 $f\in L^1(\boldsymbol{R}^1)$，$f\ln^+f\in L^1(\boldsymbol{R}^1)$，但 $Mf\notin L^1$.

6. 设 μ 是倍测度，证明存在常数 C，使得对于 $\lambda>0$ 以及 $f\in L^1(\boldsymbol{R}^n,\mu)$，有

$$\mu(\{x\in\boldsymbol{R}^n: M_\mu f(x)>\lambda\})\leqslant\frac{C}{\lambda}\int_{E_{M_\mu f}(\lambda)}|f(x)|\mathrm{d}\mu(x).$$

7. 设对某个 p: $1\leqslant p<\infty$，有

$$\mu(\{x\in\boldsymbol{R}^n: Mf(x)>\lambda\})\leqslant C\lambda^{-p}\|f\|^p_{L^p(\boldsymbol{R}^n,\mu)},\quad\lambda>0.$$

证明对一切方体 Q，有

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant C\left\{\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q|f(x)|^p\mathrm{d}\mu(x)\right\}^{1/p}.$$

8. 证明：对 $\varepsilon>0$，存在正数 $C=C(\varepsilon)$，使得对每个方体 $Q_0=Q(x_0,\delta)$，以及 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^n)$，有

$$\int_{\boldsymbol{R}^n}\frac{|f(x)|\delta^\varepsilon}{\delta^{n+\varepsilon}+|x-x_0|^{n+\varepsilon}}\mathrm{d}x\leqslant C\cdot\inf_{x\in Q_0}Mf(x).$$

9. 设 T,S 是两个次线性算子，记

$$G(x,r)=\{y\in\boldsymbol{R}^n;\ r\leqslant|x-y|\leqslant 2r\},\quad x\in\boldsymbol{R}^n,\ r>0,$$

且有关系：对 $x\in\boldsymbol{R}^n$，$f\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$，必有 $\bar{r}>0$，使得

$$|Tf(x)|\leqslant\inf_{y\in G(x,\bar{r})}|Sf(y)|.$$

若对某个 p：$0<p$，S 是弱(p,p)型，证明 T 是弱(p,p)型.

提示：导出 $|Tf(x)|^q\leqslant CM(|Sf|^q)(x)$，$0<q<p$，再用第一章习题.

10. 设 $\varphi(x)$ 是定义在$(0,\infty)$上的非负局部可积函数，证明对任意的 $x>0$，有

$$x\int_x^{\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\mathrm{d}t\leqslant 2Mf(\xi),\quad \xi\in(0,x],$$

其中 $M\varphi(y)$ 是

$$M\varphi(y)=\sup_{\substack{y\in I\\ I\subset(0,\infty)}}\frac{1}{|I|}\int_I\varphi(t)\mathrm{d}t,\ I \text{ 表示区间}.$$

11. 设 $0<\delta,\alpha<1$，$f(x)\geqslant 0$，证明

$$\|I_{\alpha\delta}f\|_r\leqslant C\|f\|_p^{1-\delta}\|I_\alpha f\|_q^{\delta},$$

其中 $1<p<q<\infty$，而且

$$\frac{1}{r}=\frac{1-\delta}{p}+\frac{\delta}{q}.$$

12. 设 T,S 是两个次线性算子，而且对 $x\in\boldsymbol{R}^n$，存在 $Q=Q(x,r)$，有

$$|Tf(x)|^t\leqslant\frac{1}{|Q|}\int_Q|S(f\chi_Q)(x)|^t\mathrm{d}x,\quad t>0.$$

若 S 是弱(p,p)型，证明 T 是弱(p,p)型和强(q,q)型，其中 $t<p<q$.

提示：应用 Колмогоров 不等式与第 9 题.

13. 设有 $\boldsymbol{R}^n$ 中的开集 G，X 是一个集合，μ 是定义在 X 的子集上的一个外测度. 又有映射 T：$G\to X$，对 $x\in G$，若存在方体列

$$\{Q_k=Q(x,r_k)\},\quad r_k\to 0(k\to\infty)$$

使得
$$\lim_{k\to\infty}\frac{\mu(T(Q_k))}{|Q_k|}=0,$$
则称 x 为 f 的临界点. 记 E 为 f 的临界点集，证明 $\mu(T(E))=0$.

14. 对方体 Q 以及正的常数 ε,δ，令
$$E=\{x\in Q: I_\alpha f(x)>\varepsilon\lambda, M_\alpha f(x)\leqslant\delta\lambda\},\quad \lambda>0.$$
证明存在 ε_0，C（仅与 α 有关），使得对非负可测函数 $f(x)$ 以及方体 Q：有点 x 使得 $I_\alpha f(x)\leqslant\lambda$，且有
$$|E|\leqslant C(\delta/\varepsilon)^{n/(n-\alpha)}|Q|,\quad \varepsilon>\varepsilon_0.$$

15. 设 $f(x)$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 上的几乎处处有限的可测函数. 对 $\boldsymbol{R}^n$ 中方体 Q，定义
$$m_f(Q)=\sup\left\{A\in\boldsymbol{R}^1: |\{x\in Q: f(x)\leqslant A\}|\leqslant\frac{1}{2}|Q|\right\}.$$
证明：

(i) $|\{x\in Q: f(x)\geqslant m_f(Q)\}|\geqslant\frac{1}{2}|Q|$；

(ii) $\lim\limits_{Q\searrow x} m_f(Q)=f(x)$, a. e. $x\in\boldsymbol{R}^n$.

参 考 文 献

[1] M. de Guzman, Differentiation of integrals in $\boldsymbol{R}^n$, Springer, Lecture Notes in Math., Berlin, **481**(1975).

[2] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, A maximal theorem with function theoretic application, *Acta Math.*, **54**(1930), 81～116.

[3] N. Wiener, The ergodic theorem, *Duke Math. J.*, **5**(1939), 1～18.

[4] F. Riesz, Sur les fonctions de maximum de M. M. Hardy et J. Littlewood, *London Math. Soc.* **7**(1932), 10～13.

[5] A. P. Calderón, On the behavior of harmonic functions near the boundary, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **68**(1950), 47～54.

[6] L. Hedberg, On certain convonlution inequalites, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **36**(1972), 505～510.

第三章　L^p 空间上算子的内插理论

对于一个给定的算子 T，当研究它在 L^p 上的有界性时，常遇到下述情况：T 不仅是从 L^{p_0} 到 L^{q_0} 是强（或弱）有界的，且还是从 L^{p_1} 到 L^{q_1} 强（或弱）有界的，$1\leqslant p_0\leqslant p_1\leqslant\infty$，$1\leqslant q_0\leqslant q_1\leqslant\infty$（如 H-L 极大算子等）. 此时，对 $f\in L^p$，$p_0<p<p_1$，由于有分解 $f=f_1+f_2$，$f_1\in L^{p_0}$，$f_2\in L^{p_1}$，故 T 在 L^p 上可作出定义，从而就提出一个问题：是否存在指标 q：$q_0<q<q_1$，使得 T 是 (p,q) 型的？这就是所谓算子内插问题.

在这一方向上的基础性结果有两个：其一是 M. Riesz-Thorin 定理，其二是 Marcinkiewicz 定理，这也是本章将要介绍的主要内容.

为便于运算和加强感性认识，这里给出两种指标的描述法.

(i) 在平面上作一正方形：$\{(x,y):0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$，认定算子的 (p,q) 型 $(1\leqslant p,q\leqslant\infty)$ 相应于其中点 $(x,y)=(1/p,1/q)$. 如图所示，当算子是 (p,p) 型时，以对角线上的点表示（图 1）；当算子是 (p,p') 型，$1/p+1/p'=1$ 时，以副对角线上的点表示（图 2）.

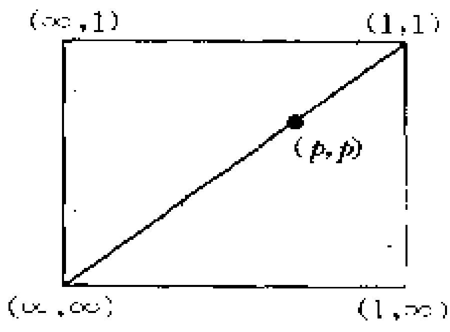

图 1

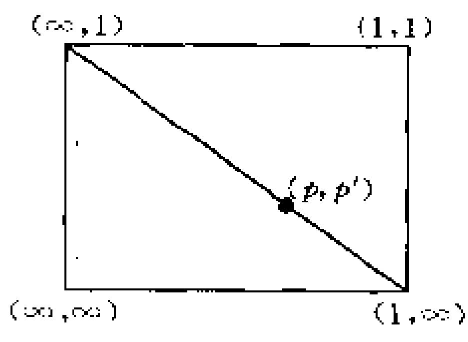

图 2

(ii) 为了表示从 p_i 到 $q_i(i=0,1)$之间的内插指标，我们引进参数 $t\in[0,1]$，并令

$$\frac{1}{p_t}=\frac{1-t}{p_0}+\frac{t}{p_1},\quad \frac{1}{q_t}=\frac{1-t}{q_0}+\frac{t}{q_1}.$$

(这里规定 $s/\infty=0$)也就是说，上述之 p_t(或 q_t)的全体组成以 p_0，p_1(或 q_0,q_1)为端点的区间. 有时，也以 p 代替 p_t，还有公式

$$t=\frac{p_0-p}{p_0-p_1}\cdot\frac{p_1}{p}.$$

§1 M. Riesz-Thorin 内插定理简介

本节介绍的是关于线性算子而且在两端是强有界型的内插定理. 这一结果首先由 M. Riesz([1])在1926年对实值函数空间用实变方法给予证明，后又由 Thorin([2])在1939年推广于复值函数空间，证明用的是复变方法(现代它已发展成为内插空间理论的复方法，有着丰富的内容，见文献[6]). 不过，在这里我们只是把这一定理叙述一下而不给予证明，当然要作一些评述，并举一些应用这一定理的例子.

定理 1(**M. Riesz-Thorin**) 设(X,μ)是一个测度空间，考虑其上的复值函数类，若线性算子 T 满足

$$\|Tf\|_{q_0}\leqslant C_0\|f\|_{p_0},\quad \|Tf\|_{q_1}\leqslant C_1\|f\|_{p_1},$$

这里$1\leqslant p_0,q_0,p_1,q_1\leqslant\infty$，$\|\cdot\|_p=\|\cdot\|_{L^p(X,\mu)}$，则对一切 $t\in[0,1]$，有

$$\|Tf\|_{q_t}\leqslant C_0^{1-t}C_1^t\|f\|_{p_t}. \tag{1}$$

注 1 关于 T 是(p_0,q_0)型和(p_1,q_1)型的假设，可以修改为只对 L^{p_0},L^{p_1}中的稠密集如简单函数类上成立.

注 2 若记$\|T\|_t$为式(1)所表示的有界算子 T 的范数，则 $\ln\|T\|_t$是 t 在$[0,1]$上的凸函数.

注 3 如果在定理中考虑的是 X 上的实值函数类，则式(1)中的常数 $C_0^{1-t}C_1^t$应改为 $2C_0^{1-t}C_1^t$. 这只需将算子 T 的定义域扩张

于复值函数上即可. 也就是说,令

$$T'(f+\mathrm{i}g)=Tf+\mathrm{i}(Tg),$$

其中 i 是虚数单位.

注 4 应用内插定理首先需要验证两对端点指标(p_0,q_0),(p_1,q_1)上的有界性,其次才能作内插. 那么什么样的指标值是我们考察的主要对象呢?一般地说,由于 $p=2$时 L^2是 Hilbert 空间,而且在 Fourier 分析中又有 Plancherel 定理;$p=1$时,L^1的范数对非负函数是可加的;$\|f+g\|_1=\|f\|_1+\|g\|_1$;$p=\infty$时,$L^\infty$在普通乘法运算下构成一个代数,故使我们的注意力主要集中于 $p=1,2,\infty$上.

例 1($\boldsymbol{R}^n$ 上的 Hausdorff-Young 不等式) 设 $f\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$,$1\leqslant p\leqslant 2$,记 f 的 Fourier 变换为 $\mathscr{F}f$,则

$$\|\mathscr{F}f\|_{p'}\leqslant\|f\|_p,\quad 1/p+1/p'=1.$$

证明 从第一章中我们知道

$$\|\mathscr{F}f\|_\infty\leqslant\|f\|_1,\quad \|\mathscr{F}f\|_2=\|f\|_2.$$

因此,由上述内插定理可得

$$\|\mathscr{F}f\|_{q_t}\leqslant\|f\|_{p_t},$$

其中

$$\frac{1}{p_t}=\frac{1-t}{1}+\frac{t}{2}=1-\frac{t}{2},$$

$$\frac{1}{q_t}=\frac{1-t}{\infty}+\frac{t}{2}=1-\frac{1}{p_t}.$$

由此即知

$$\|\mathscr{F}f\|_{p'}\leqslant\|f\|_p.$$

例 2(广义 Young 不等式) 设 $f\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$,$g\in L^q(\boldsymbol{R}^n)$,$1\leqslant p$,$q\leqslant\infty$,$1/p+1/q\geqslant 1$,则 f 与 g 的卷积满足不等式:

$$\|f*g\|_r\leqslant\|f\|_p\|g\|_q,\quad 1/r=1/p+1/q-1.$$

证明 取定 $g\in L^q(\boldsymbol{R}^n)$,并视算子 T 为

$$Tf(x)=g*f(x),$$

则 T 是线性算子,且已知

$$\|Tf\|_q \leqslant \|g\|_q \|f\|_1,$$
$$\|Tf\|_\infty \leqslant \|g\|_q \|f\|_{q'}, \quad 1/q + 1/q' = 1.$$
因此，由上述内插定理可得
$$\|g * f\|_{r_t} = \|Tf\|_{q_t} \leqslant \|f\|_{p_t},$$
其中
$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{1} + \frac{t}{q'} = 1 - \frac{t}{q},$$
$$\frac{1}{r_t} = \frac{1-t}{q} + \frac{t}{\infty} = \frac{1}{q} + \frac{1}{p_t} - 1.$$
即得所证.

§2 Marcinkiewicz 内插定理

为了获得算子 T 的内插强型，§1中的 M. Riesz-Thorin 定理要求 T 是线性的，而且在两个终端 (p_0,q_0)，(p_1,q_1) 上是强型的，这一要求在许多情况下不能达到.

本节所要论述的 Marcinkiewicz①定理是在假定算子 T 是次(或拟)线性以及在终端是弱有界的条件下的内插理论，下面将分对角线型与下三角形型两种情形来介绍(现代它已发展成为内插空间理论的实方法，内容十分丰富，也见文献[6]).

2.1 对角线的情形

引理 2 设 (X,μ) 是一个测度空间，$f \in L^p(X)$，$1 \leqslant p_0 < p < p_1 < \infty$. 对 $\lambda > 0$，令
$$f_\lambda(x) = \begin{cases} f(x), & |f(x)| \leqslant \lambda, \\ 0, & |f(x)| > \lambda, \end{cases}$$
$$f^\lambda(x) = f(x) - f_\lambda(x),$$

① 这一结果是 Marcinkiewicz 在1939年建立的，并将它寄给了 Zygmund，后者将它整理且做出重要推广后发表于1956年(见[3]). 当年 Marcinkiewicz 只有29岁，在波兰军队中服务，后在东部战场被俘并不知去向.

则 $$\|f\|_p^p = (p - p_0)\int_0^\infty \lambda^{p-p_0-1}\|f^\lambda\|_{p_0}^{p_0}\mathrm{d}\lambda,$$

$$\|f\|_p^p = (p_1 - p)\int_0^\infty \lambda^{p-p_1-1}\|f_\lambda\|_{p_1}^{p_1}\mathrm{d}\lambda.$$

证明 通过如下计算立即可得：

$$\int_0^\infty \lambda^{p-p_0-1}\|f^\lambda\|_{p_0}^{p_0}\mathrm{d}\lambda = \int_0^\infty \lambda^{p-p_0-1}\left\{\int_X |f^\lambda(x)|^{p_0}\mathrm{d}\mu(x)\right\}\mathrm{d}\lambda$$

$$= \int_0^\infty \lambda^{p-p_0-1}\left\{\int_{\{x\in X:\,|f(x)|>\lambda\}} |f(x)|^{p_0}\mathrm{d}\mu(x)\right\}\mathrm{d}\lambda$$

$$= \int_X |f(x)|^{p_0}\left\{\int_0^{f(x)} \lambda^{p-p_0-1}\mathrm{d}\lambda\right\}\mathrm{d}\mu(x)$$

$$= \frac{1}{p-p_0}\int_X |f(x)|^{p_0}|f(x)|^{p-p_0}\mathrm{d}\mu(x)$$

$$= \frac{1}{p-p_0}\|f\|_p^p.$$

同理可推另一公式.

定理 3(Marcinkiewicz 对角线情形) 设(X,μ),(Y,ν)是两个测度空间,T 是次线性算子,满足

$$\nu(E_{Tf}(\lambda)) \leqslant \left(\frac{C_0\|f\|_{p_0}}{\lambda}\right)^{p_0}, \qquad \|f\|_p = \left\{\int_X |f(x)|^p\mathrm{d}\mu(x)\right\}^{\frac{1}{p}},$$

$$\nu(E_{Tf}(\lambda)) \leqslant \left(\frac{C_1\|f\|_{p_1}}{\lambda}\right)^{p_1},$$

其中 $E_{Tf}(\lambda)=\{x\in X:\ |Tf(x)|>\lambda\}$, $1\leqslant p_0<p_1\leqslant\infty$,则对 $t\in(0,1)$,有

$$\|Tf\|_{p_t} \leqslant C_t\|f\|_{p_t}, \qquad \|Tf\|_p = \left\{\int_Y |Tf(y)|^p\mathrm{d}\nu(y)\right\}^{1/p},$$

其中 $C_t\leqslant KC_0^{1-t}C_1^t$, $K=2(p_t/(p_t-p_0)+p_t/(p_1-p_t))^{1/p_t}$.

证明 记 $p=p_t$,并对 $\lambda>0$作分解同前：

$$f(x) = f^\lambda(x) + f_\lambda(x),$$

则$|Tf(x)|\leqslant|Tf^\lambda(x)|+|Tf_\lambda(x)|$,且有

$$\nu(E_{Tf}(\lambda)) \leqslant \nu(E_{Tf^\lambda}(\lambda/2)) + \nu(E_{Tf_\lambda}(\lambda/2)).$$

(i) $p_1<\infty$. 此时注意到 $f^\lambda\in L^{p_0}$, $f_\lambda\in L^{p_1}$ 以及弱性条件，我们有

$$
\begin{aligned}
\|Tf\|_p^p &= p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\nu(E_{Tf}(\lambda))\mathrm{d}\lambda \\
&\leqslant p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\{\nu(E_{Tf^\lambda}(\lambda/2)) + \nu(E_{Tf_\lambda}(\lambda/2))\}\mathrm{d}\lambda \\
&\leqslant p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\left\{\left(\frac{2C_0}{\lambda}\|f^\lambda\|_{p_0}\right)^{p_0} + \left(\frac{2C_1}{\lambda}\|f_\lambda\|_{p_1}\right)^{p_1}\right\}\mathrm{d}\lambda \\
&= p(2C_0)^{p_0}\int_0^\infty \lambda^{p-p_0-1}\|f^\lambda\|_{p_0}^{p_0}\mathrm{d}\lambda \\
&\quad + p(2C_1)^{p_1}\int_0^\infty \lambda^{p-p_1-1}\|f_\lambda\|_{p_1}^{p_1}\mathrm{d}\lambda \\
&= \left\{\frac{p(2C_0)^{p_0}}{p-p_0} + \frac{p(2C_1)^{p_1}}{p_1-p}\right\}\|f\|_p^p.
\end{aligned}
$$

由此已知 T 是 (p,p) 型，但为了整理上式右端的常数，令 $C=p/(p-p_0)+p/(p_1-p)$，则

$$
\frac{p(2C_0)^{p_0}}{p-p_0} + \frac{p(2C_1)^{p_1}}{p_1-p} \leqslant C\cdot\max\{(2C_0)^{p_0},(2C_1)^{p_1}\}.
$$

另一方面，若以 aT 代换 $T(a>0)$，又有

$$
a^p\|Tf\|_p^p \leqslant C\cdot\max\{(2aC_0)^{p_0},(2aC_1)^{p_1}\}\|f\|_p^p.
$$

而取 a 使得

$$
(2aC_0)^{p_0} = (2aC_1)^{p_1},
$$

可知

$$
\begin{aligned}
\|Tf\|_p^p &\leqslant C2^{p_0}a^{p_0-p}C_0^{p_0}\|f\|_p^p \\
&= C2^p(C_0^{-p_0}C_1^{p_1})^{(p_0-p)/(p_0-p_1)}C_0^{p_0}\|f\|_p^p.
\end{aligned}
$$

由于 $(1-t)p+tp=p_0p_1(0<t<1)$，故

$$
(C_0^{-p_0}C_1^{p_1})^{(p_0-p)/(p_0-p_1)}C_0^{p_0} = (C_0^{1-t}C_1^t)^p.
$$

从而令 $K=2C^{1/p}$ 即得所证.

(ii) $p_1=\infty$. 此时不妨设 $C_1=1$（否则可用 C_1T 代替 T），我们有

$$\|Tf_\lambda\|_\infty \leqslant \lambda, \quad \nu(E_{Tf_\lambda}(\alpha)) = 0 \quad (\alpha \geqslant \lambda),$$

从而可得

$$\begin{aligned}\|Tf\|_p^p &= p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\nu(E_{Tf}(\lambda))\mathrm{d}\lambda = 2^p \cdot p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\nu(E_{Tf}(2\lambda))\mathrm{d}\lambda \\ &\leqslant 2^p p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\nu(E_{Tf^\lambda}(\lambda))\mathrm{d}\lambda \leqslant 2^p p C_0^{p_0}\int_0^\infty \lambda^{p-p_0-1}\|f^\lambda\|_{p_0}^{p_0}\mathrm{d}\lambda \\ &= \frac{2^p p C_0^{p_0}}{p-p_0}\|f\|_p^p,\end{aligned}$$

即
$$\|Tf\|_p \leqslant 2\left(\frac{p}{p-p_0}\right)C_0^{p_0/p}\|f\|_p,$$

注意 $C_1=1$, $p_0/p=1-t$.

注 1 Marcinkiewicz 定理所要求的条件弱于 M. Riesz-Thorin 定理所要求者,但在得到的关于算子 T 的有界性内插结论中,前者有一常数 K,它随 t 而改变,因此不能说前者包括了后者.

注 2 关于 T 的在终端的弱型假设,可以修改为只对 L^{p_0}, L^{p_1} 中的稠密集上成立.

例 1(**$\boldsymbol{R}^n$ 上的 Hardy-Littlewood-Paley 定理**) 记 $\mathscr{F}f(x)$ 是函数 $f(x)$ 在 $\boldsymbol{R}^n$ 上的 Fourier 变换.

(i) 若 $1<p\leqslant 2$,则存在常数 C_p,使得对每个 $f\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$,有

$$\left\{\int_{\boldsymbol{R}^n}|\mathscr{F}f(x)|^p|x|^{(p-2)n}\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant C_p\left\{\int_{\boldsymbol{R}^n}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

(ii) 若 $2\leqslant q<\infty$,则存在常数 C_q,使得

$$\left\{\int_{\boldsymbol{R}^n}|\mathscr{F}f(x)|^q\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{q}} \leqslant C_q\left\{\int_{\boldsymbol{R}^n}|f(x)|^q|x|^{(q-2)n}\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{q}}.$$

证明 考虑两个测度空间:$(X,\mu)=(\boldsymbol{R}^n,\mathrm{d}x)$, $(Y,\nu)=(\boldsymbol{R}^n,|x|^{-2n}\mathrm{d}x)$,并作算子 T:

$$Tf(x) = |x|^n\mathscr{F}f(x),$$

其中 $f(x)$ 定义于 (X,μ) 上,$Tf(x)$ 定义于 (Y,ν) 上.

对于 $f\in L^2(X)$,根据 Plancherel 定理知

$$\int_Y |Tf(x)|^2 \mathrm{d}\nu = \int_{\boldsymbol{R}^n} |\mathscr{F} f(x)|^2 \mathrm{d}x$$
$$= \int_{\boldsymbol{R}^n} |f(x)|^2 \mathrm{d}x = \int_X |f(x)|^2 \mathrm{d}\mu(x),$$

即 T 是(2,2)型，且常数 $C_0=1$.

现在来指出 T 是弱(1,1)型. 因为 $|\mathscr{F} f(x)| \leqslant \|f\|_1$，所以 $|\mathscr{F} f(x)| \cdot |x|^n \leqslant |x|^n \|f\|_1$. 从而对 $\lambda>0$，有

$$E_{Tf}(\lambda) = \{y \in \boldsymbol{R}^n: |\mathscr{F} f(y)| |y|^n > \lambda\}$$
$$\subset \{y \in \boldsymbol{R}^n: |y| > (\lambda/\|f\|_1)^{1/n}\}.$$

令 $(\lambda/\|f\|_1)^{1/n}=b$，$\{y \in \boldsymbol{R}^n: |y|>b\}=B$，则

$$\nu(E_{Tf}(\lambda)) = \int_{E_{Tf}(\lambda)} \mathrm{d}\nu(y) \leqslant \int_B \mathrm{d}\nu(y)$$
$$= \int_{|x|>b} |x|^{-2n} \mathrm{d}x = \omega_n \int_b^\infty r^{n-1} r^{-2n} \mathrm{d}r$$
$$= \frac{\omega_n}{n} \frac{\|f\|_1}{\lambda}.$$

因此，由 Marcinkiewicz 内插定理，即知 T 是 (p,p) 型，$1<p\leqslant 2$：

$$\left\{\int_Y |Tf(y)|^p \mathrm{d}\nu(y)\right\}^{1/p} \leqslant C_p \left\{\int_X |f(x)|^p \mathrm{d}\mu(x)\right\}^{1/p}.$$

换言之，就是

$$\left\{\int_{\boldsymbol{R}^n} |\mathscr{F} f(x)|^p |x|^{np} |x|^{-2n} \mathrm{d}x\right\}^{1/p} \leqslant C_p \left\{\int_{\boldsymbol{R}^n} |f(x)|^p \mathrm{d}x\right\}^{1/p}.$$

(ii) 因为 $2\leqslant q<\infty$，所以其共轭指标 q' 满足 $1<q'\leqslant 2$. 从而对于 $f\in L^{q'}$，根据上一节中的 $\boldsymbol{R}^n$ 上的 Hausdorff-Young 不等式，可知 $\mathscr{F} f\in L^q$. 又对 $\mathscr{F} f\in L^q$，应用 Riesz 表示定理，可知存在 $g\in L^{q'}$ 且 $\|g\|_{q'}=1$，使得

$$\|\mathscr{F} f\|_q = \left|\int_{\boldsymbol{R}^n} \mathscr{F} f(x) \cdot g(x) \mathrm{d}x\right|.$$

由此再注意到 Fourier 变换的乘法公式以及 Hölder 不等式，可知

$$\begin{aligned}\|\mathscr{F}f\|_q &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathscr{F}g(x)\mathrm{d}x\right| \\ &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)|x|^{n(q-2)/q}\mathscr{F}g(x)|x|^{-n(q-2)/q}\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \left\{\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^q|x|^{n(q-2)}\mathrm{d}x\right\}^{1/q}\left\{\int_{\mathbb{R}^n}|\mathscr{F}g(x)|^{q'}|x|^{n(q'-2)}\mathrm{d}x\right\}^{1/q'}.\end{aligned}$$

现在将(i)的结论应用于指标 q' 的情形，得到

$$\|\mathscr{F}f\|_q \leqslant C_{q'}\|g\|_{q'}\left\{\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^q|x|^{n(q-2)}\mathrm{d}x\right\}^{1/q}.$$

由假设 $\|g\|_{q'}=1$，即得所证.

2.2 下三角形的情形

下面我们介绍 Marcinkiewicz 内插定理的一般情形，即下三角形的情形. 也就是说算子 T 是弱(p_0,q_0)型以及弱(p_1,q_1)型，其中

$$1\leqslant p_0\leqslant q_0,\quad 1\leqslant p_1\leqslant q_1,\quad q_0\neq q_1,$$

则可推出 T 的强(p,q)型，$p_0<p<p_1$，$q_0<q<q_1$. 证明这一结果主要思路仍是分解函数 f 为两部分，只是将分解时的截断水平 λ 改为 λ 的幂函数：λ^α，其中 α 与指标值有关，而且它的选取正是证明中关键一步. 为此，先导入一引理做准备.

引理 4 设$1\leqslant p_0\leqslant q_0$，$1\leqslant p_1\leqslant q_1$，$p_0<p<p_1$，$q_0\leqslant q\leqslant q_1$，$q_0\neq q_1$，且假定

$$\frac{q_0}{p_0}\frac{p-p_0}{q-q_0}=\frac{q_1}{p_1}\frac{p-p_1}{q-q_1}=\frac{1}{\alpha},$$

(即$(1/p_0-1/p)/(1/p-1/p_1)=(1/q_0-1/q)/(1/q-1/q_1)$)则有

$$\left.\begin{aligned}&(q-q_0)\left\{\int_0^\infty \lambda^{q-q_0-1}\|f^{\lambda^\alpha}\|_{p_0}^{q_0}\,\mathrm{d}\lambda\right\}^{p_0/q_0}\\ &(q_1-q)\left\{\int_0^\infty \lambda^{q-q_1-1}\|f_{\lambda^\alpha}\|_{p_1}^{q_1}\,\mathrm{d}\lambda\right\}^{p_1/q_1}\end{aligned}\right\}\leqslant \|f\|_p^p.$$

注 当 $p_0=q_0$，$p_1=q_1$时，即引理 2 中的等号情形.

证明 应用广义 Minkowski 不等式，以及注意到当 $|f(x)|<\lambda^\alpha$ 时有 $f^{\lambda^\alpha}(x)=0$；当 $|f(x)|\geqslant\lambda^\alpha$ 时，$|f^{\lambda^\alpha}(x)|=|f(x)|$，我们有

$$\begin{aligned}
&\left\{\int_0^\infty \lambda^{q-q_0-1}\|f^{\lambda^\alpha}\|_{p_0}^{q_0}\mathrm{d}\lambda\right\}^{p_0/q_0}\\
&=\left\{\int_0^\infty\left(\int_X |f^{\lambda^\alpha}(x)|^{p_0}\mathrm{d}\mu(x)\right)^{q_0/p_0}\lambda^{q-q_0-1}\mathrm{d}\lambda\right\}^{p_0/q_0}\\
&\leqslant\int_X\left\{\int_0^\infty |f^{\lambda^\alpha}(x)|^{q_0}\lambda^{q-q_0-1}\mathrm{d}\lambda\right\}^{p_0/q_0}\mathrm{d}\mu(x)\\
&=\int_X\left\{\int_0^{|f(x)|^{1/\alpha}}\lambda^{q-q_0-1}|f(x)|^{q_0}\mathrm{d}\lambda\right\}^{p_0/q_0}\mathrm{d}\mu(x)\\
&=\int_X |f(x)|^{p_0}(q-q_0)^{-p_0/q_0}|f(x)|^{\frac{q-q_0}{\alpha}\frac{p_0}{q_0}}\mathrm{d}\mu(x).
\end{aligned}$$

由此可得

$$(q-q_0)^{p_0/q_0}\left\{\int_0^\infty \lambda^{q-q_0-1}\|f^{\lambda^\alpha}\|_{p_0}^{q_0}\mathrm{d}\lambda\right\}^{p_0/q_0}\leqslant\int_X |f(x)|^p\mathrm{d}\mu(x).$$

定理 5（**Marcinkiewicz 下三角形情形**） 设 $1\leqslant p_i\leqslant q_i\leqslant\infty$，$i=0,1$，$q_0\neq q_1$，$T$ 是次线性算子，(X,μ)，(Y,ν) 以及 $\|f\|_p$，$\|Tf\|_q$ 同上一定理所述. 若有

$$\nu(E_{Tf}(\lambda))\leqslant\left(\frac{C_i}{\lambda}\|f\|_{p_i}\right)^{q_i},\quad i=0,1,$$

则

$$\|Tf\|_{q_t}\leqslant C_t\|f\|_{p_t},\quad t\in(0,1),$$

其中 $C_t\leqslant KC_0^{1-t}C_1^t$，$K=K(p_0,q_0,p_1,q_1,t)$ 且当 $t\to 0$ 或 1 时，$K\to+\infty$.

证明 下面选择 $p_0\neq p_1$，$q_0<q_1<\infty$ 的情形给予证明，其他情形从略. 仍记 $p=p_t$，$q=q_t$，且分解 $f=f^\beta+f_\beta$，$\beta=\beta(\lambda)$ 后文中再定. 我们有

$$\|Tf\|_q^q=q\int_0^\infty \lambda^{q-1}\nu(E_{Tf}(\lambda))\mathrm{d}\lambda$$

$$\leqslant q\int_0^{\infty}\lambda^{q-1}\nu(E_{Tf^{\beta}}(\lambda/2))\mathrm{d}\lambda + q\int_0^{\infty}\lambda^{q-1}\nu(E_{Tf_{\beta}}(\lambda/2))\mathrm{d}\lambda$$

$$\leqslant q(2C_0)^{q_0}\int_0^{\infty}\lambda^{q-q_0-1}\|f^{\beta}\|_{p_0}^{q_0}\mathrm{d}\lambda$$

$$+ q(2C_1)^{q_1}\int_0^{\infty}\lambda^{q-q_1-1}\|f_{\beta}\|_{q_1}^{q_1}\mathrm{d}\lambda.$$

根据内插指标的设定，可以取 α 满足

$$\alpha = \frac{p_0}{q_0}\frac{q-q_0}{p-p_0} = \frac{p_1}{q_1}\frac{q-q_1}{p-p_1},$$

而选 $\beta=\lambda^{\alpha}$. 从而，根据上一引理可知

$$\|Tf\|_q^q \leqslant \frac{q(2C_0)^{q_0}}{q-q_0}\left\{\int_X|f(x)|^p\mathrm{d}\mu(x)\right\}^{q_0/p_0}$$

$$+\frac{q(2C_1)^{q_1}}{q_1-q}\left\{\int_X|f(x)|^p\mathrm{d}\mu(x)\right\}^{q_1/p_1}.$$

如果 $\|f\|_p=1$，那么上式可写为

$$\|Tf\|_q\leqslant C\|f\|_p,$$

其中常数 C 为

$$C^q = \frac{q}{q-q_0}(2C_0)^{q_0} + \frac{q}{q_1-q}(2C_1)^{q_1}.$$

实际上，上述不等式对任一 $f\in L^p$ 均成立，因为该式两端是 f 的齐次函数.

此外，如果 $C_0=C_1=1$，则上述不等式又可写为

$$\|Tf\|_q\leqslant KC_0^{1-t}C_1^t\|f\|_p,$$

其中 $K=\{q2^{q_0}/(q-q_0)+q2^{q_1}/(q_1-q)\}^{1/q}$.

实际上，上述不等式对于 C_0,C_1不等于 1 的情形也是成立的，理由如下：

设 $T_1=aT$,$\mathrm{d}\nu_1=b\mathrm{d}\nu$,$a$ 与 b 是待定正常数，我们有

$$\nu_1(\{y\in Y: |T_1f(y)|>\lambda\}) = b\nu(\{y\in Y: |aTf(y)|>\lambda\})$$

$$= b\nu\left(\left\{y\in Y: |Tf(y)|>\frac{\lambda}{a}\right\}\right)\leqslant b\left(\frac{C_i\|f\|_{p_i}}{\lambda}a\right)^{q_i}$$

$$= \{ab^{1/q_i}C_i\|f\|_{p_i}/\lambda\}^{q_i}, \quad i = 0,1.$$

现在我们选取 a,b 使得

$$ab^{1/q_0}C_0 = ab^{1/q_1}C_1 = 1.$$

这就是说，T_1是带常数为 1 的弱(p_i,q_i)型算子，$i=0,1$. 因此就有

$$\|T_1 f\|_q' \leqslant K\|f\|_p,$$

(其中$\|\cdot\|_q'$ 表示积分是对测度 ν_1取的)即

$$ab^{1/q}\|Tf\|_q \leqslant K\|f\|_p,$$

或写成

$$a^{1-t}a^t b^{(1-t)/q_0}b^{t/q_0}\|Tf\|_q \leqslant K\|f\|_p,$$

再以 C_0,C_1代入即得所证.

注 1 在 Marcinkiewicz 内插定理的假设中要求 $q_0 \neq q_1$，这一条件是不可少的. 下面的反例是 R. Panzone 给出的.

例 2 设 $f \in L([0,1])$，令

$$Tf(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t, \quad I = \left|\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right|.$$

显然，T 是从 $L([0,1])$到 $L([0,1])$的线性算子. 对 $\lambda>0$，若$0\leqslant I \leqslant\lambda$，则有

$$E_{Tf}(\lambda) = \{x \in [0,1]: x^{-1/2}I > \lambda\}$$
$$\subset \{x \in [0,1]: \|f\|_1/\lambda > x^{1/2}\} \subset [0,(\|f\|_1/\lambda)^2].$$

由此知

$$|E_{Tf}(\lambda)| \leqslant (\|f\|_1/\lambda)^2.$$

若 $I>\lambda$，则 $E_{Tf}(\lambda)=[0,1]$. 从而有

$$|E_{Tf}(\lambda)| = 1 < \frac{I}{\lambda} < (I/\lambda)^2 \leqslant (\|f\|_1/\lambda)^2.$$

总之，我们得到

$$|E_{Tf}(\lambda)| \leqslant (\|f\|_1/\lambda)^2,$$

即 T 是弱(1,2)型. 又因当 $p\geqslant 1$时，$\|f\|_1\leqslant\|f\|_p$，所以还有

$$|E_{Tf}(\lambda)| \leqslant (\|f\|_p/\lambda)^2,$$

即 T 是弱$(p,2)$型.

现在假定 Marcinkiewicz 内插定理在 $q_0=q_1$时成立,在此例中即 $2=2$,而推出 T 是强$(p,2)$型:

$$\|Tf\|_2 \leqslant C\|f\|_p, \quad 1 < p.$$

这就是说,若 $f\in L^p([0,1])$,则 $|Tf(x)|^2=I^2/x$ 是$[0,1]$上的可积函数,矛盾.

注 2 定理 5 在两终端$(1/p_0,1/q_0)$以及$(1/p_1,1/q_1)$之一是下三角形情形中的点仍然成立([4]),但不能得出常数 C_t 的估计,反例见[5].

注 3(抽象空间内插定理) 设 E_0,E_0',E_1,E_1'是赋范线性空间,T 是次线性算子且满足

$$\|Tf\|_{E_i'} \leqslant C_i\|f\|_{E_i}, \quad f \in E_i,\ i=0,1,$$

则
$$\|Tf\|_{E_p'} \leqslant KC_0^{1-t}C_1^t\|f\|_{E_p}, \quad f \in E_p,$$

其中 E_0与 E_1含于同一向量空间,E_0'与 E_1'含于同一向量空间,E_p与 E_p'是相应的内插空间(见[6]).

现在,我们来举几个应用的例子.

例 3 设(X,μ),(Y,ν)是两个测度空间,$1<q<\infty$,$K(x,y)$是定义在 $X\times Y$ 上的可测函数,且其弱 L^q_*模分别满足不等式

$$[K(x,\cdot)]_q \leqslant C, \quad \text{a.e. } x \in X,$$
$$[K(\cdot,y)]_q \leqslant C, \quad \text{a.e. } y \in Y.$$

若 $f\in L^p(Y)$,$1\leqslant p<\infty$,则积分

$$Tf(x) = \int_Y K(x,y)f(y)\mathrm{d}\nu(y)$$

对几乎处处的 $x\in X$ 是收敛的,而且对指标

$$1 < p < s < \infty, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{s}+1,$$

T 是弱$(1,q)$型和强(p,s)型.

证明 记 p',q'为 p,q 的共轭指标,则有

$$p < q', \ q < p', \quad \frac{1}{s} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q'} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p'}.$$

不妨假定$\|f\|_p=1=C$(否则乘 K 与 f 以常数即可),并令

$$K_1(x,y) = \begin{cases} K(x,y), & |K(x,y)| > \beta, \\ 0, & |K(x,y)| \leqslant \beta, \end{cases}$$

$$K_2 = K - K_1,$$

其中 β 是待定正常数. 又记

$$T_1 f(x) = \int_Y K_1(x,y) f(y) \mathrm{d}\nu(y),$$

$$T_2 f(x) = \int_Y K_2(x,y) f(y) \mathrm{d}\nu(y).$$

我们有
$$\int_Y |K_1(x,y)| \mathrm{d}\nu(y) = \int_\beta^\infty \nu(E_{K(x,\cdot)}(\lambda)) \mathrm{d}\lambda$$
$$\leqslant \int_\beta^\infty \lambda^{-q} \mathrm{d}\lambda = \frac{\beta^{1-q}}{q-1}.$$

类似地可得

$$\int_Y |K_1(x,y)| \mathrm{d}\mu(x) \leqslant \frac{\beta^{1-q}}{q-1}.$$

从而根据第一章§2.2的例($r=1$),可知定义 $T_1 f(x)$的积分是收敛的,且有

$$\|T_1 f\|_p \leqslant \frac{\beta^{1-q}}{q-1} \|f\|_p = \frac{\beta^{1-q}}{q-1}.$$

对于 T_2,由 $q<p'$ 可知

$$\int_Y |K_2(x,y)|^{p'} \mathrm{d}\nu(y) = p' \int_0^\beta \lambda^{p'-1} \nu(E_{K(x,\cdot)}(\lambda)) \mathrm{d}\lambda$$
$$\leqslant p' \int_0^\beta \lambda^{p'-1-q} \mathrm{d}\lambda = \frac{p'}{p'-q} \beta^{p'-q}.$$

从而由 Hölder 不等式,可知定义 $T_2 f(x)$的积分对每一个 x 都是收敛的,且有

$$\|T_2 f\|_\infty \leqslant \left(\frac{p'}{p'-q}\right)^{1/p'} \beta^{(p'-q)/p'} \|f\|_p = \left(\frac{s}{q}\right)^{1/p'} \beta^{q/s}.$$

于是，我们可以做出 $Tf=T_1f+T_2f$，而且对 $\lambda>0$ 有不等式

$$\mu(E_{Tf}(\lambda)) \leqslant \mu(E_{T_1f}(\lambda/2)) + \mu(E_{T_2f}(\lambda/2)).$$

现在取 β 值为

$$\beta = \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{r/q}\left(\frac{q}{s}\right)^{s/qp'},$$

使得 $\|T_2f\|_\infty\leqslant\lambda/2$，而推出 $\mu(E_{T_2f}(\lambda/2))=0$. 因此，我们有

$$\begin{aligned}\mu(E_{Tf}(\lambda)) \leqslant \mu(E_{T_1f}(\lambda/2)) &\leqslant \left(\frac{2\|T_1f\|_p}{\lambda}\right)^p \\ &\leqslant \left(\frac{2}{q-1}\right)^p\beta^{(1-q)p}\lambda^{-p} \\ &= \left(\frac{2}{q-1}\right)^p\left(\frac{q}{s}\right)^{\frac{s(1-q)p}{qp'}}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\frac{(1-q)pr}{q}}\lambda^{-p} \\ &= C_p\left(\frac{\|f\|_p}{\lambda}\right)^s.\end{aligned}$$

$\Bigg($注意 $\|f\|_p=1$ 以及等式

$$\frac{(1-q)ps}{q} - p = p\left(-\frac{s}{q'}-1\right) = p\left(\frac{-s}{p}\right) = -s\Bigg)$$

这样，我们证明了 T 是弱 (p,s) 型，特别当 $p=1$ 时 T 是弱 $(1,q)$ 型.

最后，对给定的 p：$1<p<q'$，取 p_1：$p<p_1<q'$，并定义 s_1：

$$\frac{1}{s_1} = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{q'},$$

则 T 又是弱 $(1,q)$ 型和弱 (p_1,s_1) 型. 根据上述 Marcinkiewicz 内插定理，即得 T 是强 (p,s) 型.

§3 Stein-Weiss 限制性内插定理

对于许多算子来说，其弱有界性估计当限制在某些函数类(如集合上的特征函数)时是容易证明的，因此就出现了所谓的限制型

内插理论.(下面的结果属于 E. M. Stein 及 G. Weiss,参阅[7].)

设(X,μ)是一个测度空间,T 是次线性算子,$1\leqslant p\leqslant\infty$,$1\leqslant q\leqslant\infty$,若存在常数 C,使得对于 X 中任一可测集 E: $\mu(E)<\infty$,有

$$\mu(\{x\in X: |T\chi_E(x)|>\lambda\})\leqslant\left(\frac{C\|\chi_E\|_p}{\lambda}\right)^q,\quad \lambda>0,$$

则称 T 为限制弱(p,q)型;若有

$$\|T\chi_E\|_q\leqslant C\|\chi_E\|_p,$$

则称 T 为限制(p,q)型.

显然,运用类似于 Marcinkiewicz 内插定理的证明方法,不难阐明当 T 是限制弱(p_0,q_0)型以及限制弱(p_1,q_1)型,$1\leqslant p_0\leqslant q_0\leqslant\infty$,$1\leqslant p_1\leqslant q_1\leqslant\infty$,且 $q_0\neq q_1$时,T 必是限制(p_t,q_t)型,其中

$$\frac{1}{p_t}=\frac{1}{p_0}(1-t)+\frac{t}{p_1},\quad \frac{1}{q_t}=\frac{1}{q_0}(1-t)+\frac{t}{q_1},\quad t\in(0,1).$$

然而,如果我们企图得到 T 是(一般的)(p_t,q_t)型,则原有的证法就行不通了.下面,我们将采用对偶空间的方法,并且仅对特定情况来导出这一结论.

设线性算子是限制$(L^{p_t}(X,\mu),L^{q_t}(X,\mu))$型,$1\leqslant p_t<\infty$,$1<q_t<\infty$,则对 $f\in L^{q_t'}(X)$,$1/q_t+1/q_t'=1$,以及 X 中可测集 E: $\mu(E)<\infty$,令

$$b_f(E)=\int_X T\chi_E(x)\cdot f(x)\mathrm{d}\mu(x),$$

就有

$$\begin{aligned}|b_f(E)|&\leqslant\|T\chi_E\|_{q_t}\cdot\|f\|_{q_t'}\\&\leqslant C_t\|\chi_E\|_{p_t}\|f\|_{q_t'}\leqslant C_t\cdot\mu(E)^{\frac{1}{p_t}}\|f\|_{q_t'}.\end{aligned}$$

由此易知 $b_f(E)$是一个带符号测度,且关于 μ 是绝对连续的.因此,根据 Radon-Nikodym 定理,可知存在 $h=T^*f\in L^1(X,\mu)$,使得

$$b_f(E)=\int_E h(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

从而,对每个 $f\in L^{q_t'}(X,\mu)$及每个可测集 E,且 $\mu(E)<\infty$,有

$$\int_X T\chi_E(x)\cdot f(x)\mathrm{d}\mu(x)=\int_X \chi_E(x)\cdot T^* f(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

由于 T 是线性算子,故对简单(可积)函数 S,也有

$$\int_X TS(x)\cdot f(x)\mathrm{d}\mu(x)=\int_X S(x)\cdot T^* f(x)\mathrm{d}\mu(x),$$

其中 T^* 是 T 的共轭算子.

关于 T^*,有下面结果:

引理 6 设线性算子 T 是限制弱(p_0,q_0)型以及限制弱(p_1,q_1)型,$1\leqslant p_0\leqslant q_0\leqslant\infty$,$1\leqslant p_1\leqslant q_1\leqslant\infty$,$q_0\neq q_1$,则 T^* 是弱(q_t',p_t')型,其中

$$\frac{1}{p_t}=\frac{1-t}{p_0}+\frac{t}{q_0},\quad \frac{1}{q_t}=\frac{1-t}{q_0}+\frac{t}{q_1},\quad t\in(0,1).$$

证明 对于 $\lambda>0$,记

$$E^+(\lambda)=\{x\in X: T^* f(x)>\lambda\},$$
$$E^-(\lambda)=\{x\in X: T^* f(x)<-\lambda\},$$

则有

$$\mu(\{x\in X: |T^* f(x)|>\lambda\})=\mu(E^+(\lambda))+\mu(E^-(\lambda)).$$

对于 $E^+(\lambda)$,我们有

$$\begin{aligned}\mu(E^+(\lambda))&=\int_X \chi_{E^+(\lambda)}(x)\mathrm{d}\mu(x)\\&\leqslant\frac{1}{\lambda}\int_X T^* f(x)\cdot\chi_{E^+(\lambda)}(x)\mathrm{d}\mu(x)\\&=\frac{1}{\lambda}\int_X f(x)\cdot T\chi_{E^+(\lambda)}(x)\mathrm{d}\mu(x)\\&\leqslant\frac{1}{\lambda}\|T\chi_{E^+(\lambda)}\|_{q_t}\|f\|_{q_t'}\\&\leqslant\frac{C_t}{\lambda}\mu(E^+(\lambda))^{1/p_t}\|f\|_{q_t'}.\end{aligned}$$

同理可得关于 $\mu(E^-(\lambda))$的估计. 证毕.

现在,我们可以导出主要结论了.

定理 7 设 T 如上引理所述. 令 $0<s<1$,

$$\frac{1}{p_s}=\frac{1-s}{p_0}+\frac{s}{p_1},\quad \frac{1}{q_s}=\frac{1-s}{q_0}+\frac{s}{q_1},\quad q_0,q_1<\infty,$$

则 T 是 (p_s,q_s) 型.

证明 取 t_0,t_1, 使得 $0<t_0<s<t_1<1$. 则根据本节开始时所指出的, T 定为限制 (p_{t_0},q_{t_0}) 型以及限制 (p_{t_1},q_{t_1}) 型. 从而, 由引理6可知 T^* 是弱 (q'_{t_0},p'_{t_0}) 型以及弱 (q'_{t_1},p'_{t_1}) 型. 再根据 Marcinkiewicz 内插定理, 可知 T^* 是 (q'_s,p'_s) 型. 由此又知其共轭算子 T^{**} 是 (p_s,q_s) 型.

对于 $f\in L^{q'_s}(X,\mu)$ 及 $S(x)$ 是简单(可积)函数, 我们有

$$\begin{aligned}\int_X T^*f(x)\cdot S(x)\mathrm{d}\mu(x)&=\int_X f(x)\cdot TS(x)\mathrm{d}\mu(x)\\&=\int_X f(x)\cdot T^{**}S(x)\mathrm{d}\mu(x).\end{aligned}$$

这就是说, 对简单(可积)函数 S 来说, 有

$$T^{**}S=TS.$$

于是, T 是 (p_s,q_s) 型.

注 上一定理是 Stein 和 Weiss 建立的, 它的不足之处是要求 T 为线性算子. 下面的结果对此算是一个补充, 其中用到了重要的所谓线性化方法.

定理 8 设 $\{T_k\}$ 是一个线性算子列, 记

$$T^*f(x)=\sup_{k\geqslant 1}|T_kf(x)|.$$

若极大算子 T^* 是限制弱 (p_0,q_0) 型以及限制弱 (p_1,q_1) 型, $1\leqslant p_0\leqslant q_0<\infty$, $1\leqslant p_1\leqslant q_1<\infty$, $q_0\neq q_1$, 则 T^* 是 (p_t,q_t) 型, 其中

$$\frac{1}{p_t}=\frac{1-t}{p_0}+\frac{t}{p_1},\quad \frac{1}{q_t}=\frac{1-t}{q_0}+\frac{t}{q_1},\quad t\in(0,1).$$

证明 记 N 为自然数集, ψ: $X\to N$ 是可测函数, 定义算子 T_ψ:

$$T_\psi g(x)=T_{\psi(x)}g(x),$$

易知 $T_\psi g(x)$ 是 X 上的可测函数(注意 $T_k g(x)$ 可测)而且 T_ψ 是线性的. 显然

$$|T_\psi g(x)| \leqslant T^* g(x).$$

从而由条件知 T_ψ 是限制弱 (p_0, q_0) 型以及限制弱 (p_1, q_1) 型,其常数与 T^* 同,或说与 ψ 无关. 根据定理 7, T_ψ 是 (p_t, q_t) 型,其常数与 ψ 无关.

现在,设 $f \in L^{p_t}$,假定 $T^* f(x) \neq \infty$,作 φ: $X \to \boldsymbol{N}$ 如下:将 X 分解为 $E_k = \{x \in X: 2^{k+1} \geqslant T^* f(x) > 2^k\}$ 对 $k \in \boldsymbol{N}$ 的并,对 $x \in E_k$,有 $T^* f(x) > 2^k$,则必存在最小的自然数 j,使 $|T_j f(x)| > 2^k$,此时令 $\varphi(x) = j$. 易知

$$T^* f(x) \leqslant 2|T_\varphi f(x)|, \quad x \in X,$$

且有
$$\|T^* f\|_{q_t} \leqslant 2\|T_\varphi f\|_{q_t} \leqslant C\|f\|_{p_t}.$$

如果条件 $T^* f(x) \neq \infty$ 不成立,则可先对

$$T_n^* f(x) = \sup_{1 \leqslant k \leqslant n} |T_k f(x)|$$

作上述推理,然后令 $n \to \infty$ 即可.

习　题

1. 设 $1 \leqslant p < \infty$,算子 T 在 $L^p(\boldsymbol{R}^n)$ 上有界,若对 $1/p + 1/p' = 1$ 以及 $f, g \in L^p \cap L^{p'}$,有

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} Tf(x) \cdot g(x) \mathrm{d}x = \int_{\boldsymbol{R}^n} f(x) \cdot Tg(x) \mathrm{d}x,$$

证明 T 是 (r, r) 型,其中 $\min(p, p') \leqslant r \leqslant \max(p, p')$.

2. (Hardy-Littlewood) 设 $1 < p \leqslant 2$,对以 2π 为周期的函数 $f \in L^p([-\pi, \pi])$,证明

$$\Big\{\sum_{n \in \boldsymbol{Z}} (1 + |n|)^{p-2} |\hat{f}(n)|^p\Big\}^{1/p} \leqslant C_p \|f\|_p.$$

提示:考察算子 T: $([-\pi, \pi], \mathfrak{M}, \mathrm{d}x) \to (Y, \mathscr{N}, \nu)$:

$$(Tf)(n) = n\hat{f}(n),$$

其中,对 $M \subset \mathscr{N}$,测度 ν 为

$$\nu(M) = \sum_{n\in M}(1+|n|)^{-2}.$$

3. 设 $f\in L_*^{p_1}\cap L_*^{p_2}$，$0<p_1<p_2<\infty$，令

$$\frac{1}{p} = \frac{t}{p_1} + \frac{1-t}{p_2},\quad 0<t<1.$$

证明 $\|f\|_p\leqslant C_0C_1^tC_2^{1-t}$，$C_i(i=0,1)$ 是 $[f]_{p_i}$，又

$$C_0 = \left\{p\left(\frac{1}{p-p_1}+\frac{1}{p_2-p}\right)\right\}^{1/p}.$$

4. 证明下述情况下的定理 5(下三角形情形内插)：

(i) $p_0=p_1$；　　(ii) $p_1=q_1=\infty$；

(iii) $p_0<p_1<\infty$，$q_1<q_0<\infty$.

5. 考虑定义在 $(0,\infty)$ 上的函数 $f(x)$，令

$$T_\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)\mathrm{d}t,\quad 0<\alpha<1.$$

证明 T_α 是弱 $(1,1/(1-\alpha))$ 型，强 (p,r) 型，其中 $1<p<\alpha^{-1}$，$1/r=1/p-\alpha$.

提示：考察核 $K(x,y)=\Gamma(\alpha)^{-1}(x-y)^{\alpha-1}\chi_{(0,x)}(y)$ 并参阅定理 5 后的应用例.

6. 设非负函数 $\varphi(x)$ 满足

$$|\{x\in \boldsymbol{R}^n: \varphi(x)>t\}|\leqslant Ct^{-1}.$$

证明存在常数 C，使得

$$\left\{\int_{\boldsymbol{R}^n}\left|\frac{\hat{f}(x)}{\varphi(x)}\right|^p\varphi^2(x)\mathrm{d}x\right\}^{1/p}\leqslant C\|f\|_p,\quad 1<p\leqslant 2.$$

提示：作 $\mathrm{d}\mu(x)=\varphi^2(x)\mathrm{d}x$.

7. 设 $f\in L_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^n)$，定义

$$M'f(x) = \sup_{r<\frac{|x|+1}{2}}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|f(y)|\mathrm{d}y,$$

$$M''f(x) = \sup_{\substack{x\in B(\bar{x},r)\\ r<|\bar{x}|+1}}\frac{1}{|B(\bar{x},r)|}\int_{B(\bar{x},r)}|f(y)|\mathrm{d}y.$$

证明：对 $\boldsymbol{R}^n$ 上的非负可测函数 $\varphi(x)$，有

$$\int_{\mathbf{R}^n}[M'f(x)]^p\varphi(x)\mathrm{d}x \leqslant C\int_{\mathbf{R}^n}|f(x)|^p M''\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

$$1 < p < \infty.$$

提示：算子 M' 是弱 $(L^1(\mathbf{R}^n,\varphi\,\mathrm{d}x),L^1(\mathbf{R}^n,M''\varphi\,\mathrm{d}x))$ 型，且是 $(L^\infty(\mathbf{R}^n,\varphi\,\mathrm{d}x),L^\infty(\mathbf{R}^n,M''\varphi\,\mathrm{d}x))$ 型.

8. 设 $\varphi(x)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的非负可测函数，且有

$$|\{x\in\mathbf{R}^n:\varphi(x)>t\}|\leqslant Ct^{-1},\quad t>0.$$

令 $1<p<r<p'<\infty$，$1/p+1/p'=1$，证明

$$\left\{\int_{\mathbf{R}^n}|\hat{f}(x)\varphi(x)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p'}}|^r\mathrm{d}x\right\}^{1/r}\leqslant C\|f\|_p.$$

提示：应用 Hausdorff-Young 不等式以及习题 6.

参 考 文 献

[1] M. Riesz, Sur les maxima des formes bilinéaires et sur les fonctionnelles linéaires, *Acta Math.*, **49**(1926), 465～497.

[2] G.O. Thorin, An extension of a convexity theorem due to M. Riesz, Kungl. Fysiogr. Sällsk i Lund Förh., **8**(1938), 166.

[3] A. Zygmund, On a theorem of Marcinkiewicz concerning interpolation of operators, *J. Math. Pures Appl.*, **35**(1956), 223～248.

[4] C. A. Berenstein, M. Cotlar, N. Kerzman, P. Krée, Studia Math., **29**(1967), 79～.

[5] R. Hunt, Bull. A.M.S. **70**(1964), 803～.

[6] J. Bergh and J. Löfstrom, Interpolation Spaces, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1976.

[7] E.M. Stein and G. Weiss, An extension of a theorem of Marcinkiewicz and some of its application, *J. Math. Mech.*, **8**(1959), 263～284.

[8] C. Fefferman and E. M. Stein, Some maximal inequalities, *Amer. J. Math.*, **93**(1971), 107～115.

第四章 Calderón-Zygmund 分解理论

把一个可积函数分为两个部分的和，其中一个具有良好的性质(例如是具有紧支集的连续函数)，而另一个函数其本身的结构虽然并不十分清楚，但是它的某些特征可在一定的运算意义下反映出来，并为我们所控制(例如其 L^p 范数可充分地小)．这类分解早在实变函数课程中学过，而且已看到它的应用．

为了研究奇异积分的存在性和有界性，1952年 Calderón-Zygmund 导入了以他们的名字命名的分解理论，它是一种与空间的分解相结合的函数分解方法，是研究调和分析领域中典型算子连续性的必不可少的工具．

§1 Calderón-Zygmund (C-Z)分解

引理 1(空间分解) 设 $f\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$，$\lambda>0$，则有分解 $\boldsymbol{R}^n=\Omega\cup F$，$\Omega\cap F=\varnothing$，而且

(i) $\Omega=\bigcup\limits_k Q_k$，$\mathring{Q}_i\cap\mathring{Q}_j=\varnothing\,(i\neq j)$，其中 Q_k 是方体，$\mathring{Q}$ 表示 Q 的内点的全体；

(ii) $\lambda<\dfrac{1}{|Q_k|}\displaystyle\int_{Q_k}|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant 2^n\lambda\ (k=1,2,\cdots)$；

(iii) $|f(x)|\leqslant\lambda$， a. e. $x\in F$；

(iv) $|\Omega_k|=\sum\limits_k|Q_k|\leqslant\dfrac{1}{\lambda}\|f\|_1$.

证明 首先，因为 $f\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$，所以存在 $r>0$，使得对于边长为 r 的每个方体 Q，都有

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(x)|\mathrm{d}x<\lambda.$$

从而，如果我们用平行于坐标轴的超平面把空间 $\mathbf{R}^n$ 分割成边长为 r 的可数个方体网格，那么对于此网格中的每一个方体 Q，就有

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|\,\mathrm{d}x < \lambda.$$

其次，对上述每个方体 Q，以平分其边的方式将 Q 分为 2^n 个小方体 Q'，易知 f 在每个 Q' 上的平均值的大小可分为两种情形：

$$\frac{1}{|Q'|}\int_{Q'} |f(x)|\,\mathrm{d}x > \lambda; \quad \frac{1}{|Q'|}\int_{Q'} |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \lambda.$$

对于前一种情形，方体 Q' 不再分割并将其列入 $\{Q_k\}$. 此时，有

$$\lambda < \frac{1}{|Q'|}\int_{Q'} |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{2^n}{|Q|}\int_Q |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant 2^n\lambda,$$

故(ii)成立；对于后一种情形，再将该方体之边等分，则又可得 2^n 个小方体，并继续讨论如上面所述的两种可能发生的情形. 如此进行下去，就可得到方体列 $\{Q_k\}$，记为

$$\Omega = \bigcup_k Q_k, \quad F = \mathbf{R}^n \setminus \Omega.$$

显然，(i)与(ii)都成立.

为了证明(iii)对于 F 中的几乎处处 x 成立，只需注意到当 $x \in Q_k$ $(k=1,2,\cdots)$ 时，此 x 将属于边长趋于零而且满足

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|\,\mathrm{d}y \leqslant \lambda$$

的方体列中. 因此，根据 Lebesgue 微分定理立即得到(iii).

(iv) 由(ii)知 $|Q_k| < \frac{1}{\lambda}\int_{Q_k} |f|\,\mathrm{d}x$，对指标 k 相加，即得

$$\sum_k |Q_k| \leqslant \frac{1}{\lambda}\int_{\bigcup_k Q_k} |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

上述分解简称为 C-Z(空间)分解. 注意，这一分解是与给定的 λ(取定 f)有关的，那么对于不同的 λ，在同时进行 C-Z 分解时所得的方体列之间有什么关系呢？

推论 设 $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$，再设对 $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ 同时作 C-Z 分解所得之方体列为 $\{Q_{1,i}\}$，$\{Q_{2,i}\}$，则

$$\sum_i |Q_{2,i}| \leqslant 2^n \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \sum_i |Q_{1,i}|.$$

证明 我们从选取过程中可以看出，对每个 $Q_{1,i}$，有

$$\frac{1}{|Q_{1,i}|}\int_{Q_{1,i}} |f(x)|\mathrm{d}x > \lambda_1.$$

但对 λ_2 来说，$|f(x)|$ 在 $Q_{1,i}$ 上的平均值不一定大于 λ_2. 此时，还须把 $Q_{1,i}$ 等分为 2^n 个小方体. 因此，每个 $Q_{2,j}$ 或与某个 $Q_{1,i}$ 相同，或是后者的子方体. 从而结合不等式

$$\frac{1}{|Q_{2,j}|}\int_{Q_{2,j}} |f(x)|\mathrm{d}x > \lambda_2, \quad \frac{1}{|Q_{1,i}|}\int_{Q_{1,i}} |f(x)|\mathrm{d}x \leqslant 2^n\lambda_1$$

得到

$$\begin{aligned} |Q_{2,j}| &< \frac{|Q_{1,i}|}{\lambda_2} \frac{1}{|Q_{1,i}|}\int_{Q_{2,j}} |f(x)|\mathrm{d}x \\ &\leqslant \frac{|Q_{1,i}|}{\lambda_2} \frac{1}{|Q_{1,i}|}\int_{Q_{1,i}} |f(x)|\mathrm{d}x \\ &\leqslant 2^n \frac{\lambda_1}{\lambda_2} |Q_{1,i}|. \end{aligned}$$

对一切指标相加，即得所证.

注 代替 $\boldsymbol{R}^n$，C-Z 分解也可在某方体 Q_0 的基础上进行. 对于 $f \in L^p(\boldsymbol{R}^n)$，$p>1$，也可进行类似的分解.

C-Z 分解涉及可积函数的平均值，从而很自然地会在 H-L 极大函数的深入研究中发挥一定作用.

定理 2 设 $f \in L^1(\boldsymbol{R}^n)$，$\lambda>0$，记其 C-Z 分解所得互不相重的方体列为 $\{Q_k\}$，则

$$|\{x: \overline{M}f(x) > 7^n\lambda\}| \leqslant 2^n \sum_k |Q_k|,$$

其中 $\overline{M}f(x)$ 为 H-L 中心极大函数.

证明 作 $\{Q_k^*\}$，$Q_k^* = 2Q_k$. 下面分两步讨论：

(i) 若 $x \overline{\in} \bigcup_k Q_k^*$，则对任一个以 x 为中心的方体 Q，必有

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|\mathrm{d}x \leqslant 7^n\lambda. \tag{1}$$

这是因为如果 $Q\subset \mathbf{R}^n\setminus\bigcup_k Q_k$，那么

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|\mathrm{d}x \leqslant \lambda,$$

所以(1)式成立. 如果存在 k，使 $Q_k\cap Q\neq\varnothing$，那么由于 Q 的中心在 $\bigcup_k Q_k^*$ 的外部，故有

$$Q_k \subset 3Q.$$

由此知
$$\bigcup_k \{Q_k:\ Q_k\cap Q\neq\varnothing\}\subset 3Q.$$

从而得到

$$\begin{aligned}\int_Q |f(x)|\mathrm{d}x &\leqslant \int_{Q\cap F}|f(x)|\mathrm{d}x + \sum_{Q_k\cap Q\neq\varnothing}\int_{Q_k}|f(x)|\mathrm{d}x\\ &\leqslant \lambda|Q| + \sum_{Q_k\cap Q\neq\varnothing} 2^n\lambda|Q_k|\\ &\leqslant \lambda|Q| + 2^n\cdot\lambda\cdot|3Q|\\ &= (\lambda+2^n\cdot\lambda\cdot 3^n)|Q|.\end{aligned}$$

因此(1)式成立.

(ii) 从上述结论中可知，

$$\overline{M}f(x)\leqslant 7^n\cdot\lambda,\quad x\,\overline{\in}\,\bigcup_k Q_k^*.$$

因此
$$|E_{\overline{M}f}(7^n\lambda)|\leqslant\left|\bigcup_k Q_k^*\right| = 2^n\sum_k |Q_k|.$$

例 设 $\varphi(x)$是 $\mathbf{R}^n$ 上的非负可测函数，$1<p<\infty$，则

$$\int_{\mathbf{R}^n}|Mf(x)|^p\varphi(x)\mathrm{d}x\leqslant C\int_{\mathbf{R}^n}|f(x)|^p[M\varphi(x)]\mathrm{d}x. \qquad (2)$$

证明 不妨假定 $M\varphi(x)<\infty$，a. e. $x\in\mathbf{R}^n$ 且 $M\varphi(x)>0$. 若记

$$\mathrm{d}\mu(x) = M\varphi(x)\mathrm{d}x,\quad \mathrm{d}\nu(x)=\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

则问题转化为证明 M 是从 $L^p(\mu)$到 $L^p(\nu)$的有界算子.

(i) M 是$(L^\infty(\mu),L^\infty(\nu))$型.

实际上，若 $\alpha\geqslant\|f\|_{L^\infty(\mu)}$，则

$$\int_{\{x\in\mathbf{R}^n:\ |f(x)|>\alpha\}} M\varphi(x)\mathrm{d}x = 0.$$

因此，根据 $M\varphi(x)>0$ 可得 $|\{x\in \boldsymbol{R}^n: |f(x)|>\alpha\}|=0$，即 $|f(x)|\leqslant\alpha$, a.e. $x\in\boldsymbol{R}^n$. 由此知 $Mf(x)\leqslant\alpha$, a.e. $x\in\boldsymbol{R}^n$，即 $\|Mf\|_{L^\infty(\nu)}\leqslant\alpha$. 这就是说

$$\|Mf\|_{L^\infty(\nu)}\leqslant\|f\|_{L^\infty(\mu)}.$$

(ii) M 是弱 $(L^1(\mu),L^1(\nu))$ 型：

$$\int_{\{x\in\boldsymbol{R}^n:\, Mf(x)>\lambda\}}\varphi(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{C}{\lambda}\int_{\boldsymbol{R}^n}|f(x)|[M\varphi(x)]\mathrm{d}x. \tag{3}$$

不妨假定 $f(x)\geqslant0$，又因为可以做出可积函数列

$$f_k(x)\leqslant f_{k+1}(x),\quad \text{a.e. } x\in\boldsymbol{R}^n,\ k=1,2,\cdots,$$

$$\lim_{k\to\infty}f_k(x)=f(x),$$

而有

$$\{x\in\boldsymbol{R}^n:\, Mf(x)>\lambda\}=\bigcup_k\{x\in\boldsymbol{R}^n:\, Mf_k(x)>\lambda\},$$

所以又可设 $f\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$.

现在对 f 以及 $\lambda'=7^{-n}\lambda$ 作 C-Z 分解，得方体列 $\{Q_k\}$，满足

$$\lambda'<\frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k}f(y)\mathrm{d}y<2^n\lambda',$$

从而知

$$\begin{aligned}\int_{\{x\in\boldsymbol{R}^n:\, Mf(x)>7^n\lambda'\}}\varphi(x)\mathrm{d}x&\leqslant\int_{\bigcup_k Q_k^*}\varphi(x)\mathrm{d}x\leqslant\sum_k\int_{Q_k^*}\varphi(x)\mathrm{d}x\\&\leqslant\sum_k\frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k^*}\varphi(x)\mathrm{d}x\cdot\frac{1}{\lambda'}\int_{Q_k}f(y)\mathrm{d}y\\&=\frac{7^n}{\lambda}\sum_k\int_{Q_k}f(y)\cdot\left(\frac{2^n}{|Q_k^*|}\int_{Q_k^*}\varphi(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\\&\leqslant\frac{C}{\lambda}\sum_k\int_{Q_k}f(y)M\varphi(y)\mathrm{d}y\\&=\frac{C}{\lambda}\int_{\boldsymbol{R}^n}f(y)\cdot M\varphi(y)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

由 $7^n\lambda'=\lambda$ 即得证.

最后，根据 Marcinkiewicz 内插定理可知结论成立.

根据 C-Z 分解可以获得 H-L 极大函数 $Mf(x)$ 的分布函数的逆向估计，从而使我们对 $Mf(x)$ 的可积性有了更深刻的认识.

引理 3 存在常数 $C>0$，使得对任意的 $\lambda>0$，有

$$|\{x\in \mathbf{R}^n:\ Mf(x)>\lambda\}|\geqslant \frac{C}{\lambda}\int_{\{x\in \mathbf{R}^n:\ |f(x)|>\lambda\}}|f(x)|\mathrm{d}x.$$

证明 不妨假定 $f\in L^1(\mathbf{R}^n)$，从而对 $\lambda>0$，根据 C-Z 分解可知存在方体列 $\{Q_k\}$，使得

$$\lambda<\frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k}|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant 2^n\lambda,$$

$$|f(x)|\leqslant\lambda,\quad \text{a.e. } x\overline{\in}\bigcup_k Q_k.$$

由此知当 $x\in Q_k$ 时，有 $Mf(x)>\lambda$，而且

$$|E_{Mf}(\lambda)|\geqslant\sum|Q_k|\geqslant\frac{1}{2^n\lambda}\cdot\sum_j\int_{Q_k}|f(x)|\mathrm{d}x$$

$$\geqslant\frac{1}{2^n\lambda}\int_{\{x:\ |f(x)|>\lambda\}}|f(x)|\mathrm{d}x.$$

即得所证.

定理 4 设 $f\in L^1(\mathbf{R}^n)$，且其支集含于球 $B_0=B(0,1)$ 内. 若 $Mf\in L^1(B_0)$，则

$$\int_{B_0}|f(x)|\cdot\ln^+|f(x)|\mathrm{d}x<\infty.$$

证明 令 $B'=B(0,2)$，存在 $\alpha>0$，对 $x'\in B'\backslash B_0$，可作 B_0 内点 $x=\frac{x'}{|x'|^2}$，使 $B(x',r)\cap B(0,1)\subset B(x,\alpha r)$. 因此有

$$\frac{1}{|B(x',r)|}\int_{B(x',r)}|f(y)|\mathrm{d}y=\frac{1}{|B(x',r)|}\int_{B(x',r)\cap B_0}|f(y)|\mathrm{d}y$$

$$\leqslant C\cdot\frac{1}{|B(x,\alpha r)|}\int_{B(x,\alpha r)}|f(y)|\mathrm{d}y\leqslant CMf(x),$$

即

$$Mf(x')\leqslant CMf(x).$$

由此知，$Mf(x)$ 在 $B(0,2)$ 上可积.

此外，对 $x'\in\mathbf{R}^n\backslash B(0,2)$，由于当 $r<1$ 时，对 $B(x',r)$ 有

$$\frac{1}{|B(x',r)|}\int_{B(x',r)}|f(y)|\mathrm{d}y = 0,$$

故知

$$Mf(x') \leqslant \frac{1}{|B(x',1)|}\|f\|_1,$$

即 $Mf(x)$是有界的. 显然还有

$$Mf(x) \to 0, \quad |x| \to \infty.$$

这就是说,对 $\lambda_0>0$, $\{x\in \boldsymbol{R}^n: Mf(x)>\lambda_0\}$含于某个球内. 因此有

$$I = \int_{\{x\in \boldsymbol{R}^n:\ Mf(x)>\lambda_0\}} Mf(x)\mathrm{d}x < \infty.$$

现在取 $\lambda_0=1$,则

$$\begin{aligned}
I &\geqslant \int_1^{\infty} |\{x \in \boldsymbol{R}^n:\ Mf(x) > \lambda\}|\mathrm{d}\lambda \\
&\geqslant \int_1^{\infty}\left\{\frac{C}{\lambda}\int_{\{x\in \boldsymbol{R}^n:\ |f(x)|>\lambda\}}|f(x)|\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}\lambda \\
&= \int_{\boldsymbol{R}^n}|f(x)|\left\{\int_1^{|f(x)|}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}\right\}\mathrm{d}x \\
&= C\int_{\boldsymbol{R}^n}|f(x)|\ln^+|f(x)|\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

定理证毕.

随着空间 $\boldsymbol{R}^n$ 的分解,相应地就有下述关于函数的分解结果.

定理 5(C-Z 函数分解) 设 $f(x)$是 $\boldsymbol{R}^n$ 上非负可积函数,$\lambda>0$,则存在互不相重的方体列$\{Q_k\}$以及分解 $f(x)=g(x)+b(x)$,使得

(i) $|g(x)|\leqslant 2^n\lambda$, a. e. $x\in \boldsymbol{R}^n$,

$\|g\|_p^p\leqslant C\lambda^{p-1}\|f\|_1$, $1<p<\infty$;

(ii) $b(x)=0$, a. e. $x\in \boldsymbol{R}^n\setminus\bigcup\limits_k Q_k$,

$$\int_{Q_k} b(x)\mathrm{d}x = 0, \quad k = 1,2,\cdots.$$

证明 根据对 f,λ 所作的 C-Z 空间分解结果,已知存在互不

相重方体列$\{Q_k\}$，使得

$$f(x)\leqslant\lambda,\ \text{a.e.}\ x\in\boldsymbol{R}^n\setminus\bigcup_k Q_k,\quad \sum_k|Q_k|\leqslant\frac{1}{\lambda}\|f\|_1,$$

$$\lambda<\frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k}f(x)\mathrm{d}x\leqslant 2^n\lambda,\quad k=1,2,\cdots.$$

现在，定义$g(x)$，$b(x)$如下：

$$g(x)=\begin{cases}f(x), & x\in\boldsymbol{R}^n\setminus\bigcup_k Q_k,\\ \dfrac{1}{|Q_k|}\displaystyle\int_{Q_k}f(x)\mathrm{d}x, & x\in Q_k(k=1,2,\cdots);\end{cases}$$

$$\begin{aligned}b(x)&=f(x)-g(x)\\&=\begin{cases}0, & x\in\boldsymbol{R}^n\setminus\bigcup_k Q_k,\\ f(x)-\dfrac{1}{|Q_k|}\displaystyle\int_{Q_k}f(x)\mathrm{d}x, & x\in Q_k(k=1,2,\cdots).\end{cases}\end{aligned}$$

显然，我们有

$$\int_{Q_k}b(x)\mathrm{d}x=\int_{Q_k}f(x)\mathrm{d}x-\int_{Q_k}f(x)\mathrm{d}x=0\quad(k=1,2,\cdots).$$

因此，(ii)成立.

根据分解所满足的不等式和$g(x)$的定义，易知

$$g(x)=|g(x)|\leqslant 2^n\lambda,\quad \text{a.e.}\ x\in\boldsymbol{R}^n.$$

此外，若记$F=\boldsymbol{R}^n\setminus\bigcup_k Q_k$，则得

$$\begin{aligned}\|g\|_p^p&=\int_{\boldsymbol{R}^n}g(x)^p\mathrm{d}x\\&=\sum_k\int_{Q_k}[g(x)]^{p-1}g(x)\mathrm{d}x+\int_F[g(x)]^{p-1}g(x)\mathrm{d}x\\&\leqslant\sum_k(2^n\lambda)^{p-1}\int_{Q_k}g(x)\mathrm{d}x+\lambda^{p-1}\int_F g(x)\mathrm{d}x\\&=(2^n\lambda)^{p-1}\sum_k\int_{Q_k}f(x)\mathrm{d}x+\lambda^{p-1}\int_F f(x)\mathrm{d}x\\&\leqslant C\lambda^{p-1}\|f\|_1.\end{aligned}$$

因此(i)得证.

§2 Benedek-Calderón-Panzone 原理

作为应用,我们来介绍一下关于判断次线性算子弱(1,1)型的充分条件. 学习了 L^p 空间的算子内插理论,指标 $p=1$时的情形自然是举足轻重的. 这里给出的结果也称为 Benedek-Calderón-Panzone 原理,它在卷积型奇异积分算子的理论中扮演着重要的角色,其中的条件也转化为著名的 Hörmander 条件.

定理 6 设 T 是一个次线性算子,满足

(i) T 是弱(p,p)型,$1<p<\infty$,即

$$|E_{Tf}(\lambda)| \leqslant \frac{C_1}{\lambda^p}\|f\|_p^p, \quad f \in L^p(\boldsymbol{R}^n);$$

(ii) 存在大于 1 的常数 C_2,C_3,使对满足

$$\operatorname{supp} f \subset B(x_0,r), \quad \int_{B(x_0,r)} f(x)\mathrm{d}x = 0$$

的函数 f,有

$$\int_{\boldsymbol{R}^n\setminus B(x_0,C_2r)} |Tf(x)|\mathrm{d}x \leqslant C_3\|f\|_1,$$

则对具有紧支集的有界函数 $f(x)$,有

$$|E_{Tf}(\lambda)| \leqslant \frac{C_4}{\lambda}\|f\|_1, \quad \lambda > 0.$$

证明 显然 $f\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$,又有 $\lambda>0$,故对此作 C-Z 分解,可得互不相重方体列$\{Q_k\}$以及 $f(x)=g(x)+b(x)$,满足

$$\sum_k |Q_k| \leqslant \frac{1}{\lambda}\|f\|_1, \quad \|g\|_p^p \leqslant C'\lambda^{p-1}\|f\|_1.$$

特别地,其中 $b(x)$可写为

$$b(x) = \sum_k b_k(x),$$

$$b_k(x) = \left\{f(x) - \frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k} f(y)\mathrm{d}y\right\}\chi_{Q_k}(x),$$

$$k = 1,2,\cdots.$$

而且有
$$\int_{Q_k} |b_k(x)|\mathrm{d}x \leqslant 2\int_{Q_k} |f(x)|\mathrm{d}x.$$

根据$|E_{Tf}(\lambda)| \leqslant |E_{Tg}(\lambda/2)| + |E_{Tb}(\lambda/2)|$，为证弱(1,1)性，只需分别估计右端两项即可.

(i) 由T的弱(p,p)型，故得

$$|E_{Tg}(\lambda/2)| \leqslant \frac{C_1}{\lambda^p}\|g\|_p^p \leqslant \frac{C_1C'}{\lambda^p}\lambda^{p-1}\|f\|_1 = \frac{C}{\lambda}\|f\|_1.$$

(ii) 首先，由不等式

$$\int_{Q_k} |b_k(x)|^p\mathrm{d}x = \int_{Q_k}\left|f(x) - \frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k} f(y)\mathrm{d}y\right|^p\mathrm{d}x$$

$$\leqslant 2^p\int_{Q_k} |f(x)|^p\mathrm{d}x + 2^p\int_{Q_k}\left\{\frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k} |f(y)|\mathrm{d}y\right\}^p\mathrm{d}x$$

$$\leqslant 2^p\int_{Q_k} |f(x)|^p\mathrm{d}x + 2^p\int_{Q_k}\left\{\frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k} |f(y)|^p\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant 2^{p+1}\int_{Q_k} |f(x)|^p\mathrm{d}x$$

可知
$$\left\|b - \sum_{k=1}^{N-1} b_k\right\|_p^p = \int_{\boldsymbol{R}^n}\left|\sum_{k=N}^{+\infty} b_k(x)\right|^p\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{k=N}^{+\infty}\int_{Q_k} |b_k(x)|^p\mathrm{d}x \leqslant 2^{p+1}\int_{\bigcup_N^{+\infty} Q_k} |f(x)|^p\mathrm{d}x.$$

注意到$f\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$，以及$\sum_{k=1}^{+\infty}|Q_k| < \lambda^{-1}\cdot\|f\|_1 < \infty$，我们有

$$\lim_{N\to\infty}\left|\bigcup_{k=N}^{\infty} Q_k\right| = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=N}^{+\infty}|Q_k| = 0,$$

$$\lim_{N\to\infty}\left\|b - \sum_{k=N}^{+\infty} b_k\right\|_p = 0.$$

从而由T之弱(p,p)型可知，当$N\to\infty$时$T\left(\sum_{k=N}^{+\infty} b_k(x)\right)$依测度收

敛于 0. 因此，我们有 $T\left(\sum_{N_k}^{+\infty} b_k(x)\right) \xrightarrow{\text{a.e.}} 0(k\to\infty)$. 由此知

$$|Tb(x)| = \left|T\left(\sum_{k=1}^{+\infty} b_k(x)\right)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} |Tb_k(x)|, \quad \text{a.e. } x \in \boldsymbol{R}^n.$$

其次，作球 B_k，其圆心为 Q_k 的中心，而半径为 Q_k 的直径的 C_2 倍，并记 $\Omega = \bigcup_k B_k$，则

$$\begin{aligned}|E_{Tb}(\lambda/2)| &= |\{x \in \boldsymbol{R}^n: |Tb(x)| > \lambda/2\}| \\ &\leqslant |\Omega| + |\{x \in \boldsymbol{R}^n\backslash\Omega: |Tb(x)| > \lambda/2\}| \\ &= I + J.\end{aligned}$$

对于 I，我们有

$$I = |\Omega| \leqslant C\sum_k |Q_k| \leqslant \frac{C}{\lambda}\|f\|_1.$$

对于 J，我们有

$$\begin{aligned}J &\leqslant \frac{2}{\lambda}\int_{\boldsymbol{R}^n\backslash\Omega} |Tb(x)|\mathrm{d}x \leqslant \frac{2}{\lambda}\int_{\boldsymbol{R}^n\backslash\Omega}\sum_k |Tb_k(x)|\mathrm{d}x \\ &\leqslant \frac{2}{\lambda}\sum_k\int_{\boldsymbol{R}^n\backslash\Omega} |Tb_k(x)|\mathrm{d}x \leqslant \frac{2C_3}{\lambda}\sum_k\int_{Q_k} |b_k(x)|\mathrm{d}x \\ &\leqslant \frac{4C_3}{\lambda}\int_{\boldsymbol{R}^n} |f(x)|\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

综合(i)，(ii)，即得所证.

对于 $p=\infty$，类似地有下述结论：

定理 7(Zo) 设 T 是一个次线性算子，满足

(i) T 是(∞,∞)型：$\|Tg\|_\infty \leqslant C_1\|g\|_\infty$；

(ii) 同上述定理之(ii)；

(iii) 对任一互不相重的方体列$\{Q_k\}$，以及满足

$$\operatorname{supp} h \subset \bigcup_k Q_k, \qquad \int_{Q_k} h(x)\mathrm{d}x = 0 \ (k = 1,2,\cdots)$$

的函数 $h(x)$，有

$$|Th(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} |T(h\chi_{Q_k})(x)|, \quad \text{a.e. } x \in \boldsymbol{R}^n,$$

则 T 是弱(1,1)型.

证明 对 $f\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$, $\lambda>0$ 作 C-Z 函数分解: $f(x)=g(x)+b(x)$. 因为 $\|g\|_\infty\leqslant 2^n\lambda$, 所以

$$|Tg(x)|\leqslant C_1\cdot\|g\|_\infty\leqslant C_1 2^n\lambda.$$

因此, 我们有

$$\{x\in\boldsymbol{R}^n:|Tf(x)|>C_1 2^{n+1}\lambda\}\subset\{x\in\boldsymbol{R}^n:|Tb(x)|>2C_1\lambda\}.$$

而对上述右端点集测度的估计可类似于上一定理之思路进行. 证毕.

注意, 对上述定理 6 的充分条件稍加分析可以看出, 在应用上的主要一点在于如何检验条件(ii)! 让我们来看卷积型积分算子的情形.

设有核 $K(x)$ 的积分算子

$$Tf(x)=\int_{\boldsymbol{R}^n}K(x-y)f(y)\mathrm{d}y,$$

对于(ii)中的函数 $f(x)$, 不妨假定 $\operatorname{supp}f\subset B(0,r)$, 由于

$$\int_{B(0,r)}f(y)\mathrm{d}y=0,$$

故有

$$\begin{aligned}Tf(x)&=\int_{B(0,r)}K(x-y)f(y)\mathrm{d}y\\&=\int_{B(0,r)}[K(x-y)-K(x)]f(y)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

由此知

$$\begin{aligned}&\int_{\boldsymbol{R}^n\setminus B(0,C_\gamma r)}|K*f(x)|\mathrm{d}x\\&\quad\leqslant\int_{|y|<r}|f(y)|\left\{\int_{|x|\geqslant C_\gamma r}|K(x-y)-K(x)|\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

如果上式右端的内层积分对一切 y 是有界的, 那么, 条件(ii)就成立了. 一般来说, 称

$$\int_{|x|>2|y|}|K(x-y)-K(x)|\mathrm{d}x\leqslant C,\quad y\neq 0$$

为核 K 所满足的 Hörmander 条件, 其中常数 C 可能与核 K 有关.

习　题

1. 设线性算子 T 在 $L^2(\boldsymbol{R}^n)$ 上有界，且有

$$Tf(x)=0,\quad x\in\boldsymbol{R}^n\backslash\operatorname{supp}(f).$$

证明：$Tf(x)=b(x)\cdot f(x)$，其中 $f\in L^2(\boldsymbol{R}^n)$，$b\in L^\infty(\boldsymbol{R}^n)$.

提示：作分解：$\boldsymbol{R}^n=\bigcup\limits_i Q_i$，$Q_i\cap Q_j=\varnothing(i\neq j)$，并令 $b(x)=(T\chi_{Q_i})(x)$，$x\in Q_i(i=1,2,\cdots)$.

2. 设次线性算子 T 是弱 (p_0,q_0) 型，其中 $0<p_0\leqslant q_0<\infty$. 若对每个互不相交方体列 $\{Q_j\}$ 以及 $h\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$，$\operatorname{supp}(h)\subset\bigcup\limits_j Q_j$ 且 $\int_{Q_j}h(x)\mathrm{d}x=0$，有

$$\left|\left\{x\in\boldsymbol{R}^n\backslash\bigcup_j 2Q_j:\ |Th(x)|>\lambda\right\}\right|\leqslant\left(\frac{C}{\lambda}\|f\|_p\right)^q,$$

其中 $1/p-1/q=1/p_0-1/q_0$，$p_0\geqslant p>1$. 证明 T 是弱 (p,q) 型.

3. 定义空间 $L^{r,n-pr}(\boldsymbol{R}^n)$ 为满足

$$\|f\|_{r,n-pr}=\left\{\sup_{\substack{x\in\boldsymbol{R}^n\\ \rho>0}}\frac{1}{\rho^{n-pr}}\int_{B(x,\rho)}|f(y)|^r\mathrm{d}y\right\}^{1/r}<\infty$$

之 f 全体. 设 $1<p<n$，$1<r\leqslant n/p$，$1<s<r$，$f\in L^{r,n-pr}$，证明 $(Mf^s)^{1/s}\in L^{r,n-pr}$.

提示：利用公式(记 $\chi(x)=\chi_{B(x_0,\rho)}(x)$)

$$\int_{B(x,\rho)}(Mf^s)^{r/s}(x)\mathrm{d}x\leqslant C\int_{\boldsymbol{R}^n}|f(x)|^r M\chi(x)\mathrm{d}x.$$

4. 设有 $\boldsymbol{R}^n$ 上的函数族 $\{K_\alpha(x)\}_{\alpha\in A}$，且满足

(1) $\sup\limits_{\alpha\in A}\int_{\boldsymbol{R}^n}|K_\alpha(x)|\mathrm{d}x\leqslant C_1$；

(2) 存在大于1的常数 C_2,C_3，使得

$$\int_{|x|\geqslant C_2|y|}\sup_{\alpha\in A}|K_\alpha(x-y)-K_\alpha(x)|\mathrm{d}x\leqslant C_3.$$

证明如下定义的极大算子 T 是弱(1,1)型：

$$Tf(x) = \sup_{a\in A}|K_a * f(x)|.$$

提示：应用 Zo 的定理.

5. 设 $1<p_0<q_0<\infty$，T 是弱(p_0,q_0)型，且存在 $C_2,C_3>1$，使对满足

$$\operatorname{supp}(f)\subset B(x_0,r),\quad \int_{B(x_0,r)} f(x)\mathrm{d}x = 0$$

的函数 f，有

$$\left\{\int_{|x-x_0|>C_2 r}|Tf(x)|^r\mathrm{d}x\right\}^{1/r}\leqslant C_3\|f\|_1,\quad \frac{1}{p_0}+\frac{1}{q_0}=1-\frac{1}{r}.$$

证明$\|Tf\|_q\leqslant C\|f\|_p$，其中 $1<p\leqslant p_0$，$1<q<q_0$.

提示：应用 Marcinkiewicz 内插定理，只需指出 T 是弱$(1,r)$型. 为此，对 $f\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$及 $t>0$作 C-Z 分解，并估计$|E_{Tf}(\lambda)|$.

6. 定义：设 T 是一个线性算子，对 $L^1(\boldsymbol{R}^n)$中的稠密集 S 中的元 f 和 $\lambda>0$，存在可测集 G 和 $g\in S$，使得$|g(x)|\leqslant C\lambda$，$\|g\|_1\leqslant C\|f\|_1$，以及

$$|G|\leqslant\frac{C}{\lambda}\|f\|_1,\quad \int_{\boldsymbol{R}^n\setminus G}|T(f-g)(x)|\mathrm{d}x\leqslant C\|f\|_1.$$

则称 T 是拟$(1,1)$型.

若 T 在 S 上是拟$(1,1)$型，弱$(2,2)$型，证明 T 在 S 上是弱$(1,1)$型.

参 考 文 献

[1] A. P. Calderón and A. Zygmund, On the existence of singular integrals, *Acta Math.*, **88**(1952), 85～139.

[2] A. Benedek, A. P. Calderón and R. Panzone, Convolution operators on Banach space valued functions, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, U. S. A., **48**(1962), 356～365.

[3] F. Zo, A note on the approximation of the identity, *Studia Math.*, **55**(1976), 111～122.

[4] E. M. Stein, Note on the class LlnL, *Studia Math.*, **32**(1969), 305～310.

第五章　奇异积分算子

Fourier 分析理论中的基本算子之一是所谓 Hilbert 变换，它可形式地写成

$$Hf(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(y)}{x-y}\mathrm{d}y=\lim_{\epsilon\to 0+}\int_{|x-y|>\epsilon}\frac{f(y)}{x-y}\mathrm{d}y,$$

(这里的积分是指 Cauchy 主值意义下的积分)并与研究函数的共轭 Fourier 级数有关.

Hilbert 变换的早期研究者有 Лузин 以及 M. Riesz 等等，所用方法主要是复方法. 实方法的探讨始于本世纪 20 年代(如 Besicovitch)，到50年代，这一方法开始有了很大发展，这主要是指 1952年 Calderón 和 Zygmund 将这一算子推广于 $\boldsymbol{R}^n$ 上的研究工作，特别是它对于偏微分方程理论的应用中的贡献. 奇异积分理论是当代调和分析中最光辉的一页.

本章首先介绍 Hilbert 变换以及在 $\boldsymbol{R}^n$ 上的 Calderón-Zygmund 奇异积分算子的 L^2理论，并给出它们的乘子公式，然后再在较一般的形式下讨论其在 L^p 上的估计及其极大算子的情形. 这基本上给出了第一代奇异积分理论，见 E. M. Stein 的专著(参考文献[4]). 关于进一步的发展，直至第三代奇异积分理论，特别是 $T(1)$定理，可见参考文献[5].

§1　$L^2(\boldsymbol{R}^1)$上的 Hilbert 变换

设 $g(x)$是定义在 $\boldsymbol{R}^n$ 上的可测函数，且对某个 $x_0\in\boldsymbol{R}^n$，$g(x)$在点集$\{x\in\boldsymbol{R}^n:|x-x_0|>\epsilon>0\}$上是可积的，若极限

$$\lim_{\epsilon\to 0+}\int_{|x-x_0|>\epsilon} g(x)\mathrm{d}x$$

存在，则称 $g(x)$ 在 $\boldsymbol{R}^n$ 上按主值意义下是可积的，且记此极限为

$$\text{P.V.}\int_{\boldsymbol{R}^n} g(x)\mathrm{d}x.$$

例如 $n=1$ 时，$g(x)=f(x)/(x_0-x)$，则按定义我们有

$$\text{P.V.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x)}{x_0-x}\mathrm{d}x=\lim_{\epsilon\to 0+}\left\{\int_{-\infty}^{x_0-\epsilon}+\int_{x_0+\epsilon}^{\infty}\right\}\frac{f(x)}{x_0-x}\mathrm{d}x. \qquad (1)$$

显然，如果 $f\in L^1(\boldsymbol{R}^1)$，或 $f\in L^p(\boldsymbol{R}^1)$，$1<p<\infty$，那么上式右端两个积分均存在. 从而在此情形下，上式的存在性等价于极限

$$\lim_{\epsilon\to 0+}\int_{\epsilon<|x-x_0|\leqslant\eta}\frac{f(x)}{x_0-x}\mathrm{d}x,\quad \eta>0 \qquad (2)$$

的存在. 又若将上式中的积分改写为

$$\int_{\epsilon<|x-x_0|\leqslant\eta}\frac{f(x)-f(x_0)}{x_0-x}\mathrm{d}x+f(x_0)\int_{\epsilon<|x-x_0|\leqslant\eta}\frac{\mathrm{d}x}{x_0-x}$$

$$=\int_{\epsilon<|x-x_0|\leqslant\eta}\frac{f(x)-f(x_0)}{x_0-x}\mathrm{d}x,$$

则当 f 在 x_0 处满足 Lip1：

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant C|x-x_0|,$$

就知(2)式中的极限是存在的了. 特别当 $f'(x_0)$ 存在时，亦有(2)式中的极限存在.

总之，若(1)存在，则称(1)为 f(在 $x=x_0$ 处)的 Hilbert 变换，并采用记号

$$Hf(x_0)=\lim_{\epsilon\to 0+}\frac{1}{\pi}\int_{|x-x_0|>\epsilon}\frac{f(x)}{x_0-x}\mathrm{d}x.$$

本节的目的是要在较一般的条件下讨论 $Hf(x)$ 的存在性及其性质.

Hilbert 变换很自然地在解析函数的理论中出现，如对 $f\in L^p(\boldsymbol{R}^1)$，$1\leqslant p<\infty$，考察积分

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)}{t-z}\mathrm{d}t,$$

其中 $z=x+\mathrm{i}y$ 是复数，$y>0$，$f(t)$是实值函数.注意到函数

$$F_N(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{-N}^{N}\frac{f(t)}{t-z}\mathrm{d}t,\quad N>0$$

在上半平面 $\boldsymbol{R}_+^2=\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2:\ y>0\}$上是全纯的，而且在 $z=x+\mathrm{i}y$ 位于上半平面：$y\geqslant y_0>0$ 上时，$F_N(z)$当 $N\to\infty$时一致趋于

$$F(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)}{t-z}\mathrm{d}t.$$

因此，$F(z)$在 $\boldsymbol{R}_+^2$ 上是全纯的.

设 $z\in\boldsymbol{R}_+^2$，且分解$1/[\mathrm{i}(t-z)]$为实部与虚部，则

$$\begin{aligned}F(z)=&\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y}{(x-t)^2+y^2}f(t)\mathrm{d}t\\&+\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x-t}{(x-t)^2+y^2}f(t)\mathrm{d}t\\=&\frac{1}{2}P_y*f(x)+\frac{\mathrm{i}}{2}Q_y*f(x),\end{aligned}$$

其中 $P_y(x)=(1/\pi)(y/(x^2+y^2))$是 $\boldsymbol{R}_+^2$上的 Poisson 核，而称

$$Q_y(x)=\frac{1}{\pi}\frac{x}{x^2+y^2}$$

为 $\boldsymbol{R}_+^2$ 上的共轭 Poisson 核，相应地称 $Q_y*f(x)$为 f 的共轭 Poisson 积分.

定理 1 设 $f\in L^p(\boldsymbol{R}^1)$，$1\leqslant p<\infty$，则对几乎处处的 $x\in(-\infty,\infty)$，当 z 以非切向收敛于 x 时，f 的共轭 Poisson 积分存在有限的极限.

证明 不妨假定 $f(x)\leqslant 0$（否则将 f 分为正部与负部），并令 $u(x,y)=P_y*f(x)$，$v(x,y)=Q_y*f(x)$，则 $G(z)=\exp(u+\mathrm{i}v)$是解析的，且其绝对值小于等于1.当 $z\to x$ 时 $G(z)$有几乎处处的非切向极限，且其极限值不可能在一个正测集上为零，这是因为 u 是 $f\in L^p$ 的 Poisson 积分，且不能在一正测集上非切向趋于$-\infty$.这

就是说，虚部 $v(x,y)$ 有几乎处处的非切向极限. 证毕.

下一定理阐明了上述共轭 Poisson 积分的极限值是什么，这一结果是关于 Hilbert 变换的重要性质之一.

定理 2 设 $f\in L^p(\boldsymbol{R}^1)$，$1\leqslant p<\infty$，则 $Hf(x)$ 几乎处处存在，其值几乎处处等于 f 的共轭 Poisson 积分的极限，即对 a. e. $x\in\boldsymbol{R}^n$，有

$$\lim_{y\to0+}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x-t}{(x-t)^2+y^2}f(t)\mathrm{d}t-\int_{|x-t|>y}\frac{f(t)}{x-t}\mathrm{d}t\right\}=0.\quad(3)$$

证明 (3)式左端之积分可写为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-t)\varphi_y(t)\mathrm{d}t,\quad \varphi_y(t)=y^{-1}\varphi\left(\frac{t}{y}\right),$$

其中

$$\varphi(t)=\begin{cases}\dfrac{t}{t^2+1}-\dfrac{1}{t}, & |t|>1,\\[2mm] \dfrac{t}{t^2+1}, & |t|\leqslant1.\end{cases}$$

记 $\psi(x)$ 为 $\varphi(x)$ 的非负递减最小向径控制函数，则

$$\psi(x)=\sup_{|t|\geqslant|x|}|\varphi(t)|=\begin{cases}1/(|x|(1+x^2)), & |x|>1,\\ 1/2, & |x|\leqslant1.\end{cases}$$

因为 $\psi\in L^1(\boldsymbol{R}^1)$，所以有

$$\lim_{y\to0+}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-t)\varphi_y(t)\mathrm{d}t=f(x)\|\varphi\|_1=0,$$

(注意 $\varphi(t)$ 是奇函数)证毕.

现在，给出 Hilbert 变换在 L^2 上的基本事实.

定理 3 设 $f\in L^2(\boldsymbol{R}^1)$，则

$$\widehat{(Hf)}(x)=(-\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}x)\hat{f}(x).$$

特别地，有 $\|Hf\|_2=\|f\|_2$.

证明 因为

$$I(z)=\frac{-1}{2\pi\mathrm{i}z}=\frac{1}{2}[P_y(x)+\mathrm{i}Q_y(x)],$$

所以有 $P_y(x)=2\mathrm{Re}I(z)$，$Q_y(x)=2\mathrm{Im}I(z)$.

另一方面，对 $y>0$，可知

$$I(z)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{2\pi izt}\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{2\pi ixt}\mathrm{e}^{-2\pi yt}\mathrm{d}t.$$

从而分别得到

$$P_y(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{2\pi ixt}\mathrm{e}^{-2\pi|yt|}[\chi_+(t)+\chi_-(t)]\mathrm{d}t,$$

$$Q_y(x)=-\mathrm{i}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{2\pi ixt}\mathrm{e}^{-2\pi|yt|}[\chi_+(t)-\chi_-(t)]\mathrm{d}t,$$

其中，$\chi_+(t)=\chi_{(0,\infty)}(t)$，$\chi_-(t)=\chi_{(-\infty,0)}(t)$，而且

$$\chi_+(t)+\chi_-(t)=1,\ \chi_+(t)-\chi_-(t)=\mathrm{sgn}t\ (t\neq 0).$$

由此立即可知

$$\widehat{Q_y}(t)=(-\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}t)\mathrm{e}^{-2\pi|yt|},$$

以及

$$\widehat{(Q_y*f)}(x)=(-\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}x)\mathrm{e}^{-2\pi|yx|}\hat{f}(x).$$

根据 Plancherel 定理，可以推知当 $y\to 0+$ 时，Q_y*f 依 L^2 意义收敛于一个 L^2 中的函数，且此函数的 Fourier 变换是 $(-\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}x)\hat{f}(x)$. 另一方面，由上一定理又知当 $y\to 0+$ 时，有

$$(Q_y*f)(x)\to Hf(x),\quad \text{a.e. } x\in\boldsymbol{R}^1.$$

因此，$\widehat{(Hf)}(x)=(-\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}x)\hat{f}(x)$. 证毕.

推论 设 $f\in L^2(\boldsymbol{R}^1)$，则对 $y>0$，有

$$Q_y*f(x)=P_y*(Hf)(x),\quad \text{a.e. } x\in\boldsymbol{R}^1.$$

证明 只需指出上一等式两端具有相同的 Fourier 变换，而这正是上一定理的结论.

注 从定理 3 的证明中，又一次得到已知的公式

$$\widehat{P_y}(t)=\mathrm{e}^{-2\pi|yt|}.$$

§2 L^2 乘子理论简介

我们知道，Fourier 变换在解析数学领域内是十分有用的工

具，而其中的一个重要问题就是要使其逆 Fourier 变换回到原来的函数，这就牵涉到 Fourier 积分的求和问题.

例如设 $f\in L^2(\boldsymbol{R}^n)$，$\hat{f}(x)$是它的 Fourier 变换，其逆 Fourier 变换为(形式地)

$$\int_{\boldsymbol{R}^n}\hat{f}(\xi)e^{2\pi i x\cdot\xi}d\xi,$$

转而研究其部分和算子

$$S_N f(x)=\int_{|\xi|\leqslant N}\hat{f}(\xi)e^{2\pi i x\cdot\xi}d\xi,$$

并期望在 $N\to\infty$ 时，$S_N f(x)$ 在一定意义(如 L^2)下收敛于 $f(x)$.

现在，记 $\sigma(\xi)=\chi_{B(0,N)}(\xi)$，以及

$$Tf(x)=\int_{\boldsymbol{R}^n}\sigma(x)\hat{f}(\xi)e^{2\pi i x\cdot\xi}d\xi,\quad x,\xi\in\boldsymbol{R}^n,$$

并导入一般性定义：

定义 设有算子 T: $L^2(\boldsymbol{R}^n)\to L^2(\boldsymbol{R}^n)$，若对一切 $f\in L^2(\boldsymbol{R}^n)$，有

$$\widehat{(Tf)}(x)=\sigma(x)\hat{f}(x),\quad \sigma\in L^\infty(\boldsymbol{R}^n),$$

则称 T 是符号为 $\boldsymbol{\sigma(x)}$**(**$\boldsymbol{L^2}$**上)的乘子(算子)**.

显然，T 是 $L^2(\boldsymbol{R}^n)$上的有界线性算子.

例 1 若 $Tf(x)=K*f(x)$，$K\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$，则

$$\widehat{(Tf)}(x)=\hat{K}(x)\cdot\hat{f}(x),\quad f\in L^2(\boldsymbol{R}^n).$$

即 T 是 $L^2(\boldsymbol{R}^n)$上的乘子.

例 2 因为$\widehat{(Hf)}(x)=(-i\,\mathrm{sgn}x)\hat{f}(x)$，所以 Hilbert 变换是 $L^2(\boldsymbol{R}^n)$上的乘子，其符号是$-i\,\mathrm{sgn}x$.

注 1 类似地也可给出 L^p 上乘子的概念.

注 2 在广义函数的意义下，$L^2(\boldsymbol{R}^n)$乘子 T 可以写为 $Tf(x)=K*f(x)$，K 为广义函数.

定理 4 设 T 是 $L^2(\boldsymbol{R}^n)$上的有界线性算子，则下列条件是等价的：

(i) T 是乘子算子；

(ii) T 与平移可交换；

(iii) $T\varphi * \psi = \varphi * T\psi,\ \varphi,\psi \in L^2(\boldsymbol{R}^n)$.

证明 (i)$\Longrightarrow$(ii) 设$(Tf)\widehat{\ }(x) = \sigma(x)\hat{f}(x)$,则对任一平移算子 $\tau_h, h\in \boldsymbol{R}^n$,我们有

$$\begin{aligned}
T(\tau_h f)\widehat{\ }(x) &= \sigma(x)\exp(-2\pi \mathrm{i}x\cdot h)\hat{f}(x) \\
&= \exp(-2\pi \mathrm{i}x\cdot h)\sigma(x)\hat{f}(x) \\
&= \exp(-2\pi \mathrm{i}x\cdot h)(Tf)\widehat{\ }(x) \\
&= (\tau_h(Tf))\widehat{\ }(x).
\end{aligned}$$

(ii)$\Longrightarrow$(iii) 对于任意的 $g\in L^2(\boldsymbol{R}^n)$,$\varphi,\psi\in L^1\cap L^2(\boldsymbol{R}^n)$,有

$$\begin{aligned}
\langle T\varphi * \psi, g\rangle &= \int_{\boldsymbol{R}^n}(T\varphi * \psi)(x)g(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{\boldsymbol{R}^n}\left\{\int_{\boldsymbol{R}^n}(T\varphi)(x-t)\psi(t)\mathrm{d}t\right\}g(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{\boldsymbol{R}^n}\left\{\int_{\boldsymbol{R}^n}T(\tau_t\varphi)(x)g(x)\mathrm{d}x\right\}\psi(t)\mathrm{d}t. \qquad (4)
\end{aligned}$$

Riesz 表示定理指出：存在 $g_1\in L^2(\boldsymbol{R}^n)$,使得

$$\langle Tf, g\rangle = \langle f, g_1\rangle.$$

将此应用于式(4),即得

$$\begin{aligned}
\langle T\varphi * \psi, g\rangle &= \int_{\boldsymbol{R}^n}\left\{\int_{\boldsymbol{R}^n}\tau_t\varphi(x)g_1(x)\mathrm{d}x\right\}\psi(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{\boldsymbol{R}^n}\int_{\boldsymbol{R}^n}\varphi(x-t)\psi(t)g_1(x)\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\
&= \int_{\boldsymbol{R}^n}(\varphi * \psi)(x)g_1(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

类似地又可推得

$$\langle \varphi * T\psi, g\rangle = \int_{\boldsymbol{R}^n}(\varphi * \psi)(x)g_1(x)\mathrm{d}x.$$

这就是说,对一切 $g\in L^2(\boldsymbol{R}^n)$,有

$$\langle T\varphi * \psi, g\rangle = \langle \varphi * T\psi, g\rangle.$$

从而导出：对一切 $\varphi,\psi\in L^1\cap L^2(\boldsymbol{R}^n)$，有

$$T\varphi*\psi=\varphi*T\psi.$$

由此易知(iii)成立.

(iii)$\Longrightarrow$(i)　设 $f\in L^2(\boldsymbol{R}^n)$，$f(x)\neq 0(x\in\boldsymbol{R}^n)$，而取 $\psi(x)=\hat{f}(x)$. 由假定知，对一切 $\varphi\in L^2(\boldsymbol{R}^n)$，有 $T\varphi*\psi=\varphi*T\psi$，因此对一切 $\varphi\in L^2(\boldsymbol{R}^n)$，有

$$\widehat{(T\varphi)}\cdot\hat{\psi}=\hat{\psi}\widehat{(T\psi)},\quad \widehat{T\varphi}=\hat{\varphi}\widehat{(T\psi)}/\hat{\psi}.$$

令 $\widehat{T\psi}/\hat{\psi}=\sigma$，易知 $\sigma\in L^\infty(\boldsymbol{R}^n)$. 事实上，对 $\varphi\in L^2(\boldsymbol{R}^n)$，有

$$\|\sigma\hat{\varphi}\|_2=\|\widehat{T\varphi}\|_2=\|T\varphi\|_2\leqslant\|T\|\|\varphi\|_2.$$

现在记 $E=\{x\in\boldsymbol{R}^n:|\sigma(x)|>\|T\|\}$，如果 $|E|>0$，那么对于 $\hat{\varphi}(x)=\chi_E(x)$，可得 $\|\hat{\varphi}\|_2=|E|^{1/2}$，且有

$$\|\sigma\hat{\varphi}\|_2>\|T\||E|^{1/2}.$$

这一矛盾导致 $|E|=0$，即 $\sigma(x)$ 是本性有界的.

推论　设 $\{T_k\}$ 是一列乘子，而且 T_k 的符号为 $\sigma_k(x)(k=1,2,\cdots)$，若有

$$\lim_{k\to\infty}\sigma_k(x)=\sigma(x),\quad \text{a.e. } x\in\boldsymbol{R}^n,\quad \|\sigma_k\|_\infty\leqslant C\ (\text{一切 } k),$$

则对一切 $f\in L^2(\boldsymbol{R}^n)$，有

$$\lim_{k\to\infty}\|T_kf-Tf\|_2=0,$$

其中 T 是符号为 $\sigma(x)$ 的乘子.

证明　在等式

$$\|T_kf-Tf\|_2^2=\|\widehat{T_kf}-\widehat{Tf}\|_2^2=\|\sigma_k\hat{f}-\sigma\hat{f}\|_2^2$$
$$=\int_{\boldsymbol{R}^n}|\sigma_k(x)-\sigma(x)|^2|\hat{f}(x)|^2\mathrm{d}x$$

中应用 Lebesgue 控制收敛定理即得所证.

注　设 $T=(t_{ij})$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 上算子，$t_{ij}=\sigma_i\delta_{ij}(\delta_{ii}=1,\delta_{ij}=0)(i\neq j)$，则 T 是对角化算子. 对

$$x=\sum_{i=1}^n c_ie_i\in\boldsymbol{R}^n,\quad \{e_1,\cdots,e_n\}\text{ 是 }\boldsymbol{R}^n\text{ 中的基},$$

则
$$Tx=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i c_i e_i,$$
即 Tx 的坐标是 x 的相应坐标乘以 σ_i 而得.

在 $L^2(0,2\pi]$的情形,$e_n=\exp(int)$,$n\in\boldsymbol{Z}$. 对
$$f=\sum\hat{f}(n)\exp(int),$$
对角化算子为 $Tf=\sum\sigma_n\hat{f}(n)\exp(int)$,其中$\{\sigma_n\}$与 f 无关,即 $\widehat{(Tf)}(n)=\sigma_n\hat{f}(n)$. 这样的 T 称作乘子算子,σ_n 就是 T 的乘子符号.

§ 3　Calderón-Zygmund(C-Z)奇异积分算子的 L^2理论

我们如果把 $\boldsymbol{R}^1$上的 Hilbert 变换推广到 $\boldsymbol{R}^n$ 上,其核$1/x$ 在 $\boldsymbol{R}^n$ 上的相应改变可以采取如下几种方式:

(i) 由于$1/x$ 可以写成 $x/|x|^2=x/|x|^{n+1}(n=1)$. 故对 $n>1$,可作
$$K_j(x)=\frac{x_j}{|x|^{n+1}},\quad j=1,2,\cdots,n$$
与之相应. 我们称
$$R_jf(x)=C_n\,\mathrm{P.V.}\int_{\boldsymbol{R}^n}\frac{y_j}{|y|^{n+1}}f(x-y)\mathrm{d}y$$
$(j=1,2,\cdots,n)$为函数 f 的 Riesz 变换(族).

(ii) 由于$1/x$ 可以写成 $\mathrm{sgn}x/|x|=\Omega(x)/|x|$,其中 $\Omega(x)$是零次齐次函数:
$$\Omega(\lambda x)=\Omega(x),\quad \lambda>0.$$
而且 $\Omega(x)+\Omega(-x)=0$. 若将 $\Sigma_1=\{-1,1\}$视作 $\boldsymbol{R}^1$中的单位球面,则此后一等式又可写为
$$\int_{\Sigma_1}\Omega(x)\mathrm{d}x=0.$$
从而,对 $n>1$,可作相应的核为

$$K(x)=\frac{\Omega(x)}{|x|^n},$$

其中 $\Omega(x)$是零次齐次函数，且在单位球面上的平均值为零. 我们称核 $K(x)$为(经典)Calderón-Zygmund 核，并称

$$Tf(x)=\mathrm{P.V.}\int_{\boldsymbol{R}^n}\frac{\Omega(y)}{|y|^n}f(x-y)\mathrm{d}y$$

为(经典)Calderón-Zygmund 奇异积分，简称 T 为(经典)C-Z 算子.

注 1 若记 $x'\in\Sigma$(即单位球面上的向量)，则根据 $\Omega(x)$的零次齐次性质可知

$$\Omega(x)=\Omega(x'),\quad x=rx'\in\boldsymbol{R}^n.$$

也就是说 $\Omega(x)$可以看成是定义在 Σ 上的函数.

注 2 当 $\Omega(x)=\Omega_j(x)=x_j/|x|$时，$T$ 就是 Riesz 算子.

本节集中论述 C-Z 算子的 L^2理论. 当然，为了保证 C-Z 奇异积分算子的存在性以及其他有用的性质，我们尚需要求 $\Omega(x)$满足某些条件，特别是光滑性条件.

3.1 C-Z 奇异积分算子的乘子符号

定理 5 设 $\Omega(x)$是定义在 $\boldsymbol{R}^n$ 上的函数，满足

(A) $\Omega(\lambda x)=\Omega(x),\lambda>0$;

(B) $\int_\Sigma\Omega(x')\mathrm{d}x'=0$;

(C) Dini 条件:

$$\int_0^1\frac{\omega(\rho)}{\rho}\mathrm{d}\rho<\infty,$$

其中 $\omega(\rho)=\sup\{|\Omega(x')-\Omega(y')|: x',y'\in\Sigma,|x'-y'|<\rho\}$，则对 $f\in L^2(\boldsymbol{R}^n)$，积分

$$Tf(x)=\mathrm{P.V.}\int_{\boldsymbol{R}^n}\frac{\Omega(y)}{|y|^n}f(x-y)\mathrm{d}y$$

存在且属于 $L^2(\boldsymbol{R}^n)$，而 T 是 L^2上的乘子算子，其符号 $\sigma(x)$为

$$\sigma(x) = -\frac{i\pi}{2}\int_{\Sigma}\operatorname{sgn}(x' \cdot y')\Omega(y')dy'$$

$$+\int_{\Sigma}\ln|x' \cdot y'|^{-1}\Omega(y')dy'.$$

证明 注意到 $K(x)=\Omega(x)|x|^{-n}$是不可积的，因此须先考虑其截断函数 $K_{\varepsilon,\eta}(x)$：

$$K_{\varepsilon,\eta}(x) = \begin{cases}\Omega(x)|x|^{-n}, & \varepsilon < |x| < \eta, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad 0<\varepsilon<\eta<\infty.$$

显然，$K_{\varepsilon,\eta}\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$，从而对任意的 $f\in L^2(\boldsymbol{R}^n)$，有 $K_{\varepsilon,\eta}*f\in L^2$而且 $\hat{K}_{\varepsilon,\eta}\cdot\hat{f}\in L^2(\boldsymbol{R}^n)$. 下面证明两条性质：

(i) $\sup\limits_x|\hat{K}_{\varepsilon,\eta}(x)|\leqslant C$, C 与 ε,η 无关.

实际上，采用球极坐标：$x=Rx'$, $y=ry'$，其中 $R=|x|$, $r=|y|$, $x'\in\Sigma$, $y'\in\Sigma$，我们有

$$\begin{aligned}\hat{K}_{\varepsilon,\eta}(x) &= \int_{\boldsymbol{R}^n}K_{\varepsilon,\eta}(y)e^{-2\pi i x\cdot y}dy \\ &= \int_{\varepsilon<|y|<\eta}\Omega(y)|y|^{-n}e^{-2\pi i x\cdot y}dy \\ &= \int_{\Sigma}\Omega(y')\left\{\int_{\varepsilon}^{\eta}e^{-2\pi i Rrx'\cdot y'}r^{-n}r^{n-1}dr\right\}dy' \\ &= \int_{\Sigma}\Omega(y')\left\{\int_{\varepsilon R}^{\eta R}e^{-2\pi i t x'\cdot y'}\frac{dt}{t}\right\}dy'.\end{aligned}$$

注意到函数 Ω 在 Σ 上的积分值为零，可得

$$\hat{K}_{\varepsilon,\eta}(x) = \int_{\Sigma}\Omega(y')g_{\varepsilon,\eta,x}(y')dy', \tag{5}$$

其中

$$g_{\varepsilon,\eta,x}(y') = \int_{R\varepsilon}^{R\eta}\frac{e^{-2\pi i t x'\cdot y'}-\cos 2\pi t}{t}dt.$$

对于 $g_{\varepsilon,\eta,x}(y')$，我们来证明：存在$C>1$，

$$|g_{\varepsilon,\eta,x}(y')|\leqslant C\ln|x' \cdot y'|^{-1}+C.$$

先看虚部：我们有

$$\operatorname{Im}(g_{\varepsilon,\eta,x}(y')) = -\int_{R\varepsilon}^{R\eta} \frac{\sin(2\pi t x' \cdot y')}{t} \mathrm{d}t$$

$$= -\operatorname{sgn}(x' \cdot y') \int_{2\pi R\varepsilon x' \cdot y'}^{2\pi R\eta x' \cdot y'} \frac{\sin u}{u} \mathrm{d}u.$$

易知上式右端是一致有界的，且当 $\varepsilon \to 0, \eta \to +\infty$ 时趋于 $-\operatorname{sgn}(x' \cdot y')\pi/2$.

其次看实部：当 $\varepsilon R \leqslant 1 \leqslant \eta R$ 时，作分解

$$\operatorname{Re}(g_{\varepsilon,\eta,x}(y')) = \int_{R\varepsilon}^{R\eta} \frac{\cos 2\pi t x' \cdot y' - \cos 2\pi t}{t} \mathrm{d}t$$

$$= \left\{\int_{R\varepsilon}^{1} + \int_{1}^{R\eta}\right\} \frac{\cos 2\pi t x' \cdot y' - \cos 2\pi t}{t} \mathrm{d}t$$

$$= I_1 + I_2.$$

注意到不等式

$$|\cos 2\pi t x' \cdot y' - \cos 2\pi t|$$

$$= 2|\sin \pi t(x' \cdot y' + 1) \cdot \sin \pi t(x' \cdot y' - 1)|$$

$$\leqslant 2\pi t |x' \cdot y' + 1| \cdot \pi t |x' \cdot y' - 1|$$

$$\leqslant 8\pi^2 t^2,$$

从而知

$$|I_1| \leqslant 8\pi^2 \int_{R\varepsilon}^{1} t \mathrm{d}t = 4\pi^2(1 - (R\varepsilon)^2) \leqslant 4\pi^2.$$

另一方面，对 I_2，有

$$|I_2| \leqslant \left|\int_{x' \cdot y'}^{(x' \cdot y')R\eta} \frac{\cos 2\pi t}{t} \mathrm{d}t\right| + C.$$

若 $(x' \cdot y')R\eta > 1$，则

$$|I_2| \leqslant \int_{x' \cdot y'}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_{1}^{(x' \cdot y')R\eta} \frac{\cos 2\pi t}{t} \mathrm{d}t + C$$

$$\leqslant \ln \frac{1}{|x' \cdot y'|} + 2C,$$

$$C = \sup_R \int_{1}^{R} \frac{\cos u}{u} \mathrm{d}u.$$

若 $0 < (x' \cdot y')R\eta \leqslant 1$，则

$$|I_2| \leqslant \int_{x'\cdot y'}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln \frac{1}{|x' \cdot y'|}.$$

类似的结果对 $x'\cdot y'<0$ 也是成立的. 这说明在 $\varepsilon R\leqslant 1\leqslant \eta R$ 时，得到

$$\mathrm{Re}(g_{\varepsilon,\eta,x}(y')) \leqslant 2\ln|x' \cdot y'|^{-1} + 4\pi^2 + 2C.$$

现在再讨论 $R\varepsilon>1$ 的情形，此时作分解

$$\mathrm{Re}(g_{\varepsilon,\eta,x}) = \int_{R\varepsilon}^{R\eta} = \int_{1}^{R\eta} - \int_{1}^{R\varepsilon},$$

也可得 $|\mathrm{Re}(g_{\varepsilon,\eta,x}(y'))|\leqslant 8\pi^2$. 总之，在所有情况下，都有

$$|\mathrm{Re}(g_{\varepsilon,\eta,x}(y'))| \leqslant C_1\ln|x' \cdot y'|^{-1} + C_2.$$

因此，$g_{\varepsilon,\eta,x}(y')$ 被一个与 ε,η 无关的且在 Σ 上可积的函数所控制，而 $\Omega(x)$ 在 Σ 上又是有界的，(i)成立.

(ii) 应用公式

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \eta\to\infty}}\int_{\varepsilon}^{\eta} \frac{h(\lambda t) - h(\mu t)}{t}\mathrm{d}t = h(0)\ln \frac{\mu}{\lambda}$$

(其中 h 是一个具有很好性质的函数，如 $h\in C^1(R)$，$h'(t)/t$ 在原点的一个邻域上是有界的，而且积分 $\int_a^{\infty} h(t)/t\mathrm{d}t\,(a>0)$ 绝对收敛.) 于 $\lambda=x'\cdot y'$（由于余弦函数是偶函数，可以假定此值为正.）以及 $h(t)=\cos 2\pi t$，$\mu=1$，我们有

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \eta\to\infty}}\int_{R\varepsilon}^{R\eta} \frac{\cos 2\pi t x' \cdot y' - \cos 2\pi t}{t}\mathrm{d}t = \ln|x' \cdot y'|^{-1}.$$

从而在(5)式中令 $\varepsilon\to 0$，$\eta\to\infty$，根据 Lebesgue 控制收敛定理，得到

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \eta\to\infty}}\hat{K}_{\varepsilon,\eta}(x) = \int_{\Sigma}\Omega(y')\Big\{-\frac{\mathrm{i}\pi}{2}\mathrm{sgn}(x' \cdot y') + \ln|x' \cdot y'|^{-1}\Big\}\mathrm{d}y' = \sigma(x).$$

现在考察以 $K_{\varepsilon,\eta}(x)$ 为核的卷积算子：

$$T_{\varepsilon,\eta}f(x) = K_{\varepsilon,\eta} * f(x) = \int_{\varepsilon<|x|<\eta} K(y)f(x-y)\mathrm{d}y.$$

对于 $f\in L^2(\boldsymbol{R}^n)$，由(i)知算子 $T_{\varepsilon,\eta}$ 是符号为 $\hat{K}_{\varepsilon,\eta}(x)$ 的乘子算子. 因为 $\|\hat{K}_{\varepsilon,\eta}\|_\infty\leqslant C$，所以根据 § 2中的推论，又知存在 L^2 上乘子算子 T，其符号为 $\sigma(x)$，使得当 $\varepsilon\to 0,\eta\to\infty$ 时，$T_{\varepsilon,\eta}f(x)$ 依 L^2 意义收敛于 $Tf(x)$. 另一方面，由于 $f\in L^2(\boldsymbol{R}^n)$，故对每个 x，就有

$$\lim_{\eta\to\infty}T_{\varepsilon,\eta}f(x)=\int_{|y|>\varepsilon}K(y)f(x-y)\mathrm{d}y.$$

因此，在 L^2 意义下有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\lim_{\eta\to\infty}T_{\varepsilon,\eta}f(x)\right)=\mathrm{P.V.}\int_{\boldsymbol{R}^n}K(y)f(x-y)\mathrm{d}y=Tf(x).$$

即得所证.

注 1 上述定理中函数 Ω 在 Σ 上的平均值为零这一条件是不能省略的. 这是因为在估计

$$\int_{\boldsymbol{R}^n}\frac{\Omega(y)}{|y|^n}f(x-y)\mathrm{d}y=\left\{\int_{|y|\leqslant 1}+\int_{|y|>1}\right\}\frac{\Omega(y)}{|y|^n}f(x-y)\mathrm{d}y$$

中的困难在于第一个积分. 例如假定 $\Omega(x)\equiv 1$，f 是常数且在 $x=x_0$ 的一个邻域上不为零，那么该积分就发散了(在该邻域).

注 2 从符号 $\sigma(x)$ 的表达式中可以看出它是零次齐次函数. 实际上，一个 α 次齐次函数的 Fourier 变换是 $\alpha+n$ 次齐次函数.

注 3 定理的证明可在函数 Ω 满足更一般的条件下成立. 实际上，分解 Ω 为奇部和偶部：$\Omega=\Omega_o+\Omega_e$，那么 $\mathrm{Im}(g_{\varepsilon,\eta,x})$ 的一致有界性只需 $\Omega_o\in L^1(\Sigma)$. 而为估计 $\mathrm{Re}(g_{\varepsilon,\eta,x})$，其证明就是要求

$$\int_\Sigma|\Omega_e(y')|\ln|x'\cdot y'|^{-1}\mathrm{d}y'$$

的一致有界性. 这就是说，若 K 是奇函数且是 $(-n)$ 齐次的，即 Ω 是奇函数，则算子 T 的(2,2)型只需 $\Omega\in L^1(\Sigma)$ 来保证.

同时，我们看到，若 $K(x)$ 是奇函数，则

$$\begin{aligned}\sigma(x)&=-\frac{\pi\mathrm{i}}{2}\int_\Sigma\Omega(y')\mathrm{sgn}(x'\cdot y')\mathrm{d}y'\\&=-\pi\mathrm{i}\int_{\Sigma^+(x)}\Omega(y')\mathrm{d}y',\end{aligned}$$

其中 $\Sigma^+(x)$表示满足 $x'\cdot y'\geqslant 0$的半球.

3.2 Riesz 变换

定义 设 $f(x)$定义于 $\boldsymbol{R}^n$ 上,称 n 个变换

$$R_j f(x)=C_n\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{|y|>\varepsilon}\frac{y_j}{|y|^{n+1}}f(x-y)\mathrm{d}y$$

$$(j=1,2,\cdots,n)$$

为 **Riesz 变换(族)**,并称

$$K_j(x)=\Omega_j(x)|x|^{-n},\quad \Omega_j(x)=C_n x_j|x|^{-1}(j=1,2,\cdots,n)$$

为 **Riesz 核**,其中 $C_n=\pi^{-(n+1)/2}\Gamma((n+1)/2)$.

显然,$\Omega_j(x)(j=1,2,\cdots,n)$是奇函数,还是零次齐次函数,不仅在 Σ 上的平均值为零而且在 Σ 上是光滑的.因此,Riesz 变换是上一定理所述的奇异积分算子的一种特殊情形.若记其符号为 $\sigma_j(x)$,则有

$$\sigma_j(x)=-\pi\mathrm{i}\,C_n\int_{\Sigma^-}y_j'\mathrm{d}y',$$

其中 $y_j'=y'\cdot x_j$.为了化简 $\sigma_j(x)$的表达式,写出

$$y'=\sum_{k=1}^{n}(y'\cdot e_k)e_k,$$

其中$\{e_1,\cdots,e_n\}$是 $\boldsymbol{R}^n$ 中任一标准正交基,从而

$$y_j'=\sum_{k=1}^{n}(y'\cdot e_k)(e_k\cdot x_j).$$

现在,取$\{e_k\}$中的 $e_j=x'$(注意,x 固定),则得

$$y_j'=(y'\cdot x')x_j'+\sum_{k\neq j}a_k(y'\cdot e_k),$$

其中 $a_k=e_k\cdot x_j$.对上式两端作 Σ^+上的积分,我们有

$$\sigma_j(x)=-\pi\mathrm{i}C_n x_j'\int_{\Sigma^+}(x'\cdot y')\mathrm{d}y'$$

$$-\pi\mathrm{i}C_n\sum_{k\neq j}a_k\int_{\Sigma}(y'\cdot e_k)\mathrm{d}y'.$$

注意到第一个积分为

$$\int_{\Sigma^+}(x'\cdot y')\mathrm{d}y' = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin^{n-2}\theta\cdot\omega_{n-1}\mathrm{d}\theta$$

$$= \omega_{n-1}\frac{1}{n-1} = \Omega_{n-1}(\text{单位球体积}),$$

而其他的积分值为零. 因此,再注意到 Ω_{n-1}的计算公式(见第一章),可知 Riesz 变换的 L^2乘子符号为

$$\sigma_j(x) = -\pi\mathrm{i}C_n x'_j\Omega_{n-1} = -\mathrm{i}x'_j,\quad j=1,2,\cdots,n.$$

类似于 Hilbert 变换的性质 $H^2=-I$(I 是恒等算子),我们有

$$\sum_{j=1}^{n}R_j^2 = -I.\ (L^2(\boldsymbol{R}^n))$$

实际上,由$\widehat{(R_jf)}(x)=-\mathrm{i}x_j|x|^{-1}\hat{f}(x)$可得

$$\widehat{(R_j^2f)}(x) = -x_j^2|x|^{-2}\hat{f}(x),\quad R_j^2f = R_j(R_jf).$$

由此知

$$\widehat{\Big(\sum_j R_j^2\Big)}(x) = -\hat{f}(x).$$

此外,还有

$$\sum_{j=1}^{n}\|R_jf\|_2 = \|f\|_2^2.$$

例 设 $f\in C_c^{(2)}(\boldsymbol{R}^n)$,$1<p<\infty$,则

$$\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_k}\right\|_2 \leqslant C_2\|\Delta f\|_2.$$

证明 因为有

$$-4\pi^2x_jx_k\hat{f}(x) = -\left(\mathrm{i}\frac{x_j}{|x|}\right)\left(\mathrm{i}\frac{x_k}{|x|}\right)(-4\pi^2|x|^2)\hat{f}(x),$$

所以得到

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_k} = -R_jR_k\Delta f.$$

从而知

$$\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_k}\right\|_2 \leqslant \|R_j(R_k\Delta f)\|_2 \leqslant C'\|R_k\Delta f\|_2 \leqslant C\|\Delta f\|_2.$$

本例给出 $\Delta f=g\in L^2(\mathbf{R}^n)$的解的一个先验估计.

下面,我们来谈谈 Riesz 变换与多元调和函数系之间的联系.

在§1中,我们看到 Hilbert 变换与共轭调和函数的边值问题有着密切联系.对于 $\mathbf{R}^n$ 上的情形,让我们首先注意,单变量的解析函数可以看成(至少在局部)是两个变量的调和函数的梯度,从而很自然地去考虑多元调和函数的梯度作为多元解析函数的拓广.

定义 设$\{u_1(x),u_2(x),\cdots,u_n(x)\}\subset C^{(2)}(\mathbf{R}^n)$,且满足广义 Cauchy-Riemann 方程:

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}=0,\quad \frac{\partial u_j}{\partial x_k}=\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\ (j\neq k),$$

则称 n 个函数组$\{u_1(x),\cdots,u_n(x)\}$为 $\mathbf{R}^n$ 上的**共轭函数系**.

上述第一个方程说明函数的调和性;第二个方程蕴含有一个 n 元函数存在,其梯度就是$\{u_1(x),\cdots,u_n(x)\}$. $\mathbf{R}^n$ 上共轭函数系的存在(至少在局部)蕴含一个 n 元调和函数 $h(x)$的存在性,使得 $u_j(x)=\partial h/\partial x_j(j=1,2,\cdots,n)$. 联系到 Poisson 积分,下述定理指出,可通过 Riesz 变换来描述共轭函数系的特征.

定理 6 设有 $L^2(\mathbf{R}^n)$中的 $n+1$个函数: $f(x),f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$,它们的 Poisson 积分各记为

$$u_0(x,y)=P_y*f(x),\ u_j(x,y)=P_y*f_j(x) \tag{6}$$
$$(j=1,2,\cdots,n),$$

则函数组$\{u_0(x,y),u_1(x,y),\cdots,u_n(x,y)\}$是在 R^{n+1}上的共轭函数系的充要条件为

$$f_j(x)=R_jf(x)\quad(j=1,2,\cdots,n). \tag{7}$$

证明 充分性 由(7)式知

$$\hat{f}_j(x)=-\mathrm{i}x_j|x|^{-1}\hat{f}(x).$$

应用 Fourier 变换的乘法公式可知

$$u_0(x,y)=\int_{\mathbf{R}^n}\hat{f}(t)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x\cdot t}\mathrm{e}^{-2\pi|t|y}\mathrm{d}t,$$

$$u_j(x,y)=P_y*f_j(x)$$

$$= -\mathrm{i}\int_{\mathbf{R}^n}\hat{f}(t)t_j|t|^{-1}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x\cdot t}\mathrm{e}^{-2\pi|t|y}\mathrm{d}t$$

$(j=1,2,\cdots,n)$. 因为上述式子中的积分是快速收敛的，所以求导时可在积分号下进行. 从而，经计算即得式(6).

必要性　设

$$u_j(x,y) = P_y * f_j(x) = \int_{\mathbf{R}^n}\hat{f}_j(t)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x\cdot t}\mathrm{e}^{-2\pi|t|y}\mathrm{d}t$$

$$(j=1,2,\cdots,n),$$

$$u_0(x,y) = P_y * f(x) = \int_{\mathbf{R}^n}\hat{f}(t)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x\cdot t}\mathrm{e}^{-2\pi|t|y}\mathrm{d}t,$$

由(6)式知

$$\frac{\partial u_0}{\partial x_j} = \frac{\partial u_j}{\partial x_0} = \frac{\partial u_j}{\partial y},$$

故得

$$2\pi\mathrm{i}t_j\hat{f}(t)\mathrm{e}^{-2\pi|t|y} = -2\pi|t|\hat{f}_j(t)\mathrm{e}^{-2\pi|t|y}.$$

从而知

$$\hat{f}_j(t) = -\mathrm{i}t_j|t|^{-1}\hat{f}(t),\quad f_j(x) = R_jf(x)(j=1,2,\cdots,n).$$

§4　C-Z 奇异积分算子的一般理论

鉴于在偏微分方程以及其他解析分支领域中的许多有效的应用，奇异积分算子的 C-Z 理论在调和分析理论中占据着重要的地位. 本节的目的是要把这一理论推广于一般的卷积算子，其中的卷积核 $K(x)$满足与经典核 $\Omega(x)/|x|^n$ 相适应的推广了的条件.

定义　设 $K(x)$定义在 $\mathbf{R}^n$ 上，且在 $\mathbf{R}^n\setminus\{0\}$处是局部可积的，并满足

(I) 存在常数 C_1，使得对于任意的 $0<\varepsilon<N$，有

$$\left|\int_{\varepsilon<|x|<N}K(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant C_1,$$

且对任意固定的 N，极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|x|<N} K(x)\mathrm{d}x$$

存在；

(Ⅱ) 存在常数 C_2，使得对于一切 $R>0$，有

$$\int_{|x|<R}|x|\,|K(x)|\mathrm{d}x \leqslant C_2 R;$$

(Ⅲ) 存在常数 C_3，使得对于一切 $y\neq 0$，有

$$\int_{|x|\geqslant 2|y|}|K(x-y)-K(x)|\mathrm{d}x \leqslant C_3,$$

则称 $K(x)$ 为广义 **Calderón-Zygmund 奇异积分核**，简称为 C-Z **核**，$C_i(i=1,2,3)$ 称为 K 的 C-Z 常数.

下述结论是 C-Z 核最重要的性质之一.

引理 7 设 $K(x)$ 是一个 C-Z 核，对 $0<\varepsilon<N$，记 $K_{\varepsilon,N}(x)=K(x)\cdot\chi_{\{x:\,\varepsilon<|x|<N\}}(x)$，则 $K_{\varepsilon,N}(x)$ 也是 C-Z 核，且其 C-Z 常数是一致有界的，与 ε,N 无关.

证明 任意取定 $0<\varepsilon<N$，且为简便计，我们记 $h(x)=K_{\varepsilon,N}(x)$. 条件(Ⅰ)，(Ⅱ)是显然满足的，且其 C-Z 常数与 K 本身相同. 因此，只需证明(Ⅲ)——Hölmander 条件，即估计

$$I=\int_{|x|\geqslant 2|y|}|h(x-y)-h(x)|\mathrm{d}x,\quad y\neq 0. \tag{8}$$

分两种情况讨论：$|y|<N$，$|y|\geqslant N$.

(i) $|y|\geqslant N$. 此时，当 $|x|\geqslant 2|y|$ 时就有 $|x|\geqslant N$，$|x-y|\geqslant|x|-|y|\geqslant N$，从而可知 $h(x)=0=h(x-y)$，(8)式中积分为零.

(ii) $|y|<N$. 此时，可能发生三种情况，即 $|x-y|<\varepsilon$；$\varepsilon\leqslant|x-y|\leqslant N$；$|x-y|>N$.

(A) $|x-y|>N$. 此时，当 $|x|\geqslant 2|y|$ 时有 $|x|\geqslant|x-y|-|y|\geqslant N-|x|/2$ 或 $|x|\geqslant 2N/3$. 注意到 $h(x-y)=0$，可得

$$\begin{aligned}I&=\int_{2N/3\leqslant|x|\leqslant N}|h(x)|\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_{2N/3\leqslant|x|\leqslant N}\frac{1}{|x|}|x|\,|K(x)|\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{3}{2N}C_2N = \frac{3C_2}{2}.$$

(B) $|x-y|<\varepsilon$. 这一情况与(A)的证法相似.

(C) $\varepsilon\leqslant|x-y|\leqslant N$. 此时,分别就 $|x|<\varepsilon$; $\varepsilon\leqslant|x|\leqslant N$; $|x|>N$ 等三种情况进行讨论.

当 $|x|<\varepsilon$ 时. 由(8)式的限制以及 $|x-y|\geqslant\varepsilon$ 可知 $|y|\leqslant|x|/2<\varepsilon/2$. 从而得

$$|x-y|\leqslant|x|+|y|<3\varepsilon/2.$$

我们有

$$I\leqslant\int_{\varepsilon\leqslant|x-y|<3\varepsilon/2}|h(x-y)|\mathrm{d}y\leqslant\int_{\varepsilon\leqslant|y|<3\varepsilon/2}|K(y)|\mathrm{d}y<\frac{3C_2}{2}.$$

当 $|x|>N$ 时. 证明的方法与当 $|x|<\varepsilon$ 时类似.

当 $\varepsilon\leqslant|x|\leqslant N$ 时. 由于 $\varepsilon\leqslant|x-y|\leqslant N$,故(8)式中的函数 h 与 K 同. 因此,(8)就是 Hörmander 条件(Ⅱ)本身. 引理证毕.

有了以上引理,就为研究截断 C-Z 核 $K_{\varepsilon,N}$ 的 Fourier 变换的一致有界性提供了方便.

引理 8 设 $K(x)$是一个 C-Z 核,$K_{\varepsilon,N}(x)$同上引理所述,则

$$|\hat{K}_{\varepsilon,N}(\xi)|\leqslant C,$$

其中 C 只与核 K 的 C-Z 常数有关.

证明 对取定的 ε,N,记 $h(x)=K_{\varepsilon,N}(x)$. 首先,为了利用核 K 的光滑性条件,我们将 h 的 Fourier 变换改写一下,即由

$$\hat{h}(\xi)=\mathrm{e}^{2\pi i y\cdot\xi}\int_{R^n}h(x-y)\mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi}\mathrm{d}x,$$

$$y=\frac{\xi}{2|\xi|^2}\text{ 时有 }\mathrm{e}^{2\pi i y\cdot\xi}=-1,$$

可得

$$\hat{h}(\xi)=\frac{1}{2}\left\{\int_{|x|\leqslant2|y|}+\int_{|x|>2|y|}\right\}[h(x)-h(x-y)]\mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi}\mathrm{d}x$$
$$=I_1+I_2.$$

为估计 I_2,根据上述引理,应用 Hörmander 条件即可.

为估计 I_1，我们再改写 I_1 为

$$I_1=\int_{|x|\leqslant 2|y|}(\mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi}-1)h(x)\mathrm{d}x+\int_{|x|\leqslant 2|y|}h(x)\mathrm{d}x$$
$$-\int_{|x|\leqslant 2|y|}\mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi}h(x-y)\mathrm{d}x=J_1+J_2-J_3.$$

对于 J_1，我们有

$$|J_1|\leqslant\int_{|x|\leqslant 2|y|}|\mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi}-1||h(x)|\mathrm{d}x$$
$$\leqslant C\int_{|x|\leqslant 2|y|}|\xi||x||K(x)|\mathrm{d}x$$
$$\leqslant C|\xi|C_2|2y|\leqslant C.$$

对于 J_2，我们有

$$|J_2|\leqslant\left|\int_{|x|\leqslant 2|y|}K(x)\chi_{\{x:\,\varepsilon<|x|<N\}}(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant C_1.$$

对于 J_3，我们再改写为

$$-J_3=-\int_{|x|\leqslant 2|y|}(\mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi}+1)h(x-y)\mathrm{d}x$$
$$+\int_{|x|\leqslant 2|y|}h(x-y)\mathrm{d}x=J_4+J_5.$$

为估计 J_4，注意到 $|\mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi}+1|=|\mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi}-\mathrm{e}^{-2\pi i y\cdot\xi}|\leqslant C|x-y||\xi|$，可得

$$|J_4|\leqslant C|\xi|\int_{|x|\leqslant 2|y|}|x-y||h(x-y)|\mathrm{d}x$$
$$\leqslant C|\xi|\int_{|x|\leqslant 3|y|}|x||K(x)|\mathrm{d}x\leqslant C.$$

为估计 J_5，注意到 $|x-y|\leqslant 3|y|$，我们有

$$|J_5|\leqslant\int_{|x-y|\leqslant 3|y|}h(x-y)\mathrm{d}x-\int_{\substack{|x-y|\leqslant 3|y|\\|x|>2|y|}}h(x-y)\mathrm{d}x$$
$$=J_6-J_7.$$

显然，$|J_6|\leqslant C_1$. 至于 J_7，注意到 $|x-y|>|x|-|y|>|y|$，可知

$$|J_7|\leqslant\int_{|y|\leqslant|x-y|\leqslant 3|y|}|h(x-y)|\mathrm{d}x\leqslant 3C_2.$$

上述证明中出现的 $C_i(i=1,2,3)$ 皆为核 K 的 C-Z 常数. 证毕.

注 定义 C-Z 核 $K(x)$ 的三个条件(Ⅰ),(Ⅱ)和(Ⅲ)是合理的，这是因为经典 C-Z 奇异积分算子的核是满足这些条件的，后文将证明这一点. 不仅如此，还可证明这些条件是对于发展满意的理论所必须的，例如：

(i) 设核 $K(x)$ 满足条件(Ⅰ)，对某个 $1<p<\infty$，算子 $T_\varepsilon f(x)=K_\varepsilon * f(x)$ 在 $L^p(\boldsymbol{R}^n)$ 上是关于 ε 一致有界的，则存在常数 C，使得对一切 $0<\varepsilon<N$，有

$$\left|\int_{\varepsilon<|x|<N} K(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant C. \tag{9}$$

实际上，若 $\varepsilon>N/4$，则结论可由(Ⅱ)直接得到；若 $\varepsilon<N/4$，则记 $B=B(0,N)$ 并令 $f(x)=\chi_B(x)$，我们有

$$|T_\varepsilon f(x)-T_\varepsilon f(0)|=\int_{\boldsymbol{R}^n}[\chi_B(x+y)-\chi_B(y)]K_\varepsilon(-y)\mathrm{d}y.$$

显然，上式积分中的被积函数在 $|y|\leqslant\varepsilon$ 或在 $\chi_B(x+y)=\chi_B(y)$ 时为零. 对 $|x|\leqslant N/8$，就有

$$|T_\varepsilon f(x)-T_\varepsilon f(0)|\leqslant\int_{N/8\leqslant|y|<8N}|K(y)|\mathrm{d}y\leqslant C.$$

从而又有 $|T_\varepsilon f(0)|\leqslant C+|T_\varepsilon f(x)|$. 对此两端在区域 $|x|\leqslant N/8$ 上作 p 次幂积分平均，可知

$$|T_\varepsilon f(0)|\leqslant C+C\left(\frac{1}{N^n}\|f\|_p\right)^{1/p}\leqslant C.$$

(ii) 在(i)的假设下，再假定 $K(x)=\Omega(x')/|x|^n$，$\Omega(x')$ 是零次齐次函数，则 $\int_\Sigma\Omega(x')\mathrm{d}x'=0$. 若对 $f\in C_c^{(\infty)}(\boldsymbol{R}^n)$，当 $\varepsilon\to0$ 时 $T_\varepsilon f(x)$ 的极限几乎处处存在，则条件(Ⅰ)成立. 实际上，此时(9)式表明 $\left|\int_\Sigma\Omega(x')\mathrm{d}x'\right|\ln(N/\varepsilon)$ 关于 ε,N 是一致有界的，由此知 $\int_\Sigma\Omega(x')\mathrm{d}x'=0$. 而后一结论只需注意

$$T_\varepsilon f(x)=\int_{\varepsilon\leqslant|y|\leqslant N}[f(x-y)-f(x)]K(y)\mathrm{d}y$$

$$+ f(x)\int_{\varepsilon\leqslant|y|\leqslant N}K(y)\mathrm{d}y$$
$$= I_1 + I_2,\quad f\in C_c^{(\infty)}(\boldsymbol{R}^n),$$

这里,I_1中的被积函数是绝对可积的.

以上的引理的重要之处在于:结论对算子核的任意 ε,N 截断都是一致的.这就使得当 $T_{\varepsilon,N}f=K_{\varepsilon,N}*f$ 过渡到极限 $Tf=K*f$ 时不会发生障碍.注意到截断核 $K_{\varepsilon,N}$是可积的,从而我们先引入下述定理.此一定理之特点是:在证明中不直接引用 Young 不等式,从而仍使其算子的有界性常数与核的 L^1范数无关.

定理 9 设 $K\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$,且满足 Hörmander 条件:

$$\int_{|x|\geqslant 2|y|}|K(x-y)-K(x)|\mathrm{d}x\leqslant C,\quad y\neq 0,$$

并令 $Tf(x)=K*f(x)$.若 T 是(p_0,p_0)型,$1<p_0<\infty$,则对一切 $1<p<\infty$,T 是(p,p)型,模与$\|K\|_1$无关.

证明 已知 Hörmander 条件蕴含 B-C-P 原理的条件(ii),从而根据第四章定理 6 可知,对 $L_c^\infty(\boldsymbol{R}^n)T$ 是弱$(1,1)$型.又根据 Marcinkiewicz 内插定理,可知 T 是(p,p)型,$1<p<p_0$,且其模与$\|K\|_1$无关.

现在,令 $\widetilde{K}(x)=K(-x)$,$\widetilde{T}f(x)=\widetilde{K}*f(x)$,则由对偶原理知,当$1/p+1/q=1$时,$T$ 在 $L^p(\boldsymbol{R}^n)$上有界当且仅当 $\widetilde{T}$ 在 $L^q(\boldsymbol{R}^n)$上有界,且其模相同.由此知 $\widetilde{T}$ 是(q,q)型,$p_0'<q<\infty$.

另一方面,函数 $\widetilde{K}(x)$仍在 $\boldsymbol{R}^n$ 上可积,且满足与 K 相同的 Hörmander 条件.于是,同理可得 $\widetilde{T}$ 的弱$(1,1)$型(对 $L_c^\infty(\boldsymbol{R}^n)$).再由 Marcinkiewicz 内插推理,我们有 $\widetilde{T}$ 的(q,q)型,$1<q<\infty$,其模与$\|K\|_1$无关.T 当然也完全相同.证毕.

注 Hörmander 条件反映出对函数 K 的某种连续性的要求,易知当 $K(x)$满足

$$\left|\frac{\partial K(x)}{\partial x_j}\right|\leqslant C|x|^{-n-1},\quad |x|>0,j=1,2,\cdots,n,$$

则 K 满足 Hörmander 条件.

实际上，若$|x|>2|y|>0$，则连接点x以及$x-y$的线段不可能通过原点. 根据微积分的中值定理，存在该线段上一点ξ，使得$|\xi|>|x|/2$，

$$|K(x-y)-K(x)|\leqslant|y|\left|\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial K}{\partial x_j}(\xi)\cdot\theta_j\right|,$$

其中$\theta_j(j=1,2,\cdots,n)$是线段的方向余弦. 从而，

$$\begin{aligned}|K(x-y)-K(x)|&\leqslant|y|\sum_{j}\left|\frac{\partial K}{\partial x_j}(\xi)\right|\\&\leqslant n|y|\left(\frac{C}{|\xi|^{n+1}}\right)\leqslant n2^{n+1}C|y||x|^{-n-1}.\end{aligned}$$

由此知

$$\begin{aligned}&\int_{|x|>2|y|}|K(x-y)-K(x)|\mathrm{d}x\\&\leqslant 2^{n+1}nC|y|\int_{|x|>2|y|}|x|^{-n-1}\mathrm{d}x\\&\leqslant C_n\int_{|t|>1}|t|^{-n-1}\mathrm{d}t=C<\infty.\end{aligned}$$

现在，我们就来研究C-Z奇异积分算子：

$$Tf(x)=\int_{\boldsymbol{R}^n}K(x-y)f(y)\mathrm{d}y.\ (\text{主值})$$

定理 10(Calderón-Zygmund) 设$K(x)$是一个C-Z核，作

$$T_\varepsilon f(x)=\int_{|x-y|>\varepsilon>0}K(x-y)f(y)\mathrm{d}y,\quad f\in C_c^{(\infty)}(\boldsymbol{R}^n),$$

则存在常数C_p，使得对任意的$f\in C_c^{(\infty)}(\boldsymbol{R}^n)$，$\varepsilon>0$有

$$\|T_\varepsilon f\|_p\leqslant C_p\|f\|_p,\quad 1<p<\infty,$$

而且在L^p的意义下存在极限Tf，即

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|T_\varepsilon f-Tf\|_p=0,$$

还满足$\|Tf\|_p\leqslant C_p\|f\|_p$. 实际上，它们对一切$f\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$也是成立的，并分别称$T_\varepsilon$与$T$为截断C-Z算子与C-Z算子.

证明 对取定的$0<\varepsilon<N$，$f\in C_c^{(\infty)}(\boldsymbol{R}^n)$，记

$$T_{\varepsilon,N}f(x)=K_{\varepsilon,N}*f(x).$$

由引理 8 知存在常数 C，使得

$$\|T_{\varepsilon,N}f\|_2 \leqslant C\|f\|_2.$$

又由引理 7 知 $K_{\varepsilon,N}$是与 ε，N 无关地满足 Hörmander 条件. 因此，根据定理 9 可得 $T_{\varepsilon,N}f\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$，$1<p<\infty$，而且存在常数 C_p，使得

$$\|T_{\varepsilon,N}f\|_p \leqslant C_p\|f\|_p.$$

但当 N 充分大时，对任意 $x\in\boldsymbol{R}^n$，有 $T_\varepsilon f(x)=T_{\varepsilon,N}f(x)$. 从而由 Fatou 引理立即得到

$$\|T_\varepsilon f\|_p \leqslant C_p\|f\|_p, \quad f\in C_c^{(\infty)}(\boldsymbol{R}^n).$$

实际上，经过常规的极限运算可知上式对于一般的 $f\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$也是成立的.

现在来看 Tf 的存在性，为此分两步讨论：

(i) 对每个 $f\in C_c^{(\infty)}(\boldsymbol{R}^n)$，$\{T_\varepsilon f\}$是 $L^p(\boldsymbol{R}^n)$中的 Cauchy 列.

实际上，对 $0<\eta<\varepsilon$，作

$$\begin{aligned} T_\eta f(x) - T_\varepsilon f(x) &= \int_{\eta<|y|\leqslant\varepsilon} K(y)f(x-y)\mathrm{d}y \\ &= \int_{\eta<|y|\leqslant\varepsilon} K(y)[f(x-y)-f(x)]\mathrm{d}y \\ &\quad + f(x)\int_{\eta<|y|\leqslant\varepsilon} K(y)\mathrm{d}y = J_1 + J_2. \end{aligned}$$

注意到 $$\int_{\boldsymbol{R}^n}|f(x-y)-f(x)|^p\mathrm{d}x\leqslant c|y|^p,$$

由广义 Minkowski 不等式即得

$$\|J_1\|_p \leqslant C\int_{|y|\leqslant\varepsilon}|y||K(y)|\mathrm{d}y \leqslant CC_2\varepsilon.$$

对 J_2，根据 C-Z 核的条件(I)，极限

$$\lim_{\eta\to0}\int_{\eta<|y|<1}K(y)\mathrm{d}y$$

存在，因此有

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\ \eta\to0}}\left|\int_{\eta<|y|<\varepsilon}K(y)\mathrm{d}y\right| = 0.$$

从而可知

$$\|J_2\|_p \leqslant \left|\int_{\eta<|y|<\varepsilon} K(y)\mathrm{d}y\right| \|f\|_p = o(1), \quad \eta,\varepsilon \to 0.$$

即得所证.

(ii) 由(i)知,对 $f\in C_c^{(\infty)}(\boldsymbol{R}^n)$,存在 Tf,使得

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|T_\varepsilon f - Tf\|_p = 0,$$

且有 $\|Tf\|_p\leqslant C\|f\|_p$. 为了证明对一切 $f\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$ 这些结论也成立,我们分解 $f\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$ 为

$$f(x) = g(x) + h(x), \quad g \in C_c^{(\infty)}(\boldsymbol{R}^n),\ \|h\|_p < \delta,$$

其中 $\delta>0$ 为预先给定可任意地小的数. 从而有

$$\begin{aligned}\|T_\eta f - T_\varepsilon f\|_p &\leqslant \|T_\eta(f-g)\|_p + \|T_\eta g - T_\varepsilon g\|_p \\ &\quad + \|T_\varepsilon(f-g)\|_p \\ &\leqslant 2C\delta + o(1), \quad \varepsilon,\eta \to 0.\end{aligned}$$

这说明 $\{T_\varepsilon f\}$ 是 $L^p(\boldsymbol{R}^n)$ 中的 Cauchy 列. 显然,对 $f\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$,有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|T_\varepsilon f - Tf\|_p = 0, \quad \|Tf\|_p \leqslant C_p\|f\|_p.$$

作为本节的结束,我们将上述理论应用于(经典)奇异积分算子. 为此,就是要阐明 $\Omega(x)/|x|^n$ 满足 C-Z 核的条件(Ⅰ),(Ⅱ)和(Ⅲ). 注意到 Ω 的双零条件,(Ⅰ)是显然成立的. 下面看(Ⅱ)和(Ⅲ):

(Ⅱ) 因为

$$\begin{aligned}\int_{|x|<R}|x||K(x)|\mathrm{d}x &= \int_{|x|<R}|x||\Omega(x)||x|^{-n}\mathrm{d}x \\ &= \int_\Sigma|\Omega(x')|\left\{\int_0^R r^{1-n}r^{n-1}\mathrm{d}r\right\}\mathrm{d}x' \\ &\leqslant \|\Omega\|_\infty\omega_n R \leqslant C_2 R.\end{aligned}$$

所以(Ⅱ)成立.

(Ⅲ) 为了证明(Ⅲ)成立,先证明一引理:

引理 11 若在 $\boldsymbol{R}^n$ 中点 x,y 满足 $|x|>2|y|$,则

$$\left|\frac{x-y}{|x-y|} - \frac{x}{|x|}\right| \leqslant 2\left|\frac{y}{x}\right|.$$

证明 不妨假定点 $x, y, x-y$ 如图3所示. 我们有 $\varphi=\pi/2>\varphi'$, $2\varphi'+\theta=\pi$, $OP'=1$, 而且

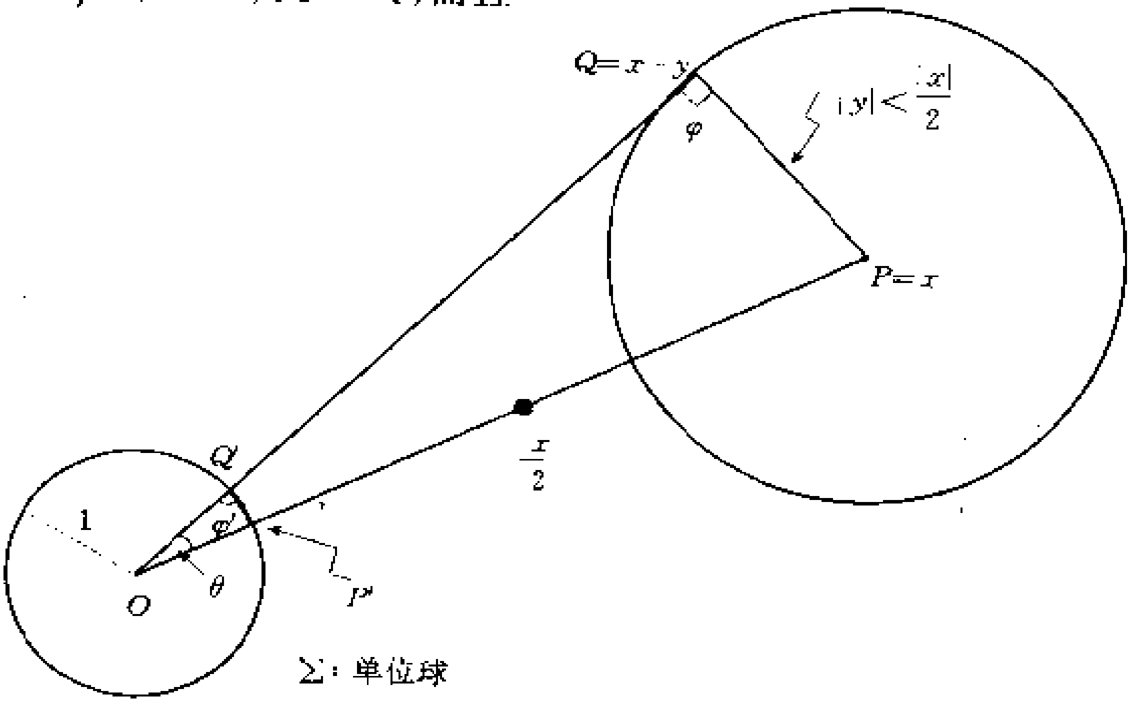

图 3

$$\frac{Q'P'}{OP'}=\frac{\sin\theta}{\sin\varphi'},\quad \sin\theta=\frac{|y|}{|x|}.$$

从而得

$$Q'P'=\frac{1}{\sin\varphi'}\frac{|y|}{|x|}.$$

然而,另一方面又有

$$\sin\varphi'=\sin\frac{\pi-\theta}{2}=\cos\frac{\theta}{2}=\left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^{1/2}$$
$$=\left(\frac{1+|x-y|/|x|}{2}\right)^{1/2}=\left(\frac{|x|+|x-y|}{2|x|}\right)^{1/2}.$$

由此知 $(\sin\varphi')^{-1}\leqslant 2$. 注意到

$$Q'P'=\left|\frac{x-y}{|x-y|}-\frac{x}{|x|}\right|,$$

引理得证.

现在来证明(Ⅲ)成立. 作分解

$$
\begin{aligned}
&K(x-y)-K(x)\\
&=\left(\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^n}-\frac{\Omega(x)}{|x-y|^n}\right)+\left(\frac{\Omega(x)}{|x-y|^n}-\frac{\Omega(x)}{|x|^n}\right)\\
&=J_1+J_2.
\end{aligned}
$$

对于 J_2，只需注意

$$
\begin{aligned}
\int_{|x|>2|y|}|J_2|\mathrm{d}x&\leqslant\|\Omega\|_\infty\int_{|x|>2|y|}(|x-y|^{-n}-|x|^{-n})\mathrm{d}x\\
&\leqslant C,
\end{aligned}
$$

其中 C 与 y 无关.

对于 J_1，注意到点 $x-y$ 与 x 在 Σ 上的投影之间的距离满足

$$
\left|\frac{x-y}{|x-y|}-\frac{x}{|x|}\right|\leqslant 2\left|\frac{y}{x}\right|\quad(|x|>2|y|).
$$

从而知 $|\Omega(x-y)-\Omega(x)|\leqslant\omega(2|y|/|x|)$. 因此，

$$
\begin{aligned}
\int_{|x|>2|y|}|J_1|\mathrm{d}x&=\int_{|x|>2|y|}|\Omega(x-y)-\Omega(x)||x-y|^{-n}\mathrm{d}x\\
&\leqslant\int_{|x|>2|y|}\frac{\omega(2|y|/|x|)}{|x-y|^n}\mathrm{d}x\leqslant 2^n\int_{|x|>2|y|}\frac{\omega(2|y|/|x|)}{|x|^n}\mathrm{d}x\\
&=2^n\omega_n\int_{2|y|}^{\infty}\omega\left(\frac{2|y|}{r}\right)\frac{\mathrm{d}r}{r}=2^n\omega_n\int_0^1\frac{\omega(\rho)}{\rho}\mathrm{d}\rho.
\end{aligned}
$$

上式最后一个积分是有界的(根据 Dini 条件(C)). 这就证明了条件(Ⅲ)成立.

§ 5　极大 C-Z 奇异积分算子 T^* 的有界性

设 $K(x)$是一个 C-Z 算子的核，令

$$
T^*f(x)=\sup_{0<\varepsilon<N}|K_{\varepsilon,N}*f(x)|,
$$

并称 T^* 为极大 C-Z 奇异积分算子. 估计 T^* 的有界性有着重要意义，这正是本节的任务. 为此，再给出一个附加条件：

(N) 对于满足

$$|x_1 - x_2|, |x_2 - x_3|, |x_1 - x_3| \leqslant R/2,$$
$$|x_1 - y|, |x_2 - y|, |x_3 - y| \geqslant R, \ R > 0$$
的点 x_1, x_2, x_3 以及 y，有
$$|K(x_1 - y) - K(x_2 - y)| \leqslant C_4 \frac{|x_1 - x_2|}{|x_3 - y|^{n+1}}.$$

引理 12(Cotlar) 设 $K(x)$ 是 C-Z 核，而且满足条件(N)，则对 $0<\eta<1$，有
$$T^* f(x) \leqslant C\{(M(|Tf|^\eta)(x))^{1/\eta} + Mf(x)\}, \ f \in C_c^\infty(\boldsymbol{R}^n),$$
其中 $C=C(\eta)$ 与 f 无关，Tf 如定理10所示.

证明 对于具有紧支集的函数 f 来说，不必顾虑 $T_{\epsilon,N}$ 在 $N\to\infty$ 时的情形，因此只需研究截断 $T_\epsilon f$. 对于给定的具有紧支集的函数 f 与 g，易知存在趋于零的正数列 $\{\epsilon_j\}$，使得
$$\lim_{j\to\infty} T_{\epsilon_j} f(w) = Tf(w), \quad \lim_{j\to\infty} T_{\epsilon_j} g(w) = Tg(w) \tag{10}$$
对几乎处处的 $w \in \boldsymbol{R}^n$ 存在.

现在固定 $x, \epsilon>0$，令 $g(y) = f(y)\chi_{B(x,\epsilon)}(y)$，并记
$$\begin{aligned} T_\epsilon f(x) = & \int_{|x-y|>\epsilon} [K(x-y) - K(w-y)] f(y) \mathrm{d}y \\ & + \left\{ \int_{|x-y|>\epsilon} K(w-y) f(y) \mathrm{d}y \right. \\ & \left. - \int_{|w-y|>\epsilon_j} K(w-y) f(y) \mathrm{d}y \right\} \\ & + \int_{|w-y|>\epsilon_j} K(w-y) f(y) \mathrm{d}y = I_1 + I_2 + I_3, \end{aligned}$$
其中选取 $w \in B(x, \epsilon/4)$ 而且使(10)式成立.

显然，由(10)知
$$\lim_{j\to\infty} I_3 = Tf(w).$$
对 I_2，由于在 ϵ_j 充分小时有 $B(w,\epsilon_j) \subset B(x,\epsilon)$，故得
$$f(y)\chi_{\boldsymbol{R}^n \setminus B(x,\epsilon)}(y) = f(y)\chi_{\boldsymbol{R}^n \setminus B(x,\epsilon)}(y)\chi_{B(w,\epsilon_j)}(y).$$
从而 I_2 可写为

$$I_2 = -\int_{|w-y|>\varepsilon_j} K(w-y)g(y)\mathrm{d}y,$$

注意到(10)式，可知

$$\lim_{j\to\infty} I_2 = -T(f\chi_{B(x,\varepsilon)})(w).$$

因为 I_1 与 ε_j 无关，所以可令 $j\to\infty$ 而得到

$$\begin{aligned} T_\varepsilon f(x) &= \int_{|x-y|>\varepsilon} [K(x-y) - K(w-y)]f(y)\mathrm{d}y \\ &\quad - T(f\chi_{B(x,\varepsilon)})(w) + Tf(w) \\ &= I_1 + J_2 + J_3. \end{aligned}$$

对于 I_1，应用核的条件(Ⅳ)，可得

$$\begin{aligned} |I_1| &\leqslant C\int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{|x-w|}{|x-y|^{n+1}}|f(y)|\mathrm{d}y \\ &\leqslant C(\varphi_\varepsilon * |f|)(x), \end{aligned}$$

其中 $\varphi(x)$ 是向径且递降的可积函数

$$\varphi(x) = \frac{1}{(1+|x|)^{n+1}}.$$

$\varphi_\varepsilon(x)$ 是其展缩函数. 由此知 $|I_1| \leqslant CMf(x)$，且有

$$|T_\varepsilon f(x)| \leqslant CMf(x) + |T(f\chi_{B(x,\varepsilon)})(w)| + |Tf(w)|,$$

$$\text{a.e. } w \in B(x, \varepsilon/4).$$

现在，不妨假定 $|T_\varepsilon f(x)|>0$，而取 $\lambda>0$，使 $|T_\varepsilon f(x)|>\lambda$，并记 $B=B(x,\varepsilon/4)$，

$$E_1 = \{w\in B: |Tf(w)| > \lambda/3\},$$

$$E_2 = \{w\in B: |T(f\chi_{B(x,\varepsilon)})(w)| > \lambda/3\},$$

$$E_3 = \begin{cases} \varnothing, & CMf(x) \leqslant \lambda/3, \\ B, & CMf(x) > \lambda/3, \end{cases}$$

显然有 $|B| = |E_1\cup E_2\cup E_3|$. 下面估计 $|E_1|$，$|E_2|$ 及 $|E_3|$.

首先，有

$$\left(\frac{\lambda}{3}\right)^\eta |E_1| \leqslant \int_{E_1} |Tf(w)|^\eta \mathrm{d}w, \quad 0<\eta<1.$$

其次，求助于 Колмогоров 不等式，以及算子 T_ε 的弱(1,1)型，我们有

$$\left(\frac{\lambda}{3}\right)^\eta |E_2| \leqslant \int_{E_2} |T(f\chi_{B(x,\varepsilon)})(w)|^\eta dw$$

$$\leqslant \varliminf_{\varepsilon_j\to 0}\int_{E_2} |T_{\varepsilon_j}(f\chi_{B(x,\varepsilon)})(w)|^\eta dw$$

$$\leqslant \varliminf_{\varepsilon_j\to 0}\{C|E_2|^{1-\eta}[T_{\varepsilon_j}(f\chi_{B(x,\varepsilon)})]_1^\eta\}$$

$$\leqslant C|E_2|^{1-\eta}\|f\chi_{B(x,\varepsilon)}\|_1^\eta,$$

其中$[g]_1$表示函数 g 的弱 L^1模. 由$|E_2|$的有限性知

$$\lambda|E_2| \leqslant C\int_{B(x,\varepsilon)} |f(y)|dy.$$

至于 E_3，或者等于 B，此时有$3CMf(x)/\lambda>1$；或者是空集. 无论出现哪种情形均有

$$|E_3| \leqslant 3C|B|Mf(x)/\lambda.$$

综合上述结果，我们有

$$|B| \leqslant C\lambda^{-\eta}\int_B |Tf(w)|^\eta dw + C\lambda^{-1}\int_{B(x,\varepsilon)} |f(y)|dy + \frac{3C|B|Mf(x)}{\lambda}.$$

在上式同乘以 $\lambda/|B|$后，又得

$$\lambda \leqslant C\lambda^{1-\eta}\frac{1}{|B|}\int_B |Tf(w)|^\eta dw + C\frac{1}{|B|}\int_{B(x,\varepsilon)} |f(y)|dy + 3CMf(x)$$

$$\leqslant C\{\lambda^{1-\eta}M(|Tf|^\eta)(x) + Mf(x)\}.$$

引用结果：从不等式 $0<\lambda\leqslant C_1\lambda^{1-\eta}+C_2$可推得

$$\lambda \leqslant \max\{(2C_1)^{1/\eta}, 2C_2\} \leqslant (2C_1)^{1/\eta} + 2C_2,$$

则可知

$$\lambda \leqslant C\{M(|Tf|^\eta)(x)^{1/\eta} + Mf(x)\}.$$

令 $\lambda\to|T_\varepsilon f(x)|$即得所证.

定理 13 设 $K(x)$ 如上引理所述，则

$$\|T^* f\|_p \leqslant C\|f\|_p, \quad 1 < p < \infty.$$

证明 对于 $f\in C_c^{(\infty)}(\boldsymbol{R}^n)$，由上引理以及算子 M 的强 (p,p) 型立即得知结论成立. 对于 $f\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$，取 $\{f_k\}\subset C_c^{(\infty)}(\boldsymbol{R}^n)$，使得 $\|f_k-f\|_p\to 0(k\to\infty)$. 由 $|T^*f_k(x)-T^*f_l(x)|\leqslant T^*(f_k-f_l)(x)$ 可知 $\{T^*f_k(x)\}$ 依 L^p 意义收敛，即为 $T^*f(x)$. 证毕.

定理 14 设 $K(x)$ 如上定理所述，则

$$|\{x\in\boldsymbol{R}^n: T^*f(x)>\lambda\}|\leqslant (C/\lambda)\|f\|_1, \quad \lambda>0.$$

证明 根据引理12，只需指出对 $f\in C_c^{(\infty)}(\boldsymbol{R}^n)$，有

$$|\{x\in\boldsymbol{R}^n: M(|Tf|^\eta)(x)>\lambda^\eta\}|\leqslant (C/\lambda)\|f\|_1, \quad \lambda>0.$$

记 $G_r=\{|x|<r: M(|Tf|^\eta)(x)>\lambda^\eta\}$，我们有

$$\begin{aligned}|G_r| &\leqslant \frac{C}{\lambda^\eta}\int_{G_r}|Tf(x)|^\eta dx\\ &\leqslant \frac{C}{\lambda^\eta}\varliminf_{\varepsilon_j\to 0}\int_{G_r}|T_{\varepsilon_j}f(x)|^\eta dx\\ &\leqslant \frac{C}{\lambda^\eta}|G_r|^{1-\eta}[T_{\varepsilon_j}f]_1^\eta\leqslant \frac{C}{\lambda^\eta}|G_r|^{1-\eta}\|f\|_1^\eta.\end{aligned}$$

(这里用到 Колмогоров 不等式，$[g]_1$ 表示 g 的弱 L^1 模.) 由此即得 $|G_r|\leqslant C\lambda^{-1}\|f\|_1$，再令 $r\to\infty$ 即得所证.

推论 15 设 $K(x)$ 为定理14所述，则对每个 $f\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$，$1<p<\infty$，极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0}T_\varepsilon f(x)$$

存在，记为 P.V. $K*f(x)$，并与 $Tf(x)$ 相同.

证明 根据 Lebesgue 微分定理的类似证法即可导出结论. 注意，对 $f\in C_c^{(\infty)}(\boldsymbol{R}^n)$，其极限与 $Tf(x)$ 相同.

习 题

1. 设 $f\in L^2(\boldsymbol{R}^1)$，$xf\in L^2(\boldsymbol{R}^1)$ 而且

$$\int_{R^1} f(x)\mathrm{d}x = 0,$$

证明 $Hf \in L^1(\boldsymbol{R}^1)$.（$Hf$ 是 f 的 Hilbert 变换）

提示：由题设可知 $f \in \boldsymbol{R}^1$，并注意 H 在 $L^2(\boldsymbol{R}^1)$上是有界的.

2. 设 $K(x)$ 在 $\boldsymbol{R}^n$ 上满足 $|K(x)| \leqslant C/|x|^n, x \neq 0$，以及 Hörmander 条件，$Q$ 是方体，$f \in L_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^n)$. 证明

(i) $\int_{2Q \setminus Q} |K(x-y)||f(y)|\mathrm{d}y \leqslant CMf(x), \quad x \in Q$;

(ii) $$\int_{R^n \setminus 4Q} \int_Q |K(x-y) - K(x-y_0)||f(y)|\mathrm{d}y\mathrm{d}x \leqslant C|Q|Mf(y_0), \quad y_0 \in Q.$$

参 考 文 献

[1] A. P. Calderón and A. Zygmund,

On the existence of certain singular integrals, *Acta Math.*, **88**(1952), 85～139.

On singular integrals, *Amer. J. Math.*, **78**(1956), 289～309.

Singular integral operators and differential equations, *Amer. J. Math.*, **79**(1957), 801～821.

A note on singular integrals, *Studia Math.*, **65**(1979), 77～87.

On singular integrals with variable kernel, *Applicable Ana.*, **7**(1978), 221～238.

[2] M. Cotlar, and R. Cignoli, *An Introduction to Functional Analysis*, North-Holland, Amsterdam and London, 1974.

[3] A. Torchinsky, *Real-Variable Methods in Harmonic Analysis*, Academic Press, Orlando, Florida, 1986.

[4] E. M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton University Press (1979).

[5] Jean-Lin Journé, Calderón-Zygmund *operators*, *Psendo-Differential Operators and the* Cauchy *Integral of* Calderón, LNM 994, Springer-Verlag, (1983).

第六章　加权模不等式与 A_p 权理论

在前面各章关于算子在 L^p 空间上有界性估计的论述中，主要是针对 Lebesgue 测度而言的. 从而，提出研究一般测度即算子从 $L^p(\boldsymbol{R}^n,\mu)$到 $L^q(\boldsymbol{R}^n,\nu)$的情形是很自然的. 这一课题我们并非完全陌生，例如在第四章 §1 中曾证明过：

$$\int_{\boldsymbol{R}^n}|Mf(x)|^p\varphi(x)\mathrm{d}x\leqslant C\int_{\boldsymbol{R}^n}|f(x)|^p M\varphi(x)\mathrm{d}x,\quad 1<p<\infty.$$

如果记 $\mathrm{d}\mu(x)=M\varphi(x)\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}\nu(x)=\varphi(x)\mathrm{d}x$，那么它就是这方面的一个特例，并称为加权模不等式，$\varphi(x)$，$M\varphi(x)$称为权函数. 实际上，这一形式并不特殊，从后文中即将看到，我们感兴趣的正是这类加权模不等式：

$$\int_{\boldsymbol{R}^n}|Tf(x)|^p v(x)\mathrm{d}x\leqslant C_p\int_{\boldsymbol{R}^n}|f(x)|^p u(x)\mathrm{d}x. \tag{1}$$

从历史上讲，1955年 E. M. Stein 在他的博士论文中指出，对于 T 是 Hardy-Littlewood 极大算子 M 的情形，在 $n=1$，$u(x)=v(x)=w(x)=|x|^\alpha$ 而且$1<p<\infty$，$-1/p<\alpha<1-1/p$ 时，(1)式成立.（这类结果可应用于正交级数加权平均收敛的问题）1960年，Helson 和 Szegö 还讨论过算子 T 是 Hilbert 变换的情形，但仅解决 $p=2$时的情形（$w(x)=\mathrm{e}^{b_1(x)+b_2(x)}$，$b_i\in L^\infty$，$\|b_2\|_\infty<\pi/2$.）

这一方向上的关键性研究是 B. Muckenhopt 在1972年作出的，他在讨论 H-L 极大算子时开创了所谓 A_p 权理论. 继之，Coifman 和 C. Fefferman 又系统地探讨了奇异积分算子的加权情形. 目前，A_p 权理论已有了相当完善的发展（指 $u(x)=v(x)=w(x)$的情形），而且在许多解析学领域中找到了应用，如复变函数论，偏微分方程论等.）本章将以 A_p 权理论为核心介绍有关的基

本内容.

现在,我们来举例说明,为什么要着重考察一般测度是由权函数构成之特殊情形的原因.

对于 Hardy-Littlewood 极大算子 M,假定存在常数 $C=C(p,\mu)$,使得对于某个 $p(1\leqslant p<\infty)$以及一切 $f\in L^p(\mathbf{R}^n,\mu)$,有

$$\mu(\{x\in\mathbf{R}^n: Mf(x)>\lambda\})\leqslant\frac{C}{\lambda^p}\left\{\int_{\mathbf{R}^n}|f(x)|^p\mathrm{d}\mu(x)\right\},\lambda>0,$$

(μ 是非负 Borel 测度,在有界可测集上其测度有限.)则 μ 关于 Lebesgue 测度 $\mathrm{d}x$ 是绝对连续的,即存在非负局部可积函数 $w(x)$,使得 $\mathrm{d}\mu(x)=w(x)\mathrm{d}x$.

实际上,设 E 是 $\mathbf{R}^n$ 中的可测集且 $|E|=0$,不妨假定 E 是紧集. 对给定 $\varepsilon>0$,存在开集 G: $G\supset E$ 且 $\mu(G\backslash E)<\varepsilon$. 作函数 $f(x)=\chi_{G\backslash E}(x)$,则 $f\in L^p(\mathbf{R}^n,\mu)$,而且

$$\|f\|_{L^p(\mathbf{R}^n,\mu)}^p=\mu(G\backslash E)<\varepsilon.$$

另一方面,对于 $x\in E$,可作方体 Q: $x\in Q\subset G$,使得

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q f(y)\mathrm{d}y=\frac{|(G\backslash E)\cap Q|}{|Q|}=1.$$

由此知
$$\begin{aligned}\mu(E)&\leqslant\mu(\{x\in\mathbf{R}^n: Mf(x)\geqslant 1/2\})\\&\leqslant 2^pC\|f\|_{L^p(\mathbf{R}^n,\mu)}^p\leqslant C'\varepsilon.\end{aligned}$$

根据 ε 的任意性,可得 $\mu(E)=0$.

§1 H-L 极大算子双权弱(p,p)型的充要条件: A_p权

设 $u(x),v(x)$是 $\mathbf{R}^n$ 上的非负可测函数,在联系到算子加权模不等式时称它们为权函数. 首先从 Hardy-Littlewood 极大算子开始,研究它在加权 $u(x),v(x)$的估计中权函数应有的性质.

为方便计,记 $u(E)=\int_E u(x)\mathrm{d}x$, $v(E)=\int_E v(x)\mathrm{d}x$, $\infty\cdot 0=0$, $\infty^{-1}=0$ 以及 $0^{-1}=\infty$.

问题 给定 p: $1<p<\infty$，寻求权函数 $u(x)$，$v(x)$，使得

$$v(\{x\in \mathbf{R}^n:\ Mf(x)>\lambda\})\leqslant \frac{C}{\lambda^p}\int_{\mathbf{R}^n}|f(x)|^p u(x)\mathrm{d}x \qquad (2)$$

对一切 $\lambda>0$ 以及 $f\in L^p(\mathbf{R}^n,u(x)\mathrm{d}x)$ 都成立.

议论 显然一个平凡的情形是 $u(x)$ 与 $v(x)$ 有界，这是因为当 $u(x)=v(x)\equiv 1$ 时，已知(2)式成立. 如果再稍加分析，并注意到 $Mf(x)$ 涉及 $f(x)$ 在方体上的平均值，那么易知只需对权函数在各个方体 Q 上作某种控制即可，这正是我们的出发点. 为方便计，不妨设(2)式中的 $f(x)\geqslant 0$，我们有

引理 1 若(2)成立，则对任一正方体 Q，有

$$(f_Q)^p v(Q)\leqslant C\int_Q f^p(x)\cdot u(x)\mathrm{d}x. \qquad (3)$$

证明 不妨取 Q，使得 $f_Q>0$，易知

$$f_Q\leqslant M(f\chi_Q)(x),\quad x\in Q.$$

由此知对每个满足 $f_Q>\lambda$ 的 $\lambda>0$，有

$$Q\subset\{x\in\mathbf{R}^n:\ M(f\chi_Q)(x)>\lambda\}.$$

从而根据(2)可得

$$v(Q)\leqslant\frac{C}{\lambda^p}\int_Q f^p(x)u(x)\mathrm{d}x.$$

而令 $\lambda\to f_Q$ 即得(3).

推论 若(2)成立，且 E 是方体 Q 内的可测集，则有

$$\left\{\frac{1}{|Q|}\int_E f(x)\mathrm{d}x\right\}^p v(Q)\leqslant C\int_E f^p(x)u(x)\mathrm{d}x, \qquad (4)$$

$$\left(\frac{|E|}{|Q|}\right)^p v(Q)\leqslant Cu(E). \qquad (5)$$

证明 在(3)中以 $f\cdot\chi_E$ 代替 f，即得(4). 在(4)中令 $f(x)\equiv 1$，可得(5). 证毕.

注 1 由(5)可知，除非 $v(x)=0$，a. e. $x\in\mathbf{R}^n$，否则必有 $u(x)>0$，a. e. $x\in\mathbf{R}^n$.

注 2 由(5)可知，除非 $u(x)=+\infty$，a. e. $x\in\mathbf{R}^n$，否则 $v(x)$ 总

是局部可积的.

定理 2 $p=1$时,(2)式成立的充分必要条件是不等式

$$A_1: \qquad Mv(x) \leqslant C \cdot u(x), \quad \text{a.e. } x \in \boldsymbol{R}^n \tag{6}$$

成立.

证明 必要性 首先,将(5)式写为

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q v(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{C}{|E|}\int_E u(x)\mathrm{d}x. \tag{5'}$$

其次,固定 Q,并令(不妨设 $u(x)<\infty$, a.e. $x\in\boldsymbol{R}^n$)

$$a > \operatorname*{essinf}_{x\in Q}\{u(x)\}, \quad E_a = \{x \in Q: u(x) < a\},$$

显然有 $|E_a|>0$. 在(5′)中取 $E=E_a$,则得

$$\frac{v(Q)}{|Q|} \leqslant C \cdot a.$$

这就是说,我们有

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q v(x)\mathrm{d}x \leqslant C \operatorname*{essinf}_{x\in Q}\{u(x)\} \leqslant C \cdot u(x), \quad \text{a.e. } x \in Q. \tag{7}$$

(7)式是对任一方体 Q 均成立的,从而(6)式为真. 这是因为若有 $x\in\boldsymbol{R}^n$,使得

$$Mv(x) > Cu(x),$$

则必存在方体 Q: $x\in Q$,使得

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q v(x)\mathrm{d}x > C \cdot u(x).$$

不妨假定此方体 Q 的顶点为有理点,从而由(7)知点集 $\{x\in\boldsymbol{R}^n: Mv(x)>Cu(x)\}$ 包含于可数多个零测集之中,当然仍为零测集. (6)式为真.

充分性 引用第四章§1中的不等式(3),立即可得

$$\begin{aligned} v(\{x \in \boldsymbol{R}^n: Mf(x) > \lambda\}) &\leqslant \frac{C}{\lambda}\int_{\boldsymbol{R}^n} f(x) \cdot Mv(x)\mathrm{d}x \\ &\leqslant \frac{C}{\lambda}\int_{\boldsymbol{R}^n} f(x)u(x)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

注 (6)与(7)是等价的.我们称满足(6)或(7)中的(u,v)为A_1权(函数组),记为$(u,v)\in A_1$,其中常数C之最小者称为A_1权常数.

定理 3 设$1<p<\infty$,则(2)式成立的充分必要条件是:不等式

$$A_p:\quad \left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q v(x)\mathrm{d}x\right\}\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q u(x)^{-\frac{1}{p-1}}\mathrm{d}x\right\}^{p-1}\leqslant C \tag{8}$$

对一切方体Q均成立.

证明 必要性 假定(2)成立,从而(4)成立.为了寻求权函数的必要条件,自然期望消去(4)式中的f,也就是令

$$f(x)=f^p(x)u(x)\quad 即\quad f(x)=u(x)^{-\frac{1}{p-1}}.$$

为了保证可积性,对于方体Q,作点集

$$E_k=\{x\in Q:\ u(x)>k^{-1}\}\quad (k=1,2,\cdots),$$

在每个E_k上,$f(x)$都是可积的.于是(4)可写为

$$\left\{\frac{1}{|Q|}\int_{E_k}u(x)^{-\frac{1}{p-1}}\mathrm{d}x\right\}^p\frac{v(Q)}{|Q|}\leqslant\frac{C}{|Q|}\int_{E_k}u(x)^{-\frac{1}{p-1}}\mathrm{d}x.$$

由此知 $\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q v(x)\mathrm{d}x\right\}\left\{\frac{1}{|Q|}\int_{E_k}u(x)^{-\frac{1}{p-1}}\mathrm{d}x\right\}^{p-1}\leqslant C.$

因为$E_1\subset E_2\subset\cdots\subset E_k\subset\cdots$,且有

$$\sum_{k=1}^{+\infty}E_k=\{x\in Q:\ u(x)>0\}.$$

所以令$k\to+\infty$即得(8).

充分性 首先,由(8)可推(3),这是因为

$$\begin{aligned}f_Q&=\frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)u(x)^{\frac{1}{p}}u(x)^{-\frac{1}{p}}\mathrm{d}x\\&\leqslant\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q f^p(x)u(x)\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q u(x)^{-\frac{1}{p-1}}\mathrm{d}x\right\}^{\frac{p-1}{p}}.\end{aligned}$$

所以有

$$(f_Q)^p v(Q)\leqslant\int_Q f^p(x)u(x)\mathrm{d}x\cdot\frac{1}{|Q|}\int_Q v(x)\mathrm{d}x$$

$$\times \left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q u(x)^{-\frac{1}{p-1}}\mathrm{d}x\right\}^{p-1}$$

$$\leqslant C\int_Q f^p(x)u(x)\mathrm{d}x.$$

其次，对于 $f\in L^p(\boldsymbol{R}^n,u\mathrm{d}x)$，我们有

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x), \quad f_k(x) = f(x)\cdot\chi_{Q(0,k)}(x).$$

因此，只需对具有紧支集的可积函数 f，证明(2)即可. 引用以前多次提到的覆盖技术，对此 f 以及 $\lambda>0$，必可取到方体列 $\{Q_j\}$，使得

$$E_{Mf}(\lambda) = \{x\in\boldsymbol{R}^n: Mf(x)>\lambda\}\subset\bigcup_j Q_j,$$

$$\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f(x)\mathrm{d}x > 2^{-n}\lambda, \quad \sum_j \chi_{Q_j}(x)\leqslant\theta_n,\ x\in\boldsymbol{R}^n.$$

从而有

$$\begin{aligned} v(E_{Mf}(\lambda)) &\leqslant \sum_j v(Q_j) \\ &\leqslant \sum_j C\cdot\left\{\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f(x)\mathrm{d}x\right\}^{-p}\int_{Q_j} f^p(x)u(x)\mathrm{d}x \\ &\leqslant \frac{C2^{np}}{\lambda^p}\sum_j\int_{Q_j} f^p(x)u(x)\mathrm{d}x \\ &\leqslant \frac{C}{\lambda^p}\int_{\boldsymbol{R}^n} f^p(x)u(x)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

注 1 我们称满足(8)式的 (u,v) 为 A_p 权(函数组)，记为 $(u,v)\in A_p$，其中常数 C 之最小者称为 A_p 权常数.

注 2 A_1 权可视为 A_p 当 $p\to 1$ 时的极限情形. 事实上，(7)式可写成

$$\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q v(x)\mathrm{d}x\cdot \operatorname*{ess\,sup}_{x\in Q}\{u(x)^{-1}\}\right\}\leqslant C.$$

注意到

$$\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q u(x)^{-\frac{1}{p-1}}\mathrm{d}x\right\}^{p-1} = \|u^{-1}\|_{L^{\frac{1}{p-1}}(Q,|Q|^{-1}\mathrm{d}x)},$$

可知当 $p\to 1$ 时上式右端趋于

$$\|u^{-1}\|_{L^\infty(Q)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in Q}\{u(x)^{-1}\}.$$

顺便指出，条件 A_p 蕴含 v 与 $u^{-\frac{1}{p-1}}$ 是局部可积的；条件 A_1 蕴含 v 是局部可积的，而 u^{-1} 是局部有界的.

推论 设 $(u,v)\in A_p$，则对 $p<q<\infty$，算子 M 是强 (q,q) 型. 即存在常数 C，使得对每个 $f\in L^q(\boldsymbol{R}^n,u(x)\mathrm{d}x)$，有

$$\int_{\boldsymbol{R}^n}|Mf(x)|^q v(x)\mathrm{d}x \leqslant C\int_{\boldsymbol{R}^n}|f(x)|^q u(x)\mathrm{d}x.$$

证明 根据上述定理的结论，并注意应用 Marcinkiewicz 内插理论，我们只需指出 M 是从 $L^\infty(\boldsymbol{R}^n,u\mathrm{d}x)$ 到 $L^\infty(\boldsymbol{R}^n,v\mathrm{d}x)$ 上的有界算子即可.

注意到

$$\|Mf\|_{L^\infty(\boldsymbol{R}^n,v\mathrm{d}x)} = \sup\{\alpha:\ v(\{x\in\boldsymbol{R}^n:\ Mf(x)>\alpha\})>0\},$$

可得

$$\begin{aligned}\|Mf\|_{L^\infty(\boldsymbol{R}^n,v\mathrm{d}x)} &\leqslant \|Mf\|_{L^\infty(\boldsymbol{R}^n,\mathrm{d}x)} \leqslant \|f\|_{L^\infty(\boldsymbol{R}^n,\mathrm{d}x)}\\ &\leqslant \|f\|_{L^\infty(\boldsymbol{R}^n,u\mathrm{d}x)}.\end{aligned}$$

实际上，由 $v(E)>0$ 可推出 $|E|>0$，从而第一个不等式成立. 而最后一个不等式是因为 $|E|>0$ 蕴含 $u(E)>0$.

定理 4 （A_p 权的初等性质）

(i) $1<p<q<\infty$，$A_1\subset A_p\subset A_q$.

(ii) $1\leqslant p<\infty$，$0<\varepsilon<1$，若 $(u,v)\in A_p$，则 $(u^\varepsilon,v^\varepsilon)\in A_{\varepsilon p+1-\varepsilon}$.

(iii) $1<p<\infty$，$(u,v)\in A_p$ 当且仅当

$$\left(v^{-\frac{1}{p-1}},u^{-\frac{1}{p-1}}\right)\in A_{p'},\quad p'=\frac{p}{p-1}.$$

证明 (i) 因为 $(q-1)(p-1)^{-1}>1$，所以根据 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned}&\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q u(x)^{-\frac{1}{q-1}}\mathrm{d}x\right\}^{q-1}\\ &\quad\leqslant\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q u(x)^{-\frac{1}{p-1}}\mathrm{d}x\right\}^{p-1}\leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{x\in Q}\{u(x)^{-1}\}.\end{aligned}$$

(ii) 记 $r=\varepsilon p+1-\varepsilon$，则 $r-1=\varepsilon(p-1)$. 从而可由 Hölder 不等式导出

$$\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q v^\varepsilon(x)\mathrm{d}x\right\}\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q[u^\varepsilon(x)]^{-\frac{1}{r-1}}\mathrm{d}x\right\}^{r-1}$$
$$\leqslant\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q v(x)\mathrm{d}x\right\}^\varepsilon\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q u(x)^{-\frac{1}{p-1}}\mathrm{d}x\right\}^{\varepsilon(p-1)}$$
$$\leqslant C^\varepsilon.$$

即得所证.

(iii) 由于 A_p 权条件

$$\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q v(x)\mathrm{d}x\right\}\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q u(x)^{-\frac{1}{p-1}}\mathrm{d}x\right\}^{p-1}\leqslant C$$

可写成

$$\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q u(x)^{-\frac{1}{p-1}}\mathrm{d}x\right\}\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q[v(x)^{-\frac{1}{p-1}}]^{-\frac{1}{p'-1}}\mathrm{d}x\right\}^{p'-1}\leqslant C^{p'-1},$$

故结论成立.

注 前述推论中的结论不能改为 M 是 (p,p) 型. 现举反例如下：当 $p=1$ 时，可取 $v=w\equiv1$；当 $p>1$ 时，取非负可积函数 $g(x)$，使 $Mg\overline{\in}L^1$，且使 g 有界而保证 $Mg(x)$ 几乎处处有限. 从而可知 $(Mg,g)\in A_1\subset A_{p'}$. 由此得

$$\left(g^{-\frac{1}{p'-1}},(Mg)^{-\frac{1}{p'-1}}\right)=(g^{1-p},(Mg)^{1-p})\in A_p.$$

现在令 $v=(Mg)^{1-p}$，$u=g^{1-p}$，知 $(u,v)\in A_p$. 但是不等式

$$\int_{R^n}|Mf(x)|^p v(x)\mathrm{d}x\leqslant C\int_{R^n}|f(x)|^p u(x)\mathrm{d}x$$

并不成立. 这是因为

$$\int_{R^n}|Mf(x)|^p v(x)\mathrm{d}x=\int_{R^n}Mg(x)\mathrm{d}x=\infty,$$

$$\int_{R^n}|f(x)|^p u(x)\mathrm{d}x=\int_{R^n}g(x)\mathrm{d}x<\infty.$$

这说明 $(u,v)\in A_p$ 不是 M 为双权 (p,p) 型的充分条件，而只是一个必要条件.

§2 反 Hölder 不等式与 H-L 极大算子单权模的强(p,p)型

双权(u,v)的一个特殊情形是 $u=v=w$，而且称为单权. 此时，定理 2 和 3 可综合地写为：

定理 5 设 $w(x)$是 $\boldsymbol{R}^n$ 上的权函数，$1\leqslant p<\infty$，则下列条件等价：

(i) M 关于 w 是弱(p,p)型：

$$w(\{x\in\boldsymbol{R}^n: Mf(x)>\lambda\})\leqslant\frac{C}{\lambda^p}\int_{\boldsymbol{R}^n}|f(x)|^p w(x)\mathrm{d}x.$$

(ii) 存在常数 C，使得对于任意的 $f(x)\geqslant 0$以及方体 Q，有

$$(f_Q)^p\cdot w(Q)\leqslant C\cdot\int_Q f^p(x)w(x)\mathrm{d}x.$$

(iii) $(w,w)\in A_p$(简记为 $w\in A_p$)：

$$\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)\mathrm{d}x\right\}\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{-\frac{1}{p-1}}\mathrm{d}x\right\}^{p-1}\leqslant C,\ 1<p<\infty,$$

$$Mw(x)\leqslant Cw(x),\quad \text{a.e. } x\in\boldsymbol{R}^n,\ p=1.$$

A_p 单权理论的研究比较充分，特别是它所具有的反 Hölder 不等式性质，致使我们获得了 M 关于 w 的强(p,p)型与 $w\in A_p$ $(1<p<\infty)$的等价性. 为了阐明这一结论，我们再来介绍 A_p 单权的一些初等事实.

引理 6 设 $w\in A_p$，则对任一方体 Q 以及 $t>1$，有

$$w(tQ)\leqslant Ct^{np}w(Q).$$

证明 在定理 5 的(ii)中取 $S\subset Q$，$f(x)=\chi_S(x)$，则得

$$\left(\frac{|S|}{|Q|}\right)^p w(Q)\leqslant C\cdot w(S).\tag{9}$$

进一步，若以 tQ 代替 Q，Q 代替 S，又可得

$$w(tQ)\leqslant Ct^{np}\cdot w(Q),$$

即得所证.

注 上一引理说明：若 $w\in A_p$，则 $d\mu=wdx$ 是一个倍测度. 此外，显然有

$$Mf(x)\leqslant C^{\frac{1}{p}}\{M_\mu(|f|^p)(x)\}^{\frac{1}{p}}.$$

我们曾经指出，对于倍测度 μ，M_μ 关于 μ 是弱(1,1)型的. 根据这一事实，由定理 5 中之(ii)可立即推出(i). 下一结论更加明晰地显示出测度 $w(x)dx$ 与 Lebesgue 测度的关系.

引理 7 设 $w\in A_p$，则对 α：$0<\alpha<1$，必存在 $0<\beta<1$，使得当方体 Q 中子集 E 满足

$$|E|\leqslant\alpha|Q|$$

时，有

$$w(E)\leqslant\beta w(Q).$$

证明 在(9)式中令 $S=Q\backslash E$，则得

$$(1-\alpha)^p w(Q)\leqslant\left(1-\frac{|E|}{|Q|}\right)^p w(Q)\leqslant C(w(Q)-w(E)).$$

从而有(注意 $C\geqslant1$)

$$w(E)\leqslant C^{-1}[C-(1-\alpha)^p]w(Q).$$

因此，令 $\beta=C^{-1}[C-(1-\alpha)^p]$即得所证.

定理 8(反 Hölder 不等式) 设 $w\in A_p$，则存在 $\epsilon>0$，使得对任一方体 Q，有

$$\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{1+\epsilon}dx\right\}^{\frac{1}{1+\epsilon}}\leqslant\frac{C}{|Q|}\int_Q w(x)dx.$$

证明 对于任意固定的方体 Q，记

$$\lambda_0=w_Q=\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)dx,$$

并取数列 $\lambda_0<\lambda_1<\cdots<\lambda_k<\cdots$. 对每个 λ_k，考虑作 w 在 Q 上的 C-Z 分解，得互不相交方体列$\{Q_{k,i}\}$，并根据第四章§1中的推论可知

$$|Q_{k,i}\cap\Omega_{k+1}|\leqslant 2^n\frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}|Q_{k,i}|,\quad \Omega_{k+1}=\bigcup_i Q_{k+1,i}.$$

记 $2^n\lambda_k/\lambda_{k+1}=\alpha$，$\lambda_k=(2^n\alpha^{-1})^k\lambda_0$，$0<\alpha<1$，即得

$$|Q_{k,i} \cap \Omega_{k+1}| \leqslant \alpha |Q_{k,i}|.$$

从而由引理 7 可知，存在 $0<\beta<1$，使得

$$w(Q_{k,i} \cap \Omega_{k+1}) \leqslant \beta w(Q_{k,i}).$$

对指标 i 求和，又得

$$w(\Omega_{k+1}) \leqslant \beta w(\Omega_k), \quad w(\Omega_k) \leqslant \beta^k w(\Omega_0).$$

当然还有 $|\Omega_{k+1}| \leqslant \alpha |\Omega_k|$ 以及 $|\Omega_k| \leqslant \alpha^k |\Omega_0|$. 由此知

$$\left|\bigcap_{k=0}^{\infty} \Omega_k\right| = \lim_{k\to\infty} |\Omega_k| = 0.$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}
\int_Q w(x)^{1+\epsilon}\mathrm{d}x &= \int_{Q\setminus\Omega_0} w(x)^{1+\epsilon}\mathrm{d}x + \sum_{k=0}^{+\infty}\int_{\Omega_k\setminus\Omega_{k+1}} w(x)^{1+\epsilon}\mathrm{d}x \\
&\leqslant \lambda_0^{\epsilon} w(Q\setminus\Omega_0) + \sum_{k=0}^{+\infty}\lambda_{k+1}^{\epsilon} w(\Omega_k\setminus\Omega_{k+1}) \\
&\leqslant \lambda_0^{\epsilon}\left\{w(Q\setminus\Omega_0) + \sum_{k=0}^{+\infty}(2^n\alpha^{-1})^{(k+1)\epsilon}\beta^k w(\Omega_0)\right\} \\
&\leqslant \lambda_0^{\epsilon}\left\{w(Q\setminus\Omega_0) + (2^n\alpha^{-1})^{\epsilon}\sum_{k=0}^{+\infty}[(2^n\alpha^{-1})^{\epsilon}\beta]^k w(\Omega_0)\right\}.
\end{aligned}$$

现在取 ϵ 充分小，使得 $(2^n\alpha^{-1})^{\epsilon}\beta<1$，则上式中的无穷级数之和为有限值. 我们有

$$\begin{aligned}
\int_Q w(x)^{1+\epsilon}\mathrm{d}x &\leqslant C\lambda_0^{\epsilon}[w(Q\setminus\Omega_0) + w(\Omega_0)] \\
&= C(w_Q)^{\epsilon} w(Q) \\
&= C\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)\mathrm{d}x\right\}^{\epsilon}\cdot\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)\mathrm{d}x\right\}|Q|.
\end{aligned}$$

即得所证.

注 1 对于双权 $(u,v)\in A_p$，相应的反 Hölder 不等式并不成立.

注 2 从 $w\in A_p$ 具有反 Hölder 不等式性质的证明中可以看出，其关键一步是：测度 $w\mathrm{d}x$ 关于测度 $\mathrm{d}x$ 是可以比较的（即引理 7）.

注 3　w 满足反 Hölder 不等式也记为 $w\in \mathrm{RH}_{1+\varepsilon}$.

推论　设 $w\in A_p$, $1<p<\infty$, 则存在指标 q: $1<q<p$, 使得 $w\in A_q$, 即

$$A_p=\bigcup_{q<p}A_q.$$

证明　首先, 由 $w\in A_p$ 可知 $w^{-\frac{1}{p-1}}\in A_{p'}$, 其次, 应用反 Hölder 不等式于权函数 $w^{-\frac{1}{p-1}}$, 可知存在 $\varepsilon>0$, $C>0$, 使得对每个方体 Q 有

$$\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{-\frac{1+\varepsilon}{p-1}}\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{1+\varepsilon}}\leqslant\frac{C}{|Q|}\int_Q w(x)^{-\frac{1}{p-1}}\mathrm{d}x.$$

因为 $(1+\varepsilon)/(p-1)>1/(p-1)$, 所以存在 q: $1<q<p$, 使得 $(1+\varepsilon)/(p-1)=1/(q-1)$. 从而得

$$\begin{aligned}&\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)\mathrm{d}x\right\}\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{-\frac{1}{q-1}}\mathrm{d}x\right\}^{q-1}\\&=\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)\mathrm{d}x\right\}\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{-\frac{1+\varepsilon}{p-1}}\mathrm{d}x\right\}^{\frac{p-1}{1+\varepsilon}}\\&\leqslant C^{p-1}\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)\mathrm{d}x\right\}\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{-\frac{1}{p-1}}\mathrm{d}x\right\}^{p-1}\leqslant C_p.\end{aligned}$$

定理 9　设 $w(x)$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 上的一个权函数, 则下述两个结论是等价的 $(1<p<\infty)$:

(i) $w\in A_p$;

(ii) M 在 $L^p(\boldsymbol{R}^n,w)$ 上有界:

$$\int_{\boldsymbol{R}^n}[Mf(x)]^p w(x)\mathrm{d}x\leqslant C\int_{\boldsymbol{R}^n}|f(x)|^p w(x)\mathrm{d}x.$$

证明　只需说明 (i)$\Longrightarrow$(ii). 由 $w\in A_p$ 可知存在 q: $1<q<p$, 使得 $w\in A_q$. 从而 M 关于 w 是弱 (q,q) 型的, 而 M 在 $L^\infty(w)$ 上有界是显然的. 因此, 根据 Marcinkiewicz 内插定理即得所证.

注 1　证明 (i)$\Longrightarrow$(ii) 也可不用反 Hölder 不等式. (参阅 R. Fefferman 发表于 Proc. Amer. Math. Soc. 上的文章, 1983年.)

注 2 对于 $w\in A_p$, $1<p\leqslant\infty$ 来说，H-L 极大算子 M 关于 w 的强 (p,p) 型与弱 (p,p) 型是等价的.

作为本节的结束，我们来介绍 A_∞ 权的概念. 首先，将引理 7 的结果再改进如下：

定理 10 设 $w\in A_p$, $1\leqslant p<\infty$，则存在 $\delta>0$ 以及 $C>0$，使得对每个方体 Q 中的任一可测子集 E，有

$$\frac{w(E)}{w(Q)}\leqslant C\left(\frac{|E|}{|Q|}\right)^{\delta}. \tag{10}$$

证明 由条件知 $w\in \mathrm{RH}_{1+\varepsilon}$，从而有

$$\begin{aligned}w(E)&=\int_E w(x)\mathrm{d}x\leqslant\left\{\int_E w(x)^{1+\varepsilon}\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{1+\varepsilon}}\cdot|E|^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}\\&=\left\{\frac{1}{|Q|}\int_E w(x)^{1+\varepsilon}\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{1+\varepsilon}}|Q|^{\frac{1}{1+\varepsilon}}|E|^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}\\&\leqslant\frac{C}{|Q|}\int_Q w(x)\mathrm{d}x\cdot|Q|^{\frac{1}{1+\varepsilon}}|E|^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}=Cw(Q)\left(\frac{|E|}{|Q|}\right)^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}.\end{aligned}$$

取 $\delta=\varepsilon/(1+\varepsilon)$ 即得所证.

(10)式称为 A_∞ 条件，记为 $w\in A_\infty$.

定理 11 设 $w\in A_\infty$，则存在指标 p 满足：$1<p<\infty$，使得 $w\in A_p$.

证明 (i) 由条件知 $w\mathrm{d}x$ 关于 $\mathrm{d}x$ 是可以比较的，即对每个方体 Q 以及任一可测子集 E，从 $w(E)/w(Q)>\beta$ 可推出 $|E|/|Q|>\alpha$. 现在我们来证明 $\mathrm{d}x$ 关于 $w\mathrm{d}x$ 也是可比较的，即存在 $0<\alpha',\beta'<1$，使得

$$\frac{w(E)}{w(Q)}<\alpha'\Longrightarrow\frac{|E|}{|Q|}<\beta'.$$

实际上，当

$$\frac{w(E)}{w(Q)}\leqslant\frac{1-\beta}{2}<1-\beta$$

时，就有 $w(Q\backslash E)/w(Q)>\beta$. 因此，

$$\frac{|Q\setminus E|}{|Q|} > \alpha, \quad 即 \quad \frac{|E|}{|Q|} < 1 - \alpha.$$

(ii) 视 $\mathrm{d}x = w^{-1} w \mathrm{d}x, \mathrm{d}\mu(x) = w \mathrm{d}x$，则(i)指出 $w^{-1}\mathrm{d}\mu$ 是关于 $\mathrm{d}\mu$ 可比较的. 从而根据定理 8 后面的注，可知 w^{-1} 关于 $\mathrm{d}\mu$ 具有反 Hölder 不等式性质，即有

$$\left\{\frac{1}{w(Q)}\int_Q (w^{-1}(x))^{1+\varepsilon} w(x)\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \leqslant C\frac{1}{w(Q)}\int_Q w^{-1}(x)w(x)\mathrm{d}x.$$

由此知

$$\left\{\frac{1}{w(Q)}\int_Q w^{-\varepsilon}(x)\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \leqslant C\frac{|Q|}{w(Q)}.$$

现在令 p：$\varepsilon = 1/(p-1)$，则得

$$w(Q)w(Q)^{-\left(1-\frac{1}{p}\right)}\left\{\int_Q w(x)^{-\frac{1}{p-1}}\mathrm{d}x\right\}^{\frac{p-1}{p}} \leqslant C|Q|,$$

或写成

$$\left\{\int_Q w(x)\mathrm{d}x\right\}\left\{\int_Q w(x)^{-\frac{1}{p-1}}\mathrm{d}x\right\}^{p-1} \leqslant C^p|Q|^p.$$

即得所证.

推论(A_∞ 与 A_p 权的关系)

$$A_\infty = \bigcup_{1\leqslant p<\infty} A_p.$$

注 若 $1<p<\infty, -n/p<\alpha<n/p'$，则 $|x|^{\alpha p}\in A_p$.

§3 A_p(单)权的结构与 A_p 双权简介

3.1 A_1权的结构

至今，虽然我们已经知道了 A_p 权的许多性质，但还不清楚它们究竟是由一些什么样的函数构成的，让我们先分析几个例子.

例 1 对于 $\boldsymbol{R}^1$ 上的函数 $w(x) = |x|^\alpha (\alpha>0)$，记 $I = (0,b)$，我们有

$$\lim_{b\to\infty}\frac{1}{b}\int_0^b x^a\mathrm{d}x=\infty,\quad \inf_{x\in I}x^a=0.$$

因此，$|x|$的正幂不属于 A_1.

现在，考虑 $\boldsymbol{R}^n$ 上的 $|x|^\alpha(\alpha<0)$，显然必须限制 $-n<\alpha\leqslant 0$，否则 $|x|^\alpha$ 非局部可积. 而这正是仅有的条件，即此时必存在常数 C，使得对于任一方体 Q，有

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |x|^\alpha\mathrm{d}x\leqslant C\cdot\inf_{x\in Q}|x|^\alpha.\tag{11}$$

实际上，取定 Q，并记 Q_0为 Q 平移后的方体，其中心移至原点. 分两种情况讨论：

(i) $2Q_0\cap Q\neq\varnothing$. 此时有$4Q_0\supset Q$，而且

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q|x|^\alpha\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{|Q|}\int_{4Q_0}|x|^\alpha\mathrm{d}x\leqslant C\cdot|Q|^{\frac{\alpha}{n}}.$$

即(11)成立.

(ii) $2Q_0\cap Q=\varnothing$. 此时，当 $x,y\in Q$ 时有

$$|x|\leqslant|x-y|+|y|\leqslant C|Q|^{\frac{1}{n}}+|y|\leqslant C|y|,$$

这说明$|x|$与$|y|$是可以比较的. 由此知

$$|y|^\alpha\leqslant C\cdot\inf_{x\in Q}|x|^\alpha,\quad y\in Q.$$

再对 y 在 Q 上求平均，可知(11)成立. 证毕.

一般说来，关于 A_1权我们有下述重要结论：

定理 12(Coifman-Rochberg)　(i) 设 $f(x)$是 $\boldsymbol{R}^n$ 上的可测函数，且 $Mf(x)<\infty$, a. e. $x\in\boldsymbol{R}^n$，则

$$w(x)=[Mf(x)]^\alpha\in A_1,\quad 0<\alpha<1,$$

其中的 A_1权常数与 α 有关.

(ii) 若 $w\in A_1$，则存在函数 $b(x)$与 α：$0<\alpha<1$，以及 $f\in L_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^n)$，使得

(A) $0<C_1\leqslant b(x)\leqslant C_2$, a. e. $x\in\boldsymbol{R}^n$；

(B) $[Mf(x)]^\alpha<\infty$, a. e. $x\in\boldsymbol{R}^n$；

(C) $w(x)=b(x)[Mf(x)]^{\alpha}$.

证明 (i) 取定方体 Q_0，对于任意的 $x\in Q_0$，将一切包含 x 的方体 Q 分为两类：

$$I_1=\{Q:\ |Q|\leqslant|2Q_0|\},\quad I_2=\{Q:\ |Q|>|2Q_0|\}.$$

显然有

$$Mf(x)\leqslant\sup_{Q\in I_1}\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(y)|\mathrm{d}y+\sup_{Q\in I_2}\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(y)|\mathrm{d}y$$

$$\triangleq I_1(x)+I_2(x).$$

对于 $I_2(x)$，由于 $Q\in I_2$，故 $4Q\supset Q_0$. 从而有

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(y)|\mathrm{d}y\leqslant\frac{C}{|4Q|}\int_{4Q}|f(y)|\mathrm{d}y$$

$$\leqslant C\inf_{x\in 4Q}Mf(x)\leqslant C\inf_{x\in Q_0}Mf(x).$$

对于 $I_1(x)$，作函数 $f_1(x)=f(x)\chi_{5Q_0}(x)$，我们有

$$I_1(x)\leqslant Mf_1(x).$$

因此得到

$$\frac{1}{|Q_0|}\int_{Q_0}[Mf(x)]^{\alpha}\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{|Q_0|}\int_{Q_0}[I_1^{\alpha}(x)+I_2^{\alpha}(x)]\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\frac{1}{|Q_0|}\int_{Q_0}[Mf_1(x)]^{\alpha}\mathrm{d}x+C\cdot\{\inf_{x\in Q_0}Mf(x)\}^{\alpha}.$$

现在只需估计上式中第一项即可. 应用第一章中的 Колмогоров 不等式，可知

$$\frac{1}{|Q_0|}\int_{Q_0}[Mf_1(x)]^{\alpha}\mathrm{d}x\leqslant\frac{C}{|Q_0|}|Q_0|^{1-\alpha}[Mf]_1^{\alpha}$$

$$\leqslant C\left\{\frac{1}{|Q_0|}\int_{6Q_0}|f(y)|\mathrm{d}y\right\}^{\alpha}\leqslant C\{\inf_{x\in Q_0}Mf(x)\}^{\alpha}.$$

注意$[g]_1$表示函数 g 的弱 L^1范数.

(ii) 根据反 Hölder 不等式性质，存在 $\varepsilon>0$，使得

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{1+\varepsilon}\mathrm{d}x\leqslant\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)\mathrm{d}x\right\}^{1+\varepsilon}$$

$$\leqslant C \cdot w(x)^{1+\varepsilon}, \quad \text{a.e.}\, x \in \boldsymbol{R}^n.$$

这说明由 $w\in A_1$ 可推出 $w^{1+\varepsilon}\in A_1$(某个 $\varepsilon>0$). 从而令 $b(x)=w(x)/[M(w^{1+\varepsilon})(x)]^{1/(1+\varepsilon)}$, 显然(A),(B)均成立. 此时,若取 $\alpha=1/(1+\varepsilon)$,则(C)成立.

例 2 设 $K(x)$ 是 C-Z 核且满足性质(Ⅳ),$Tf(x)=K*f(x)$(参阅第五章),$p,s>1$,则存在 $C=C(p,s)$,使得对于任一局部可积非负函数 $w(x)$,以及 $f\in \bigcup\limits_{1<q<\infty} L^q(\boldsymbol{R}^n)$,有

$$\int_{\boldsymbol{R}^n}|Tf(x)|^p w(x)\mathrm{d}x \leqslant C\int_{\boldsymbol{R}^n}|f(x)|^p A_s(w)(x)\mathrm{d}x,$$

其中 $A_s(w)(x)=[M(w^s)(x)]^{1/s}$.

证明 (i) 对 $1<p_1<\infty$,有($M^{\#}$ 见第七章 §1)

$$M^{\#}(Tf)(x)\leqslant C[M(f^{p_1})(x)]^{1/p_1}. \tag{12}$$

实际上,令 Q 是包含 x 的方体,$Q^*=2Q$,$f(x)=f_1(x)+f_2(x)$,$f_1(x)=f(x)\chi_{Q^*}(x)$,则

$$Tf(x)=Tf_1(x)+Tf_2(x).$$

一方面,我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q|}\int_Q|Tf_1(y)|\mathrm{d}y &\leqslant \left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q|Tf_1(y)|^{p_1}\mathrm{d}y\right\}^{1/p_1}\\ &\leqslant C\left\{\frac{1}{|Q|}\int_{\boldsymbol{R}^n}|f_1(y)|^{p_1}\mathrm{d}y\right\}^{1/p_1}\\ &\leqslant C\cdot 2^{n/p_1}\left\{\frac{1}{|Q^*|}\int_{Q^*}|f(y)|^{p_1}\mathrm{d}y\right\}^{1/p_1}\\ &\leqslant C\cdot 2^{n/p_1}[M(f^{p_1})(x)]^{1/p_1}.\end{aligned}$$

另一方面,又有

$$\begin{aligned}Tf_2(y)-(Tf_2)_Q &= \frac{1}{|Q|}\int_Q[Tf_2(y)-Tf_2(z)]\mathrm{d}z\\ &= \frac{1}{|Q|}\int_Q\mathrm{d}z\left\{\int_{\boldsymbol{R}^n}f_2(t)[K(y-t)-K(z-t)]\mathrm{d}t\right\}.\end{aligned}$$

应用条件(Ⅳ)(注意,当 $t\in Q^*$ 时,$f_2(t)=0$),可知

$$|K(y-t)-K(z-t)|\leqslant C_4|y-z|/|z-t|^{-n-1}, \quad y\in Q.$$

由此立即可得

$$|Tf_2(y)-(Tf_2)_Q|\leqslant CMf(x),\quad y\in Q.$$

从而有

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q|Tf_2(y)-(Tf_2)_Q|\mathrm{d}y\leqslant CMf(x).$$

合并上述估计，得到(12).

(ii) 选取(i)中之 $p_1<p$，并注意到 $A_s(w)\in A_1$ 以及 Sharp 极大定理(见第七章 § 3)，我们有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^n}|Tf(x)|^p w(x)\mathrm{d}x&\leqslant\int_{\mathbf{R}^n}[M(Tf)(x)]^p[M(w^s)(x)]^{1/s}\mathrm{d}x\\&\leqslant C\int_{\mathbf{R}^n}[M^\#(Tf)(x)]^p[M(w^s)(x)]^{1/s}\mathrm{d}x\\&\leqslant C\int_{\mathbf{R}^n}[M(f^{p_1})(x)]^{p/p_1}[M(w^s)(x)]^{1/s}\mathrm{d}x\\&\leqslant C\int_{\mathbf{R}^n}|f(x)|^pA_s(w)(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

(注意，$w(x)=[w^s(x)]^{1/s}\leqslant[M(w^s)(x)]^{1/s}$.)

3.2 A_p 权的分解

本小节所给出的 A_p 权与 A_1 权之间的关系，将使我们间接地了解到 A_p 权的结构. 下面从一般框架谈起.

定义 设 $1<p_0<\infty$，算子 T 定义在 $L_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$ 上，而且当 $f\in L^{p_0}(\mathbf{R}^n)$ 时有 $Tf(x)\geqslant0$，满足

$$T(\lambda f)(x)=\lambda Tf(x)(\lambda>0),$$

$$T(f+g)(x)\leqslant Tf(x)+Tg(x),$$

而且 T 还是(p_0,p_0)型，则简称 T 为**正值 p_0 型算子**.

例 3 (i) $Tf(x)=|f(x)|$； (ii) $Tf(x)=Mf(x)$；

(iii) 对适当的 p,η,v，$Tf(x)=[M(|f|^p/v^\eta)(x)\cdot v^\eta(x)]^{\frac{1}{p}}$.

证明 (iii) 取 $p_0=p/\eta$，$0<\eta\leqslant1$，$1<p<\infty$，则

$$\|Tf\|_{p_0}^{p_0}=\int_{\mathbf{R}^n}M\left(\frac{|f(x)|^p}{v^\eta(x)}\right)^{\frac{1}{\eta}}v(x)\mathrm{d}x.$$

设 $v\in A_{1/\eta}$，则由 M 的 $(1/\eta,1/\eta)$ 型，立即可知

$$\|Tf\|_{p_0}\leqslant C\|f\|_{p_0}.$$

此外，对于 $x\in\boldsymbol{R}^n$，对任一方体 Q：$x\in Q$，则有

$$\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q\frac{|f(x)+g(x)|^p}{v^\eta(x)}\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q\frac{|f(x)|^p}{v^\eta(x)}\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}+\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q\frac{|g(x)|^p}{v^\eta(x)}\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant[M(|f|^p/v^\eta)(x)]^{\frac{1}{p}}+[M(|g|^p/v^\eta)(x)]^{\frac{1}{p}}.$$

由此知

$$T(f+g)\leqslant Tf(x)+Tg(x).$$

定义 设 T 是正值 p_0 型算子．若 $w(x)\geqslant0$ 满足

$$Tw(x)\leqslant C\cdot w(x),\quad \text{a.e. } x\in\boldsymbol{R}^n,$$

则称 $w\in A_1(T)$.

定理 13 设 T_1,T_2 是关于同一指标 p_0 的正值 p_0 型算子，则存在 $\varphi\in L^{p_0}(\boldsymbol{R}^n)$，使得

$$\varphi\in A_1(T_1),\quad \varphi\in A_1(T_2).$$

证明 设 $T=T_1+T_2$，显然 T 仍是关于指标 p_0 的正值 p_0 型算子．取 $A>\|T\|$（T 在 L^{p_0} 上的范数），且对 L^{p_0} 中任一非负函数 g，作

$$\varphi(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{A^k}T^kg(x).$$

由 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(\|T^kg\|_{p_0}/A^k)\leqslant\sum\limits_{k=0}^{+\infty}(\|T\|/A)^k\cdot\|g\|_{p_0}<\infty$，可知 $\varphi\in L^{p_0}(\boldsymbol{R}^n)$.

因此，我们有

$$T_1\varphi(x)=T_1\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{A^k}T^kg(x)\right)$$

$$\leqslant\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{A^k}T_1(T^kg)(x)\leqslant\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{A^k}T^{k+1}g(x)$$

$$=A\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{A^k}T^kg(x)\leqslant A\cdot\varphi(x),\quad \text{a.e. } x\in\boldsymbol{R}^n.$$

同理可证 T_2的情形.

定理 14(Jones) 设 $w\in A_p$, $1<p<\infty$,则存在 $w_0,w_1\in A_1$ $(A_1=A_1(M)$, M 是 H-L 极大算子),使得 $w=w_0w_1^{1-p}$.

证明 我们作两个算子 T_1,T_2如下:

$$T_1f(x)=\left\{M\left(\frac{|f|^{p'}}{w^{1/p}}\right)(x)w^{\frac{1}{p}}(x)\right\}^{\frac{1}{p'}},$$

$$T_2f(x)=\left\{M(|f|^pw^{\frac{1}{p}})(x)w^{-\frac{1}{p}}(x)\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

对于 $p_0=p^2/(p-1)$,前面已知 T_1是正值 p_0型的;而由于

$$\|T_2f\|_{p_0}^{p_0}=\int_{\boldsymbol{R}^n}[M(|f|^pw^{\frac{1}{p}})(x)]^{\frac{p}{p-1}}w(x)^{-\frac{1}{p-1}}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C\int_{\boldsymbol{R}^n}|f(x)|^{\frac{p^2}{p-1}}\mathrm{d}x=C\|f\|_{p_0}^{p_0},$$

故易知 T_2是正值 p_0型的. 根据定理 13,存在 φ: $\varphi\in A_1(T_1)$, $\varphi\in A_1(T_2)$,即 $T_1\varphi(x)\leqslant C\varphi(x)$, $T_2\varphi(x)\leqslant C\cdot\varphi(x)$,或写成

$$M(|\varphi|^{p'}/w^{1/p})(x)\leqslant C\varphi^{p'}(x)w^{-\frac{1}{p}}(x),$$

$$M(\varphi^pw^{1/p})(x)\leqslant C\varphi^p(x)w^{\frac{1}{p}}(x).$$

这又说明

$$\varphi^{p'}w^{-\frac{1}{p}}\in A_1,\quad \varphi^pw^{\frac{1}{p}}\in A_1.$$

现在令 $$w_0=\varphi^pw^{\frac{1}{p}},\quad w_1=\varphi^{p'}w^{-\frac{1}{p}}.$$

我们得到

$$w_0w_1^{1-p}=\varphi^{p+p'(1-p)}\cdot w^{\frac{1}{p}}w^{-\frac{1-p}{p}}=w.$$

3.3 A_p 双权简介

与 A_p 单权相比,A_p 双权的理论要复杂些而且尚不完整. 在这里,我们只作扼要介绍.

(一) 设 $w(x)$是 $\boldsymbol{R}^n$ 上的非负局部可积函数,若存在常数 C,使得对一切方体 Q,有

$$(S_p)\quad \int_Q [M(\chi_Q w^{1-p'})(x)]^p w(x)\mathrm{d}x$$
$$\leqslant C\int_Q w(x)^{1-p'}\mathrm{d}x,\quad 1<p<\infty,$$

则称 $w\in S_p$.

不难证明，$w\in A_p$ 与 $w\in S_p$ 是等价的. 实际上，S_p 蕴含 A_p 是显然的. 反之，若 $w\in A_p$，任取 Q_0，作 Q: $x\in Q\subset Q_0$，则由 A_p 条件可知

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q \chi_Q(y)w(y)^{1-p'}\mathrm{d}y \leqslant C\left\{\int_Q \frac{\chi_{Q_0}(y)w(y)^{-1}}{w(Q)}w(y)\mathrm{d}y\right\}^{p'/p}$$
$$\leqslant C[M_w(\chi_{Q_0}w^{-1})(x)]^{p'/p}.$$

由于对每一个包含 x 的 Q_0，以及满足 $\operatorname{supp} f\subset Q_0$ 的函数 f，总有

$$Mf(x)=\sup_{x\in Q\subset Q_0}\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|\mathrm{d}y.$$

故得

$$[M(\chi_{Q_0}w^{1-p'})(x)]^p\leqslant C[M_w(\chi_{Q_0}w^{-1})(x)]^{p'}_x.$$

从而根据 M_w 在 $L^{p'}(\boldsymbol{R}^n,w)$ 上的有界性，可知 $w\in S_p$.

1982年，加拿大数学家 Sawyer 给出了下述双权 H-L 极大算子定理(见[7])：

设 $1<p\leqslant q<\infty$，u，v 是 $\boldsymbol{R}^n$ 上非负局部可积函数，则下列两个条件等价：

(i) $\left\{\int_{\boldsymbol{R}^n}[Mf(x)]^q v(x)\mathrm{d}x\right\}^{1/q}\leqslant C\left\{\int_{\boldsymbol{R}^n}|f(x)|^p u(x)\mathrm{d}x\right\}^{1/p}$；

(ii) 对任意的方体 Q 有

$$\int_Q [M(\chi_Q u^{1-p'})(x)]^q v(x)\mathrm{d}x\leqslant C\left\{\int_Q u(x)^{1-p'}\mathrm{d}x\right\}^{q/p}.$$

(二) 类似于 A_p 单权的分解，1983年，在[8]中 Neugebauer 论述了下述结论：

如果 H-L 极大算子 M 满足

$$\|Mf\|_{L^p_v}\leqslant C\|f\|_{L^p_u},\quad \|Mf\|_{L^{p'}_{v^{1-p'}}}\leqslant C\|f\|_{L^{p'}_{u^{1-p'}}},$$

则存在非负函数 w_1, w_2，使得

$$u(x)^{1/p} M w_i(x) \leqslant C_i v(x)^{1/p} w_i(x), \quad i = 1,2,$$

$$u(x)^{1/p} v(x)^{1/p'} = w_1(x) w_2(x)^{1-p}.$$

（三）关于左、右权的算子有界性估计，有1982年 Young 的工作（见[9]）：

给定一个非负函数 $v(x)$，$1<p<\infty$，则下列条件等价：

(i) 存在一个几乎处处有限的非负的函数 $u(x)$，使得

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} [Mf(x)]^p v(x) \mathrm{d}x \leqslant C \int_{\boldsymbol{R}^n} |f(x)|^p u(x) \mathrm{d}x;$$

(ii) $\displaystyle\int_{\boldsymbol{R}^n} \frac{v(x)}{(1+|x|^n)^p} \mathrm{d}x < \infty$.

§4　极大奇异积分算子 T^* 的加权模不等式

为了获得奇异积分算子的加权模不等式一般估计，首先自然要问，权函数应受些什么限制？或具备哪些基本条件？让我们以 Hilbert 变换为例开始分析，看一看从中会给出什么样的启示.

引理 15　设 μ 是 $\boldsymbol{R}^1$ 上的非负正则 Borel 测度，Hf 是函数 f 的 Hilbert 变换. 如果 H 是弱 $(L^p(\boldsymbol{R}^1,\mu), L^p(\boldsymbol{R}^1,\mu))$ 型，$1\leqslant p<\infty$，那么我们有

(i) μ 是倍测度；

(ii) $Mf(x) \leqslant C\{M_\mu(|f|^p)(x)\}^{\frac{1}{p}}$；

(iii) μ 关于 Lebesgue 测度 $\mathrm{d}x$ 是绝对连续的，而且 $\mathrm{d}\mu(x) = w(x)\mathrm{d}x$，$w \in A_p$.

证明　(i) 对任意取定的区间 $I \subset \boldsymbol{R}^1$，记 I_l, I_r 是其等长的左，右邻接区间，则只需指出

$$\mu(I_l) \leqslant C \cdot \mu(I), \quad \mu(I_r) \leqslant C\mu(I)$$

即可，其中常数 C 与 I 无关. 为此，取 $L^p(\boldsymbol{R}^n,\mu)$ 中的非零函数 $f(x)$，显然函数 $|f|\chi_I \in L^p(\boldsymbol{R}^n,\mu)$，且有

$$H(|f|\chi_I)(x) \geqslant \frac{1}{2|I|}\int_I |f(y)|\mathrm{d}y \cdot \chi_{I_r}(x), \quad x \in I_r.$$

由此知

$$I_r \subset \left\{x \in \boldsymbol{R}^1:\ H(|f|\chi_I)(x) > \frac{1}{2|I|}\int_I |f(y)|\mathrm{d}y\right\}.$$

从而，根据弱有界性条件得到

$$\mu(I_r) \leqslant C\frac{(2|I|)^p}{\left\{\int_I |f(y)|\mathrm{d}y\right\}^p}\|f\chi_I\|^p_{L^p(\boldsymbol{R}^n,\mu)}. \tag{13}$$

当然，对 I_l 也有同样的不等式.

现在，在(13)式令 $f=\chi_I$，则可直接得到

$$\mu(I_r) \leqslant C\mu(I).$$

(ii) 根据 μ 的倍测度性质，可把(13)式写为

$$\left\{\frac{1}{|I|}\int_I f(y)|\mathrm{d}y\right\}^p \leqslant \frac{C}{\mu(I)}\int_I |f(y)|^p\mathrm{d}\mu(y).$$

即得所证.

(iii) 因为 μ 是倍测度，所以根据第二章第 3 小节内容，M_μ 是弱$(L^p(\boldsymbol{R}^n,\mu),L^p(\boldsymbol{R}^n,\mu))$型. 从而由(ii)可知，$M$ 是弱$(L^p(\boldsymbol{R}^n,\mu),L^p(\boldsymbol{R}^n,\mu))$型. 注意到本章引言所述，可知 μ 关于 Lebesgue 测度是绝对连续的，即 $\mathrm{d}\mu(x)=w(x)\mathrm{d}x$，且由 §1获悉 $w\in A_p$.

4.1 Good λ 不等式

上述引理告诉我们，在研究奇异积分算子的加权模不等式时，其权函数的出发点仍应考虑 A_p 类. 下面的论述就以此为基础，但因所用的方法是著名的 good λ 原理(1970年，由 Burkholder 和 Gundy 引入)，因此直接讨论极大奇异积分算子将是方便的.

定义 设 μ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 上非负正则 Borel 测度，且具有倍测度性质，T_1,T_2是正的次线性算子，又有性质：

(i) 对于 $f\in C_c^{(\infty)}(\boldsymbol{R}^n)$以及 $\lambda>0$，点集

$$\{x \in \boldsymbol{R}^n: T_1f(x) > \lambda\}$$
是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的开集，且其 Lebesgue 测度是有限值；

(ii) 若 $\boldsymbol{R}^n$ 中一球 B 包含一点 x，使得 $T_1f(x) \leqslant \lambda$，则对每一个 η：$0<\eta<1$，存在 $\beta=\beta(T_1, T_2, \eta)$，使得

$$\mu(\{x \in B: T_1f(x) > 3\lambda, T_2f(x) \leqslant \beta\lambda\}) \leqslant \eta\mu(B), \quad (14)$$
我们称 T_1 对 T_2 关于 μ 满足 **good λ 不等式**.

从上述定义可以看出，所谓 good λ 不等式意指，一个算子 (T_2) 在某种分布函数的意义下控制着另一个算子 (T_1). 因此，估计算子 T_1 就在一定的条件下可以转化为估计 T_2. 如果对 T_2 我们比较熟悉，这将是极为有利的，请看下面的结论.

定理 16 设 T_1 对 T_2 关于 μ 满足 good λ 不等式，且对 $0<p<\infty$, $f \in C_c^{\infty}(\boldsymbol{R}^n)$，有

$$\|T_1f\|_{L^p(\boldsymbol{R}^n, \mu)} < \infty,$$
则存在常数 $C=C(\mu, p)$，使得对 $f \in C_c^{(\infty)}(\boldsymbol{R}^n)$ 有

$$\|T_1f\|_{L^p(\boldsymbol{R}^n, \mu)} \leqslant C\|T_2f\|_{L^p(\boldsymbol{R}^n, \mu)}.$$

证明 不妨假定 $\|T_2f\|_{L^p(\boldsymbol{R}^n, \mu)} < \infty$，并且记开集 $\{x \in \boldsymbol{R}^n: T_1f(x) > \lambda\}$ 为 G_λ，则对 $x \in G_\lambda$，存在球 $B(x, r_x)$，使得

$$B(x, r_x) \subset G_\lambda, \quad B(x, 3r_x) \cap (\boldsymbol{R}^n \backslash G_\lambda) \neq \varnothing.$$
引入待定常数 β，令

$$E_\lambda = \{x \in \boldsymbol{R}^n: T_1f(x) > 3\lambda, T_2f(x) \leqslant \beta\lambda\},$$
显然 $E_\lambda \subset G_\lambda$. 为估计 $\mu(E_\lambda)$，我们在 E_λ 中任取一紧集 H，因为 $\{B(x, r_x)\}_{x \in E_\lambda}$ 是 H 的一个开覆盖族，所以从中可取出有限族仍覆盖 H. 于是，进一步又可从中取出互不相交的子覆盖族，记为 B_1, $B_2, \cdots, B_m$，使得

$$H \subset \bigcup_{i=1}^{m} 3B_i.$$
又因 H 在 E_λ 内，可知还有

$$H \subset \bigcup_{i=1}^{m} \{x \in 3B_i: T_1f(x) > 3\lambda, T_2f(x) \leqslant \beta\lambda\}.$$

由于每个$3B_i$都包含一个点x_i，使得$T_1f(x_i)\leqslant\lambda$，故从good λ不等式可知

$$\mu(H)\leqslant\sum_{i=1}^{m}\mu(\{x\in 3B_i: T_1f(x)>3\lambda, T_2f(x)\leqslant\beta\lambda\})$$

$$\leqslant\eta\sum_{i=1}^{m}\mu(3B_i)\leqslant D\cdot\eta\sum_{i=1}^{m}\mu(B_i),$$

其中D是μ的倍测度常数，且与λ无关.考虑到H在E_λ内的任意性，得到

$$\mu(E_\lambda)\leqslant D\eta\mu(G_\lambda).$$

因此，我们有

$$\|T_1f\|_{L^p(\boldsymbol{R}^n,\mu)}^p=3^p p\int_0^\infty\lambda^{p-1}\mu(\{x\in\boldsymbol{R}^n: T_1f(x)>3\lambda\})\mathrm{d}\lambda$$

$$\leqslant 3^p p\int_0^\infty\lambda^{p-1}\mu(E_\lambda)\mathrm{d}\lambda$$

$$+3^p p\int_0^\infty\lambda^{p-1}\mu(\{x\in\boldsymbol{R}^n: T_2f(x)>\beta\lambda\})\mathrm{d}\lambda$$

$$\leqslant D\eta 3^p p\int_0^\infty\lambda^{p-1}\mu(G_\lambda)\mathrm{d}\lambda$$

$$+\left(\frac{3}{\beta}\right)^p p\int_0^\infty\lambda^{p-1}\mu(\{x\in\boldsymbol{R}^n: T_2f(x)>\lambda\})\mathrm{d}\lambda$$

$$=D\eta 3^p\|T_1f\|_{L^p(\boldsymbol{R}^n,\mu)}^p+\left(\frac{3}{\beta}\right)^p\|T_2f\|_{L^p(\boldsymbol{R}^n,\mu)}.$$

如果一开始选择η，使得$D\eta 3^p=1/2$，而β是相应于good λ不等式而取的，那么由上式直接导出

$$\|T_1f\|_{L^p(\boldsymbol{R}^n,\mu)}^p\leqslant 2\left(\frac{3}{\beta}\right)^p\|T_2f\|_{L^p(\boldsymbol{R}^n,\mu)}^p,$$

即得所证.

4.2 T^*的加权(p,p)型

定理 17 设T是第五章中的C-Z算子，而且满足那里的条

件(Ⅳ),再加上其核 K 有性质

(Ⅴ) $|K(x)|\leqslant C_5|x|^{-n}$, $x\neq 0$.

T^* 是 T 的极大 C-Z 算子,$w\in A_p$,$1<p<\infty$,则

$$\|T^*f\|_{L^p(\boldsymbol{R}^n,w)}\leqslant C\|f\|_{L^p(\boldsymbol{R}^n,w)}.$$

证明 注意到 H-L 极大算子 M 在 $L^p(\boldsymbol{R}^n,w\mathrm{d}x)$ 上的有界性,我们只需证明 T^* 对 M 关于 $w\mathrm{d}x$ 满足 good λ 不等式以及 $\|T^*f\|_{L^p(\boldsymbol{R}^n,w)}<\infty$ 即可.

(i) 设 $f\in C_c^{(\infty)}(\boldsymbol{R}^n)$,已知 T^* 是弱(1,1)型,故对每个 $\lambda>0$,$|G_\lambda|=|\{x\in\boldsymbol{R}^n: T^*f(x)>\lambda\}|$ 都是有限值. 为了证明 G_λ 是开集,我们取 $\{x_k\}\subset\boldsymbol{R}^n$,满足

$$\lim_{k\to\infty}x_k=x,\quad T^*f(x_k)\leqslant\lambda,$$

并对 $T_\varepsilon f(x)$ 作分解

$$T_\varepsilon f(x)=\int_{|y|>\varepsilon}K(y)[f(x-y)-f(x_k-y)]\mathrm{d}y$$
$$+\int_{|y|>\varepsilon}K(y)f(x_k-y)\mathrm{d}y=I_k+J_k.$$

显然,$|J_k|\leqslant|T_\varepsilon f(x_k)|\leqslant\lambda$. 对于 I_k,注意到对任意的 $\varepsilon>0$,有

$$\lim_{k\to\infty}K_\varepsilon(y)[f(x-y)-f(x_k-y)]=0,$$

而当 $N=N(f)$ 充分大时,又有

$$|K_\varepsilon(y)[f(x-y)-f(x_k-y)]|\leqslant C|K_\varepsilon(y)|\chi_{B(0,N)}(y).$$

因此,根据 Lebesgue 控制收敛定理,可知当 $k\to\infty$ 时 $I_k\to 0$. 这说明对一切 $\varepsilon>0$ 有 $|T_\varepsilon f(x)|\leqslant\lambda$. 由此知 $T^*f(x)\leqslant\lambda$.

(ii) 为了证明 $\|T^*f\|_{L^p(\boldsymbol{R}^n,w)}<\infty$,取球 $B=B(0,N)$ 包含 $f\in C_c^{(\infty)}(\boldsymbol{R}^n)$ 的支集,且记

$$\|T^*f\|^p_{L^p(\boldsymbol{R}^n,w\mathrm{d}x)}=\left\{\int_{10B}+\int_{\boldsymbol{R}^n\setminus 10B}\right\}|T^*f(x)|^p w\mathrm{d}x=I+J.$$

对于 I,应用 Hölder 不等式以及 T^* 的 (p,p) 型可得

$$I\leqslant\left\{\int_{10B}|T^*f(x)|^{pr'}\mathrm{d}x\right\}^{1/r'}\left\{\int_{10B}w^r(x)\mathrm{d}x\right\}^{1/r}$$

$$\leqslant C\|f\|_{pr'}^{p}\left\{\int_{10B}w^{r}(x)\mathrm{d}x\right\}^{1/r},\quad \frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1.$$

如果取其中的 $r>1$，使得 $w\in \mathrm{RH}_{1+r}$，那么 $I<\infty$.

对于 J，注意到 $x\in \boldsymbol{R}^n\setminus 10B$ 以及条件(V)，可知

$$T^* f(x)\leqslant \int_{|y|\leqslant N}|K(x-y)||f(y)|\mathrm{d}y\leqslant C_5|x|^{-n}\|f\|_1.$$

因此，我们有(记 $Q_0=Q(0,1)$)

$$\begin{aligned} J &\leqslant C\int_{\boldsymbol{R}^n\setminus 10B}|x|^{-np}w(x)\mathrm{d}x\leqslant C\int_{\boldsymbol{R}^n}\frac{w(x)}{(1+|x|)^{np}}\mathrm{d}x\\ &\leqslant C\int_{Q_0}\frac{w(x)\mathrm{d}x}{(1+|x|)^{np}}+\sum_{k=0}^{+\infty}C\int_{2^{k+1}Q_0\setminus 2^kQ_0}\frac{w(x)\mathrm{d}x}{(1+|x|)^{np}}\\ &\leqslant Cw(Q_0)+C\sum_{k=0}^{+\infty}2^{-nkp}w(2^{k+1}Q_0)\end{aligned}$$

(注意：存在 $\delta>0$，使得 $w\in A_{p-\delta}$，又根据引理 6)

$$\begin{aligned} &\leqslant Cw(Q_0)+\sum_{k=0}^{+\infty}2^{-nkp}2^{nk(p-\delta)}w(Q_0)\\ &\leqslant Cw(Q_0)<\infty.\end{aligned}$$

(iii) 为证明不等式(14)，设球 B 包含一点 z：$T^* f(z)\leqslant\lambda$，且令 $E=\{x\in B: T^* f(x)>3\lambda, Mf(x)\leqslant\beta\lambda\}$，其中参数 β 待定. 由定理10知，存在 $C=C(w)$ 以及 $\delta>0$，使得

$$\frac{w(E)}{w(B)}\leqslant C\left(\frac{|E|}{|B|}\right)^{\delta},\quad \delta \text{ 与 } E,B \text{ 无关}.$$

由此知，下面只需阐明(14)式的两端关于 Lebesgue 测度成立即可. 记

$$f(x)=f(x)\chi_{2B}(x)+f(x)\chi_{\boldsymbol{R}^n\setminus 2B}(x)=f_1(x)+f_2(x),$$

则有

$$\begin{aligned} E\subset \{x\in B: T^* f_1(x)>\lambda\}\cup\{x\in B: T^* f_2(x)>2\lambda,\\ Mf(x)\leqslant\beta\lambda\}.\end{aligned}$$

记右端为 $E_1\cup E_2$. 从而问题又转化为证明：对任给的 η：$0<\eta<1$，存在充分小的 β，使得 $|E_1|\leqslant\eta|B|$，而 $E_2=\varnothing$ 即可.

首先，T^*是弱(1,1)的，即

$$\lambda|E_1|\leqslant C\|f\|_1=\int_{2B}|f(y)|\mathrm{d}y.$$

作方体 Q，中心与球 B 相同且 $Q\supset 2B$，$|Q|\sim|B|$，则有

$$\begin{aligned}\int_{2B}|f(y)|\mathrm{d}y&\leqslant C\frac{|B|}{|Q|}\int_Q|f(y)|\mathrm{d}y\\&\leqslant C|B|\inf_{x\in Q}[Mf(x)]\leqslant C|B|\inf_{x\in B}[Mf(x)].\end{aligned}$$

不妨假定 $E\neq\varnothing$，则

$$\inf_{x\in B}[Mf(x)]\leqslant\inf_{x\in E}[Mf(x)]\leqslant\beta\lambda.$$

从而有

$$|E_1|\leqslant C\beta|B|.\ (C\text{ 与 }E,B,f\text{ 无关})\tag{15}$$

其次，对于 E_2，采用分解

$$\begin{aligned}T_\epsilon f_2(x)=&\left\{\int_{|x-y|>\epsilon}K(x-y)f_2(y)\mathrm{d}y\right.\\&\left.-\int_{|z-y|>\epsilon}K(x-y)f_2(y)\mathrm{d}y\right\}\\&+\left\{\int_{|z-y|>\epsilon}K(x-y)f_2(y)\mathrm{d}y\right.\\&\left.-\int_{|z-y|>\epsilon}K(z-y)f_2(y)\mathrm{d}y\right\}\\&+\int_{|z-y|>\epsilon}K(z-y)f_2(y)\mathrm{d}y\\=&I_1+I_2+I_3.\end{aligned}$$

关于 I_2，注意到

$$\begin{aligned}|I_2|&\leqslant\int_{|z-y|>\epsilon}|K(x-y)-K(z-y)||f_2(y)|\mathrm{d}y\\&\leqslant C_4\int_{\mathbf{R}^n\setminus 2B}\frac{|x-z|}{|\bar{x}-y|^{n+1}}|f(y)|\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

其中 $\bar{x}\in E$，特别有 $Mf(\bar{x})\leqslant\beta\lambda$. 现在记 B 的半径为 r，则 $|x-z|\leqslant Cr$. 由此知

$$|I_2|\leqslant C\int_{\mathbf{R}^n}\frac{r^{-n}}{1+(|\bar{x}-y|/r)^{n+1}}|f(y)|\mathrm{d}y$$

$$\leqslant \tilde{C} Mf(\bar{x}) \leqslant C''\beta\lambda \ (C'' \text{ 与 } B, f \text{ 无关}).$$

关于 I_3，分两种情形讨论：

(a) $\varepsilon < 2r$；　　(b) $\varepsilon \geqslant 2r$.

如果(a)成立，那么在 I_3 的积分中 $f_2 = f$. 因此，$|I_3| \leqslant T^* f(z) \leqslant \lambda$. 如果(b)成立，那么我们又遇到了类似于(ii)中的情形，此时总可假定 $\varepsilon \geqslant r$.

$$|I_3| \leqslant \left| \int_{|z-y|>r} K(z-y) f_2(y) \mathrm{d}y - \int_{|z-y|>3r} K(z-y) f_2(y) \mathrm{d}y \right|$$
$$+ \left| \int_{|z-y|>3r} K(z-y) f_2(y) \mathrm{d}y \right| = |I_3'| + |I_3''|.$$

显然 $|I_3''| \leqslant \lambda$. 至于 $|I_3'|$，有

$$|I_3'| \leqslant \int_{r<|z-y|<3r} |K(z-y)| |f_2(y)| \mathrm{d}y$$
$$\leqslant C_5 \int_{r<|z-y|<3r} |z-y|^{-n} |f(y)| \mathrm{d}y$$
$$\leqslant C(3r)^{-n} \int_{|z-y|<3r} |f(y)| \mathrm{d}y \leqslant C \inf_{x \in E} [Mf(x)] \leqslant C'''\beta\lambda.$$

将上述估计合在一起，可知

$$|I_3| \leqslant \lambda + C'''\beta\lambda \quad (C''' \text{ 与 } \lambda, B, f \text{ 无关}).$$

最后来估计 I_1，因为

$$\chi_{\mathbf{R}^n \setminus B(x,\varepsilon)}(y) - \chi_{\mathbf{R}^n \setminus B(z,\varepsilon)}(y) = \chi_{B(z,\varepsilon)}(y) - \chi_{B(x,\varepsilon)}(y),$$

所以有

$$|I_1| \leqslant \int_{\mathbf{R}^n \setminus 2B} |K(x-y)| |\chi_{B(z,\varepsilon)}(y) - \chi_{B(x,\varepsilon)}(y)| |f(y)| \mathrm{d}y.$$

继之，因为当 $\varepsilon < r$ 时有

$$\chi_{\mathbf{R}^n \setminus 2B}(y) [\chi_{B(z,\varepsilon)}(y) - \chi_{B(x,\varepsilon)}(y)] = 0,$$

所以总可假定 $\varepsilon \sim 2^k r (k = 0, 1, \cdots)$. 此时，如果这一函数不为零，那么 $|x-y| \sim 2^k r$，于是

$$|I_1| \leqslant C \int_{|x-y| \sim 2^k r} |K(x-y)| |f(y)| \mathrm{d}y$$

$$\leqslant C(2^k r)^{-n}\int_{|x-y|\sim 2^k r}|f(y)|\mathrm{d}y$$
$$\leqslant C\inf_{x\in E}[Mf(x)]\leqslant C'\beta\lambda.$$

最后，我们得到

$$|T_\varepsilon f_2(x)|\leqslant \beta\lambda(C'+C''+C''')+\lambda,\quad \varepsilon>0.$$

现在，取 β 使得 $\beta(C'+C''+C''')<1$，而且对给定的$0<\eta<1$，使得 $C\beta<\eta$(C 是(15)中的常数). 换句话说，我们证明了：对 $x\in E_2$，有

$$\sup_{\varepsilon>0}|T_\varepsilon f_2(x)|<2\lambda,$$

即 $E_2=\varnothing$，而 $|E_1|\leqslant\eta B$. 证毕.

§5 在嵌入定理中的应用

作为应用，本节介绍有关 Соболев 嵌入不等式的一些结果，它在研究散度型椭圆算子理论中的 Hanack 不等式时有着重要的应用. 为此，我们还需给出分数次积分和 H-L 分数次极大算子的有关性质.

5.1 预备知识

引理 18 设 $f\in C^{(1)}(\boldsymbol{R}^n)$且支集含于方体 Q_0内，则存在 $C=C(n)$，使得

$$|f(x)|\leqslant C\int_{Q_0}\frac{|\nabla f(x)|}{|x-y|^{n-1}}\mathrm{d}y,\quad x\in Q_0.$$

证明 记 y' 为单位球面 Σ 上的任一向量，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(x-ty')=-\nabla f(x-ty')\cdot y'.$$

由此知 $$f(x)=\int_0^\infty\frac{\nabla f(x-ty')\cdot ty'}{t^n}t^{n-1}\mathrm{d}t.$$

将上式两端对 y' 在 Σ 上作积分，可得

$$f(x)=\frac{1}{\omega_n}\int_{\boldsymbol{R}^n}\frac{\nabla f(x-y)\cdot y}{|y|^n}\mathrm{d}y.$$

即得所证.

注 1 顺便指出,我们还有:对 Q_0 中任一方体 Q,

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-f(z)|\mathrm{d}z \leqslant C\int \frac{|\nabla f(y)|}{|x-y|^{n-1}}\mathrm{d}y, \quad x\in Q.$$

实际上,因为

$$f(z)-f(x)=\int_0^1 \nabla f(x+t(z-x))\cdot(z-x)\mathrm{d}t,$$

所以有

$$\int_Q |f(x)-f(z)|\mathrm{d}z$$

$$\leqslant \int_0^1 \int_Q |\nabla f(x+t(z-x))||z-x|\mathrm{d}z\mathrm{d}t \triangleq I.$$

在 Q 内作连接两点 z 与 x 的线段,若令 $y=x+t(z-x)$,则 $y\in Q$,$\mathrm{d}y=t^n\mathrm{d}z$ 且有

$$|y-x|=t|z-x|\leqslant ctl,$$

其中 l 是 Q 的边长.因此,

$$I\leqslant C\int_Q |\nabla f(y)||x-y|\int_{|x-y|/cl}^{\infty} t^{-(n+1)}\mathrm{d}t\mathrm{d}y$$

$$\leqslant C\int_Q |\nabla f(y)||x-y|\left(\frac{l}{|x-y|}\right)^n\mathrm{d}y$$

$$=C|Q|\int_Q \frac{|\nabla f(y)|}{|x-y|^{n-1}}\mathrm{d}y.$$

注 2 在注 1 的基础上,还可导出

$$M_{Q_0}^{\sharp}f(x)\leqslant CM_{\frac{1}{n},Q_0}(|\nabla f|)(x), \quad x\in Q_0,$$

其中的 Sharp 极大函数(参见第七章 §1的定义)与 H-L 分数次极大函数都是限制在某个方体 Q_0 上取的,例如

$$M_\eta f(x)=M_{\eta,Q_0}f(x)=\sup_{\substack{x\in Q\\ Q\subset Q_0}}\frac{1}{|Q|^{1-\eta}}\int_Q |f(y)|\mathrm{d}y.$$

对此,我们还有下述结果:

定理 19 设 $u(x),v(x)$ 是方体 Q_0 上的非负可积函数，$p,q>1,0<\eta<1,1/p-\eta\leqslant 1/q\leqslant 1/p$，则

$$v(\{x\in Q_0:\ M_\eta f(x)>\lambda\})\leqslant\frac{C}{\lambda^q}\|f\|_{L^p(Q_0,u)}^q$$

当且仅当成立不等式

$A_{p,q,\eta}(Q_0)$:

$$\sup_{Q\subset Q_0}\left\{\int_Q v(x)\mathrm{d}x\right\}^{1/q}\cdot\frac{1}{|Q|^{1-\eta}}\left\{\int_Q u(x)^{-\frac{1}{p-1}}\mathrm{d}x\right\}^{1/p'}\leqslant C.$$

（简记为 $(u,v)\in A_{p,q,\eta}(Q_0)$）

证明 充分性 首先，对任意的 $Q\subset Q_0$，由 Hölder 不等式以及 $A_{p,q,\eta}(Q_0)$ 条件可知

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|Q|^{1-\eta}}\int_Q|f(y)|\mathrm{d}y\\
&\quad\leqslant\frac{1}{|Q|^{1-\eta}}\left\{\int_Q|f(y)|^p u(y)\mathrm{d}y\right\}^{1/p}\left\{\int_Q u(y)^{-\frac{1}{p-1}}\mathrm{d}y\right\}^{1/p'}\\
&\quad\leqslant C\left\{\int_Q v(y)\mathrm{d}y\right\}^{-\frac{1}{q}}\left\{\int_Q|f(y)|^p u(y)\mathrm{d}y\right\}^{1/p}.
\end{aligned}$$

其次，对每个 $x\in\{x\in Q_0:\ M_\eta f(x)>\lambda\}$，存在方体 Q：$x\in Q\subset Q_0$，使得

$$\frac{1}{|Q|^{1-\eta}}\int_Q|f(y)|\mathrm{d}y>\lambda.$$

因此，根据覆盖技术，可得 $\{Q_k\}$，使得

$$\{x\in Q_0:\ M_\eta f(x)>\lambda\}\subset\bigcup_k Q_k,\quad \sum_k\chi_{Q_k}(x)\leqslant\theta_n.$$

从而，我们有（注意 $q\geqslant p$）

$$\begin{aligned}
&\lambda^q\cdot v(\{x\in Q_0:\ M_\eta f(x)>\lambda\})\leqslant\lambda^q\cdot\sum_{k\geqslant 1}v(Q_k)\\
&\quad\leqslant\lambda^q\sum_{k\geqslant 1}v(Q_k)\left\{\frac{1}{\lambda}\frac{1}{|Q_k|^{1-\eta}}\int_{Q_k}|f(y)|\mathrm{d}y\right\}^q\\
&\quad\leqslant C\sum_{k\geqslant 1}\left\{\int_{Q_k}v(y)\mathrm{d}y\right\}\left\{\int_{Q_k}v(y)\mathrm{d}y\right\}^{-1}\left\{\int_{Q_k}|f(y)|^p u(y)\mathrm{d}y\right\}^{q/p}
\end{aligned}$$

$$\leqslant C\left\{\sum_{k\geqslant 1}\int_{Q_k}|f(y)|^t u(y)\mathrm{d}y\right\}^{q/p}\leqslant C\cdot\theta_n^{q/p}\|f\|_{L^p(Q_0,u\mathrm{d}x)}^q.$$

必要性　证略.

5.2　Соболев 嵌入定理

定理 20　设 $1/p-1/n\leqslant 1/s<1/p$,

$$v\in A_\infty(Q_0),\quad (u,v)\in A_{p,s,1/n}(Q_0),$$

则对属于 $C^{(1)}(\boldsymbol{R}^n)$ 且支集含于 Q_0 的函数 $f(x)$, 以及 $p\leqslant q<s$, 有

$$\left\{\int_Q |f(x)|^q v(x)\mathrm{d}x\right\}^{1/q}\leqslant C\left\{\int_Q|\nabla f(x)|^p u(x)\mathrm{d}x\right\}^{1/p},$$

其中 $Q\subset Q_0$, $C\sim v(Q_0)^\delta$(某个 $\delta>0$)且与 $A_\infty(Q_0)$ 以及 $A_{p,s,1/n}(Q_0)$ 无关.

证明　根据条件可知, 存在 $r>1$, 使得

$$\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q v^r(x)\mathrm{d}x\right\}^{1/r}\leqslant C\,\frac{1}{|Q|}\int_Q v(x)\mathrm{d}x,\quad Q\subset Q_0.$$

因此, $(u,v^r)\in A_{p,rs,\eta}(Q_0)$, $\eta=1/n-(1/s)(1-1/r)$.

现在, 令 $p\leqslant q<s$, 并取上述 r 充分接近 1, 使得 $\eta<2/n\leqslant 1$, 由引理18可导出

$$\int_{Q_0}|f(x)|^q v(x)\mathrm{d}x\leqslant C\int_{Q_0}\{I_{1/n}(|\nabla f|)(x)\}^q v(x)\mathrm{d}x=J.$$

从而问题在于估计 J.

为此, 引用第二章§5第 3 小节定理的结果, 我们有

$$I_{1/n}(|\nabla f|)(x)\leqslant C\{M_\eta(|\nabla f|)(x)\cdot M_{\eta_1}(|\nabla f|)(x)\}^{1/2},$$

其中 $\eta_1=1/n-(1/s)(1-1/r)$. 由 $\operatorname{supp}f\subset Q_0$ 可知

$$J\leqslant C\left\{\int_{Q_0}M_{\eta_1}(|\nabla f|)(x)^{\frac{rq}{2r-1}}v(x)^{\frac{r}{2r-1}}\mathrm{d}x\right\}^{1-\frac{1}{2r}}$$

$$\times\left\{\int_{Q_0}M_\eta(|\nabla f|)(x)^{qr}\cdot v(x)^r\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2r}}.\qquad(16)$$

由于 $(u,v^r)\in A_{p,rs,\eta}(Q_0)$, 故根据定理19得

$$M_\eta: L^p(Q_0, u\mathrm{d}x) \to \text{弱 } L^{rs}(Q_0, v^r\mathrm{d}x)$$

的有界性.

由 Колмогоров 不等式可知($q<s$)

$$M_\eta: L^p(Q_0, u\mathrm{d}x) \to L^{rq}(Q_0, v^r\mathrm{d}x)$$

有界. 此外, 由不等式

$$\left\{\int_Q v(x)^{\frac{r}{2r-1}}\right\}^{\frac{2r-1}{rs}} \frac{1}{|Q|^{1-\eta_1}} \left\{\int_Q u(x)^{-\frac{1}{p-1}}\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p'}}$$

$$\leqslant \left\{\int_Q v(x)^r\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{rs}} |Q|^{\frac{2r-2}{rs}} |Q|^{\eta_1-1} \left\{\int_Q u(x)^{-\frac{1}{p-1}}\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p'}}$$

$$= \left\{\int_Q v(x)^r\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{rs}} \frac{1}{|Q|^{1-\eta}} \left\{\int_Q u(x)^{-\frac{1}{p-1}}\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p'}}$$

$$\leqslant C$$

可知$(u, v^{r/(2r-1)}) \in A_{p, rs/(2r-1), \eta_1}(Q_0)$. 因此得

$$M_{\eta_1}: L^p(Q_0, u\mathrm{d}x) \to \text{弱 } L^{rs/(2r-1)}(Q_0, v^{r/(2r-1)})$$

的有界性. 再由 Колмогоров 不等式可得($q<s$)

$$M_{\eta_1}: L^p(Q_0, u\mathrm{d}x) \to L^{rq/(2r-1)}(Q_0, v^{r/(2r-1)})$$

有界.

于是, 将上式结果用于(16)式, 就得所要的不等式. 至于常数 $C \sim v(Q_0)^\delta$ 的结论, 只需注意 M_η 的模与 M_{η_1} 的模均各小于或等于

$$C\left\{\int_{Q_0} v(x)^r\mathrm{d}x\right\}^{1-q/s}, \quad C\left\{\int_{Q_0} v(x)^{\frac{r}{2r-1}}\mathrm{d}x\right\}^{1-q/s},$$

应用 $v \in \mathrm{RH}_{1+r}$ 直接计算即得.

定理 21 设 $1<p<n$, $1<r<n/p$, 则对任意的 $f \in C_c^{(\infty)}(\boldsymbol{R}^n)$ 有

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} |f(x)|^p w(x)\mathrm{d}x \leqslant C\|w\|_{r,n-pr} \int_{\boldsymbol{R}^n} |\nabla f(x)|^p \mathrm{d}x,$$

其中 C 仅与 n, p 有关, 而

$$\|w\|_{r,n-pr} = \sup_{\substack{x\in \boldsymbol{R}^n \\ \rho>0}} \frac{1}{\rho^{n-pr}} \int_{B(x,\rho)} |w(y)|^r \mathrm{d}y.$$

在证明本定理之前，先给出两个引理.

引理 22 设 $w \in L^{r,n-pr}(\boldsymbol{R}^n)$，$1<p<n$，$1<r\leqslant n/p$，令 r_1：$1<r_1<r$，则

$$(Mw^{r_1})^{1/r_1} \in A_1 \cap L^{r,n-pr}(\boldsymbol{R}^n).$$

证明 $(Mw^{r_1})^{1/r_1} \in A_1$ 是显然的. 记 $B_\rho = B(x_0,\rho)$，则根据第四章 §1 定理 2 后的例，可知

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} [M(w^{r_1})(x)]^{r/r_1} \chi_{B_\rho}(x)\mathrm{d}x \leqslant C\int_{\boldsymbol{R}^n} [|w(x)|^{r_1}]^{r/r_1} M\chi_{B_\rho}(x)\mathrm{d}x.$$

由此得到

$$\begin{aligned}
&\int_{B_\rho} [M(w^{r_1})(x)]^{r/r_1}\mathrm{d}x \\
&\qquad \leqslant C\left\{\int_{B_{2\rho}} |w(x)|^r M\chi_{B_\rho}(x)\mathrm{d}x\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \sum_{k=1}^{+\infty}\int_{B_{2^{k+1}\rho}\setminus B_{2^k\rho}} |w(x)|^r M\chi_{B_\rho}(x)\mathrm{d}x\right\} \\
&\qquad \leqslant C\left\{\int_{B_{2\rho}} |w(x)|^r M\chi_{B_\rho}(x)\mathrm{d}x\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \sum_{k=1}^{+\infty}\int_{B_{2^{k+1}\rho}\setminus B_{2^k\rho}} |w(x)|^r \frac{\rho}{(|x-x_0|-\rho)^n}\mathrm{d}x\right\}.
\end{aligned}$$

因此，就有

$$\begin{aligned}
&\int_{B_\rho} [M(w^{r_1})(x)]^{r/r_1}\mathrm{d}x \\
&\qquad \leqslant C\|w\|^r_{r,n-pr}\left\{(2\rho)^{n-pr} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2^{k-1})^n}(2^{k+1}\rho)^{n-pr}\right\} \\
&\qquad \leqslant C\|w\|^r_{r,n-pr}\rho^{n-pr}.
\end{aligned}$$

引理 23 设 $1<p<n$，$1<r<n/p$，$w\in L^{r,n-pr}$，则

$$\begin{aligned}
|I_1 w(x)| &= \left|\int_{\boldsymbol{R}^n}\frac{w(x)}{|x-y|^{n-1}}\mathrm{d}y\right| \\
&\leqslant C(n,r,p)[Mw(x)]^{\frac{p-1}{p}}\|w\|^{1/p}_{r,n-pr}.
\end{aligned}$$

证明 令 $\rho>0$,并作分解

$$I_1w(x)=\left\{\int_{|x-y|\leqslant\rho}+\int_{|x-y|>\rho}\right\}\frac{w(y)}{|x-y|^{n-1}}\mathrm{d}y=I'+I''.$$

对于 I',用类似于上一引理中的分割为无限球层的方法,易得

$$|I'|\leqslant C'\rho\cdot Mw(x).$$

对于 I'',用 Hölder 不等式,并记 $\sigma=n-(r/2)(p+1)$,则有

$$|I''|=\left\{\int_{|x-y|>\rho}\frac{|w(x)|^r}{|x-y|^{\sigma}}\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{r}}$$

$$\times\left\{\int_{|x-y|>\rho}|x-y|^{\left(\frac{\sigma}{r}+1-n\right)r/(r-1)}\mathrm{d}y\right\}^{1-\frac{1}{r}},$$

记第一个积分为 J',第二个积分为 J'',对 J' 仍采用分割为无限球层的方法可知

$$J'\leqslant C''\rho^{-\frac{p}{2}-1}\|w\|_{r,n-pr},$$

而对 J'' 可直接估算.最后得到

$$|I_1w(x)|\leqslant C'\rho Mw(x)+C'''\rho^{1-p}\|w\|_{r,n-pr}.$$

现在,取 $\rho=(Mw(x)/\|v\|_{r,n-pr})^{-1/p}$,我们有

$$|I_1w(x)|\leqslant C[Mw(x)]^{1-1/p}\|w\|_{r,n-pr}^{1/p}.$$

定理 21 的证明 根据引理22,不妨假定有 $w\in A_1$.对任意给定的 $f\in C_c^{(\infty)}(\boldsymbol{R}^n)$,作球 B 使得 $f\in C_c^{\infty}(B)$,并考虑 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}-\Delta g(x)=w(x), & x\in B,\\ g(x)=0, & x\in\partial B\end{cases}$$

的解 g,我们有

$$\int_{\boldsymbol{R}^n}|f(x)|^pw(x)\mathrm{d}x\leqslant p\int_{\boldsymbol{R}^n}|f(x)|^{p-1}|\nabla f(x)||\nabla g(x)|\mathrm{d}x.$$

因为 $|\nabla g(x)|\leqslant I_1(|\Delta g|)(x)=I_1w(x)$,所以由引理23知

$$|\nabla g(x)|\leqslant C(n,r,p)[Mw(x)]^{\frac{p-1}{p}}\|w\|_{r,n-pr}^{1/p}.$$

代入前一式,即得

$$\int_B |f(x)|^p w(x)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C\|w\|_{r,n-pr}^{1/p}\int_B |f(x)|^{p-1}|\nabla f(x)|[Mw(x)]^{1-1/p}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C\|v\|_{r,n-pr}^{1/p}\left\{\int_B |f(x)|^p Mw(x)\mathrm{d}x\right\}^{1-1/p}$$

$$\times\left\{\int_B |\nabla f(x)|^p\mathrm{d}x\right\}^{1/p}$$

$$\leqslant C\|v\|_{r,n-pr}^{1/p}\left\{\int_B |f(x)|^p w(x)\mathrm{d}x\right\}^{1-1/p}$$

$$\times\left\{\int_B |\nabla f(x)|^p\mathrm{d}x\right\}^{1/p}.$$

由此易知定理成立.

§6　加权模不等式的外推

内插理论指出：若次线性算子 T 是 (p_0,p_0) 型以及 (p_1,p_1) 型，$p_0<p_1$，则 T 是 (p,p) 型，其中 $p_0<p<p_1$. 这一结论反映出，算子在 L^p 空间上有界时，其指标 p 的某种非孤立性. 本节所介绍的关于加 A_p 权的算子有界性估计的指标外推性工作，将进一步揭示这一方向上的深刻内容.

为方便计，记 $L_w^q=L^q(\boldsymbol{R}^n,w\mathrm{d}x)$.

引理 24　设 $0<\delta\leqslant 1$，$1<p<\infty$，$w\in A_p$，$g(x)>0$ 而且 $g\in L^{p/\delta}(\boldsymbol{R}^n,w)$. 记 $G(y)=\{M(g^{1/\delta}w)(y)/w(y)\}^\delta$，则

(i) $\|G\|_{L_w^{p/\delta}}\leqslant C\|g\|_{L_w^{p/\delta}}$；

(ii) $(gw,Gw)\in A_{\delta+p(1-\delta)}$，

其中的常数 C 以及(ii)中 $A_{\delta+p(1-\delta)}$ 权的常数均只与 A_p 权常数有关，而与 A_p 权的函数无特别关系.

证明　(i) 注意到 $w^{1-p'}\in A_{p'}$，我们有

$$\|G\|_{L_w^{p'/\delta}}^{p'/\delta}=\int_{R^n}[M(g^{1/\delta}w)(y)]^{p'}w^{-p'}(y)w(y)\mathrm{d}y$$

$$\leqslant C\int_{R^n}|g(y)|^{p'/\delta}w(y)\mathrm{d}y=C\|g\|_{L_w^{p'/\delta}}^{p'/\delta}.$$

(ii) 记 $q=\delta+p(1-\delta)$，则 $q-1=(p-1)(1-\delta)\geqslant 0$.

若 $\delta=1$，此时 $q=1$，$G=M(gw)/w$. 因此，$(gw,Gw)\in A_1$，且 A_1 权常数是1.

若 $0<\delta<1$，则需要证明的是不等式

$$\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q g(y)w(y)\mathrm{d}y\right\}\times\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q[M(g^{1/\delta}w)(y)/w(y)]^{-\frac{\delta}{q-1}}w(y)^{-\frac{1}{q-1}}\mathrm{d}y\right\}^{q-1}\leqslant C \tag{17}$$

对一切方体 Q 成立.

对上式中第一个积分，应用 Hölder 不等式（分配指标$1/\delta$ 与 $1/(1-\delta)$）可知

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q g(y)w(y)\mathrm{d}y\leqslant\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q g(y)^{1/\delta}w(y)\mathrm{d}y\right\}^{\delta}\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)\mathrm{d}y\right\}^{1-\delta}.$$

由于对每个 $y\in Q$，有

$$M(g^{1/\delta}w)(y)\geqslant\frac{1}{|Q|}\int_Q g(x)^{1/\delta}w(x)\mathrm{d}x,$$

故(16)式中第二个积分可由下式控制：

$$\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q g(x)^{1/\delta}w(x)\mathrm{d}x\right\}^{-\delta}\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)^{\frac{\delta-1}{q-1}}\mathrm{d}y\right\}^{q-1}$$

$$=\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q g(x)^{1/\delta}w(x)\mathrm{d}x\right\}^{-\delta}\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)^{-\frac{1}{p-1}}\mathrm{d}y\right\}^{\frac{p-1}{1-\delta}}.$$

从而，(17)式左端由下式控制：

$$\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)\mathrm{d}y\right\}^{1-\delta}\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)^{-\frac{1}{p-1}}\mathrm{d}y\right\}^{\frac{p-1}{1-\delta}}\leqslant C^{1-\delta}.$$

注 上一引理的结论还可转述为：设 $w\in A_p$，$1\leqslant p_0<p$，则对任一非负函数 g：$g\in L_w^{(p/p_0)'}$，必存在相应的函数 G：$G(y)\geqslant g(y)$，使得

$$\|G\|_{L_w^{(p/p_0)'}}\leqslant C\|g\|_{L_w^{(p/p_0)'}},\quad (gw,Gw)\in A_{p_0}.$$

实际上，我们还有更强的结果：

引理 25 设 $w\in A_p$，$1\leqslant p_0<p$，则对任一非负函数 $g\in L_w^{(p/p_0)'}$，存在函数 G：$G(y)\geqslant g(y)$，使得

$$\|G\|_{L_w^{(p/p_0)'}}\leqslant C\|g\|_{L_w^{(p/p_0)'}},\quad Gw\in A_{p_0}.$$

证明 （用数学归纳法）记 g 为 g_0，根据上面的注中所述，存在 G：$G(y)\geqslant g_0(y)$，记此 G 为 g_1，则还有

$$\|g_1\|_{L_w^{(p/p_0)'}}\leqslant C\|g\|_{L_w^{(p/p_0)'}}.$$

而且由于 $(g_0w,g_1w)\in A_{p_0}$，故对 $\lambda>0$，$f\in L_w^{(p/p_0)'}$，又有

$$\int_{\{y\in\mathbf{R}^n;\ Mf(y)>\lambda\}}g_0(y)w(y)\mathrm{d}y\leqslant\frac{C'}{\lambda^{p_0}}\int_{\mathbf{R}^n}|f(y)|^{p_0}g_1(y)w(y)\mathrm{d}y,$$

其中 C,C' 与 A_p 权函数无特殊关系.

现在，再以 g_1 相当于 g_0 的位置，继续进行上述过程，…. 一般地讲，给定 g_j，可得 g_{j+1}：$g_{j+1}(y)\geqslant g_j(y)$，使得

$$\|g_{j+1}\|_{L_w^{(p/p_0)'}}\leqslant C\|g_j\|_{L_w^{(p/p_0)'}}\leqslant C^{j+1}\|g_0\|_{L_w^{(p/p_0)'}},$$

$$\int_{\{y\in\mathbf{R}^n;\ Mf(y)>\lambda\}}g_j(y)w(y)\mathrm{d}y\leqslant\frac{C'}{\lambda^{p_0}}\int_{\mathbf{R}^n}|f(y)|^{p_0}g_{j+1}(y)w(y)\mathrm{d}y.\tag{18}$$

我们作函数 $\quad G(y)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(c+1)^j}g_j(y).$

因为 $$\frac{1}{(C+1)^j}\|g_j\|_{L_w^{(p/p_0)'}}\leqslant\left(\frac{C}{C+1}\right)^j\|g_j\|_{L_w^{(p/p_0)'}},$$

所以定义 $G(y)$ 的级数是收敛的（在 $L_w^{(p/p_0)'}$ 的意义下），并立即得到 $G(y)\geqslant g(y)$ 以及

$$\|G\|_{L_w^{(p/p_0)'}}\leqslant(C+1)\|g\|_{L_w^{(p/p_0)'}}.$$

从而，在(18)式的两端乘以$(C+1)^{-j}$且对 j 求和可知

$$\lambda^{p_0}\int_{\{y\in \mathbf{R}^n:\ Mf(y)>\lambda\}} G(y)w(y)\mathrm{d}y$$

$$\leqslant C'(C+1)\int_{\mathbf{R}^n} |f(y)|^{p_0}G(y)w(y)\mathrm{d}y.$$

这说明 H-L 极大算子是弱$(L_{Gw}^{p_0},L_{Gw}^{p_0})$型，即 $Gw\in A_{p_0}$.

关于 $p<p_0$的情形，也有下述相应的结论：

引理 26 设 $w\in A_p$, $1<p<p_0$，则对每一个非负函数 $g\in L_w^{p/(p_0-p)}$，存在函数 G：$G(y)\geqslant g(y)$，使得

$$\|G\|_{L_w^{p/(p_0-p)}}\leqslant C\|g\|_{L_w^{p/(p_0-p)}},\quad G^{-1}w\in A_{p_0},$$

其中 C 以及 $G^{-1}w$ 的 A_{p_0}常数与 A_p 权函数无特殊关系.

证明 显然，定理中假设等价于$1<p_0'<p'$，$v=w^{-1/(p-1)}\in A_{p'}$，其中 v 的 $A_{p'}$权常数等于 w 的 A_p 权常数. 根据上一定理的结果，可知对每一个非负函数 $h\in L_v^{(p'/p_0')'}$，存在函数 H：$H(y)\geqslant h(y)$，使得

$$\|H\|_{L_v^{(p'/p_0')'}}\leqslant C\|h\|_{L_v^{(p'/p_0')'}},\quad Hv\in A_{p_0'},$$

其中 C 以及 Hv 的 $A_{p_0'}$权常数与 A_p 权函数无特殊关系. 由于$(p'/p_0')'=(p_0-1)p/(p_0-p)$，故

$$h^{p_0-1}w^{-(p_0-p)/(p-1)}\in L_w^{p/(p_0-p)},$$

$$(Hv)^{-1/(p_0-1)}=(H^{p_0-1}w^{-(p_0-p)/(p-1)})^{-1}w\in A_{p_0}.$$

(它们等价于$h\in L_v^{(p'/p_0')'}$，$Hv\in A_{p_0'}$.)

因此，对给定的 $g\in L_w^{p/(p_0-p)}$，作 $h\in L_v^{(p'/p_0')'}$，使得 $g=h^{p_0-1}w^{-(p_0-p)/(p-1)}$. 而对此 h，存在前述之 H，我们只需令

$$G=H^{p_0-1}w^{-(p_0-p)/(p-1)},$$

即得所证.

在上述引理的基础上，我们可导出下述的指标外推的结果，它是1982年 Rubio de Francia 建立的.

定理 27 设 T 是一个次线性算子，且满足下述性质：存在 p_0：$1\leqslant p_0<\infty$，使得对每一个 A_{p_0} 权 w，有

$$\|Tf\|_{L_w^{p_0}}\leqslant C\|f\|_{L_w^{p_0}},$$

其中 C 与 A_{p_0} 权函数无特殊关系. 则对每一个 p：$1<p<\infty$，以及每一个 A_p 权 w 有

$$\|Tf\|_{L_w^p}\leqslant C\|f\|_{L_w^p},$$

其中 C 与 A_p 权函数无特殊关系.

证明 分别就两种情形讨论：

(i) $1\leqslant p_0<p$. 设 $w\in A_p$，$f\in L_w^p$，易知

$$\|Tf\|_{L_w^p}^{p_0}=\||Tf|^{p_0}\|_{L_w^{p/p_0}}=\sup\int_{\mathbf{R}^n}|Tf(y)|^{p_0}g(y)w(y)\mathrm{d}y,$$

其中的上确界是对一切满足 $L_w^{(p/p_0)'}$ 中模 $\leqslant 1$ 的 g 而取的. 对于这样的 g，由引理24知，存在 G：$G(y)\geqslant g(y)$，且根据 G 的性质及题设，我们有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^n}|Tf(y)|^{p_0}g(y)w(y)\mathrm{d}y&\leqslant\int_{\mathbf{R}^n}|Tf(y)|^{p_0}G(y)w(y)\mathrm{d}y\\&\leqslant C\int_{\mathbf{R}^n}|f(y)|^{p_0}G(y)w(y)\mathrm{d}y\\&\leqslant C\||f|^{p_0}\|_{L_w^{p/p_0}}\|G\|_{L_w^{(p/p_0)'}}\leqslant C\|f\|_{L_w^p}^{p_0}.\end{aligned}$$

即在 $1\leqslant p_0<p$ 时定理结论成立.

(ii) $1<p<p_0$. 设 $w\in A_p$，$f\in L_w^p$，令

$$g(y)=\begin{cases}\|f\|_{L_w^p}^{p-p_0}\cdot|f(y)|^{p_0-p}, & f(y)\neq 0,\\ 0, & f(y)=0.\end{cases}$$

注意到

$$\begin{aligned}&\int_{\{y\in\mathbf{R}^n:\ f(y)\neq 0\}}|f(y)|^{p_0}g(y)^{-1}w(y)\mathrm{d}y\\&\qquad=\|f\|_{L_w^p}^{p_0},\quad \|g\|_{L_w^{p/(p_0-p)}}=1,\end{aligned}$$

根据上一引理，得 G：$G(y)\geqslant g(y)$ 且满足那里指出的性质. 我们

有

$$\|Tf\|_{L_w^p}^{p_0}= \left\{\int_{\boldsymbol{R}^n}\left[\frac{|Tf(y)|^p}{G(y)^{p/p_0}}\right]^{p/p_0}G(y)^{p/p_0}w(y)\mathrm{d}y\right\}^{p_0/p}$$

$$\leqslant \|G\|_{L_w^{p/(p_0-p)}} \cdot \int_{\boldsymbol{R}^n}|Tf(y)|^{p_0}G(y)^{-1}w(y)\mathrm{d}y$$

$$\leqslant C\int_{\{y\in \boldsymbol{R}^n:\ f(y)\neq 0\}}|f(y)|^{p_0}g(y)^{-1}w(y)\mathrm{d}y = C\|f\|_{L_w^{p_0}},$$

其中 C 与 A_p 权函数无特殊关系. 证毕.

注 1983年,Garcia-Cuerva 给出了相应的弱型的结果(见[10]):

设$1\leqslant p_0<\infty$,若次线性算子 T 对任意 $w\in A_{p_0}$与 $\lambda>0$,有(常数 C 与 w 无特殊关系)

$$\lambda^{p_0}w(\{x\in \boldsymbol{R}^n:\ |Tf(x)|>\lambda\})\leqslant C\|f\|_{L_w^{p_0}}^{p_0},$$

则对每一个 $w\in A_p$, $1<p<\infty$,有(常数 C 与 w 无特殊关系)

$$\lambda^p w(\{x\in \boldsymbol{R}^n:\ |Tf(x)|>\lambda\})\leqslant C\|f\|_{L_w^p}^p.$$

习　题

1. 设 $w\in A_p$,证明其 A_p 权常数 $C\geqslant 1$.

2. 设 $w\in A_p$,证明

$$\int_{\boldsymbol{R}^n}w(x)\mathrm{d}x=\infty.$$

3. 设 $w\in A_p$, $1<p<\infty$,证明

$$\int_{\boldsymbol{R}^n}\frac{w(x)}{(1+|x|)^{np}}\mathrm{d}x\leqslant C\cdot w(B_0),\quad B_0=B(0,1).$$

4. 设 $w\in A_p$, $1<p<\infty$,证明

$$|\{x\in Q:\ w(x)\leqslant \beta w_Q\}|\leqslant (C\beta)^{1/(p-1)}|Q|,$$

其中 C 是 A_p 权常数,Q 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的方体.

5. 设 $w\in \mathrm{RH}_{1+\epsilon}$,证明 $w\in A_\infty$.

6. 设 $w\in A_p$, $1<p<\infty$,证明函数 $w^{-1}(x)$关于 $w\mathrm{d}x$ 满足反

Hölder 不等式.

7. 设 $w\in A_p$, $1<p<\infty$. 证明存在 δ: $0<\delta<1$, 使得当 $E\subset Q$（方体）且 $|E|\leqslant(1/2)|Q|$ 时，有

$$\int_E\left(\frac{w_Q}{w(x)}\right)^{p'}w(x)\mathrm{d}x\leqslant\delta\int_Q\left(\frac{w_Q}{w(x)}\right)^{p'}w(x)\mathrm{d}x,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1.$$

8. 设 $w(x)$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 上非负局部可积函数，若存在常数 C，以及 $0<\eta<1<A<\infty$，使得对任意的方体 Q，以及一切自然数 k，有

$$|\{x\in Q:\ w(x)<w_Q/A^k\}|\leqslant C\eta^k|Q|.$$

证明存在 p: $1<p<\infty$, $w\in A_p$.

9. 设 $w\in A_\infty$，证明对 $0<s<1$，有 $w^s\in \mathrm{RH}_{1/s}$.

提示：由第 4 题可知，存在 $E\subset Q$ 且 $|E|\sim|Q|$，使得当 $x\in E$ 时有 $w(x)\geqslant Cw_Q$.

10. 设 $w\in A_p$, $1<p<\infty$，方体 $Q_i(i=1,2,\cdots,2^n)$ 是方体 Q 的 2^n 个二分子方体，证明

$$\int_Q w(x)\mathrm{d}x\leqslant C\cdot\int_{Q_i}w(x)\mathrm{d}x\quad(i=1,2,\cdots,2^n).$$

11. 设 $w\in A_p$，证明存在 τ: $\tau>1$，使得

$$w^\tau\in A_p.$$

12. 设 $w(x)$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 上的非负局部可积函数，证明下述两个条件是等价的：

(i) M 是限制弱$(L^p(\boldsymbol{R}^n,w),L^p(\boldsymbol{R}^n,w))$型：

$$\int_{\{x\in\boldsymbol{R}^n:\ M(\chi_E)(x)>\lambda\}}w(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{C_1}{\lambda^p}w(E),\quad 1\leqslant p<\infty,$$

其中 C 与 λ，可测集 E 无关；

(ii) 对任意的方体 Q 以及 $E\subset Q$，有

$$\frac{|E|}{|Q|}\leqslant C_2\left(\frac{w(E)}{w(Q)}\right)^{1/p}.$$

提示：由(ii)知 w 是倍测度且有

$$M(\chi_E)(x)\leqslant C_2[M_w(\chi_E)(x)]^{1/p}.$$

13. 设 $0<p<\infty$,次线性算子 T 满足

$$\int_{\{x\in\mathbf{R}^n:\ |Tf(x)|>\lambda\}} w(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{\lambda^p}\int_{\mathbf{R}^n}|f(x)|^p\mathrm{d}x,$$

其中 $w(x)>0$, a. e. $x\in\mathbf{R}^n$,证明存在弱(p,p)型算子 T_0,以及 $g(x)>0(x\in\mathbf{R}^n)$,使得 $T=g\cdot T_0$.

提示:令 $E_k=\{x\in\mathbf{R}^n:(1/k)\leqslant w(x)<(1/(k-1))\}$,$k=2$,$3,\cdots$,$E_1=\{x\in\mathbf{R}^n: w(x)>1\}$,并作

$$g(x)=\sum_{k=1}^{\infty}2^k\chi_{E_k}(x).$$

14. 设 $w(x)$满足

$$\sup_{x\in B}\{w^2(x)\}\leqslant C_1\frac{1}{|B|}\int_B w^2(x)\mathrm{d}x,\quad B=B(x_0,r).$$

证明存在 p: $p>1$,使得

$$\left\{\frac{1}{|B|}\int_B|w(x)|\mathrm{d}x\right\}\left\{\frac{1}{|B|}\int_B|w(x)|^{-\frac{1}{p-1}}\mathrm{d}x\right\}^{p-1}\leqslant C_2.$$

提示:由条件知 $w^2\in \mathrm{RH}_{1+\delta}$.

15. 记 $L_w^1=L^1(\mathbf{R}^n,w)$,$w\in A_1$,$f\in L_w^1$,$\varphi(x)$是 Schwartz 函数(速降函数),证明

(i) $\|\varphi_\delta * f\|_{L_w^1}\leqslant C\|f\|_{L_w^1}$, $\varphi_\delta(x)=\delta^n\varphi(\delta x)$, $\delta>0$;

(ii) 若$\|\varphi\|_1=1$,证明

$$\lim_{\delta\to\infty}\|\varphi_\delta * f-f\|_{L_w^1}=0.$$

16. 设 T 是线性算子,若对 $C_1>0$,存在 $C_2>0$,使得当 $w\in A_1$ 且 A_1权常数$\leqslant C_1$时,有

$$\int_{\mathbf{R}^n}|Tf(x)|^p w(x)\mathrm{d}x\leqslant C_2\int_{\mathbf{R}^n}|f(x)|^p w(x)\mathrm{d}x.$$

证明 T 是(q,q)型, $p<q<\infty$.

提示:利用$[M(g)]^{1/s}\in A_1$, $s>1$.

17. 设 $w(x)$是一个权函数,$1\leqslant p<\infty$. 若 n 个 Riesz 变换 R_1,$\cdots$,R_n 在 $L^p(\mathbf{R}^n,w)$上是有界的,证明 $w\in A_p$.

18. 设 $w\in A_\infty$，定义

$$B_p=\{f:\ \|f\|_{B_p}=\left\{\int_{R^n}[Mf(x)]^p w(x)\mathrm{d}x\right\}^{1/p}<\infty\},$$

证明：若 $f(x)\geqslant 0$ 且 $f\in B_p$，则

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0,r)}f(x)\mathrm{d}x=0.$$

又 $C_c^{(\infty)}$ 在 B_p 中稠密.

19. 设 $w_0,w_1\in A_1$，$w=w_0w_1^{1-p}$，$1<p<\infty$，证明 $w\in A_p$.

参 考 文 献

[1] E. M. Stein, Note on singular integrals, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **8**(1957), 250～254.

[2] B. Muckenhoupt, Weighted norm inequalities for Hardy maximal function, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **165**(1972), 207～226.

[3] R. Coifman and C. Fefferman, Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals, *Studia Math.*, **51**(1974), 241～250.

[4] R. Coifman and R. Rochberg, Another characterization of BMO, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **79**(1980), 249～254.

[5] A. Cordoba and C. Fefferman, A weighted norm inequality for singular integrals, *Studia Math.*, **57**(1976), 97～101.

[6] J. L. Rubio de Francia, Factorization theory and A_p weights, *Amer. J. Math.*, **106**(1984), 553～547.

[7] E. T. Sawyer, A characterization of a two weight norm inequality for maximal operators, *Studia Math.*, **75**(1982), 1～11.

[8] C. J. Neugebauer, Inserting A_p weights, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **87**(1983), 644～648.

[9] R. M. Young, Weighted norm inequalities for the Hardy-Littlewood maximal function, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **85**(1982), 24～26.

[10] J. Garcia-Cuerva, An extrapolation theorem in the theory of A_p weights, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **87**(1983), 422～426.

[11] A. Torchisky, *Real variable method in Harmonic Analysis*, Acad. Press, 1986.

第七章 有界平均振动函数空间

早在1961年,John 和 Nirenberg 在[1]中导入了一个函数类,即有界平均振动函数空间,记为 BMO,其目的在于能使我们引用下述结论:对一个函数,它在 Q_0内每一个子方体 Q 上依 L^1平均的意义可用一个常数 a_Q 来逼近,其误差与 Q 无关,而且在 Q 上依 L^p 意义与 a_Q 的差具有相同量阶,$1<p<\infty$. 他们的工作激起了人们的兴趣,此后这一理论得到了迅速的发展,并在包括偏微分方程和函数论在内的许多领域中获得重要应用. 读者将在本节中看到,从奇异积分算子作用于 Lebesgue 可积函数空间系列的框架的意义下,BMO 正是 L^∞恰当的替身. 此外,BMO 与 A_p 权还有着密切的关系. BMO 是 H^1的对偶. 检验第三代奇异积分 L^2有界性的 $T(1)$ 定理也是由 BMO 描述的.

§1 极大平均振动函数与 BMO 空间

设 $f\in L_{loc}(\boldsymbol{R}^n)$,$Q$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的方体,记

$$f_Q=\frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)\mathrm{d}x,$$

称为 f 在 Q 上的**平均值**,而称

$$\tilde{f}_Q=\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-f_Q|\mathrm{d}x$$

为 f 在 Q 上的**平均振动**.

定义 设 $f\in L_{loc}(\boldsymbol{R}^n)$,令

$$M^{\#}f(x)=\sup_{x\in Q}\tilde{f}_Q,$$

$M^{\#}f(x)$称为**极大平均振动函数**,也称为 **Sharp 极大函数**,$M^{\#}$ 称

为 **Sharp 极大算子**.

在这一定义中，其上确界是对一切 $Q\subset \boldsymbol{R}^n$ 取的. 如有需要，也可对某个 Q_0 中的一切 Q 取上确界来做的. 此外，又记

$$M^{\#}f(x)=\sup_{r>0}\widetilde{f}_{Q(x,r)},$$

则称其为**中心 Sharp 极大函数**.

我们有下述初等性质：

(i) 若 $f\in L_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^n)$，则

$$\overline{M}^{\#}f(x)\leqslant M^{\#}f(x)\leqslant 2^{n+1}\overline{M}^{\#}f(x),\quad x\in \boldsymbol{R}^n.$$

证明 第一个不等式是显然成立的. 对于第二个不等式，令 Q 是边长为 r 的方体，而且 $x\in Q$，记 $\widetilde{Q}=Q(x,2r)$，易知 $|\widetilde{Q}|=2^n|Q|$. 又有

$$|f_Q-f_{\widetilde{Q}}|=\left|\frac{1}{|Q|}\int_Q[f(x)-f_{\widetilde{Q}}]\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{|Q|}\int_{\widetilde{Q}}|f(x)-f_{\widetilde{Q}}|\mathrm{d}x$$
$$=\frac{2^n}{|\widetilde{Q}|}\int_{\widetilde{Q}}|f(x)-f_{\widetilde{Q}}|\mathrm{d}x\leqslant 2^nM^{\#}f(x),$$

从而得

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(x)-f_Q|\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(x)-f_{\widetilde{Q}}|\mathrm{d}x+|f_{\widetilde{Q}}-f_Q|$$
$$\leqslant\frac{2^n}{|\widetilde{Q}|}\int_{\widetilde{Q}}|f(x)-f_{\widetilde{Q}}|\mathrm{d}x+2^n\overline{M}^{\#}f(x)\leqslant 2^{n+1}\overline{M}^{\#}f(x).$$

由此知 $M^{\#}f(x)\leqslant 2^{n+1}M^{\#}f(x)$.

这一性质说明中心 Sharp 极大函数与 Sharp 极大函数是可以比较的.

(ii) 设 $f\in L_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^n)$，则

$$M^{\#}f(x)\leqslant 2Mf(x),\quad x\in \boldsymbol{R}^n.$$

证明 由不等式

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(x)-f_Q|\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(x)|\mathrm{d}x+|f_Q|$$

立即可知结论成立.

(iii) 设 $f\in L_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^n)$，则

$$M^{\#}(|f|)(x)\leqslant 2M^{\#}f(x).$$

证明 根据不等式

$$\begin{aligned}||f(x)|-(|f|)_Q|&\leqslant ||f(x)|-|f_Q||+||f_Q|-(|f|)_Q|\\&\leqslant |f(x)-f_Q|+\left|\frac{1}{|Q|}\int_Q[|f(x)|-|f_Q|]\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant |f(x)-f_Q|+\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(x)-f_Q|\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

立即可知结论成立.

我们知道，由 $f\in L^{\infty}$ 可知 $Mf\in L^{\infty}(\boldsymbol{R}^n)$，从而根据性质(ii)又知 $M^{\#}f\in L^{\infty}(\boldsymbol{R}^n)$. 但反之不然(见下面的例). 这导致下述定义：

定义 设 $f\in L_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^n)$，若 f 的平均振动是有界的，即 $M^{\#}f\in L^{\infty}$，则称 f 为有界平均振动函数，其全体记为 $\mathrm{BMO}(\boldsymbol{R}^n)$，称为**有界平均振动函数空间**，简记为 **BMO**，并令

$$\|f\|_*=\|f\|_{\mathrm{BMO}}=\|M^{\#}f\|_{\infty}.$$

显然，$\|f\|_{\mathrm{BMO}}=0$ 当且仅当 $f(x)=$常数 a.e.. 因此，如果我们认定等价关系：

$$f_1\sim f_2 \text{ 当且仅当 } f_1(x)-f_2(x)=\text{常数 a.e.},$$

那么 BMO 以范数 $\|\cdot\|_{\mathrm{BMO}}$ 构成一个赋范线性空间.

根据上述定义立即看到：$f\in\mathrm{BMO}$ 当且仅当存在常数 C，使对任意的方体 Q 有

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(x)-f_Q|\mathrm{d}x\leqslant C.$$

此外，下述定理告诉我们，f_Q 还可由与 Q 相关的常数 a_Q 代替.

定理 1 设 $f\in L_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^n)$，则 $f\in\mathrm{BMO}$ 当且仅当存在常数 C，使对任意的方体 Q，有常数 a_Q 且成立不等式

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(x)-a_Q|\mathrm{d}x\leqslant C.$$

证明 *必要性* 取 $a_Q=f_Q$ 即可.

充分性 由不等式

$$|f_Q - a_Q| = \left|\frac{1}{|Q|}\int_Q [f(x) - a_Q]\mathrm{d}x\right| \leqslant C$$

可知

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - a_Q|\mathrm{d}x + |a_Q - f_Q|$$
$$\leqslant 2C.$$

前面已经提到 $L^\infty \subset \mathrm{BMO}$，现在举例说明 $L^\infty \neq \mathrm{BMO}$.

例 在 $\boldsymbol{R}^1 = (-\infty, \infty)$ 上考虑 $f(x) = \ln|x|$，则 $f \overline{\in} L^\infty$，但 $f \in \mathrm{BMO}(\boldsymbol{R}^1)$.

证明 实际上，对于任意的区间 $I = (a, b)$，只要选取适当的 a_I，总可使得

$$\frac{1}{|I|}\int_I |\ln|x| - a_I|\mathrm{d}x \leqslant 1.$$

下面分几种情况讨论.

(i) $0 < a < b$，我们取 $a_I = \ln b$，则

$$\frac{1}{|I|}\int_I |\ln|x| - \ln b|\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\int_a^b (\ln b - \ln x)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{(b-a) - a(\ln b - \ln a)}{b-a} = 1 - a\,\frac{\ln b - \ln a}{b-a}.$$

(ii) $-b < a < 0 < b$，我们取 $a_I = \ln b$，则

$$\int_I |\ln|x| - \ln b|\mathrm{d}x = \int_a^{-a} |\ln|x| - \ln b|\mathrm{d}x$$
$$+ \int_{-a}^{b} (\ln b - \ln x)\mathrm{d}x = I_1 + I_2,$$

$$I_2 = (b + a) + a[\ln b - \ln(-a)],$$

$$I_1 = 2\lim_{\varepsilon \to 0+}\int_\varepsilon^{-a} (\ln b - \ln x)\mathrm{d}x$$
$$= 2\{-a\ln b + a\ln(-a) - a\}.$$

由此知 $I_1 + I_2 = (b - a) - a\{\ln b - \ln(-a)\}$，即

$$\frac{1}{|I|}\int_I |\ln|x| - \ln b|\mathrm{d}x = 1 + (-a)\,\frac{\ln b - \ln(-a)}{b+a}\,\frac{b+a}{b-a}.$$

其余的可类推，因为 $\ln|x|$ 是偶函数.（这个例子对理解 BMO 有着基本的重要性.）

定理 2 BMO 是完备的赋范线性空间.

证明 设 $\{f_k(x)\}$ 是 BMO 中的 Cauchy 列：

$$\lim_{l,k\to\infty}\|f_l - f_k\|_{\mathrm{BMO}} = 0,$$

则我们有

(i) 对任意的方体 Q，

$$\lim_{l,k\to\infty}\frac{1}{|Q|}\int_Q |f_l(x) - f_k(x) - (f_l - f_k)_Q|\mathrm{d}x = 0.$$

由此知 $\{f_k(x) - (f_k)_Q\}$ 是 $L^1(Q)$ 中的 Cauchy 列，从而又有

(ii) 存在定义于 Q 上的函数 $g_Q(x)$，使得

$$\lim_{k\to\infty}\int_Q |[f_k(x) - (f_k)_Q] - g_Q(x)|\mathrm{d}x = 0.$$

(iii) 对于任意的 Q'：$Q'\supset Q$，可知同时有

$$\lim_{k\to\infty}\int_{Q'}|[f_k(x) - (f_k)_{Q'}] - g_{Q'}(x)|\mathrm{d}x = 0,$$

$$\lim_{k\to\infty}\int_Q |f_k(x) - (f_k)_{Q'} - g_{Q'}(x)|\mathrm{d}x = 0.$$

(iv) 由(ii)以及(iii)立即可得

$$\lim_{k\to\infty}[(f_k)_{Q'} - (f_k)_Q] = C \triangleq C(Q,Q').$$

现在，我们把全空间 $\boldsymbol{R}^n$ 分解成渐增方体列之并，即令 $Q_l(l=1,2,\cdots)$ 为边长是 l 的方体，且 $\bigcup\limits_{l\geq 1} Q_l = \boldsymbol{R}^n$. 从而有

(v) 定义函数

$$f(x) = g_l(x) + C(Q_1,Q_l),\quad x\in Q_l(l = 1,2,\cdots),$$

其中 $g_l(x) = g_{Q_l}(x)$. 为使这一定义合理，尚需指出：对 $x\in Q_l\subset Q_{l'}$，有

$$g_l(x) + C(Q_1,Q_l) = g_{l'}(x) + C(Q_1,Q_{l'}),$$

即

$$g_l(x) - g_{l'}(x) = C(Q_1,Q_{l'}) - C(Q_1,Q_l). \tag{1}$$

因为$C(Q_1,Q_{l'})-C(Q_1,Q_l)=C(Q_l,Q_{l'})$，而$(f_k)_{Q_{l'}}-(f_k)_{Q_l}$当$k\to\infty$时收敛于$C(Q_l,Q_{l'})$，一方面又依$L^1(Q_l)$意义收敛于$g_l(x)-g_{l'}(x)$，所以(1)式成立.

下面来证明$\|f_k-f\|_{\mathrm{BMO}}\to 0(k\to\infty)$，即指出：对任意的方体$Q$，有

$$\lim_{k\to\infty}\int_Q|(f_k-f)(x)-(f_k-f)_Q|\mathrm{d}x=0. \tag{2}$$

实际上，先取Q_l：$Q_l\supset Q$，注意到

$$(f)_Q=\frac{1}{|Q|}\int_Q g_l(x)\mathrm{d}x+C(Q_1,Q_l),$$

可得
$$g_Q(x)-g_l(x)-C(Q_1,Q_l)+(f)_Q$$
$$=g_Q(x)-g_l(x)+\frac{1}{|Q|}\int_Q g_l(x)\mathrm{d}x.$$

由此知

$$\int_Q\{g_Q(x)-g_l(x)-C(Q_1,Q_l)+(f)_Q\}\mathrm{d}x$$
$$=\int_Q g_Q(x)\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_Q[f_n(x)-(f_n)_Q]\mathrm{d}x=0.$$

于是，我们有

$$\int_Q[(f_k-f)(x)-(f_n-f)_Q]\mathrm{d}x$$
$$=\int_Q[f_k(x)-g_l(x)-C(Q_1,Q_l)-(f_k)_Q+(f)_Q]\mathrm{d}x$$
$$=\int_Q[f_k(x)-(f_k)_Q-g_Q(x)]\mathrm{d}x.$$

因此，(2)式成立.

§2 有界平均振动函数的大小

定理 3 若$f\in\mathrm{BMO}$，则$f(x)(1+|x|^{n+1})^{-1}$是可积函数，且

$$I=\int_{R^n}\frac{|f(x)-f_{Q_0}|}{1+|x|^{n+1}}\mathrm{d}x\leqslant C\|f\|_*,$$

其中常数 C 与 f 无关，$Q_0=Q(0,1)$.

证明 令 $Q_k=Q(0,2^k)$，$S_k=Q_k\backslash Q_{k-1}$，而且

$$I_k=\int_{S_k}\frac{|f(x)-f_{Q_0}|}{1+|x|^{n+1}}\mathrm{d}x.$$

我们有
$$I=I_0+\sum_{k=1}^{+\infty}I_k.$$

由于有不等式

$$I_0=\int_{Q_0}\frac{|f(x)-f_{Q_0}|}{1+|x|^{n+1}}\mathrm{d}x\leqslant\int_{Q_0}|f(x)-f_{Q_0}|\mathrm{d}x\leqslant|Q_0|\|f\|_*,$$

故下面只需证明 $I_k\leqslant C_k\|f\|_*$，且 $\sum\limits_k C_k<\infty$.

因为当 $x\in S_k$ 时，有 $|x|>2^{k-2}$，所以

$$1+|x|^{n+1}>1+2^{(k-2)(n+1)}>4^{-(n+1)}2^{k(n+1)}.$$

从而
$$I_k\leqslant 4^{n+1}2^{-k(n-1)}\int_{Q_k}|f(x)-f_{Q_0}|\mathrm{d}x.$$

对上式右端之积分，又有估计

$$\begin{aligned}\int_{Q_k}|f(x)-f_{Q_0}|\mathrm{d}x&\leqslant\int_{Q_k}[|f(x)-f_{Q_k}|+|f_{Q_k}-f_{Q_0}|]\mathrm{d}x\\&\leqslant|Q_k|\|f\|_*+|Q_k||f_{Q_k}-f_{Q_0}|\\&=2^{kn}(\|f\|_*+|f_{Q_k}-f_{Q_0}|).\end{aligned}$$

上式右端的 $|f_{Q_k}-f_{Q_0}|$ 可以用估计

$$\begin{aligned}|f_{Q_k}-f_{Q_0}|&\leqslant\sum_{i=1}^{k}|f_{Q_i}-f_{Q_{i-1}}|\\&\leqslant\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{|Q_{i-1}|}\int_{Q_{i-1}}|f(x)-f_{Q_i}|\mathrm{d}x\\&\leqslant\sum_{i=1}^{k}\frac{2^n}{|Q_i|}\int_{Q_i}|f(x)-f_{Q_i}|\mathrm{d}x\leqslant k\cdot 2^n\|f\|_*.\end{aligned}$$

因此，得到

$$I_k\leqslant 4^{n+1}2^{-k(n+1)}2^{nk}(1+k2^n)\|f\|_*\leqslant C_k\|f\|_*,$$

其中 $C_k=C\cdot k\cdot 2^{-k}$，$\sum_k C_k<\infty$.

上述定理的结论说明了 BMO 中函数在无穷远处的性态. 下面我们再从其分布函数的角度来考察，这就是著名的 John-Nirenberg 不等式. 为此，先看一个重要例子.

例 1 设 $f(x)=\ln|x|$，$I=(0,b)$. 令

$$E_\lambda=\{x\in I:\ |\ln x-f_I|>\lambda\},$$

显然有

$$\begin{aligned}E_\lambda&=\{x\in I:\ \ln x-f_I>\lambda\}\cup\{x\in I:\ \ln x-f_I<-\lambda\}\\&=\{x\in I:\ x>\mathrm{e}^{\lambda+f_I}\}\cup\{x\in I:\ x<\mathrm{e}^{-\lambda+f_I}\}.\end{aligned}$$

当 λ 充分大时，上式右端第一个集合是空集；第二个集合成为 $(0,\mathrm{e}^{-\lambda+f_I})$. 因此得到

$$|E_\lambda|=\mathrm{e}^{-\lambda+f_I}.$$

再根据 Jensen 不等式，可知

$$\mathrm{e}^{f_I}\leqslant\frac{1}{|I|}\int_I\mathrm{e}^{\ln t}\mathrm{d}t=\frac{|I|}{2}.$$

由此知

$$|E_\lambda|\leqslant\frac{1}{2}|I|\mathrm{e}^{-\lambda}.$$

上述关系式虽然是对函数 $\ln|x|$ 在 $\boldsymbol{R}^1$ 的区间 $(0,b)$ 上获得的，但实际上它反映出 BMO 空间中任一函数的振动分布函数之本质特征.

定理 4（John-Nirenberg） 设 $f\in\mathrm{BMO}$，则存在 $C_1,C_2>0$，使对任意的方体 Q 有

$$|\{x\in Q:\ |f(x)-f_Q|>\lambda\}|\leqslant C_1\mathrm{e}^{-\frac{C_2}{\|f\|_*}\lambda}\cdot|Q|,\quad \lambda>0.$$

证明 只需考虑 $\|f\|_*>0$ 的情形. 我们总可以假定 $\|f\|_*=1$ 以及 $f_Q=0$，否则以函数

$$[f(x)-f_Q]/\|f\|_*$$

代替 $f(x)$ 即可. 从而只需证明不等式

$$|\{x\in Q:\ |f(x)|>\lambda\}|\leqslant C_1\mathrm{e}^{-C_2\lambda}|Q|.$$

显然，对于 $\lambda<1$ 的情形，我们只要取 $C_1=e, C_2=1$，不等式就成立了. 因此，假定 $\lambda\geqslant 1$.

取定任意的方体 Q_0，因为 $f\in L(Q_0)$，所以可作 C-Z 空间分解，得互不相重方体列 $\{Q_k^\lambda\}$，且有估计

$$\lambda<\frac{1}{|Q_k^\lambda|}\int_{Q_k^\lambda}|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant 2^n\lambda.$$

实际上，由于 $f\in \mathrm{BMO}$，上述右端的不等式估计还可改进如下：假定 Q_k^λ 是来自某个分前方体 Q' 的等分割子方体，那么

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q_k^\lambda|}\int_{Q_k^\lambda}|f(x)|\mathrm{d}x&\leqslant\frac{1}{|Q_k^\lambda|}\int_{Q_k^\lambda}|f(x)-f_{Q'}|\mathrm{d}x+(|f|)_{Q'}\\&\leqslant\frac{2^n}{|Q'|}\int_{Q'}|f(x)-f_{Q'}|\mathrm{d}x+\lambda\leqslant 2^n+\lambda.\end{aligned}$$

现在，我们可以来考察在两级水平 λ 以及 $\mu=2^{n+1}+\lambda$ 下 C-Z 空间分解中所得方体列 $\{Q_k^\lambda\}$ 以及 $\{Q_j^\mu\}$ 的测度估计. 因为每个 Q_j^μ 必在某个 Q_k^λ 内，且有

$$(|f|)_{Q_k^\lambda}=\frac{1}{|Q_k^\lambda|}\int_{Q_k^\lambda}|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant 2^n+\lambda<\mu,$$

$$\mu<\frac{1}{|Q_j^\mu|}\int_{Q_j^\mu}|f(x)|\mathrm{d}x.$$

所以若记 $\sum\limits_{j\circ k}|Q_j^\mu|$ 为对一切含于 Q_k^λ 的 Q_j^μ 的 j 指标求和，$\bigcup\limits_{j\circ k}Q_j^\mu$ 为对一切含于 Q_k^λ 的 Q_j^μ 的 j 指标求并集，则

$$\mu\cdot\sum_{j\circ k}|Q_j^\mu|\leqslant\int_{\bigcup\limits_{j\circ k}Q_j^\mu}|f(x)|\mathrm{d}x.$$

由此知

$$\begin{aligned}\mu&\leqslant\Big(\sum_{j\circ k}|Q_j^\mu|\Big)^{-1}\int_{\bigcup\limits_{j\circ k}Q_j^\mu}|f(x)|\mathrm{d}x\\&\leqslant\Big(\sum_{j\circ k}|Q_j^\mu|\Big)^{-1}\int_{\bigcup\limits_{j\circ k}Q_j^\mu}|f(x)-(|f|)_{Q_k^\lambda}|\mathrm{d}x+(|f|)_{Q_k^\lambda}\end{aligned}$$

$$\leqslant \Big(\sum_{j\text{对}k}|Q_j^\mu|\Big)^{-1}|Q_k^\lambda|\frac{1}{|Q_k^\lambda|}\int_{Q_k^\lambda}|f(x)-(|f|)_{Q_k^\lambda}|\mathrm{d}x+(|f|)_{Q_k^\lambda}$$

$$\leqslant \Big(\sum_{j\text{对}k}|Q_j^\mu|\Big)^{-1}|Q_k^\lambda|+\lambda+2^n,$$

即
$$\sum_{j\text{对}k}|Q_j^\mu|\leqslant 2^{-n}|Q_k^\lambda|.$$

从而对一切 j,k 指标求和，可知

$$\sum_j|Q_j^\mu|\leqslant 2^{-n}\sum_k|Q_k^\lambda|. \tag{3}$$

于是，取 $\lambda=1$，考察数列

$$1,1+2^{n+1},1+2\cdot 2^{n+1},\cdots,1+r\cdot 2^{n+1},\cdots.$$

对于任意的 $\alpha>\|f\|_{\mathrm{BMO}}=1$，为估计点集

$$E_f(\alpha)=\{x\in Q:|f(x)|>\alpha\},$$

不妨设$[(\alpha-1)2^{-n-1}]=r$，($[t]$表示 t 的整数部分)并记 $\mu=1+r2^{n+1}$. 显然有 $1\leqslant\mu\leqslant\alpha$，而且

$$E_f(\alpha)\subset E_f(\mu)\subset\Big(\bigcup_j Q_j^\mu\Big)\cup Z,\quad |Z|=0.$$

从而得$|E_f(\alpha)|\leqslant\sum_j|Q_j^\mu|$. 根据估计式(3)并重复 r 次，我们有

$$|E_f(\alpha)|\leqslant 2^{-nr}\sum_k|Q_k^1|\leqslant 2^{-nr}|Q|.$$

最后取

$$C_1=2^n\cdot 2^{n2^{-n-1}},\quad C_2=(\ln 2)^{n2^{-n-1}}.$$

即得所证.

根据 John-Nirenberg 不等式，立即可得下述重要推论.

推论 1 设 $1\leqslant p<\infty$，$f\in L_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^n)$，令

$$\|f\|_{p,*}=\sup_Q\Big\{\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(x)-f_Q|^p\mathrm{d}x\Big\}^{\frac{1}{p}},$$

其中的上确界是对一切方体 Q 而取的，则$\|f\|_*$与$\|f\|_{p,*}$是等价的.

证明 (i) 由 Hölder 不等式知

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(x)-f_Q|\mathrm{d}x\leqslant\Big\{\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(x)-f_Q|^p\mathrm{d}x\Big\}^{\frac{1}{p}},$$

由此立即得到 $\|f\|_*\leqslant\|f\|_{p,*}$.

(ii) 反之，设$\|f\|_*<\infty$，则

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(x)-f_Q|^p\mathrm{d}x\\
&\quad=\frac{p}{|Q|}\int_0^\infty t^{p-1}|\{x\in Q:|f(x)-f_Q|>t\}|\mathrm{d}t\\
&\quad\leqslant C_1p\int_0^\infty t^{p-1}\mathrm{e}^{-\frac{C_2}{\|f\|_*}t}\mathrm{d}t\\
&\quad=C_1p\left(\frac{\|f\|_*}{C_2}\right)^p\int_0^\infty t^{p-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=C_1C_2^{-p}p\Gamma(p)\|f\|_*^p.
\end{aligned}$$

即得所证.

推论 2 设 $f\in\mathrm{BMO}$，则存在 $C_1,C_2>0$，使得对 $0<C<C_2/\|f\|_*$ 以及任意的方体 Q，有

$$\int_Q\mathrm{e}^{C|f(x)-f_Q|}\mathrm{d}x\leqslant C_1C\left(\frac{C_2}{\|f\|_*}-C\right)^{-1}|Q|.$$

证明 根据 John-Nirenberg 不等式，我们有

$$\begin{aligned}
\int_Q\mathrm{e}^{C|f(x)-f_Q|}\mathrm{d}x&=\int_0^\infty C\mathrm{e}^{Ct}|\{x\in Q:|f(x)-f_Q|>t\}|\mathrm{d}t\\
&\leqslant CC_1\int_0^\infty\mathrm{e}^{Ct}\mathrm{e}^{-\frac{C_2}{\|f\|_*}t}\mathrm{d}t|Q|=CC_1|Q|\int_0^\infty\mathrm{e}^{\left(C-\frac{C_2}{\|f\|_*}\right)t}\mathrm{d}t\\
&=CC_1\left(\frac{C_2}{\|f\|_*}-C\right)^{-1}|Q|.
\end{aligned}$$

即得所证.

由上述推论以及指数函数的展开式，可以导出 $f\notin\mathrm{BMO}$ 的一个充分条件：若对某个方体 Q_0 以及对任意的 $C>0$，有

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{C^k}{k!}\int_{Q_0}|f(x)|^k\mathrm{d}x=\infty,$$

则 $f\notin\mathrm{BMO}$.

例 2 考虑 $\boldsymbol{R}^1$ 中的区间 $[0,1]$，任意的常数 $C>0$，对于函数 $(\ln|x|)^2$，我们有

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{C^k}{k!}\int_0^1(\ln x)^{2k}\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(2k)!}{k!}C^k=\infty.$$

因此，$(\ln|x|)^2\overline{\in}\mathrm{BMO}(\boldsymbol{R}^1)$.

§3 Sharp 极大定理、L^p 与 BMO 之间的算子内插

H-L 极大函数与 Sharp 极大函数的定义都是建立在函数的平均值的基础上的. 因此，它们之间有着密切的关系，除了在 §1中指出的初等性质外，下面所介绍的 Sharp 极大定理更深入地揭示了其间的某种等价关系，并由此导出了 L^p 与 BMO（代替 L^∞）之间算子的内插定理.

引理 5 设 $f\in L^{p_0}(\boldsymbol{R}^n)$，$1\leqslant p_0<\infty$，$f(x)\geqslant 0$，且对 $\lambda>0$所作 C-Z 空间分解得到的方体列记为$\{Q_k^\lambda\}$，记$\sum\limits_k\{Q_k^\lambda\}$为 $t(\lambda)$，则对 $A>0$，有

$$t(\lambda)\leqslant|\{x\in\boldsymbol{R}^n:M^\# f(x)>\lambda/A\}|+\frac{2}{A}t(2^{-n-1}\lambda).$$

证明 记 $\mu=2^{-n-1}\lambda$，$\{Q_j^\mu\}$为水平 μ 下的 C-Z 空间分解，已知每个 Q_k^λ 均在某个 Q_j^μ 之中，则在点集 Q_j^μ 与$\{x\in\boldsymbol{R}^n:M^\# f(x)>\lambda/A\}$之间可能有两种关系存在：

(i) $Q_j^\mu\subset\{x\in\boldsymbol{R}^n:M^\# f(x)>\lambda/A\}$；

(ii) $Q_j^\mu\not\subset\{x\in\boldsymbol{R}^n:M^\# f(x)>\lambda/A\}$.

在第(i)种情形，我们有

$$\sum_{\{k:\,Q_k^\lambda\subset Q_j^\mu\}}|Q_k^\lambda|\leqslant|\{x\in\boldsymbol{R}^n:M^\# f(x)>\lambda/A\}|.$$

在第(ii)种情形，由于存在 Q_j^μ 中有点不属于$\{x\in\boldsymbol{R}^n:M^\# f(x)>\lambda/A\}$，故知

$$\frac{1}{|Q_j^\mu|}\int_{Q_j^\mu}|f(x)-f_{Q_j^\mu}|\mathrm{d}x\leqslant\frac{\lambda}{A}.$$

由此以及 $f_{Q_j^\mu}\leqslant 2^n\cdot 2^{-n-1}\lambda=\lambda/2$，可得

$$\sum_{\{k:\, Q_k^\lambda \subset Q_j^\mu\}} \left(\lambda - \frac{\lambda}{2}\right) |Q_k^\lambda| \leqslant \sum_{\{k:\, Q_k^\lambda \subset Q_j^\mu\}} \int_{Q_k^\lambda} |f(x) - f_{Q_j^\mu}| \mathrm{d}x$$

$$\leqslant \int_{Q_j^\mu} |f(x) - f_{Q_j^\mu}| \mathrm{d}x \leqslant \frac{\lambda}{A} |Q_j^\mu|,$$

即

$$\sum_{\{k:\, Q_k^\lambda \subset Q_j^\mu\}} |Q_j^\lambda| \leqslant \frac{\lambda}{A} |Q_j^\mu|.$$

最后，对上述一切 Q_k^λ 与 Q_j^μ 作和，即得所证.

定理 6(Sharp 极大定理) 设 $Mf \in L^{p_0}(\boldsymbol{R}^n)$，$1 \leqslant p_0 < \infty$，则对任意的 p：$p_0 \leqslant p < \infty$，有

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} |Mf(x)|^p \mathrm{d}x \leqslant C \int_{\boldsymbol{R}^n} |M^\# f(x)|^p \mathrm{d}x.$$

证明 (i) 由 $Mf \in L^{p_0}$ 可知 $f \in L^{p_0}$. 对 $\lambda > 0$ 以及 f 作 C-Z 空间分解，记 $t(\lambda)$ 与上引理相同，并注意到

$$\lambda < \frac{1}{|Q_k^\lambda|} \int_{Q_k^\lambda} |f(x)| \mathrm{d}x \leqslant \left\{ \frac{1}{|Q_k^\lambda|} \int_{Q_k^\lambda} |f(x)|^{p_0} \mathrm{d}x \right\}^{1/p_0},$$

可知 $t(\lambda) \leqslant \lambda^{-p_0} \|f\|_{p_0}^{p_0}$. 从而得到

$$I_N \triangleq p \int_0^N \lambda^{p-1} t(\lambda) \mathrm{d}\lambda \leqslant p \|f\|_{p_0}^{p_0} \int_0^N \lambda^{p-p_0-1} \mathrm{d}\lambda$$

$$= \frac{p}{p - p_0} \|f\|_{p_0}^{p_0} N^{p-p_0} < \infty.$$

(ii) 由上引理得($A > 0$ 待定)

$$I_N \leqslant p \int_0^N \lambda^{p-1} \left| \left\{ x \in \boldsymbol{R}^n:\, M^\# f(x) > \frac{\lambda}{A} \right\} \right| \mathrm{d}\lambda$$

$$+ \frac{2p}{A} \int_0^N \lambda^{p-1} t(2^{-n-1}\lambda) \mathrm{d}\lambda$$

$$= p \int_0^N \lambda^{p-1} \left| \left\{ x \in \boldsymbol{R}^n:\, M^\# f(x) > \frac{\lambda}{A} \right\} \right| \mathrm{d}\lambda$$

$$+ \frac{2p}{A} 2^{(n+1)p} \int_0^{2^{-n-1}N} \lambda^{p-1} t(\lambda) \mathrm{d}\lambda$$

$$\leqslant p\int_0^N \lambda^{p-1}\left|\left\{x\in \boldsymbol{R}^n:\ M^\# f(x)>\frac{\lambda}{A}\right\}\right|\mathrm{d}\lambda$$

$$+\frac{2p}{A}2^{(n+1)p}I_N.$$

取 $A=2(2p\cdot 2^{(n+1)p})$，即知

$$I_N\leqslant 2p\int_0^N \lambda^{p-1}\left|\left\{x\in \boldsymbol{R}^n:\ M^\# f(x)>\frac{\lambda}{A}\right\}\right|\mathrm{d}\lambda.$$

在上式中令 $N\to\infty$，并注意到第四章中的结论：

$$|\{x\in \boldsymbol{R}^n:\ Mf(x)>7^n\lambda\}|\leqslant 2^n t(\lambda),$$

我们有

$$\|Mf\|_p^p=p\int_0^\infty \lambda^{p-1}|\{x\in \boldsymbol{R}^n:\ Mf(x)>\lambda\}|\mathrm{d}\lambda$$

$$=p\cdot 7^{np}2^n\int_0^\infty \lambda^{p-1}t(\lambda)\mathrm{d}\lambda$$

$$\leqslant C\cdot p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\left|\left\{x\in \boldsymbol{R}^n:\ M^\# f(x)>\frac{\lambda}{A}\right\}\right|\mathrm{d}\lambda$$

$$=C\|M^\# f\|_p^p,\quad C=2^{n+1}\cdot 7^{np}.$$

注 上述定理指出：在 $f\in L^{p_0}(\boldsymbol{R}^n)$，$1\leqslant p_0<\infty$ 的条件下，$f\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$ 与 $M^\# f\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$，$p_0\leqslant p<\infty$ 是等价的. 但在 $p=\infty$ 时情形则不同，此时 $Mf\in L^\infty$ 等价于 $f\in L^\infty$，而 $M^\# f\in L^\infty$ 等价于 $f\in$ BMO. 从这一意义上讲，空间 BMO 是 L^∞ 的一种替代物，而算子 $f\to M^\# f$ 就可以统一地来处理 L^p 与 BMO 之间的问题. 实际上，有许多经典的算子是从 L^p 到 BMO 有界的，因此下述结果就在这里显出它的重要性了.

定理 7（L^p 与 BMO 之间的算子内插） 设 T 是 (p,p) 型的线性算子，$1<p<\infty$，而且从 $L^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ 到 BMO 也是有界的，则 T 是 (q,q) 型，$p<q<\infty$.

证明 定义算子 T_1 如下：

$$T_1 f(x)=M^\#(Tf)(x).$$

(i) 若 $f\in L^\infty$，则由假设知 $Tf\in$ BMO. 因此可得 $M^\#(Tf)\in$

L^∞，即 T_1 是 (∞,∞) 型.

(ii) 若 $f\in L^p$，则由假设知 $Tf\in L^p$. 从而 $M(Tf)\in L^p$，当然 $M^\#(Tf)\in L^p$. 这说明了 T_1 是 (p,p) 型.

根据内插定理可知 T_1 是 (q,q) 型，$p<q<\infty$. 也就是说：若 $f\in L^q$，则 $M^\#(Tf)\in L^q$. 但由 Sharp 极大定理又得

$$\|Tf\|_q\leqslant\|M(Tf)\|_q\leqslant C\|M^\#(Tf)\|_q,$$

故得 $Tf\in L^q$，即 T 是 (q,q) 型.

§4 C-Z 奇异积分算子的 (L^∞,BMO) 型

定理 8 设 $K\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$，且满足

(i) $|\widehat{K}(x)|\leqslant C_3$, $x\in\boldsymbol{R}^n$;

(ii) 对一切 $y\neq 0$，有

$$\int_{|x|\geqslant 2|y|}|K(x-y)-K(x)|\mathrm{d}x\leqslant C_3,$$

则 $Tf(x)=K*f(x)$ 满足

$$\|Tf\|_*\leqslant C\|f\|_\infty,$$

其中 C 只与 n,C_3 有关.

注 若应用 Young 不等式，本定理结论对 $C=\|K\|_1$ 总是成立的. 因此，这里的关键就是常数 C 与 $\|K\|_1$ 无关，从而导致后继定理成立.

证明 设 $\|f\|_\infty\leqslant 1$，我们取定 $Q=Q(0,r)$ 以及 $B=B(0,2\sqrt{n}\,r)$，并令 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$，其中

$$f_1(x)=f(x)\chi_B(x),\quad f_2(x)=f(x)\chi_{\boldsymbol{R}^n\setminus B}(x).$$

又记

$$Tf(x)=K*f_1(x)+K*f_2(x)=u_1(x)+u_2(x).$$

由 $f_1\in L^2(\boldsymbol{R}^n)$ 可知

$$\|u_1\|_2=\|K*f_1\|_2=\|\hat{K}\cdot\hat{f}\|_2\leqslant C_3\|f_1\|_2\leqslant C_3C_n|Q|^{1/2},$$

$$\int_Q |u_1(x)|\mathrm{d}x \leqslant \|u_1\|_2 |Q|^{1/2} \leqslant C_3 C_n |Q|.$$

另一方面，取

$$a_Q = \int_{\mathbf{R}^n} K(-y) f_2(y)\mathrm{d}y,$$

则有 $$u_2(x) - a_Q = \int_{\mathbf{R}^n} [K(x-y) - K(-y)] f_2(y)\mathrm{d}y.$$

从而根据条件(ii)得到

$$\int_Q |u_2(x) - a_Q|\mathrm{d}x \leqslant \int_Q \left\{ \int_{\mathbf{R}^n \setminus B} |K(x-y) - K(-y)|\mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x$$

$$\leqslant |Q| \int_{|y|>2|x|} |K(x-y) - K(-y)|\mathrm{d}y \leqslant C_3 |Q|.$$

合并上述估计，我们有

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |Tf(x) - a_Q| \mathrm{d}x$$

$$\leqslant \frac{1}{|Q|} \int_Q |u_1(x)|\mathrm{d}x + \frac{1}{|Q|} \int_Q |u_2(x) - a_Q|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C_3(C_n + 1).$$

由此即得所证.

定理 9 设 $K(x)$是C-Z 核且满足第五章§5中所给出的条件(Ⅳ)，记

$$K_\varepsilon(x) = \begin{cases} K(x), & |x| > \varepsilon, \\ 0, & |x| \leqslant \varepsilon, \end{cases}$$

$$Tf(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbf{R}^n} [K_\varepsilon(x-y) - K_1(-y)] f(y)\mathrm{d}y, \tag{4}$$

则$\|Tf\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant C\|f\|_\infty$.

证明 首先，因为 $K(x)$满足(Ⅳ)，所以(4)中的积分对每个 $\varepsilon>0$ 以及 x 都是绝对收敛的. 其次，对于具有紧支集的 $f \in L^\infty(\mathbf{R}^n)$，(4)中之积分与 $T_\varepsilon f(x)$只差一个常数. 记(4)中的积分为 $u_\varepsilon(x)$，则由 $u_\varepsilon(x) - u_N(x) = K_{\varepsilon,N} * f(x)$可知，在有限方体 Q 上，当 $\varepsilon \to 0$时，u_ε 在 L^2的意义下极限存在以及点态极限存在，记为

$u(x)$.

由于对 $0<\varepsilon<N<\infty$，$K_{\varepsilon,N}\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$，故根据上述定理（注：$\widehat{K_{\varepsilon,N}}(x)$是一致有界的，且 $K_{\varepsilon,N}$满足 Hörmander 条件.）得到

$$\|K_{\varepsilon,N}*f\|_{\mathrm{BMO}}\leqslant C\|f\|_{\infty}.$$

从而，对每一个方体 Q，有

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q|u_\varepsilon(x)-u_N(x)-(u_\varepsilon)_Q+(u_N)_Q|\mathrm{d}x\leqslant C\|f\|_{\infty}. \tag{5}$$

令 $$C_\varepsilon=\int_{\boldsymbol{R}^n}[K_\varepsilon(-y)-K_1(-y)]\mathrm{d}y,$$

则由条件(Ⅳ)可知，当 $\eta\to\infty$时，对 $x\in Q$ 一致地有

$$u_N-C_N\to 0,\quad (u_N)_Q-C_N\to 0.$$

因此，将(5)式改写为

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q|u_\varepsilon(x)-[u_N(x)-c_N]-(u_\varepsilon)_Q+(u_N)_Q-C_N|\mathrm{d}x$$
$$\leqslant C\|f\|_{\infty},$$

并令 $N\to\infty$，可得

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q|u_\varepsilon(x)-(u_\varepsilon)_Q|\mathrm{d}x\leqslant C\|f\|_{\infty}.$$

现在再令 $\varepsilon\to 0$，我们有

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q|u(x)-u_Q|\mathrm{d}x\leqslant C\|f\|_{\infty},$$

其中 a_Q 是与 Q 有关的一个常数. 证毕.

注 设 $f(x)=\mathrm{sgn}x\in L^\infty(\boldsymbol{R}^1)$，它在 $\boldsymbol{R}^1$上的 Hilbert 变换为

$$Hf(x)=\frac{2}{\pi}\ln|x|^{-1}\in\mathrm{BMO},$$

但 $Hf\overline{\in}L^\infty(\boldsymbol{R}^1)$.

§5 BMO 与 A_p 权

引理 10 设 $\varphi\in L^1_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^n)$，$1<p<\infty$，则 $e^\varphi\in A_p$ 当且仅当下述

条件满足：

存在常数 C，对一切方体 Q，有

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q e^{[\varphi(x)-\varphi_Q]}dx \leqslant C,$$

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q e^{-[\varphi(x)-\varphi_Q]/(p-1)}dx \leqslant C.$$

证明 充分性可从下式得到：

$$\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q e^{\varphi(x)}dx\right\}\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q [e^{\varphi(x)}]^{-1/(p-1)}dx\right\}^{p-1}$$

$$=\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q e^{[\varphi(x)-\varphi_Q]}dx\right\}$$

$$\times\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q e^{-[\varphi(x)-\varphi_Q]/(p-1)}dx\right\}^{p-1}.$$

现在证明必要性：设 $e^{\varphi}\in A_p$，则有

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q e^{[\varphi(x)-\varphi_Q]}dx = e^{-\varphi_Q}\frac{1}{|Q|}\int_Q e^{\varphi(x)}dx$$

$$=\{e^{-\varphi_Q/(p-1)}\}^{p-1}\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q e^{\varphi(x)}dx\right\}$$

$$\leqslant\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q e^{-\varphi(x)/(p-1)}dx\right\}^{p-1}\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q e^{\varphi(x)}dx\right\}\leqslant C.$$

同样地，有

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q e^{-[\varphi(x)-\varphi_Q]/(p-1)}dx=\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q e^{-\varphi(x)/(p-1)}dx\right\}(e^{\varphi_Q})^{\frac{1}{p-1}}$$

$$\leqslant\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q e^{-\varphi(x)/(p-1)}dx\right\}\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q e^{\varphi(x)}dx\right\}^{1/(p-1)}\leqslant C.$$

推论 1 设 $\varphi\in L^1_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^n)$，则 $e^{\varphi}\in A_2$ 当且仅当存在常数 C，使得对每个方体 Q，有

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q e^{|\varphi(x)-\varphi_Q|}dx \leqslant C.$$

推论 2 $w\in A_\infty$，则 $\ln w\in \mathrm{BMO}$.

证明 令 $\varphi(x)=\ln w(x)$，即 $w=e^{\varphi}$. 若 $w\in A_2$，则由推论1知

$$\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}} = \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q |\varphi(x) - \varphi_Q| \mathrm{d}x$$
$$\leqslant \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q \mathrm{e}^{|\varphi(x)-\varphi_Q|}\mathrm{d}x \leqslant C.$$

这说明 $\varphi=\ln w \in \mathrm{BMO}$.

一般地，$w\in A_\infty$，则存在 p：$1\leqslant p<\infty$，使得 $w\in A_p$. 若 $p\leqslant 2$，则 $w\in A_2$；从而由上知结论成立；若 $p>2$，则考察 $w^{-1/(p-1)}\in A_{p'}\subset A_2$，可知

$$\ln w^{-1/(p-1)} = -\frac{1}{p-1}\ln w \in \mathrm{BMO}.$$

推论 3 $\mathrm{BMO}=\{\alpha\ln w: \alpha\geqslant 0, w\in A_p\}, 1<p\leqslant\infty$.

证明 若 $p=2$，显然成立. 从而 $p\geqslant 2$时是成立的. 对于$1<p<2$，若 $\varphi\in\mathrm{BMO}$，则记

$$\varphi = \alpha\ln w, \quad \alpha\geqslant 0,\ w\in A_2.$$

根据 A_p 权的性质，可知 $\sigma=w^{p-1}\in A_p$. 因此，

$$\varphi = \alpha\ln w = \alpha\ln\sigma^{1/(p-1)} = (\alpha/(p-1))\ln\sigma.$$

习　题

1. 设 $f\in L^\infty(\boldsymbol{R}^n)$，证明

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant C\cdot\sup_Q\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q f^2(x)\mathrm{d}x\right\}^{1/2}.$$

2. 设 $C\in\boldsymbol{R}^1$，记$(f\vee C)(x)=\max\{f(x),C\}$，　$(f\wedge C)(x)=\min\{f(x),C\}$，证明

$$M^\#(f\vee C)(x)\leqslant (3/2)\cdot M^\# f(x),$$
$$M^\#(f\wedge C)(x)\leqslant (3/2)M^\# f(x).$$

3. 证明：对 $\varepsilon>0$，存在 $C(\varepsilon)>0$，使得对每个 $Q_0=Q(x_0,\delta)$以及 $f\in\mathrm{BMO}(\boldsymbol{R}^n)$，有

$$\int_{\boldsymbol{R}^n}\frac{|f(x)-f_{Q_0}|}{\delta^{n+\varepsilon}+|x-x_0|^{n+\varepsilon}}\mathrm{d}x \leqslant \frac{C(\varepsilon)}{\delta^\varepsilon}\|f\|_{\mathrm{BMO}}.$$

4. 设 $0<\alpha<n$，$p=1/\alpha$，证明分数次积分算子 I_α 满足

$$\|I_\alpha f\|_{\mathrm{BMO}}\leqslant C\|f\|_p.$$

提示：只需指出 $M^\#(I_\alpha f)(x)\leqslant CM_\alpha f(x)$. 对任一 $Q=Q(x,r)$，作 $f=f\chi_{2Q}+f\chi_{\boldsymbol{R}^n\setminus 2Q}=f_1+f_2$，并注意 $|(I_\alpha f_1)_Q|\leqslant CM_\alpha f(x)$ 及

$$|I_\alpha f_2(y)-I_\alpha f_2(t)|\leqslant CM_\alpha f(x),\quad t\in Q,$$

其中的积分值估计均需分解积分区域.

5. 设 $f\in\mathrm{BMO}$，而 $\psi(x)$ 满足

$$|\psi(x)|\leqslant\frac{C}{(1+|x|)^{n+\alpha}},\qquad \int_{\boldsymbol{R}^n}\psi(x)\mathrm{d}x=0,$$

证明 $|\psi_t * f(x)|\leqslant C\|f\|_{\mathrm{BMO}}$，$t>0$.

提示：令 $Q=Q(x,t)$ 并作

$$f=(f-f_Q)\chi_Q+(f-f_Q)\chi_{\boldsymbol{R}^n\setminus Q}+f_Q.$$

6. 设 $f\in L^1\cap\mathrm{BMO}$，证明 $f\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$.

提示：应用 C-Z 分解以及 J-N 不等式.

7. 设 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^n)$. 若存在 $A>0$，使得对一切方体 Q，有 $\||f|\chi_Q\|_{\mathrm{BMO}}\leqslant A$，证明 $f\in L^\infty$.

提示：只需指出：对任意的 Q，有 $\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant 4A$. 为此，考察 $g(x)=|f(x)|\chi_Q(x)$，应用题设计算 g_{Q_1}，其中 $Q_1\supset Q$ 且 $|Q_1|=2|Q|$.

参 考 文 献

[1] F. John and L. Nirenberg, On functions of bounded mean oscillation, *Comm. Pure Appl. Math.*, **14**(1961), 415～426.

[2] U. Neri, Some properties of functions with bounded mean oscillation, *Studia Math.*, **61**(1977), 63～75.

[3] C. Fefferman and E. M. Stein, H^p spaces of several variables, *Acta Math.*, **129**(1972), 137～193.

第八章　向量值不等式与 Littlewood-Paley 理论

以上各章讨论的都是关于取纯量值的算子有界性不等式，实际上还可以把它们推广到取向量函数值的情形。这一工作不仅本身有意义，而且还可应用于其他课题的研究。例如在 Fourier 分析中出现的非线性算子，其中大部分都可以看成其值域为向量值函数的线性算子，即所谓可线性化算子。因此，在本章末尾将从这一角度来介绍 Littlewood-Paley 平方积分函数理论，以及在乘子理论、Carleson 测度上的应用。（进一步的应用，可见参考文献[8]。）

作为先导，让我们来看一些例子。设 T 是(p,p)型，那么最典型的向量值不等式的推广就是

$$\Big\|\Big(\sum_{i=1}^{+\infty}|Tf_i(\cdot)|^r\Big)^{1/r}\Big\|_p\leqslant C\Big\|\Big(\sum_{i=1}^{+\infty}|f_i(\cdot)|^r\Big)^{1/r}\Big\|_p.$$

若记 $f(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_i(x),\cdots)$，而定义

$$\tilde{T}f(x)=(Tf_1(x),Tf_2(x),\cdots,Tf_i(x),\cdots),$$

则上述不等式可视为算子 $\tilde{T}$（取值为 l^r 空间）的不等式

$$\|\,\|\tilde{T}f(\cdot)\|_{l^r}\|_p\leqslant C\|\,\|f(\cdot)\|_{l^r}\|_p.$$

特别 $r=2$的情形是人们最先进行讨论的。

早在1939年，Marcinkiewicz 和 Zygmund 就指出（[1]）：若线性算子 T 在 $L^p(\boldsymbol{R}^n)$上有界，则有

$$\Big\|\Big(\sum_{i=1}^{+\infty}|Tf_i(\cdot)|^2\Big)^{1/2}\Big\|_p\leqslant\|T\|\Big\|\Big(\sum_{i=1}^{+\infty}|f_i(\cdot)|^2\Big)^{1/2}\Big\|_p.$$

实际上，只需证明上述不等式对充分大的 N，$f_i=0(i\geqslant N)$成立即可。记 Σ 为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的单位球面，$f(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_N(x))$，$Tf(x)=(Tf_1(x),\cdots,Tf_N(x))$，则由 T 的线性性质，可知 $T(y'\cdot f(x))=y'\cdot Tf(x)$，其中 y'是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的单位向量。从而得

$$\int_{\mathbf{R}^n}|y'\cdot Tf(x)|^p\mathrm{d}x\leqslant\|T\|^p\int_{\mathbf{R}^n}|y'\cdot f(x)|^p\mathrm{d}x,\quad y'\in\Sigma.\tag{1}$$

现在利用公式：对 $g\in\mathbf{R}^n\setminus\{0\}$，有

$$\int_{\Sigma}|y'\cdot g(x)|^p\mathrm{d}y'=C\|g\|_{l^2}^p.$$

(注意，$C\neq0$且与 g 无关；可能与 N 及 p 有关，但这没有关系，因为 C 将消去.)

因此，对(1)式两端在 Σ 上对 y' 作积分，可知

$$C\int_{\mathbf{R}^n}\|Tf(x)\|_{l^2}^p\mathrm{d}x\leqslant C\|T\|^p\int_{\mathbf{R}^n}\|f(x)\|_{l^2}^p\mathrm{d}x,$$

即得所证.

注 在上述向量值不等式中，是同一个算子 T 对各个分量 f_i 进行运算的，从而自然会考虑算子族 $T=(T_1,T_2,\cdots,T_i,\cdots)$的情形. 也就是说，若有一线性算子列$\{T_i\}$，满足

$$\|T_if_i\|_p\leqslant C\|f_i\|_p\quad(i=1,2,\cdots),$$

我们问：是否成立不等式

$$\left\|\left(\sum_{i=1}^{+\infty}|T_if_i(\cdot)|^2\right)^{1/2}\right\|_p\leqslant C\left\|\left(\sum_{i=1}^{+\infty}|f_i(\cdot)|^2\right)^{1/2}\right\|_p.$$

当然，$p=2$是明显成立的，而 $p\neq2$的情况就要复杂一些，请看下面两例.

例 1 定义 $L^p(\mathbf{R}^1)$中的平移算子

$$T_if(x)=f(x-i),\quad i=1,2,\cdots.$$

如果上述不等式对某个 $p>2$成立，那么我们把它应用于 $f_i(x)=\chi_{[-i,1-i]}(x)(i=1,2,\cdots,N)$，可得到

$$\|(N\chi_{[0,1]}(\cdot))^{1/2}\|_p\leqslant C\left\|\left(\sum_{i=1}^{+\infty}|f_i(\cdot)|^2\right)^{1/2}\right\|_p.$$

由此知

$$N^{1/2}\leqslant CN^{1/p},\quad p>2.$$

但这对充分大的 N 是不可能的.

另一方面，如果不等式对某个 $p<2$成立，那么我们取 $f_1(x)=$

$f_2(x)=\cdots=f_N(x)=\chi_{[0,1]}(x)$，使得 $T_i f_i(x)=\chi_{[i,i+1]}(x)$，而由此将得到

$$N^{1/p}\leqslant CN^{1/2},\quad p<2.$$

这对充分大的 N 也是不真的.

例 2 对于 $\boldsymbol{R}^n$ 中的长方体 P，记 S_P 是由符号 $\chi_P(x)$ 定义的部分和算子(乘子)：

$$(S_P f)^\wedge(\xi)=\chi_P(\xi)\hat{f}(\xi),\quad \xi\in\boldsymbol{R}^n,$$

则有

$$\left\|\left(\sum_{j=1}^{+\infty}|S_{P_j}f_j(\cdot)|^2\right)^{1/2}\right\|_p\leqslant C\left\|\left(\sum_{j=1}^{+\infty}|f_j(\cdot)|^2\right)^{1/2}\right\|_p,$$

其中$\{P_j\}$是 $\boldsymbol{R}^n$ 任意的长方体列.

证明 对 $\boldsymbol{R}^n$ 中的向量 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，记

$$P_a=[a_1,\infty)\times[a_2,\infty)\times\cdots\times[a_n,\infty).$$

因为 Fourier 变换等式

$$(S_{P_0}(\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}a\cdot x}f(x)))^\wedge(\xi)=\chi_{P_a}(\xi+a)\hat{f}(\xi+a)$$

成立，所以有

$$S_{P_a}f(x)=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}a\cdot x}\cdot S_{P_0}(\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}a\cdot y}f(y))(x).$$

从而问题转化为考虑 S_{P_0}. 显然有

$$(S_{P_0}f)^\wedge(\xi)=\chi_{[0,\infty)}(\xi_1)\cdots\chi_{[0,\infty)}(\xi_n)\hat{f}(\xi),\quad \xi\in\boldsymbol{R}^n.$$

若记 H_k 是 $e_k=(0,0,\cdots,0,\overset{(k)}{1},0,\cdots,0)$方向轴上的 Hilbert 变换，则

$$((I+\mathrm{i}H_k)f)^\wedge(\xi_k)=(1+\mathrm{sgn}\xi_k)\hat{f}(\xi_k)=2\chi_{[0,\infty)}(\xi_k)\hat{f}(\xi_k),$$

其中 i 是虚数单位，$f(\xi_k)$表示 $f(x_1,\cdots,x_{k-1},\xi_k,x_{k+1},\cdots,x_n)$. 因此，$S_{P_0}$又可写成

$$S_{P_0}=2^{-n}(I+\mathrm{i}H_1)\circ(I+\mathrm{i}H_2)\circ\cdots\circ(I+\mathrm{i}H_n).$$

现在，假定 $P_j=(a_1^{(j)},\infty)\times\cdots\times(a_n^{(j)},\infty)$，其中，$a^{(j)}=(a_1^{(j)},\cdots,a_n^{(j)})\in\boldsymbol{R}^n$，则由于 S_{P_0}是在 $L^p(\boldsymbol{R}^n)$上有界的线性算子，故根据

前面指出的 Marcinkiewicz 和 Zygmund 的结果，得到

$$\left\|\left(\sum_{j=1}^{+\infty}|S_{P_j}f_j(\cdot)|^2\right)^{1/2}\right\|_p$$

$$=\left\|\left(\sum_{j=1}^{+\infty}|S_{P_0}(e^{-2\pi i a^{(j)}\cdot y}f_j(y))(\cdot)|^2\right)^{1/2}\right\|_p$$

$$\leqslant C\left\|\left(\sum_{j=1}^{+\infty}|f_j(\cdot)|^2\right)^{1/2}\right\|_p.$$

如果 $P_j=(a_1^{(j)},b_1^{(j)})\times\cdots\times(a_n^{(j)},b_n^{(j)})$，那么令

$$P_j^{(a)}=(a_1^{(j)},\infty)\times\cdots\times(a_n^{(j)},\infty),$$

$$P_j^{(b)}=(b_1^{(j)},\infty)\times\cdots\times(b_n^{(j)},\infty),$$

我们由 Fourier 变换关系，易知

$$S_{P_j}f=S_{P_j^{(a)}}f-S_{P_j^{(b)}}f,$$

从而分别归结为上述情形. 证毕.

§1 加权模不等式与向量值不等式

我们曾经指出，H-L 极大算子 M 与 C-Z 算子 T 满足下述不等式：$1<p<\infty$，

$$\int_{\mathbf{R}^n}[Mf(x)]^p\varphi(x)\mathrm{d}x\leqslant C_p\int_{\mathbf{R}^n}|f(x)|^pM\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_{\mathbf{R}^n}|Tf(x)|^pw(x)\mathrm{d}x\leqslant C_{p,s}\int_{\mathbf{R}^n}|f(x)|^pA_s(w)(x)\mathrm{d}x,$$

其中，$A_s(w)(x)=[M(w^s)(x)]^{1/s}$，$s>1$.

本节将利用这些不等式来推导 M 与 T 的向量值不等式. 无疑，这是十分有趣的结果. 此外，我们还希望通过其中的详细演算，读者能进一步了解到处理算子数值函数不等式与向量值不等式的异同，这对后文中某些结论的简要介绍的理解将有所助益.

定理 1(Fefferman-Stein)([2]) 设有定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的函数列 $f(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_k(x),\cdots)$，相应地考虑序列 $Mf(x)=$

$(Mf_1(x), Mf_2(x), \cdots, Mf_k(x), \cdots)$，则

$$\| \| Mf_k(\cdot) \|_{l^r} \|_p \leqslant C \| \| f_k(\cdot) \|_{l^r} \|_p, \quad 1 < r, p < \infty, \tag{2}$$

其中 $C = C(r,p)$ 与 f 无关. 还存在 $C = C(r,1)$，使得

$$\lambda |\{x \in \boldsymbol{R}^n: \| Mf_k(\cdot) \|_{l^r} > \lambda\}| \leqslant C \| \| f_k(\cdot) \|_{l^r} \|_1, \tag{3}$$

$$\lambda > 0, 1 < r < \infty.$$

证明 为简便计，记 $F(x) = \| f_k \|_{l^r} \triangleq \| f_k(x) \|_{l^r}$，$\widetilde{M}F(x) = \| Mf_k \|_{l^r} \triangleq \| Mf_k(x) \|_{l^r}$，下面分三种情况讨论：

(i) $p = r$. 此时，(2)式立即由下式得到

$$\| \widetilde{M}F \|_r^r = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\boldsymbol{R}^n} [Mf_k(x)]^r \mathrm{d}x \leqslant C \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\boldsymbol{R}^n} |f_k(x)|^r \mathrm{d}x$$

$$= C \int_{\boldsymbol{R}^n} |F(x)|^r \mathrm{d}x = C \| F \|_r^r.$$

(ii) $p > r$. 首先有

$$\| \widetilde{M}F \|_p = \| (\widetilde{M}F)^r \|_{p/r}^{1/r} = \sup_{\varphi} \left| \int_{\boldsymbol{R}^n} [\widetilde{M}F(x)]^r \varphi(x) \mathrm{d}x \right|^{1/r}, \tag{4}$$

其中 $\varphi \in L^{(p/r)'}(\boldsymbol{R}^n)$ 且其模 $\leqslant 1$. 利用第四章定理2后面的应用例，可知

$$\text{(4) 中积分} \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{\boldsymbol{R}^n} [Mf_k(x)]^r |\varphi(x)| \mathrm{d}x$$

$$\leqslant C \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{\boldsymbol{R}^n} |f_k(x)|^r M\varphi(x) \mathrm{d}x$$

$$= C \int_{\boldsymbol{R}^n} F(x)^r M\varphi(x) \mathrm{d}x$$

$$\leqslant C \| F^r \|_{p/r} \| M\varphi \|_{(p/r)'}$$

$$\leqslant C \| F \|_p^r \| \varphi \|_{(p/r)'} \leqslant C \| F \|_p^r.$$

由此即得所证.

(iii) $p < r$. 此时，如果我们能够证得(3)式成立，那么根据 Marcinkiewicz 内插定理，就可知(2)成立.

为此，对 $\lambda > 0$ 作 F 的 C-Z 分解，得 $\Omega = \bigcup_j Q_j$，且有

$$|\Omega| \leqslant \|F\|_1/\lambda; \quad F(x) \leqslant \lambda,\ x \in \boldsymbol{R}^n \setminus \Omega;$$

$$\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} F(x)\mathrm{d}x \leqslant 2^n\lambda, \quad j = 1,2,\cdots.$$

令 $f_k = g_k + h_k$，其中

$$g_k(x) = f_k(x)\chi_{\boldsymbol{R}^n\setminus\Omega}(x), \quad h_k(x) = f_k(x)\chi_\Omega(x).$$

又记 $G(x) = \|g_k(x)\|_{l^r}$，$\widetilde{M}G(x) = \|Mg_k(x)\|_{l^r}$，同样地，对 $\{h_k\}$ 有 $H(x)$ 与 $\widetilde{M}H(x)$. 由于 $Mf_k(x) \leqslant Mg_k(x) + Mh_k(x)$，故只需证明 $\widetilde{M}G(x)$，$\widetilde{M}H(x)$ 的弱 L^1 模 $\leqslant C\|F\|_1$ 即可.

为估计 $\widetilde{M}G$，对 $r>1$，由(2)知 $\|\widetilde{M}G\|_r \leqslant C\|G\|_r$，又由分解的性质知 $\|G\|_r^r \leqslant C\lambda^{r-1}\|F\|_1$. 从而有

$$\lambda^r |\{x \in \boldsymbol{R}^n: \widetilde{M}G(x) > \lambda\}| \leqslant C\lambda^{r-1}\|F\|_1.$$

即得所证.

为估计 $\widetilde{M}H$，首先令

$$\tilde{f}_k(x) = \sum_j \left\{ \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f_k(y)\mathrm{d}y \right\}\chi_{Q_j}(y),$$

而记 $\widetilde{F}(x)$，$\widetilde{M}\widetilde{F}(x)$ 与 $\tilde{f}_k(x)$ 的关系如上面所示. 注意到 $\mathrm{supp}\widetilde{F} \subset \Omega$，对 $x \in Q_j$，根据 Minkowski 不等式可知

$$\widetilde{F}(x) \leqslant \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} \|f_k(y)\|_{l^r}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} F(y)\mathrm{d}y \leqslant 2^n\lambda.$$

从而有 $\|\widetilde{F}\|_r^r \leqslant C\lambda^r|\Omega| \leqslant C\lambda^{r-1}\|F\|_1$. 与前面的推理一样，由此又可得

$$\lambda|\{x \in \boldsymbol{R}^n: \widetilde{F}(x) > \lambda\}| \leqslant C\|F\|_1.$$

下面的问题只需指出：若记 $\widetilde{\Omega} = \bigcup_j (2nQ_j)$，则对一切 k 有

$$Mh_k(x) \leqslant CM\tilde{f}_k(x), \quad \text{a.e. } x \in \boldsymbol{R}^n\setminus\widetilde{\Omega}. \tag{5}$$

为此，取定方体 Q，$x \in Q$，并记

$$J = \{j: Q \cap Q_j \neq \varnothing\},$$

我们有

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |h_k(y)|\mathrm{d}y = \frac{1}{|Q|}\sum_{j\in J}\int_{Q\cap Q_j}|h_k(y)|\mathrm{d}y.$$

此时，因为 $x\in Q\setminus\tilde{Q}\subset Q\setminus 2nQ_j$，所以 $Q_j\subset 2nQ$. 于是上式右端不超过

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q|}\sum_{j\in J}\int_{Q_j}|h_k(y)|\mathrm{d}y &\leqslant \frac{1}{|Q|}\sum_{j\in J}\int_{Q_j}|\tilde{f}_k(y)|\mathrm{d}y\\ &\leqslant \frac{1}{|Q|}\int_{2nQ}|\tilde{f}_k(y)|\mathrm{d}y = \frac{C}{|2nQ|}\int_{2nQ}|\tilde{f}_k(y)|\mathrm{d}y\\ &\leqslant CM\tilde{f}_k(x).\end{aligned}$$

由于 Q 是任意给定的，故(5)式成立. 证毕.

注 1980年，Anderson 和 John 给出了上述定理的加权形式(见文献[3])：

(i) 设 $1\leqslant p<\infty$，则不等式

$$\lambda^p w(\{x\in \boldsymbol{R}^n:\ \|Mf(x)\|_{l^r}>\lambda\})\leqslant C\|\|f(\cdot)\|_{l^r}\|^p_{L^p(\boldsymbol{R}^n,w\mathrm{d}x)}$$

成立当且仅当 $w\in A_p$.

(ii) 设 $1<p<\infty$，则不等式

$$\|\|Mf(\cdot)\|_{l^r}\|_{L^p(\boldsymbol{R}^n,w\mathrm{d}x)}\leqslant C\|\|f(\cdot)\|_{l^r}\|_{L^p(\boldsymbol{R}^n,w\mathrm{d}x)}$$

成立当且仅当 $w\in A_p$.

定理 2(Córdoba-Fefferman，[4]) 设 $\{K_j(x)\}$ 是 C-Z 核序列，且它们的 C-Z 常数是一致的，$\{T_j\}$ 是相应的 C-Z 奇异积分算子序列，则

$$\|\|T_jf_j(\cdot)\|_{l^r}\|_p\leqslant C\|\|f_j(\cdot)\|_{l^r}\|_p,\quad 1<r,p<\infty,\tag{6}$$

其中 $C=C(r,p)$ 与 $f(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_j(x),\cdots)$ 无关(参见[2]).

证明 应用对偶原理，可知(6)式对指标 p,r 成立等价于对指标 p',r' 成立，其中

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1,\quad \frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1,$$

从而不妨假定 $p\geqslant r$.

当 $p=r$ 时，此时(6)式实际上就是第五章定理10在无穷序列情形的一个简单推广.

当 $p>r$ 时，此时(6)式左端为

$$\sup_{g}\left|\int_{\mathbf{R}^n}\left(\sum_{j=1}^{+\infty}|T_jf_j(x)|^r\right)g(x)\mathrm{d}x\right|^{1/r},$$

其中 $g\in C_c^{(\infty)}(\mathbf{R}^n)$ 且 $\|g\|_{(p/r)'}\leqslant 1$. 取 s：$1<s<(p/r)'$，根据第六章§3中第1小段中的例，上式积分不超过

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{+\infty}\int_{\mathbf{R}^n}|T_jf_j(x)|^r|g(x)|\mathrm{d}x&\leqslant C\sum_{j=1}^{+\infty}\int_{\mathbf{R}^n}|f_j(x)|^rA_s(g)(x)\mathrm{d}x\\&\leqslant C\|\|f_j(\cdot)\|_{l^r}\|_p^r\|A_s(g)\|_{\left(\frac{p}{r}\right)'}\\&\leqslant C\|\|f_j(\cdot)\|_{l^r}\|_p^r\|g\|_{\left(\frac{p}{r}\right)'}.\end{aligned}$$

即得所证.

注 上述两例中的权函数均属 A_1 权，关于 $A_r(r>1)$ 权，还有下述结论：

设 $\{T_j\}$ 是可线性化算子(即存在线性算子 $\tilde{T}$，它取值于某个 Banach 空间 B，使得 $|Tf(x)|=\|\tilde{T}f(x)\|_B$.)列，对某个固定值 $r>1$，以及每一个 $w\in A_r$，这些算子在 $L^r(\mathbf{R}^n,w)$ 上是一致有界的，即其中常数只与 w 的 A_r 的权常数有关，则对一切 $1<p,q<\infty$，有

$$\left\|\left(\sum_{j=1}^{+\infty}|T_jf_j(\cdot)|^p\right)^{1/p}\right\|_q\leqslant C\left\|\left(\sum_{j=1}^{+\infty}|f_j(\cdot)|^p\right)^{1/p}\right\|_q.$$

(见[5])

§2 向量值奇异积分算子一般理论简介

有一种重要而有意义的向量值算子的情形，并非来自如前几节所述的算子 (p,q) 型的直接推广，如本节将要介绍的向量值奇异积分，它的卷积核本身是取值于算子的，而积分就是向量值. 不

过在这里，我们不准备详细地展开，而只作一些必要的陈述，因为这些内容是不难理解的，而且就我们的目的而言，已经足够了.

设 H 是一个 Hilbert 空间，其中内积记为 $(\cdot,\cdot)$，模记为 $\|\cdot\|_H=(\cdot,\cdot)^{1/2}$. 对一个定义在 $\boldsymbol{R}^n$ 上且取值于 H 的函数 f，如果数值函数 $(f(x),h)$，$h\in H$，是勒贝格可测的，则称 f 是可测的. 对于可测函数 f，记满足

$$\|\|f(\cdot)\|_H\|_p=\left\{\int_{\boldsymbol{R}^n}\|f(x)\|_H^p\mathrm{d}x\right\}^{1/p}<\infty,\ 1\leqslant p<\infty$$

的 f 之全体为 $L^p(\boldsymbol{R}^n,H)$. 同理，$L^\infty(\boldsymbol{R}^n,H)$ 为满足

$$\|\|f(\cdot)\|_H\|_\infty=\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\boldsymbol{R}^n}\|f(x)\|_H<\infty$$

之全体 f.

设 H_1，H_2 是两个 Hilbert 空间，记从 H_1 到 H_2 的一切有界线性算子的全体为 $B(H_1,H_2)$，它是一个 Banach 空间，其中 $T\in B(H_1,H_2)$ 的范数为

$$\|T\|_{B(H_1,H_2)}=\sup_{h\in H_1}\frac{\|Th\|_{H_2}}{\|h\|_{H_1}}.$$

一个定义在 $\boldsymbol{R}^n$ 上的函数且取值于 $B(H_1,H_2)$ 的函数 K，对于 $h\in H_1$，如果 $K(x)\cdot h$ 是取值于 H_2 的可测函数，则称 K 是可测函数. 若 K 是可积的，令

$$Tf(x)=\int_{\boldsymbol{R}^n}K(x-y)f(y)\mathrm{d}y,\quad f\in L^p(\boldsymbol{R}^n,H_1).$$

此积分是 H_2 中的一个元，且易知对几乎每一个 $x\in\boldsymbol{R}^n$，在 H_2 中弱收敛. 此外有

$$\|Tf(x)\|_{H_2}\leqslant\int_{\boldsymbol{R}^n}\|K(x-y)\|_{B(H_1,H_2)}\|f(y)\|_{H_1}\mathrm{d}y.$$

进一步还有

$$\|\|Tf(\cdot)\|_{H_2}\|_p\leqslant\|\|K(\cdot)\|_{B(H_1,H_2)}\|_1\cdot\|\|f(\cdot)\|_{H_1}\|_p.$$

向量值函数的另一个重要概念是 Fourier 变换. 设 $f\in L^1(\boldsymbol{R}^n,H)$，定义其 Fourier 变换为

$$\hat{f}(\xi)=\int_{\boldsymbol{R}^n}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}x\cdot\xi}f(x)\mathrm{d}x,$$

这里 $\hat{f}$ 仍是 H 值函数，且有

$$\|\|\hat{f}(\cdot)\|_H\|_\infty\leqslant\|\|f(\cdot)\|_H\|_1.$$

进一步，类似于第一章 § 4 所做，$L^2(\boldsymbol{R}^n,H)$ 中的 Plancherel 恒等式也成立.

为了探讨向量值算子的一般情形，还需要相应的 Marcinkiewicz 内插定理，它是数值情形的一个简单推广.

定理 3 设 T 是一个次线性算子，定义于具有紧支集的有界 H_1 值函数 $L_c^\infty(\boldsymbol{R}^n,H_1)$，取值于 H_2 值之可测函数空间. 若对 $f\in L_c^\infty(\boldsymbol{R}^n,H_1)$ 有

(i) $|\{x\in\boldsymbol{R}^n:\|Tf(x)\|_{H_2}>\lambda\}|\leqslant\dfrac{C_1}{\lambda}\|\|f(\cdot)\|_{H_1}\|_1,\ \lambda>0;$

(ii) $|\{x\in\boldsymbol{R}^n:\|Tf(x)\|_{H_2}>\lambda\}|\leqslant\left(\dfrac{C_2}{\lambda}\|\|f(\cdot)\|_{H_1}\|_r\right)^r,\ \lambda>0,$

则有

$$\|\|Tf(\cdot)\|_{H_2}\|_p\leqslant C_p\|\|f(\cdot)\|_{H_1}\|_p,\quad 1<p<r.$$

证明 我们的方法是将向量值数值化，然后套用已有的内插定理. 为此，令

$$F(x)=\begin{cases}0, & f(x)=0,\\ \dfrac{f(x)}{\|f(x)\|_{H_1}}, & f(x)\neq 0.\end{cases}$$

并对数值函数 $g(x)$，考虑算子 $\widetilde{T}$：

$$\widetilde{T}g(x)=\|T(F(x)g)\|_{H_2}.$$

易知算子 $\widetilde{T}$ 是弱(1,1)型以及弱(r,r)型的，且其界常数$\leqslant C_1,C_r$. 现在，对 $\widetilde{T}$ 应用原有的 Marcinkiewicz 内插定理，即知

$$\|\widetilde{T}g\|_p\leqslant C\|g\|_p,\quad 1<p<r.$$

从而以$\|f(x)\|_{H_1}$代替 $g(x)$，即得所证.

下一重要结果是关于 B-P-C 原理(见第四章 § 2)的向量值推

广,其证明除数值化处理外是基本上类似的,因此略去.

定理 4 设 T 是一个线性算子,定义于 $L_c^\infty(\boldsymbol{R}^n, H_1)$,取值于 H_2值之可测函数空间. 若有

(i) $|\{x\in\boldsymbol{R}^n:\|Tf(x)\|_{H_2}>\lambda\}|\leqslant\left(\frac{C_1}{\lambda}\|\|f(\cdot)\|_{H_1}\|_r\right)^r$;

(ii) 对于支集含于球 $B(x_0,r)$内,且其积分值为零的 H_1值函数 f,有

$$\int_{\boldsymbol{R}^n\setminus B(x_0,C_2r)}\|Tf(x)\|_{H_2}\mathrm{d}x\leqslant C_3\|\|f(\cdot)\|_{H_1}\|_1,$$

其中 $C_2,C_3>1$且与 f 无关,则有

$$|\{x\in\boldsymbol{R}^n:\|Tf(x)\|_{H_2}>\lambda\}|\leqslant\frac{C}{\lambda}\|\|f(\cdot)\|_{H_1}\|_1,\quad\lambda>0.$$

注 根据上一定理,又立即可知

$$\|\|Tf(\cdot)\|_{H_2}\|_p\leqslant C\|\|f(\cdot)\|_{H_1}\|_p,\quad 1<p<r.$$

我们知道,上一定理的直接应用就是研究卷积型积分算子,其中条件(ii)则转化为著名的 Hörmander 条件. 因此,推广到向量值,我们有(相应于第五章 §4定理 9)

定理 5 设 $K(x)$定义于 $\boldsymbol{R}^n$ 且取值于 $B(H_1,H_2)$,假定 K 是可测的且在紧集上是可积的. 对于 $f\in L_c^\infty(\boldsymbol{R}^n,H_1)$,令

$$Tf(x)=\int_{\boldsymbol{R}^n}K(x-y)f(y)\mathrm{d}y.$$

若有

(i) 对某个 $r>1$,有

$$\|\|Tf(\cdot)\|_{H_2}\|_r\leqslant C_1\|\|f(\cdot)\|_{H_1}\|_r,\quad f\in L^r(\boldsymbol{R}^n,H_1);$$

(ii) $\int_{|x|\geqslant 2|y|}\|K(x-y)-K(x)\|_{B(H_1,H_2)}\mathrm{d}x\leqslant C_2,\ y\neq 0,$

则对一切 $1<p<\infty$,有

$$\|\|Tf(\cdot)\|_{H_2}\|_p\leqslant C\|\|f(\cdot)\|_{H_1}\|_p.$$

现在,我们转向向量值 Calderon-Zygmund 奇异积分算子. 为此,引进 C-Z 核定义.

定义 设 $K(x)$ 定义于 $\boldsymbol{R}^n$ 且取值于 $B(H_1,H_2)$，$K(x)$ 是可测的且在 $\boldsymbol{R}^n\setminus\{0\}$ 上是局部可积的. 若满足

（Ⅰ）存在常数 C_1，使得对于任意的 $0<\varepsilon<N$，有

$$\left\|\int_{\varepsilon<|x|<N}K(x)\mathrm{d}x\right\|_{B(H_1,H_2)}\leqslant C_1,$$

且对任意固定的 N，以及每一个 $h\in H_1$，极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{\varepsilon<|x|<N}K(x)\mathrm{d}x\right)\cdot h$$

存在；

（Ⅱ）存在常数 C_2，对每一个 $h\in H_1$ 且 $\|h\|_{H_1}\leqslant 1$，以及一切 $R>0$，有

$$\int_{|x|<R}|x|\|K(x)h\|_{H_2}\mathrm{d}x\leqslant C_2R;$$

（Ⅲ）存在常数 C_3，使得对于 $y\neq 0$，有

$$\int_{|x|\geqslant 2|y|}\|K(x-y)-K(x)\|_{B(H_1,H_2)}\mathrm{d}x\leqslant C_3,$$

则称 $K(x)$ 为**向量值 Calderón-Zygmund 奇异积分核**，简称**向量值 C-Z 核**.

对此，我们有

定理 6 设 K 是向量值 C-Z 核，令

$$T_\varepsilon f(x)=\int_{|x-y|>\varepsilon}K(x-y)f(y)\mathrm{d}y,$$

则有

$$\|\|T_\varepsilon f(\cdot)\|_{H_2}\|_p\leqslant C\|\|f(\cdot)\|_{H_1}\|_p,\quad 1<p<\infty,$$

其中 $C=C_p$ 只与 p 以及 C-Z 常数有关. 此外，当 $\varepsilon\to 0$ 时，$T_\varepsilon f$ 在 $L^p(\boldsymbol{R}^n,H_2)$ 中收敛，记其极限为 Tf，则

$$\|\|Tf(\cdot)\|_{H_2}\|_p\leqslant C\|\|f(\cdot)\|_{H_1}\|_p.$$

证明 本定理的证明思路与第五章 § 4 定理10基本相同，故略.

§3 Littlewood-Paley 理论初步及其应用

3.1 平方积分函数

在这里，我们将介绍向量值奇异积分算子有界性估计的某种应用，即 Littlewood-Paley 关于所谓平方积分函数的理论. 这种形式的函数首先出现在 Kaczmarz 和 Zygmund 关于正交展开（一维）的几乎处处可求和的研究（1926年）中，本世纪30年代，经 Littlewood-Paley 的重要工作，现已成为以他们的名字命名的系统理论.

平方积分函数中的典型例子，就是所谓 g-函数，由 $\mathbf{R}^n$ 上的函数的 Poisson 积分之梯度构成，是一个非线性算子. 其目的是企图通过其 Poisson 核的性质来获得该函数的 L^p 模的某些特征，从而为研究算子在 L^p 上的有界性，几乎处处存在性以及 L^p 乘子的充分条件提供了方便. 具体地说，设 $f\in L^p(\mathbf{R}^n)$，记其 Poisson 积分为

$$u(x,t)=\int_{\mathbf{R}^n}P_t(y)f(x-y)\mathrm{d}y,\quad x\in\mathbf{R}^n,t>0.$$

以 ∇ 表示梯度运算，则

$$|\nabla u(x,t)|^2=\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2+|\nabla_x u(x,t)|^2,$$

$$|\nabla_x u(x,t)|^2=\sum_{k=1}^n\left|\frac{\partial u}{\partial x_k}\right|^2.$$

并定义 g-函数为

$$g(f)(x)=\left\{\int_0^\infty|\nabla u(x,t)|^2t\mathrm{d}t\right\}^{1/2}.$$

它与 f 的 $L^p(\mathbf{R}^n)$ 的模有下述关系：

(i) $\|g(f)\|_2=(1/\sqrt{2})\|f\|_2$，$f\in L^2(\mathbf{R}^n)$；

(ii) $C_1\|f\|_p\leqslant\|g(f)\|_p\leqslant C_2\|f\|_p$，$f\in L^p(\mathbf{R}^n)$.

上述之(i)说明算子 g 在 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 上是拟（除一常数倍外）等距

的.其(ii)说明 $g(f)$ 与 f 有等价的 L^p 模.下面来证明这两个结论.

(i) 注意到

$$u(x,t)=\int_{R^n}\hat{f}(y)e^{-2\pi i y\cdot x}e^{-2\pi|y|t}dy,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\int_{R^n}-2\pi|y|\hat{f}(y)e^{-2\pi i y\cdot x}e^{-2\pi|y|t}dy,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}=\int_{R^n}-2\pi i y_k\hat{f}(y)e^{-2\pi i y\cdot x}e^{-2\pi|y|t}dy,$$

易知

$$\begin{aligned}\|g(f)\|_2^2&=\int_{R^n}\left\{\int_0^\infty|\nabla u(x,t)|^2tdt\right\}dx\\&=\int_0^\infty\left\{\int_{R^n}\left|\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\right|^2dx+\sum_{k=1}^n\int_{R^n}\left|\frac{\partial}{\partial x_k}u(x,t)\right|^2dx\right\}tdt\\&=\int_0^\infty\left\{\int_{R^n}|\hat{f}(y)|^2e^{-4\pi|y|t}8\pi^2|y|^2dy\right\}tdt\\&=\frac{1}{2}\int_{R^n}|\hat{f}(\xi)|^2d\xi=\frac{1}{2}\|f\|_2^2.\end{aligned}$$

即得所证.

(ii) 需要证明的有两个不等式,不过有了(i),实际上只需证明右端不等式即可,这是因为我们有下述一般性的重要结果.

定理 7 设 H 是一个 Hilbert 空间.若 T 是取值于 H 的线性算子,且有

$$\|\|Tf(\cdot)\|_H\|_2=A\|f\|_2,$$

则由不等式

$$\|\|Tf\|_H\|_p\leqslant C\|f\|_p,\quad f\in L^2\cap L^p,\quad 1\leqslant p<\infty$$

可推出

$$\|f\|_{p'}\leqslant CA^{-2}\|\|Tf\|_H\|_{p'},\quad 1/p+1/p'=1.$$

证明 由条件不难得出

$$A^2\left|\int_{R^n}f(x)\cdot g(x)dx\right|=\left|\int_{R^n}\langle Tf(x),Tg(x)\rangle dx\right|$$

$$\leqslant \left|\int_{R^n}\|Tf(x)\|_H \cdot \|Tg(x)\|_H \,\mathrm{d}x\right.$$
$$\leqslant \|\|Tf(\cdot)\|_H\|_{p'}\|\|Tg(\cdot)\|_p$$
$$\leqslant \|\|Tf(\cdot)\|_H\|_{p'} \cdot C\|g\|_p,$$

其中$\langle\cdot,\cdot\rangle$表示 H 中的内积.

因此,在上式中对一切满足$\|g\|_p\leqslant 1$的 g 取上确界即得所证.

为了将此结果应用于 g-函数,只需引进 $H=L^2(R^+,t\mathrm{d}t)$, $Tf(x)=\nabla P_t * f(x)$,从而其拟等距性可改写为$\|\|Tf(\cdot)\|_H\|_2=(1/\sqrt{2})\|f\|_2$. 于是,为了证明(ii)中不等式,只须指出

$$\|g(f)\|_p \leqslant C_2\|f\|_p,\quad f\in L^p(\boldsymbol{R}^n).$$

然而,现在仍然不急于来证明这一结论,而是进一步将这一经典的课题纳入更一般的框架之中,即借助于 Poisson 核函数的性质将其写成纯卷积形式,并建立向量值结构.

引进函数

$$\psi(x)=\frac{\partial}{\partial t}P_t(x)|_{t=1},$$

则有

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\left(\frac{\partial}{\partial t}P_t * f\right)(x)=t^{-1}(\psi_t * f)(x).$$

从而可知

$$g_0(f)(x)=\left\{\int_0^{\infty}t\left|\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\right|^2\mathrm{d}t\right\}^{1/2}=\left\{\int_0^{\infty}|\psi_t * f(x)|^2\frac{\mathrm{d}t}{t}\right\}^{1/2}.$$

同理,若记 $\psi_k(x)=(\partial/\partial x_k)P_1(x)$ $(k=1,2,\cdots,n)$,则

$$g_k(f)(x)=\left\{\int_0^{\infty}t\left|\frac{\partial}{\partial x_k}u(x,t)\right|^2\mathrm{d}t\right\}^{1/2}$$
$$=\left\{\int_0^{\infty}|(\psi_k)_t * f(x)|^2\frac{\mathrm{d}t}{t}\right\}^{1/2},$$

且有

$$[g(f)(x)]^2=\int_0^{\infty}\left\{(\psi_t * f(x))^2+\sum_{k=1}^{n}((\psi_k)_t * f(x))^2\right\}\frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

从而问题转化为研究平方积分函数

$$g_\varphi(f)(x)=\int_0^\infty|\varphi_t*f(x)|^2\frac{\mathrm{d}t}{t},\quad \varphi_t(x)=t^{-n}\varphi\left(\frac{x}{t}\right),\tag{7}$$

其中的函数 φ,参照 Poisson 核,提出应满足下述三个条件:

$(\mathrm{LP})_1$ $\varphi\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$, $\int_{\boldsymbol{R}^n}\varphi(x)\mathrm{d}x=0$;

$(\mathrm{LP})_2$ $|\varphi(x)|\leqslant C(1+|x|)^{-n-\alpha}$, $\alpha>0$;

$(\mathrm{LP})_3$ $\int_{\boldsymbol{R}^n}|\varphi(x+y)-\varphi(x)|\mathrm{d}x\leqslant C|y|^\gamma$, $y\in\boldsymbol{R}^n,\gamma>0$.

并称 φ 为 Littlewood-Paley 函数,简记为 L-P 函数.

易知前述之 ψ 与 ψ_k 皆是 L-P 函数.现以 ψ 为例阐明如下:由

$$\hat{\psi}(\xi)=C|\xi|\mathrm{e}^{-2\pi|\xi|}$$

可知 $\hat{\psi}(0)=0$,即$(\mathrm{LP})_1$成立.对于$(\mathrm{LP})_2$,只需注意估计式

$$|\psi(x)|\leqslant C(1+|x|^2)^{-(n+1)/2}.$$

而从估计式

$$|\nabla\psi(x)|\leqslant C|x|(1+|x|^2)^{-(n+3)/2}$$

立即可知$(\mathrm{LP})_3$成立.

现在,根据(7)式,易知为建立向量值结构,需引进$(0,\infty)$上以 $\mathrm{d}t/t$ 为测度的 L^2空间,记为 H,其范数为

$$\|h\|_H=\left\{\int_0^\infty|h(t)|^2\frac{\mathrm{d}t}{t}\right\}^{1/2},\quad h\in H.$$

于是,令 $Tf(x)=K*f(x)\triangleq\varphi_t*f(x)$,其中 $K(x)\in L(\boldsymbol{R}^n,H)$,从而可用向量值奇异积分算子的观点来看待 g-函数,纳入§2定理 6 的框架,即$\|g_\varphi(f)\|_p=\|\|Tf(\cdot)\|_H\|_p$.

根据 L-P 函数 φ 所具有的性质,应用 Fourier 变换的工具是方便的,我们有

引理 8

$$\int_0^\infty|\hat{\varphi}(t\xi)|^2\frac{\mathrm{d}t}{t}\leqslant C,\quad \xi\in\boldsymbol{R}^n.\tag{8}$$

证明 (i) 首先估计$|\hat{\varphi}(\xi)|$.为此,分两种情况:

对 $|\xi|$ 较小的值，可知

$$\begin{aligned}|\hat{\varphi}(\xi)| &= \left|\int_{\mathbf{R}^n}\varphi(x)[\mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi}-1]\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \left\{\int_{|x|\leqslant|\xi|^{-1/2}}+\int_{|x|>|\xi|^{-1/2}}\right\}|\varphi(x)||\mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi}-1|\mathrm{d}x \\ &\leqslant 2\pi\|\varphi\|_1|\xi|^{1/2}+C\int_{|\xi|^{-1/2}}^{\infty}t^{-1-\alpha}\mathrm{d}t \\ &\leqslant C|\xi|^{\beta},\end{aligned}$$

其中 $\beta=\min(1/2,\alpha/2)>0$.

对于 $|\xi|$ 较大的值，注意到 $\varphi(x+y)-\varphi(x)$ 的 Fourier 变换是 $\hat{\varphi}(\xi)(\mathrm{e}^{2\pi i y\cdot\xi}-1)$，并选 $y=\xi/(2|\xi|^2)$，则得

$$2|\hat{\varphi}(\xi)|\leqslant\int_{\mathbf{R}^n}|\varphi(x+y)-\varphi(x)|\mathrm{d}x\leqslant C|\xi|^{\gamma}.$$

(ii) 其次，不妨设(8)式左端的 $|\xi|=1$，从而有

$$\int_0^{\infty}|\hat{\varphi}(t\xi)|^2\frac{\mathrm{d}t}{t}\leqslant\int_0^1 Ct^{2\beta-1}\mathrm{d}t+\int_1^{\infty}Ct^{-2\gamma-1}\mathrm{d}t=C_1<\infty.$$

由此引理，我们立即可得

定理 9 T 是从 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 到 $L^2(\mathbf{R}^n,H)$ 的有界算子.

证明 根据引理 8 以及 Plancherel 定理，我们有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^n}|K*f(x)|_H^2\mathrm{d}x &= \int_{\mathbf{R}^n}\left\{\int_0^{\infty}|\varphi_t*f(x)|^2\frac{\mathrm{d}t}{t}\right\}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\infty}\left\{\int_{\mathbf{R}^n}|\varphi_t*f(x)|^2\mathrm{d}x\right\}\frac{\mathrm{d}t}{t} \\ &= \int_0^{\infty}\left\{\int_{\mathbf{R}^n}|\hat{\varphi}(t\xi)|^2|\hat{f}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi\right\}\frac{\mathrm{d}t}{t} \\ &\leqslant C\|f\|_2,\end{aligned}$$

即得 $\|\|Tf(\cdot)\|_H\|_2\leqslant C\|f\|_2$.

注意，若 φ 是一个向径的 P-L 函数，如同 Poisson 核函数时的情形，则上述定理之结论又可改为

推论 设 φ 是向径的 P-L 函数，则

$$\|\|Tf(\cdot)\|_H\|_2=C\|f\|_2.$$

证明 在上述定理的证明中,我们看到

$$\|\|Tf(\cdot)\|_H\|_2=\int_{R^n}|\hat{f}(\xi)|\left\{\int_0^\infty|\hat{\varphi}(t\xi)|^2\frac{\mathrm{d}t}{t}\right\}\mathrm{d}\xi.$$

而由于 $\hat{\varphi}$ 仍为向径函数,故上式中的内层积分实际上等于

$$\int_0^\infty|\hat{\varphi}(t)|^2\frac{\mathrm{d}t}{t}=C.$$

最后,对于一般指标 p,也有相应结论.

定理 10 设 T 同上所述,则

$$\|\|Tf(\cdot)\|_H\|_p\leqslant C\|f\|_p,\quad 1<p<\infty.$$

证明 前面已经指出,处理这一问题的方法是将其纳入向量值奇异积分算子的框架.为此,根据定理6,我们只需指出核 K 满足向量值 C-Z 算子核的条件:

(Ⅰ) 注意到

$$\int_{|x|\leqslant N}\varphi(x)\mathrm{d}x=-\int_{|x|>N}\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

故由性质$(\mathrm{LP})_2$可知

$$\left|\int_{|x|\leqslant N}\varphi(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{CN^n}{(1+N)^{n+\alpha}}.$$

从而得

$$\left\|\int_{|x|\leqslant N}\varphi_t(x)\mathrm{d}x\right\|_H\leqslant C.$$

(Ⅱ) 根据性质$(\mathrm{LP})_2$还可推出

$$\|K(x)\|_H\leqslant C|x|^{-n}.$$

从而又有

$$\int_{|x|<R}|x|\|K(x)\|_H\,\mathrm{d}x\leqslant CR.$$

(Ⅲ) 对于 Hörmander 条件,只需指出

$$\int_{|x|>2|y|}\left\{\int_0^\infty|\varphi_t(x-y)-\varphi_t(x)|^2\frac{\mathrm{d}t}{t}\right\}^{1/2}\mathrm{d}x\leqslant C.\tag{9}$$

首先,由$(\mathrm{LP})_2$及$|x|>2|y|$时有$|x-y|>|y|/2$,

$$\left|\varphi\left(\frac{x-y}{t}\right)-\varphi\left(\frac{x}{t}\right)\right|$$

$$\leqslant C\left(1+\frac{|x-y|}{t}\right)^{-n-\alpha}+C\left(1+\frac{|x|}{t}\right)^{-n-\alpha}$$

$$\leqslant C\left(1+\frac{|x|}{t}\right)^{-n-\varepsilon}$$

$$\leqslant C\left(\frac{t}{|x|}\right)^{n+\varepsilon},$$

其中,取 ε：$0<\varepsilon<\min(\alpha,\gamma,n)$.

其次,我们有

$$(9)\text{式左端}=\int_{|x|>2|y|}|x|^{-\frac{n+\varepsilon}{2}}\cdot|x|^{\frac{n+\varepsilon}{2}}$$

$$\times\left\{\int_0^{\infty}|\varphi_t(x-y)-\varphi_t(x)|^2\frac{\mathrm{d}t}{t}\right\}^{1/2}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\left\{\int_{|x|>2|y|}|x|^{-n-\varepsilon}\mathrm{d}x\right\}^{1/2}$$

$$\times\left\{\int_{|x|>2|y|}|x|^{n+\varepsilon}\left\{\int_0^{\infty}|\varphi_t(x-y)-\varphi_t(x)|^2\frac{\mathrm{d}t}{t}\right\}\mathrm{d}x\right\}^{1/2}$$

$$\leqslant C|y|^{-\varepsilon/2}\{J\}^{1/2}.$$

$$J=\int_{|x|>2|y|}|x|^{n+\varepsilon}\left\{\int_0^{\infty}\left|\varphi\left(\frac{x-y}{t}\right)-\varphi\left(\frac{x}{t}\right)\right|^2 t^{-2n}\frac{\mathrm{d}t}{t}\right\}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\int_{|x|>2|y|}|x|^{n+\varepsilon}\left\{\int_0^{\infty}C\left|\varphi\left(\frac{x-y}{t}\right)-\varphi\left(\frac{x}{t}\right)\right|\left(\frac{t}{|x|}\right)^{n+\varepsilon}t^{-2n}\frac{\mathrm{d}t}{t}\right\}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C\int_0^{\infty}t^{\varepsilon-n}\left\{\int_{R^n}\left|\varphi\left(\frac{x-y}{t}\right)-\varphi\left(\frac{x}{t}\right)\right|\mathrm{d}x\right\}\frac{\mathrm{d}t}{t}$$

$$\leqslant C\int_0^{\infty}t^{\varepsilon-n}\begin{Bmatrix}t^n\cdot 2\|\varphi\|_1\\ t^n\left(\frac{|y|}{t}\right)^{\gamma}\end{Bmatrix}\frac{\mathrm{d}t}{t}$$

$$\leqslant C\left\{\|\varphi\|_1\int_0^{|y|}t^{\varepsilon}\frac{\mathrm{d}t}{t}+C|y|^{\gamma}\int_{|y|}^{\infty}t^{\varepsilon-\gamma}\frac{\mathrm{d}t}{t}\right\}$$

$$=C|y|^{\varepsilon}.$$

平方积分函数的另外两个基本例子是面积函数 $S_\varphi(f)(x)$ ①和 g_λ^*-函数：

$$S_\varphi(f)(x) = \left\{\int_{\Gamma(x)} |\varphi_t * f(y)|^2 t^{-n} \mathrm{d}y \frac{\mathrm{d}t}{t}\right\}^{1/2},$$

$$g_{\varphi,\lambda}^*(f)(x)$$

$$= \left\{\int_{\boldsymbol{R}_+^{n+1}} |\varphi_t * f(y)|^2 \left(\frac{t}{t+|x-y|}\right)^{2\lambda} t^{-n} \mathrm{d}y \frac{\mathrm{d}t}{t}\right\}^{1/2}, \lambda > 0.$$

其中 φ 是 L-P 函数，$\Gamma(x)$ 是 $\boldsymbol{R}_+^{n+1}$ 中以 $x\in\boldsymbol{R}^n$ 为顶点的（无限）锥：

$$\Gamma(x) = \{(y,t) \in \boldsymbol{R}_+^{n+1}: |x-y| < t\}.$$

下面介绍以上三种平方积分函数之间的关系.

定理 11 $\|S_\varphi(f)\|_2 \leqslant C\|f\|_2$，若 φ 是向径函数，则 $\|S_\varphi(f)\|_2=C\|f\|_2$.

证明 记 $B=B(0,1)$，则

$$\int_{\boldsymbol{R}^n}[S_\varphi(f)(x)]^2\mathrm{d}x$$

$$= \int_{\boldsymbol{R}^n}\left\{\int_0^\infty\int_{\boldsymbol{R}^n}|\varphi_t * f(y)|^2\chi_B\left(\frac{|x-y|}{t}\right)t^{-n}\mathrm{d}y\frac{\mathrm{d}t}{t}\right\}\mathrm{d}x$$

$$= \int_{\boldsymbol{R}^n}\left\{\int_0^\infty|\varphi_t * f(y)|^2\left(\int_{\boldsymbol{R}^n}\chi_B\left(\frac{|x-y|}{t}\right)t^{-n}\mathrm{d}x\right)\frac{\mathrm{d}t}{t}\right\}\mathrm{d}y$$

$$= C\int_{\boldsymbol{R}^n}[g_\varphi(f)(x)]^2\mathrm{d}x.$$

由此知，

$$\|S_\varphi(f)\|_2 = C\|g_\varphi(f)\|_2,$$

即得所证.

定理 12 (i) $S_\varphi(f)(x)\leqslant C_\lambda g_{\varphi,\lambda}^*(x)$；

(ii) $\lambda>n/2, 2\leqslant p<\infty$ 时，有

$$\|g_{\varphi,\lambda}^*(f)\|_p \leqslant C_{p,\lambda}\|f\|_p.$$

---

① 当 $n=1$ 且 φ 为 Poisson 核函数时，$S_\varphi(f)(x)$ 表示与 $\Gamma(x)$ 有关的（映像的）面积. 它在描述调和函数的边界极限问题中有着特定的作用.

证明 (i) 只需注意在 $\Gamma(x)$ 上有

$$\left(\frac{t}{t+|x-y|}\right)^{2\lambda} \geqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{2\lambda}.$$

(ii) 首先，对 $w(x)\geqslant 0$ 有

$$\int_{\mathbf{R}^n}[g_{\varphi,\lambda}^*(f)(x)]^2 w(x)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C_\lambda\int_{\mathbf{R}^n}[g_\varphi(f)(x)]^2 Mw(x)\mathrm{d}x. \qquad (10)$$

这是因为上式左端等于

$$\int_{\mathbf{R}^n}\left\{\int_0^{\infty}\int_{\mathbf{R}^n}|\varphi_t * f(y)|^2\left(\frac{t}{t+|x-y|}\right)^{2\lambda}t^{-n}\mathrm{d}y\,\frac{\mathrm{d}t}{t}\right\}w(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{\mathbf{R}^n}\left\{\int_0^{\infty}|\varphi_t * f(y)|^2\,\frac{\mathrm{d}t}{t}\right\}$$

$$\times\sup_{t>0}\left\{\int_{\mathbf{R}^n}t^{-n}w(x)\left(\frac{t}{t+|x-y|}\right)^{2\lambda}\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}y.$$

所以只需指出

$$\sup_{t>0}\left\{\int_{\mathbf{R}^n}t^{-n}w(x)\left(\frac{t}{t+|x-y|}\right)^{2\lambda}\mathrm{d}x\right\}\leqslant C_\lambda Mw(y)$$

即可. 为此，令

$$\psi(x)=\left(\frac{1}{1+|x|}\right)^{2\lambda},$$

则在题设条件下，$\psi\in L^1(\mathbf{R}^n)$ 且是递减之向径函数. 从而根据第二章 §4定理 9 可知

$$\sup_{t>0}\int_{\mathbf{R}^n}w(x)\psi_t(y-x)\mathrm{d}x\leqslant C_\lambda Mw(x).$$

其次，若取 $w(x)\equiv 1$，则有

$$\|g_{\varphi,\lambda}^*(f)\|_2\leqslant C_\lambda\|g_\varphi(f)\|_2.$$

对于 $p>2$，取 q 满足

$$\frac{1}{q}+\frac{2}{p}=1,$$

且取(10)式中之 w 满足 $\|w\|_q\leqslant 1$，则由 H-L 极大算子 M 的 (q,q)

型，可知

$$\int_{R^n}[g_\varphi(f)(x)]^2 Mw(x)\mathrm{d}x \leqslant \|g_\varphi(f)\|_p^2\|Mw\|_q$$
$$\leqslant C\|f\|_p^2\|Mw\|_q \leqslant C\|f\|_p^2\|w\|_q = C\|f\|_p^2.$$

而于(10)式之左端，对一切$\|w\|_q\leqslant 1$取上确界，即得$\|g_{\varphi,\lambda}^*(f)\|_p$. 于是有

$$\|g_{\varphi,\lambda}^*(f)\|_p \leqslant C_{\lambda,p}\|f\|_p,\quad 2<p<\infty.$$

定理 13 $\|S_\varphi(f)\|_p\leqslant C\|f\|_p$, $1<p<\infty$.

证明 取 Hilbert 空间 H 为

$$H=\left\{h:\ \|h\|_H=\left\{\int_0^\infty\int_{|y|<1}|h(y,t)|^2\mathrm{d}y\frac{\mathrm{d}t}{t}\right\}^{1/2}<\infty\right\},$$

并注意到 $S_\varphi(f)(x)$ 可改写为

$$S_\varphi(f)(x)=\left\{\int_0^\infty\int_{|y|<1}|f*\varphi_t(x-ty)|^2\mathrm{d}y\frac{\mathrm{d}t}{t}\right\}^{1/2},$$

则视 $K(x)\in L(\boldsymbol{R}^n,H)$，且 $K(x)=t^{-n}\varphi\left(\frac{x}{t}-y\right)$ 时，类似于定理10的证明，易知 K 是一个向量值 C-Z 核. 从而，根据 § 2定理6，即得所证.

推论 若 φ 是向径 L-P 函数，则

$$C\|f\|_{p'}\leqslant\|S_\varphi(f)\|_{p'},\quad 1\leqslant p'<\infty.$$

证明 注意到$\|S_\varphi(f)\|_2=C\|f\|_2$，根据定理 7，即得所证.

3.2 Hörmander 乘子定理

现在，作为 Littlewood-Paley 理论的一个应用，我们来介绍 Hörmander 乘子定理：

定义 设 $m(\xi)$是定义在 $\boldsymbol{R}^n$ 上的函数，若存在常数 C，使得

(i) $|m(\xi)|\leqslant C$, $x\in\boldsymbol{R}^n\setminus\{0\}$；

(ii) $r^{2|\alpha|-n}\int_{r<|\xi|<2r}|D^\alpha m(\xi)|^2\mathrm{d}\xi\leqslant C$, $|\alpha|\leqslant k$,

其中多重指标 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，而且 $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$, $\alpha_i(i=$

$1,2,\cdots,n$)为非负整数. 对 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in \boldsymbol{R}^n$, $x^\alpha=x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$,

$$\mathrm{D}^\alpha = \partial^{|\alpha|}/\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n},$$

则称函数 m 满足 k 阶 **Hörmander 条件**.

定理 14 设函数 m 满足 k 阶 Hörmander 条件,

$$\hat{\varphi}(\xi) = |\xi|\mathrm{e}^{-|\xi|}, \quad \hat{\psi}(\xi) = |2\xi|^{k+1}\mathrm{e}^{-2|\xi|},$$

$$\widehat{Tf}(\xi) = m(\xi)\hat{f}(\xi),$$

则

$$S_\psi(Tf)(x) \leqslant C_k g_{\varphi,k}^*(f)(x), \quad f \in \mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n),$$

其中 $\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n)$表示速降函数空间.

证明 (i) 用 Fourier 变换求 $\psi_t * Tf$ 的表达式: 因为

$$\begin{aligned}\widehat{\psi_t * (Tf)}(\xi) &= \hat{\psi}_t(\xi)\cdot\widehat{Tf}(\xi)\\ &= (2t|\xi|)^{k+1}\mathrm{e}^{-2t|\xi|}m(\xi)\hat{f}(\xi)\\ &= 2^{k+1}\,\widehat{\varphi_t * f}\,(\xi)\cdot\hat{G}(\xi,t),\end{aligned}$$

其中 $\hat{G}(\xi,t)=(t|\xi|)^k\mathrm{e}^{-t|\xi|}m(\xi)$,所以有

$$\psi_t * (Tf)(z) = C\int_{\boldsymbol{R}^n}[\varphi_t * f(y)][G(z-y,t)]\mathrm{d}y.$$

(ii) 用 Hölder 不等式,可得

$$\begin{aligned}|\psi_t * (Tf)(z)|^2 &\leqslant C\int_{\boldsymbol{R}^n}|G(z-y,t)|^2\left(\frac{t}{t+|x-y|}\right)^{-k}\mathrm{d}y\\ &\quad\times\int_{\boldsymbol{R}^n}|\varphi_t * f(y)|^2\left(\frac{t}{t+|x-y|}\right)^{k}\mathrm{d}y\\ &= I\times J.\end{aligned} \tag{11}$$

可以证明(在下面(iii)中进行)

$$I \leqslant C_k t^{-n}.$$

从而,在(11)式两端乘以 t^{-n} 并以测度 $\mathrm{d}z\mathrm{d}t/t$ 对 $(z,t)\in\Gamma(x)$作积分,立即得到

$$[S_\psi(Tf)(x)]^2$$

$$\leqslant C\int_{\boldsymbol{R}^n}\int_0^\infty|\varphi_t * f(y)|^2\left(\frac{t}{t+|x-y|}\right)^k t^{-n}\left\{\frac{1}{t^n}\int_{|z-x|<t}\mathrm{d}z\right\}\mathrm{d}y\,\frac{\mathrm{d}t}{t}$$

$$\leqslant C\int_0^\infty\int_{R^n}|\varphi_t * f(y)|^2\left(\frac{t}{t+|x-y|}\right)^k t^{-n}\mathrm{d}y\frac{\mathrm{d}t}{t}$$

$$= C[g_{\varphi,k}^*(f)(x)]^2.$$

即得所证.

(iii) $I\leqslant Ct^{-n}$的证明.

注意到$(z,t)\in\Gamma(x)$,即$|z-x|<t$,可知

$$\left(1+\frac{|x-y|}{t}\right)^k\leqslant C\left(1+\frac{|x-z|}{t}\right)^k+C\left(\frac{|z-y|}{t}\right)^k$$

$$\leqslant C+C\left(\frac{|z-y|}{t}\right)^k.$$

由此得

$$I\leqslant C\int_{R^n}|G(z-y,t)|^2\mathrm{d}y$$

$$+C\int_{R^n}|G(z-y,t)|^2\left(\frac{|z-y|}{t}\right)^{2k}\mathrm{d}y$$

$$=I_1+I_2.$$

为估计 I_1,应用 Plancherel 定理,得

$$I_1\leqslant C\int_{R^n}(t|\xi|)^{2k}\mathrm{e}^{-2t|\xi|}|m(\xi)|^2\mathrm{d}\xi$$

$$\leqslant Ct^{-n}\int_{R^n}|\xi|^{2k}\mathrm{e}^{-|\xi|}\left|m\left(\frac{\xi}{2t}\right)\right|^2\mathrm{d}\xi$$

$$\leqslant Ct^{-n}.$$

为估计 I_2,应用 k 阶 Hörmander 条件,我们有

$$I_2=C\int_{R^n}|G(y,t)|^2|y|^{2k}t^{-2k}\mathrm{d}y$$

$$\leqslant Ct^{-2k}\sum_{i=1}^n\int_{R^n}|y_i^kG(y,t)|^2\mathrm{d}y$$

$$=Ct^{-2k}\sum_{i=1}^n\int_{R^n}\left|\frac{\partial^k}{\partial\xi_i^k}((t|\xi|)^k\mathrm{e}^{-t|\xi|}m(\xi))\right|^2\mathrm{d}\xi.$$

易知上式中之积分被积分

$$\int_{\mathbf{R}^n} |D^\alpha(|\xi|^k e^{-t|\xi|} m(\xi))|^2 d\xi, \quad |\alpha| = k$$

所控制，引进多重指标 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$：

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \quad |\alpha_1| + |\alpha_2| + |\alpha_3| = k,$$

则上述积分中之导函数为多项式

$$D^{\alpha_1}(|\xi|^k) \cdot D^{\alpha_2}(e^{-t|\xi|}) \cdot D^{\alpha_3} m(\xi)$$

的线性组合，且每一个皆被

$$C|\xi|^{k-|\alpha_1|} t^{|\alpha_2|} e^{-t|\xi|} |D^{\alpha_3} m(\xi)|$$

所控制. 从而问题转为估计

$$\int_{\mathbf{R}^n} (t|\xi|)^{2|\alpha_2|} e^{-2t|\xi|} \left| |\xi|^{|\alpha_3|} D^{\alpha_3} m(\xi) \right|^2 d\xi.$$

为此，联系到假设中的 k 阶 Hörmander 条件，不妨令

$$M(\xi) = \left| |\xi|^{|\alpha_3|} D^{\alpha_3} m(\xi) \right|^2,$$

显然，M 满足：

$$r^{-n} \int_{r<|\xi|<2r} |M(\xi)| d\xi \leqslant C r^{2|\alpha_3|-n} \int_{r<|\xi|<2r} |D^{\alpha_3} m(\xi)|^2 d\xi \leqslant C,$$

或等价地写为

$$\int_{1<|\xi|<2} M\left(\frac{\xi}{r}\right) d\xi \leqslant C, \quad r > 0.$$

这样，为估计 I_2，最后转为估计

$$\int_{\mathbf{R}^n} (t|\xi|)^j e^{-t|\xi|} M(\xi) d\xi = t^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} |\xi|^j e^{-|\xi|} M\left(\frac{\xi}{t}\right) d\xi, \quad (12)$$

$$0 \leqslant j \leqslant 2k.$$

对 $\mathbf{R}^n$ 作球层分解，我们有

$$\begin{aligned}
(12)\text{ 式} &= t^{-n} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \int_{2^l \leqslant |\xi| < 2^{l+1}} |\xi|^j e^{-|\xi|} M\left(\frac{\xi}{t}\right) d\xi \\
&\leqslant C t^{-n} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2^{lj} e^{-2^l} \sup_{-\infty<l<+\infty} \int_{1<|\xi|<2} M\left(\frac{2^l \xi}{t}\right) d\xi \\
&\leqslant C t^{-n}.
\end{aligned}$$

定理全部证完.

定理 15(**Hörmander**) 设 $m(\xi)$满足 k 阶的 Hörmander 条件,$k>n/2$,则由

$$\widehat{Tf}(\xi) = m(\xi)\hat{f}(\xi)$$

定义的乘子 T 在 $L^p(\boldsymbol{R}^n)$上是有界的,其中 $1<p<\infty$.

证明 只需考虑 $p>2$的情形. 应用定理12、定理13的结论,对 $f\in\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n)$以及 $k>n/2,p>2$,有

$$\|S_\psi(Tf)\|_p \leqslant C_k\|g_{\varphi,k}^*(f)\|_p \leqslant C_k\|f\|_p;$$

注意到 ψ 是向径 L-P 函数,又可知

$$\|Tf\|_p \leqslant C\|S_\psi(Tf)\|_p.$$

从而对 $f\in\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n)$,有

$$\|Tf\|_p \leqslant C_k\|f\|_p, \quad p \geqslant 2.$$

再经有界延拓,上式对 $f\in L^p(\boldsymbol{R}^n)$也成立.

3.3 Carleson 测度

问题 设 $\mu=\mu(y,t)$是 $\boldsymbol{R}_+^{n+1}$上的 Borel 测度,$f(y,t)$是 $\boldsymbol{R}_+^{n+1}$上的可测函数,记

$$N(f)(x) = \sup_{\Gamma(x)}|f(y,t)|. \quad (\Gamma(x):\text{锥})$$

试问:μ 应满足什么条件,可使不等式

$$\left\{\int_{\boldsymbol{R}_+^{n+1}}|f(y,t)|^p\mathrm{d}\mu(y,t)\right\}^{1/p} \leqslant C\|N(f)\|_p, \quad 0<p<\infty \tag{13}$$

成立,其中 $C=C_p$ 与 f 无关.

为此,先探求其必要条件. 对 $E\subset\boldsymbol{R}^n$,令

$$\begin{aligned} T(E) &= \{(y,t)\in\boldsymbol{R}_+^{n+1}:\ B(y,t)\subset E\} \\ &= \{(y,t)\in\boldsymbol{R}_+^{n+1}:\ d(y,E^c)>t\}, \end{aligned}$$

并称为 E 上的帐篷. 现在,任取 $\boldsymbol{R}^n$ 中一个球 B,设

$$f(y,t) = \chi_{T(B)}(y,t),$$

显然有 $N(f)(x)=\chi_B(x)$. 将这些代入(13),可得

$$\mu(T(B)) \leqslant C|B|. \tag{14}$$

我们称满足(14)式的 μ 为 **Carleson 测度**.

注 (14)式中的形体还可换为其他形体.

引理 16 (i) 设 $B = B(x,r)$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中任一球，作圆柱体 $\Pi(B)$：

$$\Pi(B) = \{(y,t) \in \boldsymbol{R}_+^{n+1};\ y \in B(x,r), 0 < t < r\},$$

则(14)式等价于

$$\mu(\Pi(B)) \leqslant C|B|.$$

(ii) 设 G 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的任一开集,$G \neq \boldsymbol{R}^n$,则

$$\mu(T(G)) \leqslant C|G|$$

与(14)式等价.

证明 (i) 易知存在其半径可与球 B 相比较的球 B_1, B_2: $B_1 \subset B \subset B_2$,使得

$$\Pi(B_1) \subset T(B) \subset \Pi(B_2).$$

由此即得所证.

(ii) 将开集 G 作 Whitney 分解(见第二章习题 2):

$$G = \bigcup_i Q_i, \quad 2 \leqslant d(Q_i, G^c)/d(Q_i) \leqslant 6.$$

又对每一个 Q_i,再作球 B_i,球半径与 Q_i 之边长可比较,且满足

$$T(Q_i) \subset \Pi(B_i).$$

由此知
$$T(G) \subset \bigcup_i \Pi(B_i).$$

从而得到

$$\mu(T(G)) \leqslant \sum_i \mu(\Pi(B_i)) \leqslant C \sum_i |B_i| \leqslant C \sum_i |Q_i| = C|G|.$$

例(Fefferman) 设 $f \in \mathrm{BMO}(\boldsymbol{R}^n)$,$\varphi$ 是 L-P 函数,则由

$$\mathrm{d}\mu(x,t) = |\varphi_t * f(y)|^2 \mathrm{d}y \cdot \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

定义的 μ 是 $\boldsymbol{R}_+^{n+1}$ 上的 Carleson 测度.

证明 (i) 首先说明卷积 $\varphi_t * f(y)$ 是收敛的. 为此,记方体 Q

$=Q(y,t)$，并作 f 的分解：

$$f=(f-f_Q)\chi_Q+(f-f_Q)\chi_{R^n\setminus Q}+f_Q.$$

注意到 $f_Q*\varphi_t(y)=0$，故得

$$\begin{aligned}\varphi_t*f(y)&=\int_Q[f(x)-f_Q]\varphi_t(y-x)\mathrm{d}x\\&\quad+\int_{R^n\setminus Q}[f(x)-f_Q]\varphi_t(y-x)\mathrm{d}x\\&=I_1+I_2.\end{aligned}$$

根据 L-P 函数 φ 的性质，显然有

$$|I_1|\leqslant Ct^{-n}\int_Q|f(x)-f_Q|\mathrm{d}x\leqslant C\|f\|_{\mathrm{BMO}}.$$

而对于 I_2，只要回忆起第七章§2中所述的计算方法，易知

$$\begin{aligned}|I_2|&\leqslant\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{2^{k+1}Q\setminus 2^kQ}[|f(x)-f_{2^{k+1}Q}|\\&\qquad+|f_{2^{k+1}Q}-f_Q|]|\varphi_t(y-x)|\mathrm{d}x\\&\leqslant C\sum_{k=0}^{+\infty}2^{-k\alpha}(2^kt)^{-n}\\&\qquad\times\left\{\int_{2^{k+1}Q}|f(x)-f_{2^{k+1}Q}|\mathrm{d}x+k(2^kt)^n\|f\|_{\mathrm{BMO}}\right\}\\&\leqslant C\left\{\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)2^{-k\alpha}\right\}\|f\|_{\mathrm{BMO}}.\end{aligned}$$

(ii) 其次证明：对任一球 B，有

$$\int_{T(B)}|f*\varphi_t(y)|^2\mathrm{d}y\frac{\mathrm{d}t}{t}\leqslant C\|f\|^2_{\mathrm{BMO}}|B|.\tag{15}$$

为此，记 Q 为包含 B 之最小方体，且作分解：

$$\begin{aligned}f&=(f-f_Q)\chi_{2Q}+(f-f_Q)\chi_{R^n\setminus 2Q}+f_Q\\&=f_1+f_2+f_3.\end{aligned}$$

显然，我们只需对 f_1,f_2及 f_3各自证明(15)式成立即可.

(a) 易知 $f_Q*\varphi_t(y)=0$.

(b) 注意到 g-函数的(p,p)型，可得

$$\int_{T(B)}|f_1*\varphi_t(y)|^2\mathrm{d}y\,\frac{\mathrm{d}t}{t}\leqslant\int_{\mathbf{R}^n}\int_0^{\infty}|f_1*\varphi_t(y)|^2\frac{\mathrm{d}t}{t}\mathrm{d}y$$

$$\leqslant C\|f_1\|_2^2\leqslant C\int_{2Q}|f(y)-f_Q|^2\mathrm{d}y$$

$$\leqslant C\|f\|_{\mathrm{BMO}}^2|B|.$$

(c) 记 B 的半径为 r，注意到在 $0<t<r$ 的情况下，与(i)中估计 I_2 相类似，我们有

$$|f_2*\varphi_t(y)|\leqslant C\left(\frac{t}{r}\right)^{\alpha}\|f\|_{\mathrm{BMO}}.$$

从而知

$$\int_{T(B)}|f_2*\varphi_t(y)|^2\mathrm{d}y\,\frac{\mathrm{d}t}{t}\leqslant C\int_B\int_0^r\left(\frac{t}{r}\right)^{2\alpha}\frac{\mathrm{d}t}{t}\mathrm{d}y\|f\|_{\mathrm{BMO}}^2$$

$$\leqslant C\|f\|_{\mathrm{BMO}}^2|B|,$$

即得所证.

Carleson 测度之所以引起我们的兴趣，其原因之一是：它不仅是(13)式成立的必要条件，而且还是充分条件.

定理 17 设 $f(y,t)$ 是 $\mathbf{R}_+^{n+1}$ 上的可测函数，且假定其在锥 $\Gamma(x)$ 上的极大函数 $N(f)(x)$ 是下半连续的. 若 μ 是 $\mathbf{R}_+^{n+1}$ 上的 Carleson 测度，则(13)式成立.

证明 对给定 $\lambda>0$，令

$$G_\lambda=\{x\in\mathbf{R}^n:\ N(f)(x)>\lambda\},$$

由假设知 G_λ 是开集，且根据引理16知

$$\mu(T(G_\lambda))\leqslant C|G_\lambda|.$$

因为 $\{(y,t)\in\mathbf{R}_+^{n+1}:\ |f(y,t)|>\lambda\}\subset T(G_\lambda)$，所以有

$$\mu(\{(y,t)\in\mathbf{R}_+^{n+1}:\ |f(y,t)|>\lambda\})$$

$$\leqslant\mu(T(G_\lambda))\leqslant C|G_\lambda|.$$

从而得到

$$\int_{\mathbf{R}_+^{n+1}}|f(y,t)|^p\mathrm{d}\mu(y,t)$$

$$= p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\mu(\{(y,t)\in \boldsymbol{R}_+^{n+1}:\ |f(y,t)|>\lambda\})\mathrm{d}\lambda$$

$$\leqslant Cp\int_0^\infty \lambda^{p-1}|G_\lambda|\mathrm{d}\lambda = C\|N(f)\|_p^p,\ 0<p<\infty.$$

习　　题

1. 设 $0<p,q<\infty$，线性算子 T 满足

$$|\{x\in \boldsymbol{R}^n:\ |Tf(x)|>\lambda\}|\leqslant C\lambda^{-p}\|f\|_p^p,\quad \lambda>0.$$

证明对 $\lambda>0$ 有

$$\left|\left\{x\in \boldsymbol{R}^n:\ \left(\sum_j |Tf_j(x)|^2\right)^{1/2}>\lambda\right\}\right|$$

$$\leqslant C\cdot\lambda^{-p}\left\|\left(\sum_j |f_j|^2\right)^{1/2}\right\|_p^p.$$

提示：令 $f(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_j(x),\cdots)$，$Tf(x)=(Tf_1(x),Tf_2(x),\cdots,Tf_j(x),\cdots)$，转而考察 $\|Tf(x)\|_{l^2}$，并应用 Колмогоров 不等式.

2. 取定 $p>0,s\geqslant1$，设 $\{T_j\}$ 是定义在 $L^p(\boldsymbol{R}^n)$ 上的次线性算子列，对每一个非负函数 $v\in L^{s}(\boldsymbol{R}^n)$，存在非负函数 $u\in L^{s}(\boldsymbol{R}^n)$，使得 $\|u\|_s\leqslant\|v\|_s$，且满足

$$\int_{\boldsymbol{R}^n}|T_jf(x)|^p v(x)\mathrm{d}x\leqslant C^p\int_{\boldsymbol{R}^n}|f(x)|^p u(x)\mathrm{d}x,\quad j=1,2,\cdots$$

证明对 $q=ps'$，$1/s+1/s'=1$，有

$$\left\|\left(\sum_j |T_jf_j|^p\right)^{1/p}\right\|_q\leqslant C\left\|\left(\sum_j |f_j|^p\right)^{1/p}\right\|_q,\quad f_j\in L^q(\boldsymbol{R}^n).$$

3. 设定义在 $\boldsymbol{R}^n$ 上可积函数列 $\{K_j(x)\}$ 满足

(i) $\sup_j\|\hat{K}_j\|_\infty<\infty$；

(ii) $\displaystyle\int_{|x|>2|y|}\sup_j|K_j(x-y)-K_j(x)|\mathrm{d}x\leqslant C.$

证明

(i) $\left|\left\{x\in \boldsymbol{R}^n:\ \left(\sum_j |K_j*f(x)|^r\right)^{1/r}>\lambda\right\}\right|$

$$\leqslant C_r \lambda^{-1} \left\| \left(\sum_j |f_j|^r \right)^{1/r} \right\|_1 \quad (1 < r < \infty);$$

(ii) $\left\| \left(\sum_j |K_j * f_j|^r \right)^{1/r} \right\|_p \leqslant C_{r,p} \left\| \left(\sum_j |f_j|^r \right)^{1/r} \right\|_p$, $1 < r$, $p < \infty$.

4. 设 $f \in L^1_{\text{loc}}(\boldsymbol{R}^n)$，令 $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$，定义

$$Tf(x) = \left\{ \int_0^\infty t^{-3} |F(x+t) + F(x-t) - 2F(x)|^2 \mathrm{d}t \right\}^{1/2}.$$

证明

$$C_1 \|f\|_p \leqslant \|TF\|_p \leqslant C_2 \|f\|_p, \quad 1 < p < \infty.$$

提示：令 $\varphi(x) = \chi_{[-1,0]}(x) - \chi_{[0,1]}(x)$，则被积函数可写为 $t^{-1} |\varphi_t * f(x)|^2$.

参 考 文 献

[1] J. Marcinkiewicz and A. Zygmund, Quelques inégalités pour les opérations linéaries, *Fund. Math.*, **32**(1939), 115～121.

[2] C. Fefferman and E. M. Stein, Some maximal inequlities, *Amer. J. Math.*, **93**(1971), 107～115.

[3] K. F. Andersen and R. T. John, Weighted inequlities for vector-valued maximal function and singular integrals, *Studia Math.*, **69**(1980), 19～31.

[4] A. Cordoba and C. Fefferman, A weighted norm inequality for singular integrals, *Studia Math.*, **57**(1976), 97～101.

[5] J. L. Rubio de Francia, Vector-valued inequalities for operators in L^p spaces, *Bull. London Math. Soc.*, **12**(1980), 211～215.

[6] J. Garcia-Cuerva and J. L. Rubio de Francia, *Weighted Norm Inequalities and Related Topics*, North-Holand, 1985.

[7] A. Torchinsky, *Real-Variable Methods in Harmonic Analysis*, Academic Press, Orlando, Florida, 1986.

[8] H. Triebel, *Theory of Function Spaces*, Birkhäuser Verlag, 1983.

附录　部分习题的参考解答与提示

第　一　章

1. 在 Jensen 不等式中视 $\Phi(x)=(1-x^{\frac{1}{p}})^p$，易知 $\Phi\in C([0,1])$且为凸函数，从而有

$$\left\{1-\left(\int_{\mathbf{R}^n}f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\right\}^p=\Phi\left(\int_{\mathbf{R}^n}f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)$$

$$\leqslant\int_{\mathbf{R}^n}\left(1-f^{\frac{1}{p}}(x)\right)^p g(x)\mathrm{d}x.\quad \text{即得所证.}$$

2. 注意到 $\ln x$ 是上凸函数，故有

$$\ln\|f\|_p=\frac{1}{p}\ln\left(\int_0^1|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)\geqslant\int_0^1\ln|f(x)|\mathrm{d}x.$$

由此知 $\varliminf\limits_{p\to 0}\ln\|f\|_p\geqslant\int_0^1\ln|f(x)|\mathrm{d}x.$

另一方面，由 $\ln x\leqslant x-1$ 可知

$$\frac{1}{p}\ln\left(\int_0^1|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)\leqslant\frac{1}{p}\left(\int_0^1|f(x)|^p\mathrm{d}x-1\right)$$

$$=\int_0^1\frac{1}{p}\left(|f(x)|^p-1\right)\mathrm{d}x.$$

故又得 $\qquad\varlimsup\limits_{p\to 0}\ln\|f\|_p\leqslant\int_0^1\ln|f(x)|\mathrm{d}x.\quad$ 即得所证.

3. 我们有

$$\int_{\mathbf{R}^n}|f(x)|^q\mathrm{d}x=q\int_0^M\lambda^{q-1}f_*(\lambda)\mathrm{d}\lambda$$

$$\leqslant C\cdot p\int_0^M\lambda^{q-1-p}\mathrm{d}\lambda=\frac{C\cdot p}{q-p}M^{q-p}.$$

即得所证.

4. 我们有

$$\int_{R^n}|f(x)|^q\mathrm{d}x = q\int_0^\infty \lambda^{q-1}f_*(\lambda)\mathrm{d}\lambda$$

$$= q\int_0^1 \lambda^{q-1}f_*(\lambda)\mathrm{d}\lambda + q\int_1^\infty \lambda^{q-1}f_*(\lambda)\mathrm{d}\lambda$$

$$\leqslant M + q\int_1^\infty \lambda^{q-1-p}[f]_p\mathrm{d}\lambda < \infty.$$ 即得所证.

5. 作渐升函数列$\{f_k(x)\}$,使得

$$\lim_{k\to\infty}f_k(x) = f(x),\quad \int_{R^n}f_k(x)\mathrm{d}x = a_k < \infty,$$

且令 $F_k(x)=(f_k * \chi_E)(x)$, $F(x)=(f * \chi_E)(x)$,易知

$$F_k(x) \leqslant F(x),\quad F_k(x) \leqslant a_k (k = 1,2,\cdots).$$

由于$|\{x: F_k(x)\geqslant\lambda\}|\leqslant C/\lambda^r$,故得

$$a_k|E| = \int_{R^n}(f_k * \chi_E)(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{R^n}F_k(x)\mathrm{d}x = \int_0^{a_k}|\{x: F_k(x)\geqslant\lambda\}|\mathrm{d}\lambda$$

$$\leqslant \int_0^{a_k}C\lambda^{-r}\mathrm{d}\lambda = C\frac{a_k^{1-r}}{1-r},\ (k = 1,2,\cdots)$$

从而我们有 $a_k \leqslant \left(\dfrac{C}{|E|(1-r)}\right)^{\frac{1}{r}}$. 即得所证.

6. 反证法.假定对任意自然数k,存在$f_k(x)\geqslant 0$且$\|f_k\|_p\leqslant 1$,使得$\|Tf_k\|_q\geqslant 2^k\cdot k$ $(k=1,2,\cdots)$,则作

$$g(x) = \sum_{k=1}^\infty 2^{-k}f_k(x),$$

易知$g\in L^p(R^n)$,但我们有

$$\|Tg\|_q \geqslant k\ (k = 1,2,\cdots),$$

与题设矛盾,即得所证.

9. $C_p=\int_0^\infty x^{-\frac{1}{p}}(x+1)^{-1}\mathrm{d}x=\pi\cdot\csc\left(\dfrac{\pi}{p}\right)$.

11. $q<\infty$.由题设知

$$\|T_r f\|_{q/r} \leqslant M_0 \|f\|_{q/r}.$$

由 $p/q + p/r' = 1$ 可知

$$\int_{R^n} |K(x,y)||f(y)|\mathrm{d}y = \int_{R^n} |K(x,y)||f(y)|^{\frac{p}{q}}|f(y)|^{\frac{p}{r'}}\mathrm{d}y$$

$$\leqslant \left(\int_{R^n} |K(x,y)|^r |f(y)|^{\frac{pr}{q}}\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{r}}\left(\int_{R^n} |f(y)|^p\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{r'}}.$$

注意到

$$\left(\int |K(x,y)|^r |f(y)|^{\frac{pr}{q}}\mathrm{d}y\right)^{\frac{q}{r}} \leqslant M_0^{\frac{q}{r}}\left(\int_{R^n} |f(y)|^p\mathrm{d}y\right),$$

我们有 $\displaystyle\int_{R^n} |Tf(x)|^q\mathrm{d}x \leqslant M_0^{q/r}\left(\int_{R^n} |f(y)|^p\mathrm{d}y\right)^{1+\frac{q}{r'}},$

即 $\|Tf\|_q \leqslant M_0^{1/r}\|f\|_p$.

$q=\infty$，此时 $p=r'$，从而有

$$\sup_x\left|\int_{R^n} K(x,y)f(y)\mathrm{d}y\right| \leqslant \sup_x\left(\int_{R^n} |K(x,y)|^r\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{r}}\|f\|_p$$

$$\leqslant M_0^{\frac{1}{r}}\|f\|_p.$$

12. 我们有

$$\left\{\int_0^\infty\left(\int_0^x g(y)\mathrm{d}y\right)^p x^{-1-r} w(x)\mathrm{d}x\right\}^{1/p}$$

$$= \left\{\int_0^\infty\left(\int_0^1 g(xy)\mathrm{d}y\right)^p w(x)x^{-r+p-1}\mathrm{d}x\right\}^{1/p}$$

$$\leqslant \int_0^1\left(\int_0^\infty g^p(xy)\cdot w(x)\cdot x^{-r+p-1}\mathrm{d}x\right)^{1/p}\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1\left(\int_0^\infty w\left(\frac{x}{y}\right)y^{r-p}x^{-r+p-1}g^p(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}\mathrm{d}y$$

$$\leqslant \int_0^1 y^{\frac{r}{p}-1}\mathrm{d}y\left(\int_0^\infty w(x)x^{-r-1}[xg(x)]^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

由此即得所证.

13. 记 $M=\sum_{k=1}^{\infty}C_k^{\frac{1}{2}}$，因为我们有

$$\left\{x:\ \left|\sum_{k=1}^{\infty}C_kT_kf(x)\right|>\lambda\right\}\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}\left\{x:\ \left|C_k^{\frac{1}{2}}T_k(x)\right|>\frac{\lambda}{M}\right\},$$

所以

$$\begin{aligned}|\{x:\ |Tf(x)|>\lambda\}|&\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\left|\left\{x:\ |T_kf(x)|>\frac{\lambda}{MC_k^{\frac{1}{2}}}\right\}\right|\\&\leqslant\frac{C}{\lambda}\|f\|_1\sum_{k=1}^{\infty}C_k^{\frac{1}{2}}\cdot M=\frac{CM^2}{\lambda}\|f\|_1.\end{aligned}$$

14. 因为我们有

$$\begin{aligned}A^2\left|\int_{\mathbf{R}^n}f(x)\cdot g(x)\mathrm{d}x\right|&=\left|\int_{\mathbf{R}^n}Tf(x)\cdot Tg(x)\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\|Tf\|_{p'}\cdot\|Tg\|_p\\&\leqslant C\|Tf\|_{p'}\|g\|_p,\end{aligned}$$

由此可知

$$\sup_{\|g\|_p\leqslant1}\left|\int_{\mathbf{R}^n}f(x)\cdot g(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant CA^{-2}\|Tf\|_{p'}.$$

即得所证.

15. 由不等式

$$\begin{aligned}\|Sg\|_r&=\left\{\int_{\mathbf{R}^n}v(x)\cdot[T(g\cdot u^{\frac{1}{p}})(x)]^r\mathrm{d}x\right\}^{1/r}\\&\leqslant\left(\int_{\mathbf{R}^n}v^{\left(\frac{q}{r}\right)'}(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r}\left(1/\left(\frac{q}{r}\right)'\right)}\left(\int_{\mathbf{R}^n}|T(gu^{\frac{1}{p}})x|^q\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\\&\leqslant C\left(\int_{\mathbf{R}^n}|g^p(x)u(x)|\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\\&\leqslant C\left(\int_{\mathbf{R}^n}u^{\left(\frac{p}{r}\right)'}(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}\left(1/\left(\frac{r}{p}\right)'\right)}\left(\int_{\mathbf{R}^n}g^r(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r}}.\end{aligned}$$

即得所证.

16. 取定 $\varepsilon>0$，对 δ：$\varepsilon/2<\delta<2\varepsilon$ 以及 $g\in C_c(\mathbf{R}^n)$，我们有

$$
\begin{aligned}
&|K_\varepsilon * f(x) - K_\delta * f(x)| \\
&\quad \leqslant \int_{\mathbf{R}^n} |K(y)||f(x-\varepsilon y) - g(x-\varepsilon y)|\mathrm{d}y \\
&\qquad + \int_{\mathbf{R}^n} |K(y)||g(x-\varepsilon y) - g(x-\delta y)|\mathrm{d}y \\
&\qquad + \int_{\mathbf{R}^n} |K(y)||g(x-\delta y) - f(x-\delta y)|\mathrm{d}y \\
&\quad \leqslant \|K\|_\infty \|f-g\|_1 (\varepsilon^{-n} + \delta^{-n}) \\
&\qquad + \|K\|_\infty \int_{\mathbf{R}^n} |g(x-\varepsilon y) - g(x-\delta y)|\mathrm{d}y \\
&\quad \leqslant \|K\|_\infty \|f-g\|_1 (2^n+1)\varepsilon^{-n} \\
&\qquad + \|K\|_\infty \varepsilon^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} \left| g(x-z) - g\left(x - \frac{\delta}{\varepsilon} z\right) \right| \mathrm{d}z.
\end{aligned}
$$

对任意给定的 $\eta>0$，选 $g(x)$ 使上式第二项小于 $\eta/2$，再选 $\delta\in A$，使上式第二项也小于 $\eta/2$，即得所证.

17. 必要性 作函数

$$
f_1(x) = \begin{cases} f(x), & |f(x)| \geqslant \lambda/2C_2, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}
$$

以及 $f_2(x)=f(x)-f_1(x)$，则

$$
|f_2(x)| \leqslant \lambda/2C_2.
$$

由此可知

$$
|Tf_2(x)| \leqslant C_2\|f\|_\infty \leqslant \lambda/2, \quad \text{a.e. } x \in \mathbf{R}^n.
$$

从而得到

$$
\begin{aligned}
&|\{x: |Tf(x)| > \lambda\}| \leqslant |\{x: |Tf_1(x)| > \lambda/2\}| \\
&\quad \leqslant \frac{2C_1}{\lambda} \int_{\mathbf{R}^n} |f_1(x)|\mathrm{d}x = \frac{2C_1}{\lambda} \int_0^\infty |\{x: |f_1(x)| > t\}|\mathrm{d}t \\
&\quad = \frac{2C_1}{\lambda} \int_0^\infty |\{x: |f(x)| > t\}\{x: |f(x)| \geqslant \lambda/2C_2\}|\mathrm{d}t \\
&\quad = \frac{2C_1}{\lambda} \int_{\lambda/2C_2}^\infty |\{x: |f(x)| > t\}|\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

充分性　首先由题设知

$$|\{x: |Tf(x)| > \lambda\}| \leqslant \frac{C_1}{\lambda}\int_0^{\infty} |\{x: |f(x)| > t\}| \mathrm{d}t = \frac{C_1}{\lambda}\|f\|_1,$$

即弱(1,1).

其次,对 $f\in L^{\infty}(\boldsymbol{R}^n)$,可知当 $t\geqslant\|f\|_{\infty}$时,有 $|\{x:|f(x)|>t\}|=0$,从而有

$$|\{x: |Tf(x)| > \lambda\}| \leqslant \frac{C_1}{\lambda}\int_{\lambda/2C_2}^{\infty} |\{x: |f(x)| > t\}| \mathrm{d}t = 0,$$

这就是说 $|Tf(x)|\leqslant C_2\|f\|_{\infty}$,即

$$\|Tf\|_{\infty} \leqslant C_2\|f\|_{\infty}.$$

19. 因为我们有 $\|\hat{f}\|_{\infty}\leqslant\|f\|_1$,所以

$$\|(f_t - f)^{\wedge}\|_{\infty} = \|\hat{f}\cdot(C^{2\pi it} - 1)\|_{\infty}|t|^2,$$

从而对一切 $\xi\cdot t$,可得

$$|\hat{f}(\xi)|\cdot|\mathrm{e}^{2\pi it} - 1| \leqslant |t|^2.$$

若 $t\neq0$,则 $|\hat{f}(\xi)||t^{-1}(\mathrm{e}^{2\pi it}-1)|\leqslant|t|$. 当 $t\to0$时,$|\hat{f}(\xi)|\leqslant0$,即 $f=0$.

20. $f(x)$是非负连续函数. 若 f 是零元,则$(\hat{\chi}_E)^2=0$,矛盾,从而 $f(x)$在某开集 $G\subset\frac{1}{2}(E+E)$上大于零.

第　二　章

1. 选 $x_1\in E$,使指标 $i(x_1)$为一切 $R_{i(x_1)}+x_1$中之最大者. 若已选 $x_1,\cdots,x_m$,则再选 $x_{m+1}\in E\setminus\bigcup_{j=1}^{m}P_{x_j}$,使得指标 $j(x_{m+1})$为最大可能者. 因为 E 是有界集,所以 $\bigcup_{j=1}P_{x_j}$也是有界集,故

$$P_{x_j}^* = x_j + \frac{1}{2}P_{i(x_j)}\quad(j = 1,2,\cdots)$$

皆互不相交,从而只能选出有限个 $x_j(j=1,2,\cdots,l)$,即

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{l}P_{x_j}.$$

3. 作函数

$$g(x)=\begin{cases} f(x), & |f(x)|>\delta\lambda, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

并注意到 $Mf(x)\leqslant Mg(x)+\delta\lambda$ 以及

$$|\{x: Mf(x)>\lambda\}|\leqslant \frac{C}{\lambda}\int_{\{x: Mf(x)>\lambda\}}|f(x)|\,\mathrm{d}x,$$

$$\{x: Mf(x)>\lambda\}\subset\{x: Mg(x)>(1-\delta)\lambda\}$$

可知

$$\begin{aligned}|\{x: Mf(x)>\lambda\}|&\leqslant \frac{C}{(1-\delta)\lambda}\int_{\{x: Mg(x)>(1-\delta)\lambda\}}|g(x)|\mathrm{d}x \\ &\leqslant \frac{C}{(1-\delta)\lambda}\int_{\{x: |f(x)|>\delta\lambda\}}|f(x)|\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

4. 我们有

$$\begin{aligned}\int_E Mf(x)\mathrm{d}x &= \int_0^\infty |E\cap\{x: Mf(x)>\lambda\}|\mathrm{d}\lambda \\ &= \left\{\int_0^{1/\delta}+\int_{1/\delta}^\infty\right\}|E\cap\{x: Mf(x)>\lambda\}|\mathrm{d}\lambda \\ &= \frac{1}{\delta}|E|+\frac{C}{1-\delta}\int_{1/\delta}^\infty\frac{1}{\lambda}\int_{\{x: f(x)\geqslant\lambda\}}f(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}\lambda \\ &= \frac{1}{\delta}|E|+\frac{C}{1-\delta}\int_{\boldsymbol{R}^n}f(x)\mathrm{d}x\int_{1/\delta}^\infty\frac{1}{\lambda}\chi_{\{x: f(x)\geqslant\delta\lambda\}}(x)\mathrm{d}\lambda \\ &= \frac{1}{\delta}|E|+\frac{C}{1-\delta}\int_{\boldsymbol{R}^n}f(x)\ln^+ f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

5. 设 $f(x)=\chi_{[-1,1]}(x)$，则

$$Mf(x)=\frac{2}{1+|x|},\quad |x|>1.$$

故 $Mf\overline{\in}L^1(\boldsymbol{R}^1)$，但 $f\in L^1(\boldsymbol{R}^1)$，$f\ln^+f\in L^1(\boldsymbol{R}^1)$.

6. 令 $G_\lambda=\{x: M_\mu f(x)>\lambda\}$，且作分解

$$f(x)=f(x)\chi_{G_\lambda}(x)+f(x)\chi_{\boldsymbol{R}^n\setminus G_\lambda}(x)\triangleq f_1(x)+f_2(x).$$

我们只需指出 $G_\lambda\subset\{x: M_\mu f_1(x)>\lambda\}$.（此时根据 M_μ 的弱(1,1)性

即得所证）

对 $x\in G_\lambda$，存在 Q：$x\in Q$ 且 $Q\subset G_\lambda$，使得

$$\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q|f(y)|\mathrm{d}\mu(y)>\lambda,$$

从而可知
$$\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q|f_1(y)|\mathrm{d}\mu(y)>\lambda,$$

由此推出
$$M_\mu f_1(x)>\lambda.$$

7. 作

$$|f|_Q=\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(x)|\mathrm{d}x>0.$$

因为 $\inf\limits_{x\in Q}M(f\chi_Q)(x)\geqslant|f|_Q$，所以 $|f|_Q<\infty$（除非 $\mu\equiv0$，要不题设不真）. 从而令

$$G=\{x:M(f\chi_Q)(x)>|f|_Q/2\},$$

可知
$$\mu(Q)\leqslant\mu(G)\leqslant\frac{C}{|f|_Q^p}\|f\chi_Q\|_{L^p(\boldsymbol{R}^n,\mathrm{d}\mu)}^p.$$

由此即得所证.

8. 作分解 $\boldsymbol{R}^n=\bigcup(Q_k\backslash Q_{k-1})$，则

$$\int_{\boldsymbol{R}^n}\frac{|f(x)|\delta^\varepsilon}{\delta^{n+\varepsilon}+|x-x_0|^{n+\varepsilon}}\leqslant\sum_{k=0}^\infty\frac{\delta^\varepsilon}{(2^k\delta)^\varepsilon}\left(\frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k}|f(y)|\mathrm{d}y\right)$$
$$\leqslant C(\varepsilon)\inf_{x\in Q_0}Mf(x).$$

9. 设 $0<q<p$，易知

$$|Tf(x)|^q\leqslant\inf_{y\in G(x,\bar r)}|Sf(y)|^q,$$

从而（对 y 在 $G(x,\bar r)$ 上作平均）有

$$|Tf(x)|^q\leqslant\frac{1}{|G(x,\bar r)|}\int_{G(x,\bar r)}|Sf(y)|^q\mathrm{d}y$$
$$\leqslant\frac{|Q(x,4\bar r)|}{|G(x,\bar r)|}\int_{Q(x,4\bar r)}|Sf(y)|^q\mathrm{d}y,$$

由此即知

$$|Tf(x)|^q\leqslant CM(|Sf|^q)(x).$$

因此，问题归结为指出$[M(|Sf|^q)]^{1/q}$是弱(p,p)型的. 这只需注意

$$|\{x: M(|Sf|^q)(x) > \lambda^q\}| \leqslant C_1\lambda^{-q}\int_{C_1\lambda^q}^{\infty}|\{x: |Sf(x)| > t^{\frac{1}{q}}\}|\mathrm{d}t$$

$$\leqslant C_2\lambda^{-q}\int_{C\lambda^q}^{\infty}\|f\|_p^p t^{-p/q}\mathrm{d}t = C\lambda^{-p}\|f\|_p^p.$$

10. 对 $x<t$，我们有

$$\frac{1}{t}\int_0^t \varphi(S)\mathrm{d}S \leqslant M(\varphi)(\xi), \quad \xi \in (0,x),$$

从而

$$\int_x^t \varphi(S)\mathrm{d}S \leqslant M(\varphi)(\xi)\cdot t.$$

在上式两端乘 t^{-3}，再从 x 到∞积分，可知

$$\int_x^{\infty}\frac{1}{t^3}\int_x^t \varphi(S)\mathrm{d}S \leqslant \int_x^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\cdot M(\varphi)(\xi),$$

$$\int_x^{\infty}\varphi(S)\left\{\int_S^{\infty}t^{-3}\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}S \leqslant \frac{1}{x}\cdot M(\varphi)(\xi),$$

$$\frac{1}{2}\int_x^{\infty}\frac{\varphi(S)}{S^2}\mathrm{d}S \leqslant \frac{1}{x}\cdot M(\varphi)(\xi).$$

即得所证.

11. 将 $I_{\alpha\delta}f(x)$写为

$$I_{\alpha\delta}f(x) = \left\{\int_{|y|<\eta} + \int_{|y|\geqslant\eta}\right\}\frac{f(x-y)}{|y|^{n-\alpha\delta}}\mathrm{d}y \triangleq J_1 + J_2.$$

易知 $J_1 \leqslant C_1\eta^{\alpha\delta}Mf(x)$. 对于 J_2，又有

$$J_2 = \int_{|y|\geqslant\eta}\frac{f(x-y)}{|y|^{n-\alpha+\alpha(1-\delta)}}\mathrm{d}y \leqslant \eta^{\alpha(\delta-1)}I_\alpha f(x).$$

因此，可得

$$I_{\alpha\delta}f(x) \leqslant C_1\eta^{\alpha\delta}Mf(x) + \eta^{\alpha(\delta-1)}I_\alpha f(x).$$

取 $\eta^\alpha = I_\alpha f(x)/Mf(x)$，我们有

$$I_{\alpha\delta}f(x) \leqslant C_1 I_\alpha^\delta f(x)\cdot(Mf(x))^{1-\delta},$$

由此得到

$$\|I_{\alpha\delta}f\|_r^r \leqslant C_2\int_{\mathbb{R}^n}|I_\alpha f(x)|^{\delta r}(Mf(x))^{(1-\delta)r}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C_2\|I_\alpha f\|_q^{\delta r}\|Mf\|_p^{(1-\delta)r}\leqslant C\|I_\alpha f\|_q^{\delta r}\|f\|_p^{(1-\delta)r}.$$

即得所证.

12. 由 S 是弱(p,p)型以及 Колмогоров 条件可知

$$\int_Q|S(\chi_Q f)(x)|^t\,\mathrm{d}x\leqslant C|Q|^{1-\frac{t}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\chi_Q(x)f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{t}{p}}$$

$$= C|Q|^{1-\frac{t}{p}}\left(\int_Q|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{t}{p}}.$$

从而由题设得到

$$|Tf(x)|^t\leqslant C|Q|^{-\frac{t}{p}}\left(\int_Q|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{t}{p}}.$$

联系到前面第9题的推理，易知 T 是(q,q)型$(q>p)$.

此外，根据

$$\{x:\ |Tf(x)|>\lambda\}\subset\{x:\ M(|f|^p)(x)>\lambda^p\},$$

以及 M 的弱(1,1)型，我们有

$$|\{x:\ |Tf(x)|>\lambda\}|\leqslant\left(\frac{C}{\lambda}\|f\|_p\right)^p.$$

即得所证.

13. 将 E 分解为有界子集$\{E_i\}$的并集：$E=\bigcup\limits_{i\geqslant 1}E_i$，我们有

$$\mu(f(E))=\mu\Big(f\Big(\bigcup_{i\geqslant 1}E_i\Big)\Big)\leqslant\sum_{i\geqslant 1}\mu(f(E_i)),$$

从而只需证明 $\mu(f(E_i))=0\ (i=1,2,\cdots)$.

作有界开集 G_i：$G_i\supset E_i$. 对任给 $\varepsilon>0$，设 $x\in E_i$，取 $Q(x,r)\subset G_i$，而且

$$\mu(f(Q(x,r)))<\varepsilon|Q(x,r)|.$$

根据 Besicovitch 覆盖定理，存在$\{Q_j\}$，使得

$$E_i\subset\bigcup_{j\geqslant 1}Q_j\subset G_i,$$

$$\sum_{j\geqslant 1}\chi_{Q_j}(x)\leqslant\theta_n,\quad \mu(f(Q_j))\leqslant\varepsilon|Q_j|.$$

由此可知

$$\begin{aligned}\mu(f(E_t))&\leqslant\sum_{j\geqslant 1}\mu(f(\theta_j))\leqslant\varepsilon\sum_{j\geqslant 1}|Q_j|\\&=\varepsilon\cdot\sum_{j\geqslant 1}\int_{R^n}\chi_{Q_j}(y)\mathrm{d}y=\varepsilon\cdot\int_{\bigcup\limits_{j\geqslant 1}Q_j}\sum_{j\geqslant 1}\chi_{Q_j}(y)\mathrm{d}y\\&\leqslant\varepsilon\cdot\theta_n\left|\bigcup_{j\geqslant 1}Q_j\right|\leqslant\varepsilon\cdot\theta_n|G_t|.\end{aligned}$$

即得所证.

14. 作函数 $g(x)=f(x)\chi_{2Q}(x)$, $h(x)=f(x)-g(x)$, 且不妨假定存在 $t\in Q$, 使得 $M_\alpha f(t)<\delta\lambda$. 从而有

$$\begin{aligned}\left|\left\{x:\ I_\alpha g(x)>\frac{\varepsilon\lambda}{2}\right\}\right|&\leqslant C\cdot(\varepsilon\lambda)^{-\frac{n}{n-\alpha}}\left(\int_{2Q}f(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{n}{n-\alpha}}\\&\leqslant C(\varepsilon\lambda)^{-\frac{n}{n-\alpha}}|Q|(M_\alpha f(x))^{\frac{n}{n-\alpha}}\leqslant C\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^{\frac{n}{n-\alpha}}\cdot|Q|.\end{aligned}$$

另一方面, 设 $S\in Q$, 使得 $I_\alpha f(S)\leqslant\lambda$, 则必存在 $l>1$, 使得 $x\in Q$, $y\overline{\in}2Q$ 时有

$$|S-y|\leqslant l|x-y|,$$

从而我们有

$$I_\alpha h(x)=\int_{(2Q)^c}\frac{f(x)}{|x-y|^{n-\alpha}}\mathrm{d}x\leqslant l^{n-\alpha}\cdot I_\alpha f(S)\leqslant L\lambda.$$

因此, 取 $\varepsilon_0=2L$, 当 $\varepsilon\geqslant\varepsilon_0$ 时, 有

$$\left\{x\in Q:\ I_\alpha h(x)>\frac{\varepsilon\lambda}{2}\right\}=\varnothing.$$

15. (i) 因为我们有

$$\left|\left\{x\in Q:\ f(x)\geqslant m_f(Q)-\frac{1}{k}\right\}\right|>\frac{1}{2}|Q|,$$

而且

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}\left\{x\in Q:\ f(x)\geqslant m_f(Q)-\frac{1}{k}\right\}=E_f(m_f(Q)),$$

所以

$$|\{x\in Q: f(x)\geqslant m_f(Q)\}|$$
$$=\lim_{k\to\infty}\left|\left\{x\in Q: f(x)>m_f(Q)-\frac{1}{k}\right\}\right|\geqslant\frac{1}{2}|Q|.$$

(ii) 对 $k\geqslant 1$,记 $\alpha_{k,j}=\dfrac{j-1}{2^k}$,以及

$$E_{k,j}=\left\{x: \frac{j-1}{2^k}\leqslant f(x)<\frac{j}{2^k}\right\},\quad S_k(x)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\alpha_{k,j}\chi_{E_{k,j}}(x),$$

易知$0\leqslant f(x)-S_k(x)\leqslant 2^{-k}$ $(x\in\boldsymbol{R}^n)$,以及

$$m_{S_k}(Q)\leqslant m_f(Q),\quad \forall\, Q\subset\boldsymbol{R}^n.$$

我们作点集 F:

$$F=\bigcap_{k=1}^{\infty}\left\{x: 存在\ j, x\in E_{k,j}, \lim_{Q\searrow x}\frac{|E_{k,j}\cap Q|}{|Q|}=1\right\}.$$

根据微分定理,可知$|\boldsymbol{R}^n\setminus F|=0$.

现在,若 $x\in F$,则存在 k,使得 $x\in E_{k,j}$,且对充分小的 Q: $x\in Q$,

$$|E_{k,j}\cap Q|>2|Q|/3,\quad m_{S_k}(Q)=\alpha_{k,j}.$$

因为$|\{y\in Q: f(y)\geqslant m_f(Q)\}|\geqslant|Q|/2$,所以存在 $y\in E_{k,j}$, $f(y)\geqslant m_f(Q)$. 由于

$$\alpha_{k,j}=S_k(x)=S_k(y),$$

故得

$$|m_f(Q)-f(x)|\leqslant|m_f(Q)-S_k(y)|+|S_k(y)-f(x)|$$
$$\leqslant|f(y)-S_k(y)|+|S_k(x)-f(x)|\leqslant 2^{-k+1}.$$

由此即得所证.

第 三 章

1. 首先,对 $f,g\in L^p\cap L^{p'}(\boldsymbol{R}^n)$,有

$$\left|\int_{\boldsymbol{R}^n}Tf(x)\cdot g(x)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{\boldsymbol{R}^n}f(x)\cdot Tg(x)\mathrm{d}x\right|$$
$$\leqslant\|Tg\|_p\cdot\|f\|_{p'}\leqslant C\|g\|_p\cdot\|f\|_{p'}.$$

从而可知

$$\|Tf\|_{p'} = \sup_{\|g\|_p \leqslant 1} \left| \int_{\mathbf{R}^n} Tf(x) \cdot g(x) \mathrm{d}x \right| \leqslant C \|f\|_{p'}.$$

其次，对 $g \in L^p(\mathbf{R}^n)$，作 $g_k \in L^p \cap L^{p'}(\mathbf{R}^n)$，使得 $\|g_k - g\|_p \to 0 (k \to \infty)$，且有

$$\lim_{k \to \infty} \left| \int_{\mathbf{R}^n} Tf(x) \cdot g_k(x) \mathrm{d}x - \int_{\mathbf{R}^n} Tf(x) \cdot g(x) \mathrm{d}x \right| = 0.$$

再对 $f \in L^{p'}(\mathbf{R}^n)$ 也作 $f_k \in L^p \cap L^{p'}(\mathbf{R}^n)$ 使 $\|f_k - f\|_{p'} \to 0 (k \to \infty)$. 由此以及内插不难证得结论.

2. 记 $X = [-\pi, \pi]$，并认定 Lebesgue 测度空间 $(X, \mathfrak{M}, m)$，又定义测度空间 (Y, N, ν) 如下：对 $M \subset N$，有

$$\nu(M) = \sum_{n \in M} (1 + |n|)^{-2}.$$

现在作算子 $T: (X, \mathfrak{M}, m) \mapsto (Y, N, \nu)$ 为

$$(Tf)(n) = n\hat{f}(n).$$

易知有 $\quad \sum (1 + |n|)^{-1} |n\hat{f}(n)|^2 \leqslant \sum |\hat{f}(n)|^2,$

即 T 是(2,2)型.

又因为在 $(Tf)(n) > t$ 时，有

$$|n\hat{f}(n)| > t \text{ 即 } |n| > \frac{t}{|\hat{f}(n)|} \geqslant \frac{t}{\|f\|_1},$$

所以对 $t > 0$ 就得到

$$\nu(\{n: |(Tf)(n)| > t\}) \leqslant \sum_{|n| > t/\|f\|_1} (1 + |n|)^{-2} \leqslant \frac{2\|f\|_1}{t},$$

即 T 是弱(1,1)型.

最后，由内插即得所证.

5. 结合例题，令

$$K(x, y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x - y)^{\alpha - 1} \chi_{(0, x)}(y),$$

并记 $q = 1/(1 - \alpha)$，易知

$$\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=\frac{1}{r}+1,\quad 1<p<r<\infty,$$

我们有 $$[K(\cdot,y)]_q=\sup_{\lambda>0}\lambda^q|\{x:|K(x,y)|>\lambda\}|$$

$$=\sup_{\lambda>0}\lambda^q|\{x:(x-y)^{-1/q}\chi_{(0,x)}(y)>\lambda\}|$$

$$=\sup_{\lambda>0}\lambda^q|\{x>y:x-y<\lambda^{-q}\}|$$

$$=\sup_{\lambda>0}\lambda^q|\{x:y<x<y+\lambda^{-q}\}|$$

$$=\sup_{\lambda>0}\lambda^q\lambda^{-q}=1.$$

同理可证$[K(x,\cdot)]_q=1$.

这说明 I_α 是弱$(1,q)$型,强(p,r)型.

6. 当 $p=2$时,结论显然成立.

此外,令 $Tf(x)=\hat{f}(x)/\varphi(x)$,以及 $\mathrm{d}\mu(x)=\varphi^2(x)\mathrm{d}x$,则有

$$\mu(\{x:\varphi(x)\leqslant t\})=2\int_0^t\lambda|\{x:\varphi(x)>\lambda\}|\mathrm{d}\lambda$$

$$\leqslant 2C\int_0^t\lambda\cdot\lambda^{-1}\mathrm{d}\lambda=2C\int_0^t\mathrm{d}\lambda=2Ct.$$

因为我们有

$$\{x:|Tf(x)|\geqslant S\}\subset\left\{x:\varphi(x)\leqslant\frac{\|f\|_1}{S}\right\},$$

所以 $$\mu(\{x:|Tf(x)|\geqslant S\})=2C\frac{\|f\|_1}{S},\quad f\in L^1(\boldsymbol{R}^n).$$

这说明 T 是弱(1,1)型,从而由内插即得所证.

7. 首先令 $E_\lambda^k=\{|x|\leqslant k:M'f(x)>\lambda\}$,则对任意的 $x\in E_\lambda^k$,存在 $B_r(x)$,$r<\frac{|x|+1}{2}$,使得

$$\frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)}|f(y)|\mathrm{d}y>\lambda.$$

根据 Besicovitch 引理,得$\{B_{r_i}(x_i)\}$,以及

$$E_\lambda^k\subset\bigcup_{i\geqslant1}B_{r_i}(x_i),\quad\sum_{i\geqslant1}\chi_{B_{r_i}(x_i)}\leqslant\theta_n.$$

注意到对一切 $y\in B_{r_i}(x_i)$，有

$$r_i<\frac{|x_i|+1}{2}=(1+|x_i|)-\frac{|x_i|+1}{2}$$

$$<1+|x_i|-r_i<1+|y|,$$

故可知，对 $y\in B_{r_i}(x_i)$，

$$\frac{1}{|B_{r_i}(x_i)|}\int_{B_{r_i}(x_i)}\varphi(x)\mathrm{d}x\leqslant M''\varphi(y).$$

从而，我们有

$$\int_{E_\lambda^k}\varphi(x)\mathrm{d}x\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\int_{B_{r_i}(x_i)}\varphi(x)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{|B_{r_i}(x_i)|}\int_{B_{r_i}(x_i)}\varphi(x)\mathrm{d}x\cdot\frac{1}{\lambda}\int_{B_{r_i}(x_i)}|f(y)|\mathrm{d}y$$

$$\leqslant\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{\infty}\int_{B_{r_i}(x_i)}|f(y)|M''\varphi(y)\mathrm{d}y.$$

即 M' 是从 $(\boldsymbol{R}^n,\varphi(x)\mathrm{d}x)$ 到 $(\boldsymbol{R}^n,M''\varphi(x)\mathrm{d}x)$ 是弱(1,1)的.

此外，由 $\varphi(x)>0$ 易知

$$\|M'f\|_{L^\infty(\varphi(x)\mathrm{d}x)}=\|M'f\|_{L^\infty(\mathrm{d}x)}$$

$$\leqslant\|f\|_{L^\infty(\mathrm{d}x)}=\|f\|_{L^\infty(M''\varphi(x)\mathrm{d}x)},$$

即 M' 从 $(\boldsymbol{R}^n,\varphi(x)\mathrm{d}x)$ 到 $(\boldsymbol{R}^n,M''\varphi(x)\mathrm{d}x)$ 是 (∞,∞) 型的，从而根据内插即得所证.

8. (i) 由第 6 题知

$$\left(\int_{\boldsymbol{R}^n}\left|\hat{f}(x)\varphi(x)^{-\frac{1}{p'}}\right|^p\varphi(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left(\int_{\boldsymbol{R}^n}|\hat{f}(x)|^p\varphi^{2-p}(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant C_1\|f\|_p.$$

(ii) 我们有

$$\left(\int_{\boldsymbol{R}^n}|\hat{f}(x)\varphi^{-\frac{1}{p'}}(x)|^{p'}\varphi(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p'}}=\left(\int_{\boldsymbol{R}^n}|\hat{f}(x)|^{p'}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p'}}\leqslant C_2\|f\|_{p'}.$$

最后，根据内插得

$$\left(\int_{\boldsymbol{R}^n}|\hat{f}(x)\varphi^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p'}}(x)|^r\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r}}=\left(\int_{\boldsymbol{R}^n}|\hat{f}(x)\varphi^{-\frac{1}{p'}}(x)|^r\varphi(x)\mathrm{d}x\right)$$

$$\leqslant C\|f\|_r.$$

第 四 章

1. 作 $\boldsymbol{R}^n$ 的分解.

$$\boldsymbol{R}^n=\bigcup_{i\geqslant1}Q_i,\quad Q_i\cap Q_j=\varnothing\ (i\neq j),$$

且记 $b(x)=(T\chi_{Q_i})(x),x\in Q_i(i=1,2,\cdots)$，则对 Q_i 中任一可测集 E，由于

$$(T(\chi_{Q_i}-\chi_E))(x)=0,\quad x\in E,$$

$$(T\chi_{Q_i})(x)=(T\chi_E)(x),\quad x\in E.$$

故对简单函数 $\varphi(x)=\sum_{j=1}^{m}a_j\chi_{E_j}(x)$，有

$$(T\varphi)(x)=\sum_{j=1}^{m}a_j(T\chi_{E_j})(x)=\sum_{j=1}^{m}a_j(T\chi_{Q_i}(x))\chi_{E_j}(x)$$

$$=b(x)\cdot\sum_{j=1}^{m}a_j\cdot\chi_{E_j}(x).$$

现在，对 $f\in L^2(\boldsymbol{R}^n)$，作简单函数列 $\{\varphi_k(x)\}$，使得

$$\lim_{k\to\infty}\|\varphi_k-f\|_2=0,\quad \lim_{k\to\infty}\varphi_k(x)=f(x),\ \text{a.e. } x\in\boldsymbol{R}^n.$$

从而有 $$\lim_{k\to\infty}\|T\varphi_k-Tf\|_2\leqslant\lim_{k\to\infty}C\|\varphi_k-f\|_2=0,$$

$$Tf(x)=\lim_{k\to\infty}T\varphi_k(x)=\lim_{k\to\infty}b(x)\varphi_k(x)=b(x)f(x).$$

2. 不妨假定 $f(x)\geqslant0$ 以及 $\|f\|_p=1$，对充分大的 λ 以及 $f^p(x)$，作 C-Z 分解，得 $\{Q_j\}$，使得

$$\lambda^q<\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}f^p(x)\mathrm{d}x\leqslant2^n\lambda^q,\ \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}f(x)\leqslant(2^n\lambda^q)^{1/p},$$

$$f^p(x)\leqslant\lambda^q,\ \text{a.e. } x\in\boldsymbol{R}^n\setminus\bigcup_{j\geqslant1}Q_j,\quad \sum_{j\geqslant1}|Q_j|\leqslant\frac{1}{\lambda^q}.$$

作函数

$$g(x)=\begin{cases} f(x), & x\in \mathbf{R}^n\setminus \bigcup\limits_{j\geqslant 1} Q_j, \\ \dfrac{1}{|Q_j|}\displaystyle\int_{Q_j} f(x)\mathrm{d}x, & x\in Q_j (j=1,2,\cdots), \end{cases}$$

$$b(x)=f(x)-g(x).$$

易知 $$\|g\|_{p_0}\leqslant \|f\|_{p_0}\cdots,$$

3. 应用

$$\int_{\mathbf{R}^n}[M(f^s)(x)]^{r/s}\chi_{B_\rho}(x)\mathrm{d}x\leqslant C\int_{\mathbf{R}^n}|f(x)|^r\cdot M\chi_{B_\rho}(x)\mathrm{d}x,$$

$(B_\rho=B(x_0,\rho))$. 可知

$$\begin{aligned}\int_{B_\rho}[M(f^s)(x)]^{r/s}\mathrm{d}x\leqslant & C\Big\{\int_{B_{2\rho}}|f(x)|^r\cdot M\chi_{B_\rho}(x)\mathrm{d}x \\ &+\sum_{k=1}^{+\infty}\int_{B_{2^{k+1}\rho}\setminus B_{2^k\rho}}|f(x)|^r M\chi_{B_\rho}(x)\mathrm{d}x\Big\} \\ \leqslant & C\Big\{\int_{B_{2\rho}}|f(x)|^r\cdot M\chi_{B_\rho}(x)\mathrm{d}x \\ &+\sum_{k=1}^{+\infty}\int_{B_{2^{k+1}\rho}\setminus B_{2^k\rho}}\frac{|f(x)|^r\rho^n}{(|x-x_0|-\rho)^n}\mathrm{d}x\Big\},\end{aligned}$$

从而得

$$\begin{aligned}\int_{B_\rho}[M(f^s)(x)]^{r/s}\mathrm{d}x\leqslant & C\|f\|_{r,n-pr}^r\cdot\Big\{(2\rho)^{n-pr} \\ &+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2^{k-1})^n}(2^{p+1}\rho)^{n-pr}\Big\} \\ \leqslant & C\|f\|_{r,n-pr}^r\cdot\rho^{n-pr}.\end{aligned}$$

4. 只需阐明Zo定理中的条件是满足的. 对此,我们有

(i) $$\begin{aligned}\|Tf\|_\infty\leqslant & \|\sup_\alpha|K_\alpha*f|\|_\infty \\ \leqslant & \|\sup_\alpha\|K_\alpha\|_1\|f\|_\infty\|_\infty\leqslant C_1\|f\|_\infty.\end{aligned}$$

(ii) 由于

$$\lim_{N\to\infty}\left\|h-\sum_{j=1}^{N}h\cdot\chi_{Q_j}\right\|_1=0,$$

故有
$$\lim_{N\to\infty}\left\|h*K_a-\sum_{j=1}^{N}K_a*(h\cdot\chi_{Q_j})\right\|_1=0.$$

由此可知

$$\lim_{N_m\to\infty}\left(h-\sum_{j=1}^{N_m}h\chi_{Q_j}\right)*K_a(x)=0,\quad \text{a.e. } x,$$

$$|(h*K_a)(x)|\leqslant\sum_j|(K_a*(h\cdot\chi_{Q_j}))(x)|,\quad \text{a.e. } x,$$

$$|Th(x)|\leqslant\sum_j|T(h\chi_{Q_j})(x)|.$$

(iii) 对 $\operatorname{supp}f\subset B(x_0,R)$,

$$\begin{aligned}\int_{|x-x_0|\geqslant C_2R}Tf(x)\mathrm{d}x&=\int_{|x-x_0|\geqslant C_2R}\sup_a|(K_a*f)(x)|\mathrm{d}x\\&=\int_{|x-x_0|\geqslant C_2R}\sup\left|\int K_a(x-y)f(y)\mathrm{d}y\right.\\&\qquad\left.-\int K_a(x-x_0)f(y)\mathrm{d}y\right|\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_{|x-x_0|\geqslant C_2R}\left(\int_{|x_0-y|\leqslant R}|f(y)|\sup_a|K_a(x-y)\right.\\&\qquad\left.-K(x-x_0)|\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\&\leqslant C_3\int_{|x_0-y|\leqslant R}|f(y)|\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

5. 只需阐明 T 是弱 $(1,r)$ 型即可(根据 Marcinkiewicz 内插).

设 $f\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$ 且非负,对 $t>0$,作 C-Z 分解有 $\{Q_k\}$,并作

$$g(x)=\begin{cases}f(x), & x\in\boldsymbol{R}^n\setminus\bigcup_{k\geqslant1}Q_k,\\ \dfrac{1}{|Q_k|}\displaystyle\int_{Q_k}f(x)\mathrm{d}x, & x\in Q_k(k=1,2,\cdots),\end{cases}$$

$b(x)=f(x)-g(x)$.

则 $$|g(x)| \leqslant 2^n t, \quad t < \frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k} f(x)\mathrm{d}x \leqslant 2^n t.$$

我们有

(i) $E_{+g}(\lambda/2) \leqslant C\lambda^{-q_0}\left(\int |g(x)|^{p_0}\right)^{q_0/p_0}$

$\leqslant C\lambda^{-q_0} t^{q_0(p_0-1)/p_0}\|f\|_1$

$= C\lambda^{-r}\|f\|_1^r$（取 $t = \lambda^r\|f\|_1^{1-r}$ 时）.

(ii) 记 $\Omega^* = \bigcup_{k\geqslant 1} Q_k^*$，$Q_k^* = C_2 \cdot d(Q_k)Q_k$，以及 $b_k(x) = b(x)\times \chi_{Q_k}(x)$ $(k=1,2,\cdots)$，则

$$\left(\int_{(\Omega^*)^c} |Tb(x)|^r \mathrm{d}x\right)^{1/r} \leqslant \left(\int_{(Q^*)^c}\left(\sum_{k\geqslant 1}|Tb_k(x)|\right)^r \mathrm{d}x\right)^{1/r}$$

$$\leqslant \sum_{k\geqslant 1}\left(\int_{(Q_k^*)^c}|Tb_k(x)|^r\mathrm{d}x\right)^{1/r} \leqslant C\sum_{k\geqslant 1}\|b_k\|_1 = C\|b\|_1.$$

由此可得

$$\left|E_{Tb}\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right| \leqslant |\Omega^*| + \left|\left\{x \in (\Omega^*)^c : |Tb(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right|$$

$$\leqslant |\Omega^*| + \frac{2}{\lambda^r}\int_{(\Omega^*)^c}|Tb(x)|^r\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C_1|\Omega| + \frac{2C_2}{\lambda^r}\|b\|_1^r \leqslant \frac{C}{t}\|f\|_1 + C\lambda^{-r}\|f\|_1^r$$

$$= C\lambda^{-r}\|f\|_1^r \text{（取 } t = \lambda^r\|f\|_1^{1-r}\text{）}.$$

6. 因为 $|Tf(x)| \leqslant |T(f-g)(x)| + |Tg(x)|$，所以

$$|\{x: |Tf(x)| > \lambda\}| \leqslant \left|\left\{x: |T(f-g)(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| + \left|\left\{x: |Tg(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right|.$$

(i) 由 $|g(x)| \leqslant C\lambda$ 以及 T 的弱 $(2,2)$ 型，可知

$$\left|\left\{x: |Tg(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| \leqslant \frac{C}{\lambda^2}\int_{\mathbf{R}^n}|g(x)|^2\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \frac{C}{\lambda^2}\int_{\mathbf{R}^n}\lambda|g(x)|\mathrm{d}x = \frac{C}{\lambda}\|g\|_1 \leqslant \frac{C}{\lambda}\|f\|_1.$$

(ii) 我们有

$$\left|\left\{x:\ |T(f-g)(x)|>\frac{\lambda}{2}\right\}\right|$$
$$\leqslant |G|+\left|\left\{x\in \boldsymbol{R}^n\backslash G:\ |T(f-g)(x)|>\frac{\lambda}{2}\right\}\right|.$$

注意到$|G|\leqslant C\|f\|_1/\lambda$,可得

$$\left|\left\{x\in \boldsymbol{R}^n\backslash G:\ |T(f-g)(x)|>\frac{\lambda}{2}\right\}\right|$$
$$\leqslant \frac{C}{\lambda}\int_{\boldsymbol{R}^n\backslash G}|T(f-g)(x)|\mathrm{d}x\leqslant \frac{C}{\lambda}\|f\|_1.$$

即得所证.

第　五　章

1. 由题设易知 $f\in L^1(\boldsymbol{R}^1)$,再注意到 $f\in L^2(\boldsymbol{R}^n)$,以及 H 的 L^2有界性,可得 $Hf\in L^2$. 我们有

$$\begin{aligned}xHf(x)&=\mathrm{P.V.}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{x-y}f(y)\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\mathrm{d}y+\mathrm{P.V.}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{x-y}\mathrm{d}y\\&=H(yf(y))(x).\end{aligned}$$

由于 $yf\in L^2(\boldsymbol{R}^1)$,故 $xHf\in L^2(\boldsymbol{R}^1)$,从而由 $Hf\in L^2(\boldsymbol{R}^1)$以及 $xHf\in L^2(\boldsymbol{R}^1)$得出 $Hf\in L^1(\boldsymbol{R}^1)$.

第　六　章

2. 设 $Q_0\subset Q_1\subset\cdots\subset Q_k\subset\cdots$,且

$$|Q_k|=(\alpha^{-1})^k|Q_0|\ \ (\alpha,\beta \text{ 为 } A_\infty \text{ 常数}),$$

则由 $|a_0|=\alpha|Q_1|\Rightarrow w(Q_0)\leqslant\beta w(Q_1)$,可知

$$w(Q_0)\leqslant\beta^k w(Q_k).$$

我们有

$$\int_{\boldsymbol{R}^n}w(x)\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_{Q_k}w(x)\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{k\to\infty} w(Q_k) \geqslant \lim_{k\to\infty} \beta^{-k} w(Q_0) = \infty.$$

3. 由强倍测度性以及 $w \in A_{p-\epsilon}$ 可知

$$\frac{w(2^k B_0)}{w(B_0)} \leqslant C\left(\frac{|2^k B_0|}{|B_0|}\right)^{p-\epsilon} = C 2^{nk(p-\epsilon)} \cdot w(B_0),$$

从而有

$$\int_{R^n} \frac{w(x)}{(1+|x|)^{np}} \mathrm{d}x \leqslant C\left\{w(B_0) + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-nkp} \int_{2^{k+1}B_0 \setminus 2^k B_0}\right\} w(x) \mathrm{d}x$$

$$\leqslant C\left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-nkp} 2^{nk(p-\epsilon)}\right\} w(B_0).$$

4. 我们有

$$C|Q| \geqslant (w_Q)^{\frac{1}{p-1}} \left(\int_Q w(x)^{-\frac{1}{p-1}} \mathrm{d}x\right)$$

$$\geqslant (w_Q)^{\frac{1}{p-1}} \left(\int_{\{x\in Q:\, w(x) < \beta w_Q\}} w(x)^{-\frac{1}{p-1}} \mathrm{d}x\right)$$

$$\geqslant (w_Q)^{\frac{1}{p-1}} \left(\int_{\{x\in Q:\, w(x) < \beta w_Q\}} (\beta w_Q)^{-\frac{1}{p-1}} \mathrm{d}x\right)$$

$$\geqslant \beta^{-\frac{1}{p-1}} |\{x \in Q:\, w(x) < \beta w_Q\}|.$$

5. 我们有

$$w(E) \leqslant \left(\int_E w^{1+\epsilon}(x) \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{1+\epsilon}} |E|^{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}}$$

$$\leqslant C|Q|^{\frac{1}{1+\epsilon}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) \mathrm{d}x\right) |E|^{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}}$$

$$\leqslant C\left(\frac{|E|}{|Q|}\right)^{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}} w(Q).$$

6. 因为我们有

$$\left(\frac{w(Q)}{|Q|}\right)\left(\int_Q w(x)^{-\frac{1}{p-1}} \mathrm{d}x / |Q|\right)^{p-1} \leqslant C,$$

由此可知

$$\left(\frac{w(Q)}{|Q|}\right)^p \left(\int_Q w(x)^{-\frac{1}{p-1}} \mathrm{d}x / w(Q)\right)^{p-1} \leqslant C.$$

从而得到

$$\left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q w(x)^{-\frac{p}{p-1}}w(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{p-1}{p}} \leqslant C\,\frac{1}{w(Q)}\int_Q w^{-1}(x)w(x)\mathrm{d}x.$$

7. 由 Hölder 不等式可知

$$\begin{aligned} w(Q)\,\frac{|Q\backslash E|}{|Q|} &= \int_{Q\backslash E} w_Q \mathrm{d}x \\ &\leqslant \left(\int_{Q\backslash E}\left(\frac{w_Q}{w(x)}\right)^{p'} w(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_Q w(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

即 $$w(Q)^{\frac{1}{p'}}\,\frac{|Q\backslash E|}{|Q|} \leqslant \left(\int_{Q\backslash E}\left(\frac{w_Q}{w(x)}\right)^{p'} w(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

从而根据 $w\in A_p$ 以及 $|E|\leqslant|Q|/2$，可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{p'}A_p^{p'}}\int_Q\left(\frac{w_Q}{w(x)}\right)^{p'} w(x)\mathrm{d}x &\leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{p'} w(Q) \\ &\leqslant \int_{Q\backslash E}\left(\frac{w_Q}{w(x)}\right)^{q} w(x)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

我们有

$$\int_E\left(\frac{w_Q}{w(x)}\right)^{p'} w(x)\mathrm{d}x \leqslant a\int_Q\left(\frac{w_Q}{w(x)}\right)^{p'} w(x)\mathrm{d}x,$$

其中 $a=1-(2A_p)^{-p'}$.

8. 我们有

$$\begin{aligned} \int_Q w(x)^{-\frac{1}{p-1}}\mathrm{d}x &= \frac{1}{p-1}\int_0^\infty \lambda^{\frac{1}{p-1}}|\{x\in Q:\ w^{-1}(x)>\lambda\}|\mathrm{d}\lambda \\ &= \frac{1}{p-1}\left\{\int_0^{A/w_Q}+\sum_{k=1}^{+\infty}\int_{A^k/w_Q}^{A^{k+1}/w_Q}\right\} \\ &\quad\times|\{x\in Q:\ w^{-1}(x)>\lambda\}|\lambda^{\frac{1}{p-1}-1}\mathrm{d}\lambda \\ &\leqslant C\left(\frac{A}{w_Q}\right)^{\frac{1}{p-1}}+C\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\eta A^{\frac{1}{p-1}}\right)^k (w_Q)^{-\frac{1}{p-1}}|Q|. \end{aligned}$$

现在，选取 p 充分大，使得 $\eta A^{1/(p-1)}<1$，从而上式中的级数收

敛，由此知

$$\int_Q w(x)^{-\frac{1}{p-1}}\mathrm{d}x \leqslant C|Q|w_Q^{-\frac{1}{p-1}},$$

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)\mathrm{d}x\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{-\frac{1}{p-1}}\mathrm{d}x\right)^{p-1} \leqslant C.$$

9. 由题设知，对测度可与 $|Q|$ 比较的 Q 中可测集 E，有

$$w(x) \geqslant C\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)\mathrm{d}y, \quad x \in E.$$

在上式两端作 s 乘幂并积分，得到

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q w^s(x)\mathrm{d}x \geqslant C\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)\mathrm{d}y\right)^s.$$

即得所证.

10. 由 Hölder 不等式可知

$$1 \leqslant \left(\frac{1}{|Q_i|}\int_{Q_i} w(x)\mathrm{d}x\right)\left(\frac{1}{|Q_i|}\int_{Q_i} w(x)^{-\frac{1}{p-1}}\mathrm{d}x\right)^{p-1},$$

故可得

$$\left(\frac{1}{|Q_i|}\int_{Q_i} w(x)^{-\frac{1}{p-1}}\mathrm{d}x\right)^{-(p-1)} \leqslant \frac{1}{|Q_i|}\int_{Q_i} w(x)\mathrm{d}x.$$

因为 $|Q|=2^n|Q_i|$，所以根据 A_p 条件知

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)\mathrm{d}x &\leqslant C_1\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{-\frac{1}{p-1}}\mathrm{d}x\right)^{-(p-1)}\\ &\leqslant C_1\left(\frac{1}{2^n|Q_i|}\int_{Q_i} w(x)^{-\frac{1}{p-1}}\mathrm{d}x\right)^{-(p-1)}\\ &\leqslant C_1 2^{n(p-1)}\frac{1}{|Q_i|}\int_{Q_i} w(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

即得所证.

11. 根据 Hölder 不等式，我们有

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{1+\delta_p}\mathrm{d}x\right)^{1/(1+\delta_p)} \leqslant C_p\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)\mathrm{d}x\right),$$

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q (w^{1-p'}(x))^{1+\delta_{p'}}\right)^{1/(1+\delta_p)} \leqslant C_{p'}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1-p'}(x)\mathrm{d}x\right),$$

当 $\delta_p<\delta_{p'}$ 时，可知

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1+\delta_p}(x)\mathrm{d}x\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q (w^{1+\delta_p}(x))^{1-p'}\mathrm{d}x\right)^{p-1}$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1+\delta_p}(x)\mathrm{d}x\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q (w^{1-p'}(x))^{1+\delta_{p'}}\right)^{\frac{(p-1)(1+\delta_p)}{1+\delta_{p'}}}$$

$$\leqslant C_p\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)\mathrm{d}x\right)^{1+\delta_p}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1-p'}(x)\mathrm{d}x\right)^{(p-1)(1+\delta_p)}\cdot C_{p'}$$

$\leqslant C_pC_{p'}C^{1+\delta_p}$. (当 $\delta_{p'}<\delta_p$ 时也类似地可得)

12. (i)$\Rightarrow$(ii) 只需注意

$$M(\chi_E(x))\geqslant\frac{|E|}{|Q|}\chi_Q(x).$$

(ii)$\Rightarrow$(i) 在不等式

$$\frac{|E|}{|Q|}\leqslant C_2\left(\frac{w(E)}{w(Q)}\right)^{1/p}$$

两端对一切 Q: $x\in Q$ 取上确界，可知

$$M(\chi_E)(x)\leqslant C_2(M_w(\chi_E)(x))^{1/p}.$$

因为 $w(Q^*)\leqslant Cw(Q)$，故 M_w 是弱 $(1,1)_w$ 的，所以

$$\int_{\{x:\ M(\chi_E)(x)>\lambda\}}w(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_{\{x:\ (M_w(\chi_E)(x))^{1/p}>\lambda/C_2\}}w(x)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C_1C_2^p\int\chi_E(x)w(x)\mathrm{d}x/\lambda^p=\frac{C}{\lambda^p}w(E).$$

13. 记 $E_k=\left\{x:\ \frac{1}{k}\leqslant w(x)<\frac{1}{k-1}\right\}$ $(k=2,3,\cdots)$，$E_1=\{x:\ w(x)\geqslant 1\}$，并作函数

$$g(x)=\sum_{k=1}^{\infty}2^k\chi_{E_k}(x),\ T_0f(x)=g^{-1}(x)\cdot Tf(x),$$

我们有

$$|\{x:\ |T_0f(x)|>\lambda\}|=\sum_{k=1}^{\infty}|\{x\in E_k:\ |Tf(x)|>2^k\lambda\}|$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}k\int_{\{x:\ |Tf(x)|>2^k\lambda\}}w(x)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \frac{1}{\lambda^p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p}{2^{kp}} \|f\|_p^p = C\left(\frac{\|f\|_p}{\lambda} \right)^p.$$

14. 由题设知，对任一 $\delta>0$，有

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_B |w(x)|^{2(1+\delta)} \mathrm{d}x \right)^{1/2(1+\delta)} \leqslant C_1 \left(\frac{1}{|B|} \int_B w^2(x) \mathrm{d}x \right)^{1/2},$$

即 w^2 满足反 Hölder 不等式，从而存在 $q\in(1,\infty)$，使得

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_B w^2(x) \mathrm{d}x \right) \left(\frac{1}{|B|} \int_B |w(x)|^{-\frac{2}{q-1}} \mathrm{d}x \right)^{q-1} \leqslant C_3,$$

根据 Schwarz 不等式可得

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_B |w(x)| \mathrm{d}x \right) \left(\frac{1}{|B|} \int_B |w(x)|^{-\frac{2}{q-1}} \mathrm{d}x \right)^{\frac{q-1}{2}} \leqslant C_3^{\frac{1}{2}}.$$

现在取 $p=(q+1)/2>1$，我们有

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_B |w(x)| \mathrm{d}x \right) \left(\frac{1}{|B|} \int_B |w(x)|^{-\frac{1}{p-1}} \mathrm{d}x \right)^{p-1} \leqslant C_2 = C_3^{\frac{1}{2}}.$$

15. (i) 根据 Fubini 定理，我们有

$$\|f * \varphi_\delta\|_{L_w^1} \leqslant \int_{\mathbf{R}^n} |f(y)| \left(\int_{\mathbf{R}^n} |\varphi_\delta(x-y)| w(x) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

注意 $\{\ \} \leqslant Cw^*(y)$ 以及 $w\in A_1$ 即得所证.

(ii) 我们有

$$\begin{aligned}
&\|(f * \varphi_\delta) - f\|_{L_w^1} \\
&\quad \leqslant \int_{\mathbf{R}^n} \left(\int_{\mathbf{R}^n} |f(x-y) - f(x)| |\varphi_\delta(y)| \mathrm{d}y \right) w(x) \mathrm{d}x \\
&\quad = \left\{ \int_{\mathbf{R}^n} \int_{|y|>N} + \int_{|x|>2N} \int_{|y|\leqslant N} + \int_{|x|\leqslant 2N} \int_{|y|\leqslant N} \right\} \\
&\qquad \times |f(x-y) - f(x)| |\varphi_\delta(y)| \mathrm{d}y w(x) \mathrm{d}x \\
&\quad = J_1 + J_2 + J_3,
\end{aligned}$$

易知当 $\delta\to\infty$ 时，$J_3\to 0$.

对 J_1，我们有

$$J_1 \leqslant \int_{\mathbf{R}^n} \left(\int_{|y|>N} |f(x-y)| |\varphi_\delta(y)| \mathrm{d}y \right) w(x) \mathrm{d}x$$

$$+\int_{R^n}\left(\int_{|y|>N}|f(x)||\varphi_\delta(y)|\mathrm{d}y\right)w(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{R^n}|f(y)|\left(\int_{|x-y|>N}w(x)|\varphi_\delta(x-y)|\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

$$+\|f\|_{L_w^1}\int_{|y|>N}|\varphi_\delta(y)|\mathrm{d}y.$$

注意到上式右端第二项就是

$$\|f\|_{L_w^1}\int_{|y|>\delta N}|\varphi(y)|\mathrm{d}y,$$

而第一项是小于等于

$$C\int_{R^n}|f(y)|\left(\int_{|x-y|>1}w(x)\frac{\delta^n}{(\delta|x-y|)^{n+1}}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

(φ速降)，上式括号中积分至多为

$$C\cdot\delta^{-1}w^*(y)\leqslant C\delta^{-1}\cdot w(y).$$

对 J_2，我们有

$$J_2\leqslant\int_{|x|>2N}\left(\int_{|y|<N}|f(x-y)||\varphi_\delta(y)|\mathrm{d}y\right)w(x)\mathrm{d}x$$

$$+\int_{|x|>2N}\left(\int_{|y|<N}|f(x)||\varphi_\delta(y)|\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

综上分析，存在与 f,δ 和 N 无关的常数 C，使得

$$J_1\leqslant C\|f\|_{L_w^1}\left(\int_{|y|>\delta N}|\varphi(y)|\mathrm{d}y+\delta^{-1}\right),$$

$$J_2\leqslant C\int_{|x|>2N}|f(x)|w(x)\mathrm{d}x.$$

即得所证.

16. 设 $f\in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$，$p<q<\infty$，选 $s>1$（后文中再定），我们有

$$\int_{R^n}|Tf(x)|^q\mathrm{d}x=\int_{R^n}|Tf(x)|^p(|Tf(x)|^{(q-p)s})^{1/s}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\int_{R^n}|Tf(x)|^p[M(|Tf|^{(q-p)s})(x)]^{1/s}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C'\int_{R^n}|f(x)|^p[M(|Tf|^{(q-p)s})(x)]^{1/s}\mathrm{d}x.$$

根据 Hölder 不等式，又有

$$\int_{\mathbb{R}^n}|Tf(x)|^q\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C'\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^q\mathrm{d}x\right)^{p/q}\left(\int_{\mathbb{R}^n}[M(|Tf|^{(q-p)s})(x)]^{\frac{q}{s(q-p)}}\right)^{1-p/q}.$$

现在取 s 使得 $r=q/s(q-p)>1$，则由 M 的 (r,r) 型，可知

$$\|Tf\|_q\leqslant C(T,S)\|f\|_q.$$

17. 对 Q，取 $\operatorname{supp}f\subset Q$ 且 $f_Q>0$的非负函数 $f(x)$，选 Q' 与 Q 相接且使得对于 $x\in Q'$以及 $y\in Q$，均有

$$x_j\geqslant y_j(j=1,2,\cdots,n),$$

作函数 $Rf(x)=\sum_{j=1}^n R_jf(x)$，易知对 $x\in Q'$，有

$$Rf(x)\geqslant C\int_Q\frac{f(y)}{|x-y|^n}\mathrm{d}y\geqslant Cf_Q.$$

从而可知 $$w(Q')\leqslant Ct^{-p}\int_Q f^p(x)w(x)\mathrm{d}x.$$

由此得 $w(Q')\leqslant Cw(Q)$.

同理我们有 $w(Q)\leqslant Cw(Q)$，这说明

$$(f_Q)^p w(Q)\leqslant C^2\int_Q f^p(x)w(x)\mathrm{d}x.$$

18. 反证法. 假定存在点 $\bar{x}$，以及 $r_k\nearrow\infty$，$C>0$，使得

$$\frac{1}{|B_{r_k}(\bar{x})|}\int_{B_{r_k}(\bar{x})}f(x)\mathrm{d}x\geqslant C>0,\qquad(*)$$

则不难证明 $(*)$对一切 x均成立. 事实上，对任意的 x_1，记 $|\bar{x}-x_1|=\delta>0$，则

$$\frac{1}{B_{r_k+\delta}(x_1)}\int_{B_{r_k+\delta}(x_1)}f(x)\mathrm{d}x=\frac{|B_{r_k}(\bar{x})|}{|B_{r_k+\delta}(x_1)|}\frac{1}{|B_{r_k}(\bar{x})|}\int_{B_{r_k+\delta}(x_1)}f(x)\mathrm{d}x$$

$$\geqslant\frac{|B_{r_k}(\bar{x})|}{|B_{r_k+\delta}(x_1)|}\frac{1}{|B_{r_k}(\bar{x})|}\int_{B_{r_k}(\bar{x})}f(x)\mathrm{d}x$$

$$\geqslant\frac{|B_{r_k}(\bar{x})|}{|B_{r_k+\delta}(x_1)|}C\to C\quad(k\to\infty).$$

由此又推出 $Mf(x)\geqslant C>0(x\in \boldsymbol{R}^n)$，使得

$$\int_{\boldsymbol{R}^n}(Mf(x))^p w(x)\mathrm{d}x=\infty,$$

而与 $f\in B_p$ 矛盾.

关于稠密性，先看 $f_1(x)\triangleq f(x)\chi_{B(0,r)}(x)$，因为

$$M(f_r-f)(x)\leqslant 2Mf(x),\quad \int_{\boldsymbol{R}^n}(Mf(x)^p w(x))\mathrm{d}x<\infty,$$

所以根据控制收敛定理，我们有

$$\lim_{r\nearrow\infty}\int_{\boldsymbol{R}^n}(M(f_r-f)(x))^p w(x)\mathrm{d}x=0,$$

这说明具有紧支集的函数在 B_p 中稠密.

其次，设 f 具有紧支集，且

$$\int_{\boldsymbol{R}^n}(Mf(x))^p w(x)\mathrm{d}x<\infty,$$

取 $\varphi\in C_c^\infty(\boldsymbol{R}^n)$，$\int_{\boldsymbol{R}^n}\varphi(x)\mathrm{d}x=1$，$\mathrm{supp}\varphi\subset B(0,1)$，且记 $\varphi_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$ $(\varepsilon>0)$，则 $f*\varphi_\varepsilon\in C_c^\infty(\boldsymbol{R}^n)$. 由 $f\in B_p$ 可知 $f\in L_{\mathrm{loc}}$，从而 $f\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$. 因为

$$|\{x:M(f-f*\varphi_\varepsilon)(x)>t\}|\leqslant\frac{A}{t}\int_{\boldsymbol{R}^n}|f(x)-(f*\varphi)(x)|\mathrm{d}x,$$

所以 $M(f-f*\varphi_\varepsilon)(x)\to 0$ $(\varepsilon\to 0,\mathrm{a.e.}\ x\in\boldsymbol{R}^n)$.

此外，根据

$$M(f*\varphi_\varepsilon)(x)\leqslant C\cdot Mf(x),$$

可得
$$M(f-f*\varphi_\varepsilon)^p(x)\leqslant C(Mf(x))^p.$$

因此再用控制收敛定理，推出

$$\lim_{\varepsilon\to\infty}\int_{\boldsymbol{R}^n}M(f-f*\varphi_\varepsilon)^p(x)w(x)\mathrm{d}x=0,$$

即 $C_c^\infty(\boldsymbol{R}^n)$在 B_p 中稠.

19. 当 $\alpha=0(\alpha=1)$时有

$$w_1^\alpha w_2^{1-\alpha}=w_2(w_1),$$

故结论自然成立.

当 $0<\alpha<1$时，我们有

$p=1$：

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q w_1^{\alpha}(x)w_2^{1-\alpha}(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{|Q|}\left(\int_Q w_1(x)\mathrm{d}x\right)^{\alpha}\left(\int_Q w_2(x)\mathrm{d}x\right)^{1-\alpha}$$
$$\leqslant w_1^{\alpha}(x)\cdot w_2^{(1-\alpha)}(x),\ \text{a.e.}\ x.$$

$p>1$：由

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q(w_1^{\alpha}(x)\cdot w^{1-\alpha}(x))^{-\frac{1}{p-1}}\mathrm{d}x$$
$$\leqslant\frac{1}{|Q|}\left(\int_Q w_1^{-\frac{1}{p-1}}(x)\mathrm{d}x\right)^{\alpha}\left(\int_Q w_2^{-\frac{1}{p-1}}(x)\mathrm{d}x\right)^{1-\alpha}$$

可知

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q w_1^{\alpha}(x)\cdot w_2^{1-\alpha}(x)\mathrm{d}x$$
$$\cdot\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q(w_1^{\alpha}(x)\cdot w_2^{1-\alpha}(x))^{-\frac{1}{p-1}}\mathrm{d}x\right)^{p-1}\leqslant C.$$

第 七 章

1. 因为我们有

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}}\leqslant\sup_Q\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(x)-f_Q|\mathrm{d}x\right)$$
$$\leqslant\sup_Q\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(x)-f_Q|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}$$
$$\leqslant\sup_Q\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q[f^2(x)-2f_Qf(x)+f_Q^2]\mathrm{d}x\right)^{1/2}$$
$$\leqslant\sup_Q\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

2. 因为我们有

$$(f\vee C)(x)=\frac{1}{2}(f(x)+C(x))+\frac{1}{2}|f(x)-C(x)|,$$

$$(f\wedge C)(x)=\frac{1}{2}(f(x)+C(x))-\frac{1}{2}|f(x)-C(x)|,$$

所以得到

$$M^{\#}(f \vee C)(x) \leqslant \frac{1}{2}M^{\#}(f+C)(x) + \frac{1}{2}M^{\#}(|f-C|)(x)$$

$$\leqslant \frac{1}{2}M^{\#}(f+C)(x) + M^{\#}(f-C)(x) \leqslant \frac{3}{2}M^{\#}f(x).$$

这里用到 $M^{\#}(|f|)(x) \leqslant 2M^{\#}(f)(x)$，这是因为

$$\frac{1}{|B|}\int_B \big||f(y)| - |f|_B\big| \mathrm{d}y$$

$$\leqslant \frac{1}{|B|}\int_B \big||f(y)| - |f_B|\big| \mathrm{d}y + \frac{1}{|B|}\int_B \big||f_B| - |f|_B\big| \mathrm{d}y,$$

而后者为

$$\frac{1}{|B|}\int_B \left|\frac{1}{|B|}\int_B (|f(x)| - |f_B|)\mathrm{d}x\right| \mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{|B|}\int_B \big||f(x)| - |f_B|\big| \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{|B|}\int_B |f(y) - f_B| \mathrm{d}y.$$

3. 令 $Q_k = 2^k Q_0, Q_{k+1} = 2^{k+1}Q_0$，则

$$|f_{Q_{k+1}} - f_{Q_k}| \leqslant 2^n \|f\|_\infty, \quad |f_{Q_k} - f_{Q_0}| \leqslant k2^n \|f\|_{\mathrm{BMO}}.$$

记 $Q_{-1} = \varnothing$，我们有

$$\int_{R^n} \frac{|f(x) - f_{Q_0}|}{\delta^{n+\varepsilon} + |x - x_0|^{n+\varepsilon}}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=0}^{\infty}\int_{Q_k - Q_{k-1}} \frac{|f(x) - f_{Q_0}|}{\delta^{n+\varepsilon} + |x - x_0|^{n+\varepsilon}}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant C_1 \sum_{k=0}^{\infty}\int_{Q_k} \frac{1}{(2^k\delta)^{n+\varepsilon}} |f(x) - f_{Q_0}| \mathrm{d}x$$

$$\leqslant C_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2^k\delta)^{\varepsilon}} \left(\frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k} |f(x) - f_{Q_0}| \mathrm{d}x\right)$$

$$\leqslant C_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2^k\delta)^{\varepsilon}} (k+1)2^n \|f\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant \frac{C(\varepsilon)}{\delta^{\varepsilon}} \|f\|_{\mathrm{BMO}}.$$

4. 因为 $M_\alpha(f)(x) \leqslant \|f\|_p$，所以只需指出

$$M^{\#}(I_\alpha f)(x) \leqslant CM_\alpha(f)(x).$$

记 $Q = Q(x,r)$，并作

$$f(x) = f(x)\chi_{2Q}(x) + f(x)\chi_{R^n \setminus 2Q}(x) = f_1(x) + f_2(x).$$

(i) 我们有

$$\left|\int_Q I_\alpha f_1(y)\right|\mathrm{d}y \leqslant \int_{2Q}|f(t)|\left(\int_{Q(t,4r)}\frac{\mathrm{d}y}{|y-t|^{n-\alpha}}\right)\mathrm{d}t$$

$$\leqslant Cr^n\frac{1}{r^{n-\alpha}}\int_{2Q}|f(t)|\mathrm{d}t \leqslant Cr^n M_\alpha f(x).$$

由此可知$|(I_\alpha f)_Q|\leqslant CM_\alpha f(x)$，从而得

$$\int_Q|I_\alpha f_1(y)-(I_\alpha f_1)_Q|\mathrm{d}y \leqslant Cr^n M_\alpha f(x).$$

(ii) $t\in Q$，我们有

$$|I_\alpha f_2(y)-I_\alpha f_2(t)|\leqslant \int_{R^n}\left[\frac{f_2(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}-\frac{f_2(y)}{|t-y|^{n-\alpha}}\right]\mathrm{d}y$$

$$\leqslant Cr\int_{R^n\setminus 2Q}\frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha-1}}\mathrm{d}y \leqslant CM_\alpha f(x).$$

5. 记$Q=Q(x,t)$，并作分解

$$f(x)=(f(x)-f_Q)\chi_Q(x)+(f(x)-f_Q)\chi_{R^n\setminus Q}(x)+f_Q.$$

易知$f_Q*\psi_t(x)=0$，从而有

$$f*\psi_t(x)=\int_Q[f(y)-f_Q]\psi_t(x-y)\mathrm{d}y$$

$$+\int_{R^n\setminus Q}[f(y)-f_Q]\psi_t(x-y)\mathrm{d}y=J_1+J_2.$$

显然，对J_1有

$$|J_1|\leqslant Ct^{-n}\int_Q|f(y)-f_Q|\mathrm{d}y\leqslant C\|f\|_{\mathrm{BMO}};$$

而对J_2，又有

$$|J_2|\leqslant \sum_{k=0}^{\infty}\int_{2^{k+1}Q\setminus 2^kQ}[|f(y)-f_{2^{k+1}Q}|$$

$$+|f_{2^{k+1}Q}-f_Q|]|\psi_t(x-y)|\mathrm{d}y$$

$$\leqslant C\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k\alpha}(2^kt)^{-n}\left(\int_{2^{k+1}Q}|f(y)-f_{2^{k+1}Q}|\mathrm{d}y\right.$$

$$\left.+k(2^kt)^n\|f\|_{\mathrm{BMO}}\right)$$

$$\leqslant C\Big(\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)2^{-ka}\Big)\|f\|_{\mathrm{BMO}}.$$

6. 由 $f\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$，对 $\lambda>0$，可作 C-Z 分解：

$$\boldsymbol{R}^n=\Big(\bigcup_{k\geqslant 1}Q_k\Big)\cup P,\quad f(x)\leqslant\lambda,\text{a. e. }x\in P.$$

我们有

$$\int_{\boldsymbol{R}^n}|f(x)|^p\mathrm{d}x=\int_{\bigcup\limits_{k\geqslant 1}Q_k}|f(x)|^p\mathrm{d}x+\int_P|f(x)|^p\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\sum_{k\geqslant 1}\int_{Q_k}|f(x)|^p\mathrm{d}x+a^{p-1}\int_{\boldsymbol{R}^n}|f(x)|\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{k\geqslant 1}K\cdot|Q_k|\cdot P\int_0^{\infty}t^{p-1}\mathrm{e}^{-\frac{bt}{\|f\|_*}}\mathrm{d}t+\lambda^{p-1}\|f\|_1$$

$$\leqslant K\|f\|_*\cdot C_p\sum_{k\geqslant 1}|Q_k|+\lambda^{p-1}\|f\|_1$$

$$\leqslant\frac{KC_p\|f\|_*}{\lambda}\|f\|_1+\lambda^{p-1}\|f\|_1(\text{令 }\lambda^p=KC_p\|f\|_*)$$

$$=2A_p^{p-1}\|f\|_1\|f\|_*^{(p-1)/p}(\lambda=A_p\|f\|_*^{1/p}).$$

从而得

$$\|f\|_p\leqslant C_p\|f\|_1^{1/p}\|f\|_*^{p-1}\quad(\|f\|_*=\|f\|_{\mathrm{BMO}}).$$

7. 令 $g(x)=|f(x)|\chi_Q(x)$，则对 $Q_1\supset Q$ 且 $|Q_1|=2|Q|$，有

$$\int_{Q_1}|g(x)-g_{Q_1}|\mathrm{d}x\geqslant\int_{Q_1\setminus Q}|f(x)-g_{Q_1}|\mathrm{d}x$$

$$\geqslant|Q_1\setminus Q||g_{Q_1}|=\frac{1}{2}|Q_1||g_{Q_1}|.$$

由此可知 $g_{Q_1}\leqslant 2\|g\|_{\mathrm{BMO}}\leqslant 2A$. 又因

$$g_{Q_1}=\frac{1}{|Q_1|}\int_{Q_1}|f(x)|\chi_Q(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(|f|)_Q,$$

所以 $(|f|)_Q\leqslant 2g_{Q_1}\leqslant 4A$，即

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant 4A.$$

从而我们有 $|f(x)|\leqslant 4A$, a. e. x.