实分析

程民德　邓东皋　龙瑞麟　编著

高等教育出版社

实 分 析

程民德　邓东皋　龙瑞麟　编著

高等教育出版社

(京)112号

本书是以实变函数与泛函分析课程内容为先导的介绍近代实分析的引论性著作. 除必要的基础性知识外，着重反映了自50年代起至最近几年来国内外关于实分析方面的研究成果. 各个时期最活跃的研究领域，如 Calderón–Zygmund 奇异积分算子，H^p 空间的实变理论，算子的加权模不等式等，在书中都得到了充分反映. 全书通过对实变量函数所构成的各种函数空间(Lebesgue 空间、连续函数空间、Hardy 空间、*BMO* 空间等)和它们之间的算子作用(Hardy–Littlewood 极大函数算子、Calderón–Zygmund 奇异积分算子等)以及Fourier 分析、算子与空间内插等重要方法的描述，对50年代以来逐步形成与发展的处理 $\mathbb{R}^n$ 上各种分析问题的实变方法与技巧作了系统、深入、简明的介绍. 本书是北京大学以程民德教授为首的学术集体几十年来教学与科研的结晶，具有内容丰富、近代，叙述严谨、简明的特色，是实分析方面一本可读性很强的教科书与参考书.

本书前4章可供本科高年级学生选修，全书可作基础与应用数学、计算数学等许多方向的研究生的公共学位课教材，为从事调和分析、偏微分方程、非线性分析、数值分析、乃至数学物理等方面的研究与应用的读者提供必要的实分析基础训练.

实 分 析

程民德 邓东皋 龙瑞麟 编著

*

高等教育出版社出版

新华书店总店科技发行所发行

高等教育出版社激光照排技术中心照排

高等教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 21.25 字数 550 000

1993年11月第1版 1993年11月第1次印刷

印数 0 001—1 083

ISBN7-04-004438-2/O·1250

定价 8.80元

前　言

实分析，作为大学理工科有关专业高年级学生数学选修课与研究生数学基础课的教材，是以实变函数论与泛函分析课程内容为先导的、着重研究实变量函数所构成的各种函数空间以及空间之间的变换的一本入门教材.

50 年代以来，在 A.P. Calderón 和 A. Zygmund 开展 $\mathbb{R}^n$ 上奇异积分算子的研究过程中，逐步形成了一套处理 $\mathbb{R}^n$ 上分析数学有关问题的实方法. 以后经过 E.M. Stein 等人的补充与发展，这套实方法不仅丰富了并且继续丰富着 $\mathbb{R}^n$ 上分析数学的研究内容，而且正在愈来愈广泛地应用到偏微分方程、位势理论、算子理论、群表示论、非线性分析、计算数学、概率论和数学物理中. 如果我们把研究实变量函数所构成的各种各样的空间以及这些空间之间的积分算子等的近代进展统称为近代实分析的话，那末本书就是近代实分析的一本引论性教材，它提供基本的实方法，相应地给出近代实分析的一个轮廓，为有关各方向的研究与应用打下基础，使之能较广泛地适用于理工科有关专业高年级学生与研究生的需要.

本书几位作者多年来分别在北京大学数学系、中国科学院研究生院以及其他大学，讲授过这门课程. 本书就是在讲义的基础上整理而成的. 全书共七章. 第一章讲述 Lebesgue 空间 L^p 与连续函数空间理论. 这两类空间是实分析最重要也最基本的研究对象. 对它们缺乏一个基本的理解，就无法前进一步. 故本章带有预备知识的性质. 第二章讲述经典 Fourier 分析的基本内容. Fourier 分析不仅是一门理论性学科，同时也是一门重要的工具性学科. 近代实分析的许多理论与方法，也都来源于经典 Fourier

分析．本章将为以后各章讨论的实方法提供背景、思想与工具．第三章讨论50年代以后发展起来的一些基本的实方法，其中包括集合的分解与覆盖，分布函数的估计，Hardy－Littlewood 极大算子及其变形，函数的Calderón－Zygmund 分解，算子内插及经典奇异积分算子等．本章对这些方法，都限于最基本的介绍．它们的推广与深入发展，可在以后各章中看到．第四章介绍几类新的函数空间，它们是Hardy 空间H_1，有界平均振动函数空间BMO以及 Besov 空间等．这些空间是在Lebesgue 空间与连续函数空间的基础上发展起来的，为近代分析的研究提供了很合适的框架，也为本书讲述的实方法提供了很好的应用舞台．第五章介绍奇异积分算子近代理论的基本内容．这个理论不仅包括了卷积型的经典奇异积分算子，也包括了许多非卷积型的奇异积分算子．本章反映了调和分析80年代以来的某些重大进展．第六章介绍A_p权函数与加权模不等式．第七章进一步讨论算子内插与空间内插．本书前五章的基本内容，可在理工科有关专业研究生的数学基础课或在有关专业高年级本科生的选修课中讲授．最后两章则可根据专业需要与教学时间的长短加以选用．

作为一本研究生基础课或高年级本科生选修课的教材，本书不可能完全是自封的．除了需要用到其他数学基础课的内容外，还需要引用某些其他学科的结果．如果把这些结果的证明都写出来，本书的篇幅将变得不可想象．因此我们有几处将只引用结果并注明其出处，但尽可能把这种引用限于最少．另外，本书也未能完全按逻辑顺序讲述，有些地方前面要用到后面的结果．这仅仅是为了叙述方便，读者绝对不必担心会发生逻辑循环．当然，我们也尽可能限制这种情况的出现．本书每一章的最后一节，都用来提供习题、进一步的问题与注记．请注意，其中只有一部分是习题，是为读者提供训练用的．另一部分则是介绍理论的进一步发展与应用，是为有兴趣的读者提供进一步学习与研究的途径．要求读者自己全部完成这些题目，通常是不可能的．

本书的初稿曾由吉林大学王柔怀教授、杭州大学王斯雷教授与北京师范大学陆善镇教授开会审阅，其中特别是陆善镇教授，在会后又仔细审阅了修改稿．在审阅过程中他们前后都提出了许多宝贵意见，我们都作了相应的订正，在此对他们表示衷心的感谢．我们的研究生刘和平、樊启洪、蒋庆堂、熊承杰、杨建生与许传祥，为抄写书稿付出了大量的劳动，在抄写过程中还修正了不少笔误．我们对他们的帮助也表示感谢．最后感谢高等教育出版社，没有他们的热情支持，本书难以很快与读者见面．

限于水平，本书难免有疏漏与不妥之处，欢迎读者指正．

编　者

1991.5.30

符　　号

根据其首次出现或重要重现而列出的符号表.

第一章　§1.1

$|E|$ —— 可测集 E 的测度

E' —— 集合 E 的补集

$P(x)$，a.e. —— 命题 $P(x)$ 关于 x 几乎处处成立

L^p —— Lebesgue 空间 L^p

$\|\cdot\|_p$ —— L^p 空间内的模

L^p_+ —— L^p 的非负函数子集

p' —— 指标 p 的共轭(或对偶)指标或相伴数，即满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ 的数

$\mathbb{R}_+$ —— 区间 $[0,\infty)$

$\overline{\mathbb{R}}_+$ —— 区间 $[0,\infty]$.

χ_E —— 集合 E 的特征函数

S —— 简单函数组成的空间

$\varphi_n \nearrow \varphi$ —— 增序列 $\{\varphi_n\}$ 收敛于 φ

$\log^+ x$ —— 函数 $\max(\log x, 0)$

$\log^+ L$ —— 空间 $\{f : \log^+|f| \in L^1\}$

$\langle\ ,\ \rangle$ —— Hilbert 空间的内积，或Banach 空间(或线性拓扑空间)与其对偶的对偶作用

§1.2

$\operatorname{sgn}\lambda$ —— 函数 $\overline{\lambda}/|\lambda|$，其中 $\lambda\in\mathbb{C}$

$(L^p)^*$ —— L^p 的对偶空间

§1.3

$f_n \xrightarrow{m} f$ —— 函数序列$\{f_n\}$依测度收敛于f

$f_n \longrightarrow f$，a.e.—— 函数序列$\{f_n\}$几乎处处收敛于f

$*$ —— 卷积(或对合，§2.1)

§1.4

$E\Delta F$ —— 集合E与F的对称差

$B(x_0, r)$ —— 距离空间中以x_0为心，r为半径的球

§1.5

$C(X)$，$C^K(X)$，$C_0(X)$，$C_{00}(X)$ —— 拓扑空间X上连续函数的几类空间

$M(X)$ —— X上有界复值正规Borel测度组成的空间

§1.6

τ_h —— $\mathbb{R}^n$的平移算子$\tau_h f(\cdot)=f(\cdot-h)$，其中$h\in\mathbb{R}^n$

d_δ —— $\mathbb{R}^n$的伸缩算子$d_\delta f(\cdot)=f(\delta\cdot)$，$\delta>0$

$\omega_p(f,\delta)$ $(\omega(f,\delta))$ —— f的L^p连续(一致连续)模

Λ_α，$\Lambda_{p,\alpha}$ —— Lipschitz空间

$D^\alpha=\dfrac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}$ —— 偏微分算子 $\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$，其中$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，

$\alpha_j\in\mathbb{Z}_+$，$|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$。

$\varphi_\varepsilon(\cdot)$ —— 函数$\varepsilon^{-n}\varphi\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)$

$\mathscr{C}^k$ $(\mathscr{C}^\infty)$ —— k阶(无限次)连续可微函数类(也见§2.2，其中C^0见§4.8)

$\mathscr{D}$ —— $C_{00}^\infty(\mathbb{R}^n)$赋适当拓扑所成的空间，(也见§2.9题42)

cI —— 方体I的同心c倍扩大

f_I —— f在方体I(或其他可测集I)上的积分平均

L_{loc}^q —— 局部L^q可积函数空间

$\mathbb{Z}_+$ —— 非负整数$\{0,1,2,\cdots\}$

S_{n-1} —— $\mathbb{R}^n$ 中的单位球面，$d\sigma$ 表示其上的面积元.
I_α —— α 阶分数次积分算子
L_k^p —— Sobolev 空间
suppf —— f 的支集(也见 §2.9 与 §7.6)

§1.7

$V(f)$ —— 有界变差函数的全变差

第二章 §2.1

$\mathbb{T}$ —— 平面上的单位圆周

a_0 —— 特殊常数，$a_0=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}$.

$x\cdot y$ —— $\mathbb{R}^n$ 的内积
$\rho^t\ (T^t)$ —— 矩阵 ρ (算子 T)的转置
$P(D)$ —— 微分多项式
$\mathscr{F}$ 或 $\wedge$ ($\mathscr{F}^{-1}$ 或 $\vee$) —— Fourier (逆)变换
$A(\mathbb{R}^n)$，$B(\mathbb{R}^n)$ —— 分别表示 $L^1(\mathbb{R}^n)^\wedge$，$M(\mathbb{R}^n)^\wedge$

§2.2

$D_N(x)$，$D_N^*(x)$ —— Dirichlet 核，修改的Dirichlet 核
$P_r(x)$ ($P_t(x)$) —— 单位圆(上半平面)的 Poisson 核
$Q_r(x)$ ($Q_t(x)$) —— 单位圆(上半平面)的共轭 Poisson 核
$\sigma_N(f,x)$ —— f 的 Fourier 级数的 N 阶 Fejér 和或称 $(c,1)$ 和
$f(x,r)$ —— f 的Fourier 级数的 Poisson 和
$f\approx g$ —— f 与 g 等价即可互相控制
$\mathscr{T}$ ($\mathscr{T}_N$) —— 全体(N 次)三角多项式集合
$P_t(x)$ —— $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 的Poisson 核

c_n —— 常数 $\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Big/\pi^{\frac{n+1}{2}}$

$BR^{(\delta)}(\xi)$ —— Bochner - Riesz 核

§2.3

Λ_* —— Zygmund 函数类
$E_n(f)$——f 的n 次最佳三角多项式逼近

§2.5

$\Gamma_\alpha(x)(\Gamma(x))$—— 宽度为 α (为1)的以 x 为顶点的锥
$\tilde{f}$ ——f 的共轭函数 ($\tilde{f}$ 有时也表示f 的反射，见 §2.8)
H (H^*)—— (极大)Hilbert 变换
I —— 恒等算子

§2.8

$\mathscr{S}$ —— Schwartz 函数类(空间)
$\mathscr{S}'$ —— 缓增广义函数(分布)空间

§2.9

$L\log^+L$ —— 空间 $\{f: f\log^+|f|\in L^1\}$

第三章　§3.2

$\sigma_f(x)$——f 的分布函数
$f^*(f^{**})$——f 的非增重排函数(的平均)
$\wedge$ $=\min$，$\vee$ $=\max$

§3.4

Mf，M_rf —— Hardy－Littlewood 极大函数
$f^{\#}$ —— #函数

§3.5

$\mathscr{M}$ —— 测度空间上可测函数的空间
$\|\cdot\|_{WL^q}$—— 弱 L^q 模

§3.6

R_j —— Riesz 变换

§3.7

g_λ, g_x, g_k —— Littlewood－Paley g 函数的各种变形

$\mathscr{M}_p$ —— L^p 乘子空间

§3.8

M_S —— 强极大函数

第四章　§4.1

$H_1^{(q)}, H_1^{(q,s)}$ —— 原子Hardy 空间

$L(\beta, q', s)$ —— Campanato 空间

§4.2

BMO —— 有界平均振动函数空间（VMO —— 消失平均振动函数空间，BLO —— 下振动有界函数空间，均见 §4.9）

$\|f\|_*, \|f\|_{**}, \|f\|_{*p}$ —— BMO 的等价模

§4.4

$S(f)$ —— f 的面积函数

§4.5

$\varphi^+(f)$，$\varphi_\alpha^*(f)$，$P^*(f)$ —— f 的各种极大函数

§4.6

$\mathscr{H}_p$ —— 经典 H_p 空间

§4.7

$\hat{Q}$——以$Q\subset\mathbb{R}^n$为底的位于$\mathbb{R}^{n+1}_+$的帐篷

$|||\mu|||$——Carleson 测度μ的模

$A_q(f)$——f 的q 面积函数

§4.8

$\mathscr{S}^{\Omega}(L^{p,\Omega})$—— Fourier 变换支于$\Omega$的$\mathscr{S}(L^p)$中的函数集合

$L^p(l^q)$，$l^q(L^p)$——向量值函数空间

$C^0(\mathbb{R}^n)$，$C^m(\mathbb{R}^n)$，$C^s(\mathbb{R}^n)$—— Hölder 空间

$\Lambda^s(\mathbb{R}^n)$—— Zygmund 空间

$\Lambda^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$—— Besov－Lipschitz 空间

H^s_p—— Bessel 位势空间

B^s_{pq}—— Besov 空间

F^s_{pq}—— Triebel－Lizorkin 空间

§4.9

B_q—— q 块空间

ΛBV，ΛBMV，HBV，$HBMV$——有界变差的推广及其与BMO概念结合的几类空间

第五章　§5.1

$SK(r)$—— r阶的标准核

CZO，$CZO(r)$—— Calderón－Zygmund 算子

§5.2

$T^*(f)$——f 的奇异积分极大算子

§5.3

Π_b——仿积算子

$\mathscr{C}_m$ —— m 阶Calderón 交换子

M_A —— 用函数A 作乘法的算子

C_A, C_Γ —— Cauchy 积分算子

§5.4

WBP —— 弱有界性质

$N_Q^\beta(f)$ —— f 在 Q 上的半模

$\mathscr{D}_k$ —— 体积为 2^{-k} 的拟二进方体集，$\mathscr{D}=\bigcup_k \mathscr{D}_k$

$\{\alpha_I, \beta_I\}$ —— L^2 的拟正交基对

$\langle\ ,\ \rangle_b$ —— 以函数 b 为权的L^2 空间的拟内积

§5.5

S^{1}_{1} —— 拟微分算子类

第六章　§6.1

A_p —— Muckenhoupt 权函数类

§6.2

A_∞ —— Muckenhoupt 权函数类，即 $p=\infty$ 时的 A_p

第七章　§7.1

$L^{p,q}$ —— Lorentz 空间

$\|\cdot\|_{p,q}$ ($\|\cdot\|_{p,q}$) —— Lorentz 空间的(拟)范数

§7.3

$\Delta(\overline{A})=A_0\cap A_1$ —— 容许空间对$\overline{A}=(A_0, A_1)$的交

$\Sigma(\overline{A})=A_0+A_1$ —— 容许空间对$\overline{A}=(A_0, A_1)$的和

$K(t, a, \overline{A})$, $J(t, a, \overline{A})$ —— 容许空间对 $\overline{A}$ 的K 泛函与 J 泛函

$(A_0, A_1)_{\theta,q,K}=K_{\theta,q}(\overline{A})$ —— K 方法定义的 $\overline{A}$ 的内插空间

$(A_0, A_1)_{\theta,q,J} = J_{\theta,q}(\overline{A})$ —— J 方法定义的 $\overline{A}$ 的内插空间

§7.4

$[A_0, A_1]_\theta$ —— 复方法定义的 $\overline{A} = (A_0, A_1)$ 的内插空间

§7.6

$E(t, a; \overline{A})$ —— 逼近 E 泛函

$E_{\alpha,q}(\overline{A})$ —— 由 E 泛函定义的空间

$K_p(t, a; \overline{A})$ —— K 泛函的一类等价泛函

L^0 —— L^p 当 $p \to 0$ 时的一种极限

目　　录

第一章 Lebesgue 空间与连续函数空间

古典微积分与近代实分析的区别之一在于，前者研究函数，着重于单个函数本身的结构，而后者则更进一步，把函数看作“空间”的一个元素加以考察．由函数的可积性定义的函数空间是实分析的最重要的研究对象．在各种各样的积分理论中，Lebesgue 积分理论是最成功的一种．因此，用Lebesgue 积分直接定义的空间L^p，便成为实分析研究的第一类最重要而又最基本的空间．当然，主要是考虑$1\leqslant p\leqslant\infty$ 的情形．因为这时 L^p 是完备的赋范空间，即Banach 空间．研究这类空间的结构，相互间的包含关系及其对偶，以及这些空间中的收敛等，构成了本章的一项主要内容．为了叙述完全并比较对照，我们有时也讲述L^p，$0<p<1$，这时，它们是完备的拟赋范线性空间．

另有一类函数空间，与古典微积分更加接近一些，且比较简单而常见，就是连续函数空间．在许多情形（例如底空间是紧的），它可以看作有界可测函数空间 L^∞ 的一种“替代”．本章将叙述它的两个最基本的一般性定理：Stone－Weierstrass 逼近定理以及关于子集紧性判别法的 Arzelá－Ascoli 定理．这构成了本章的另一项主要内容．连续函数空间的另外一个也是基本的一般性定理——泛函的Riesz 表示定理，它在泛函分析的课本中总是会讲述的，在本章我们只叙述它的内容而不加以证明．值得指出的是，Lebesgue 空间可以在一般测度空间上建立，而连续函数空间也只要求底空间有最基本的拓扑结构．为了掌握本质，我们的理论，对L^p 来说，是在全σ 有限非负测度空间上展开的．而对连续函数空间来说，则是在局部紧T_2 空间上讨论的．$\mathbb{R}^n$ 当然同时属于这两类底空间，因此$\mathbb{R}^n$ 上的Lebesgue 空间与连续函数

空间的基本性质被概括在我们将要讲的一般理论之中. 本章将假定抽象测度空间与拓扑空间的基础理论为已知. 但不熟悉它们的读者，不妨认为所讨论的底空间就是 $\mathbb{R}^n$，测度就是Lebesgue 测度，推理完全一样. 当然，$\mathbb{R}^n$ 的结构比较丰富，因此其上可以讨论许多光滑函数的空间，而且 L^p 空间也可与光滑性质发生密切的联系，我们将在 §1.6 中专门讲述.

§1.1 Lebesgue 空间 L^p $(0<p\leqslant\infty)$ 的基本性质

所谓 $(X,\mathscr{F},\mu)$ 是一全 σ 有限的完备的非负测度空间，是指: X 是任一集合，$\mathscr{F}$ 是 X 的一些子集构成的一个 σ 代数(即一个在集合的可列并与补的运算下封闭的集合系，特别注意 $X\in\mathscr{F}$); μ 是定义在 $\mathscr{F}$ 上的一个非负可列可加集函数(称为测度)，它满足:

σ 有限性: 对任意 $E\in\mathscr{F}$，存在 $\{E_i\}_1^\infty\subset\mathscr{F}$，$\mu(E_i)<\infty$，使得 $E\subset\bigcup\limits_1^\infty E_i$.

完备性: 对任意 $E\in\mathscr{F}$，只要 $\mu(E)=0$，则对任意 $F\subset E$，总有 $F\in\mathscr{F}$，且 $\mu(F)=0$.

本书中讨论的最一般测度空间就是这样的测度空间，以后简称为“一般测度空间”. 此外，对集合 E，我们用 E^c 表示 E 的补集，并简记 $\mu(E)=|E|$. 另外，我们约定一个称呼: 具有零测度的集合称为零集. 一个关于 X 的点 x 的命题 $p(x)$ 如果除去某个零集外是成立的，则说“$p(x)$ 几乎处处成立”，简记为“$p(x)$ a.e.”.

现在开始定义 Lebesgue 空间，并讨论它们的性质.

定义(1.1) 设 $0<p\leqslant\infty$，记

$$L^p=\{\text{可测}f:\|f\|_p=\left(\int_X|f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}<\infty\},\ 0<p<\infty \tag{1}$$

$$L^{\infty}=\{\text{可测}\, f:\|f\|_{\infty}=\operatorname{ess\,sup}|f(x)|<\infty\},\qquad(2)$$

其中 $\|f\|_p$ $(0<p\leqslant\infty)$称为f 的L^p 模. 有时为了强调底空间与测度，也用记号 $L^p(X, d\mu)$.

注 1 对 $0<p\leqslant\infty$，约定 L^p 的元素不是函数，而是函数的等价类，意即如果

$$f=g\quad \text{a.e.},$$

则称f 与g 是等价的，等价的函数要么同时属于 L^p，或同时不属于 L^p. 当它们属于 L^p 时，把它们看成是 L^p 的同一元素. 在此观点下，$\|\cdot\|$ 满足

$$\|f\|_p=0\ \text{当且仅当}\ f=0,\ 0<p\leqslant\infty.$$

注 2 L^{∞} 模 $\|\cdot\|_{\infty}$ 定义中的"ess sup"应理解为:

$$\|f\|_{\infty}=\inf\{a\geqslant 0:\{|f|>a\}\text{是零集}\}.\qquad(3)$$

注意式(3)中的"inf"是可以达到的. 意即 $\|f\|_{\infty}$ 本身就是集合 $\{a:\{|f|>a\}\text{是零集}\}$ 中的一个元素. 事实上

$$|\{|f|>\|f\|_{\infty}\}|=\left|\bigcup_{n}\left\{|f|>\|f\|_{\infty}+\frac{1}{n}\right\}\right|=0$$

现在我们来证明 Hölder 不等式与Minkowski 不等式，它们是整个L^p 理论的基础，而且它们也是最常用的.

引理(1.2) (Young 不等式) 设$\varphi(t)$ 是 $\mathbb{R}_+=[0,\infty)$到 $\overline{\mathbb{R}}_+=[0,\infty]$ 左连续增(指不减，下同)函数，记

$$\psi(s)=\inf\{t:\varphi(t)\geqslant s\}.\qquad(4)$$

它是 $\varphi(t)$的左连续逆函数. 此外，令

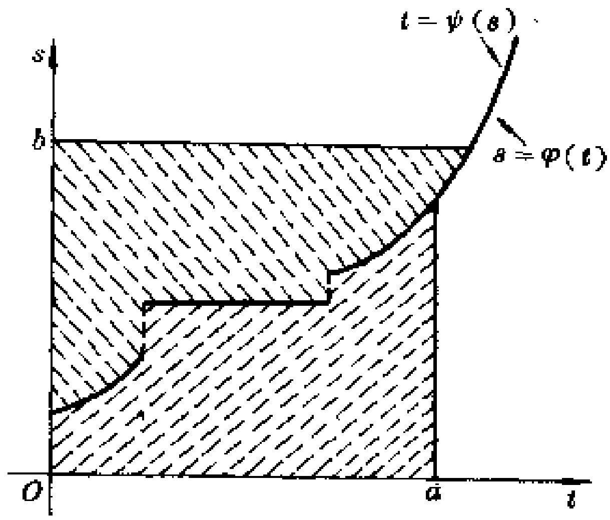
$$\Phi(u)=\int_0^u\varphi(t)dt,\quad \Psi(v)=\int_0^v\psi(s)ds.\qquad(5)$$

则如下不等式成立

$$ab \leqslant \Phi(a)+\Psi(b), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}_+, \tag{6}$$

且等式成立，当且仅当 $\varphi(a)=b$ 或 $\psi(b)=a$.

证明 不管增函数 $\varphi(t)$ 在间断点处如何定值，由式(4)定义的 ψ 总是左连续增加的. $\varphi(t)$ 可取值 ∞，此时 $\psi(s)$ 便是有界函数，$\lim\limits_{s \to \infty} \psi(s)$ 存在且有限. $\psi(s)$ 也可取值 ∞，这是因为在非负数的集合中作"inf"运算时，自然约定 $\inf \varPhi = \infty$. 故当 $\varphi(t)$ 有界时，$\psi(s)$ 便在 ∞ 的某个邻域上取值 ∞. 现在将函数 $s=\varphi(t)$（或 $t=\psi(s)$）在 (t, s) 坐标的空间 $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ 内的图象用一条连续曲线联结起来. 如果 $\Phi(a)$，$\Psi(b)$ 之一为 ∞，式(6)自然成立；如果 $\Phi(a)$，$\Psi(b)$ 都有限，则 $\Phi(a)+\Psi(b)$ 表示该曲线与坐标轴所围两块区域的面积和，显然它总不小于矩形的面积 ab，这正是不等式(6). 另外，从图象也可看出，等号成立当且仅当点 (a, b) 在这条曲线上，而它又等价于或者 $b=\varphi(a)$ 或者 $a=\psi(b)$，这只需考察 $\varphi(a)$ 或 $\psi(s)$ 取常数值的区间端点处的情况便可得知，引理获证.



定理(1.3) （Hölder 不等式） 设 $1 \leqslant p \leqslant \infty$，设 p' 为 p 的相伴数，即满足 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$，$f \in L^p$，$g \in L^{p'}$，则 $fg \in L^1$，且有

$$\left|\int_X fg\,d\mu\right| \leqslant \int_X |fg|\,d\mu \leqslant \|f\|_p \|g\|_{p'}. \tag{7}$$

且式(7)中等号同时成立，在 $1<p<\infty$ 时，当且仅当存在常数 b 使得

$$e^{ib}fg=|fg|,\ \text{a.e.},\quad 并且\quad \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p}=\frac{|g|^{p'}}{\|g\|_{p'}^{p'}},\ \text{a.}$$

(8)

在 $p=1$ 时，当且仅当

$$e^{ib}fg=|f|\|g\|_\infty,\ \text{a.e.}; \tag{9}$$

在 $p=\infty$ 时，当且仅当式(9)在 f，g 交换位置后成立.

证明 当 $p=1$ 或 ∞ 时，式(7)是平凡的. 至于等号成立的条件也只需看 $p=1$. 设(7)中的等式成立，记 $-b$ 为 $\int_X fg\,d\mu$ 的辐角，则

$$e^{ib}\int_X fg\,d\mu=\int_X |fg|\,d\mu=\int_X \|g\|_\infty |f|\,d\mu.$$

特别地，有

$$\int_X \operatorname{Re}(e^{ib}fg)\,d\mu=\int_X \|g\|_\infty |f|\,d\mu.$$

由于恒有

$$\|g\|_\infty |f|-\operatorname{Re}(e^{ib}fg)\geqslant 0,\ \text{a.e.},$$

故由积分的相等就可推出

$$\operatorname{Re}(e^{ib}fg)=\|g\|_\infty |f|,\ \text{a.e.},$$

这就推出(9).

反之，由式(9)推出式(7)中等号成立是显然的.

现看 $1<p<\infty$，应用式(6)于

$$\varphi(t)=t^{p-1},\psi(s)=s^{\frac{1}{p-1}},\Phi(u)=\frac{u^p}{p},\Psi(v)=\frac{v^{p'}}{p'},$$

即得

$$\frac{|f|}{\|f\|_p}\frac{|g|}{\|g\|_{p'}}\leqslant\frac{1}{p}\frac{|f|^p}{\|f\|_p^p}+\frac{1}{p'}\frac{|g|^{p'}}{\|g\|_{p'}^{p'}},\text{ a.e.}\tag{10}$$

在X上取积分便得式(7). 下面讨论等号成立条件，设式(7)之第一个等号成立，则前述证明已经得到

$$e^{ib}fg=|fg|,\text{ a.e.}.$$

设式(7)之第二个等号成立，则(10)⇒(7)的推理表明

$$\frac{|f|}{\|f\|_p}\cdot\frac{|g|}{\|g\|_{p'}}=\frac{1}{p}\frac{|f|^p}{\|f\|_p^p}+\frac{1}{p'}\frac{|g|^{p'}}{\|g\|_{p'}^{p'}}\text{ a.e.},$$

由引理(1.2)知，这又必须

$$\frac{|g|}{\|g\|_{p'}}=\frac{|f|^{p-1}}{\|f\|_p^{p-1}},\text{ a.e.},$$

即

$$\frac{|f|^p}{\|f\|_p^p}=\frac{|g|^{p'}}{\|g\|_{p'}^{p'}},\text{ a.e.}.$$

反之，应用引理(1.2)，由(8)推知(10)中等号成立，从而(7)中第二个等号成立，第一个等号成立是显然的，定理证毕.

定理(1.4) 设 $0<p<1$，p'仍为 p 的相伴数（注意此时 $p'<0$），$f\in L^p$、$g\in L^{p'}$且$\int_X|g|^{p'}d\mu\neq 0$，则

$$\int_X |fg|\,d\mu \geq \|f\|_p \|g\|_{p'}. \tag{11}$$

证明 不妨设 $\|g\|_{p'}>0$, $\|fg\|_1<\infty$. 注意

$$\|g\|_{p'}>0 \Rightarrow \int_X |g|^{-\varepsilon}\,d\mu<\infty\ (\varepsilon=-p')\Rightarrow |g|>0,\ \text{a.e.}.$$

令 $q=\frac{1}{p}$, 以及

$$\varphi=|g|^{-\frac{1}{q}},\quad \psi=|g|^{\frac{1}{q}}|f|^{\frac{1}{q}}.$$

则 $\varphi\in L^{q'}$ (因 $\varphi^{q'}=|g|^{p'}$), $\psi\in L^q$. 因此

$$\int_X |f|^p\,d\mu=\int_X \varphi\psi\,d\mu\leq \|\psi\|_q\|\varphi\|_{q'}=\|fg\|_1^p\|g\|_{p'}^{-p}.$$

故

$$\|f\|_p\|g\|_{p'}\leq \|fg\|_1.$$

定理证毕.

定理(1.5) (Minkowski 不等式) 设$1\leq p\leq\infty$, $f,g\in L^p$, 则

$$\|f+g\|_p\leq \|f\|_p+\|g\|_p\quad \forall f,g\in L^p. \tag{12}$$

证明 $p=1,\infty$ 时显然. 现设$1<p<\infty$, 首先指出由 f, $g\in L^p$ 可知亦有 $f+g\in L^p$, 这是下述初等不等式的结果:

$$|a+b|^p\leq 2^{p-1}(|a|^p+|b|^p)\quad \forall a,b\in\mathbb{C},\ 1\leq p<\infty. \tag{13}$$

而这又是由于 x^p 是 $[0,\infty)$上的凸函数. 对 $x\in(0,1]$ 与1应用凸性便得

$$\left(\frac{1+x}{2}\right)^p\leq\frac{1+x^p}{2},\quad (1+x)^p\leq 2^{p-1}(1+x^p),$$

从而(13)成立．现在利用 Hölder 不等式，得

$$\int_X |f+g|^p d\mu \leqslant \int_X |f+g|^{p-1}(|f|+|g|)d\mu$$

$$\leqslant (\|f\|_p + \|g\|_p)\|f+g\|_p^{\frac{p}{p'}} .$$

既然 $\|f+g\|_p<\infty$，故得$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p+\|g\|_p$，定理证毕.

定理(1.6) 设$0<p<1$，f，$g\in L_+^p$，其中 $L_+^p=\{f\in L^p:f\geqslant 0\}$，则

$$\|f+g\|_p \geqslant \|f\|_p+\|g\|_p. \tag{14}$$

证明类似于定理(1.5)的证明，我们把它留给读者.

下面我们给出 L^p 的一个稠密子空间，它是经常用到的.

定义(1.7) 形如$\sum_1^n c_i\chi_{E_i}$的函数称为一个**简单函数**，其中 c_i 是复数，$\mu(E_i)<\infty$，$E_i\cap E_j=\phi$，χ_E 表示集合E 的特征函数．全体简单函数的集合记为S．如果式$\sum_1^n c_i\chi_{E_i}$ 中允许某些 E_i 有无穷测度，则称它是一个**广义简单函数**.

定理(1.8) 设$0<p<\infty$，$f\in L^p$．则对任意$\varepsilon>0$，存在简单函数 φ 使得

$$|\varphi|\leqslant|f|，且\ \|\varphi-f\|_p\leqslant\varepsilon.$$

从而 S 在L^p 中稠密.

证明 设f 非负可测，a.e.取有限值，则存在非负简单函数的增序列$\{\varphi_n\}$，使得$\varphi_n\to f$，a.e.，(我们简记为$\varphi_n\nearrow f$)，事实上，只需取$X=\bigcup X_n$，$X_n\subset X_{n+1}$，$|X_n|<\infty$，以及

$$E_{k,n}=\{x\in X_n:k2^{-n}\leqslant f(x)<(k+1)2^{-n}\}$$

$$k=0,1,\cdots n2^n-1,\ n=1,2\cdots$$

$$E_{n2^n,n}=\{x\in X_n: f(x)\geq n\},$$

$$\varphi_n=\sum_{k=0}^{n2^n} k2^{-n}\chi_{E_{k,n}},\quad n=1,2\cdots. \tag{15}$$

这样定义的$\{\varphi_n\}$单调增地几乎处处收敛于f，这对任何σ有限测度空间上a.e.取有限值的非负可测函数都是正确的. 当$f\in L^p$时，还有$\|\varphi_n-f\|_p\to 0$. 现对任意$f\in L^p$将f的实部与虚部表示为正部、负部的差，即作分解$f=f_1-f_2+i(f_3-f_4)$，其中$f_j\in L_+^p$ $j=1,\cdots,4$，且$f_1f_2=f_3f_4=0$，a.e.. 对每个给定的ε，如上选取$\varphi_j\in S$，使

$$0\leq\varphi_j\leq f_j,\ \|f_j-\varphi_j\|_p\leq c\varepsilon\,(c\ \text{待定}),j=1,\cdots,4,$$

并令$\varphi=\varphi_1-\varphi_2+i(\varphi_3-\varphi_4)$则

$$|\varphi|^2=(\varphi_1-\varphi_2)^2+(\varphi_3-\varphi_4)^2=\sum_1^4\varphi_j^2\leq\sum_1^4 f_j^2=|f|^2,$$

$$\|f-\varphi\|_p^{p_0}\leq\sum_1^4\|f_j-\varphi_j\|_p^{p_0}\leq c^{p_0}\varepsilon^{p_0},$$

其中$p_0=\min(p,1)$. 定理证毕.

现在我们来看看L^p对不同的p之间的关系.

当$|X|<\infty$时，L^p随p的增加而缩小；当$|X|=\infty$时不再有这样的包含关系，也就是说，f对一个指标可积推不出对另一个指标亦然. 但若f对指标p_1,p_2都可积，则对中间的任意p也可积，这个事实的确切叙述见下面定理. 当$|X|<\infty$时，记

$$A_p(f)=\left(\frac{1}{|X|}\int_X|f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$，此外不管X的测度，记$N_p(f)=\|f\|_p$.则我们有

定理(1.9) A_p是p的增函数. N_p^p是p的对数凸函数[①]；N_p

① 实变量实值函数$g(t)$称为对数凸的，若$\log g(t)$是普通意义下的凸函数. 这等于说$g(t)\leq g(t_1)^{\theta}g(t_2)^{1-\theta}$，当$t=\theta t_1+(1-\theta)t_2$，$0\leq\theta\leq 1$.

是 $\frac{1}{p}$ 的对数凸函数. 即对于任意 $t\in[0,1]$，有

$$\int_X |f|^p d\mu \leqslant \left(\int_X |f|^{p_1} d\mu\right)^t \left(\int_X |f|^{p_2} d\mu\right)^{1-t}, \quad p = tp_1+(1-t)p_2, \tag{16}$$

$$\left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_X |f|^{p_1} d\mu\right)^{\frac{t}{p_1}} \left(\int_X |f|^{p_2} d\mu\right)^{\frac{1-t}{p_2}},$$

$$\frac{1}{p} = \frac{t}{p_1} + \frac{1-t}{p_2}. \tag{17}$$

证明 设 $0<p\leqslant q<\infty$，记 $\lambda = \frac{q}{p}$，则由Hölder 不等式得

$$\int_X |f|^p d\mu \leqslant \left(\int_X |f|^q d\mu\right)^{\frac{1}{\lambda}} |X|^{1-\frac{1}{\lambda}},$$

$$\frac{1}{|X|}\int_X |f|^p d\mu \leqslant \left(\frac{1}{|X|}\int_X |f|^q d\mu\right)^{\frac{p}{q}}.$$

这证明了 A_p 的增性. 此外$A_p\leqslant\|f\|_\infty$ 也是平凡的. (下面将会看到$\|f\|_\infty$ 正是A_∞ 的一个合适理解).

式(16)也是 Hölder 不等式的结果.

现在证式(17). 设 $p_1<p<p_2$，记 $\frac{1}{p} = \frac{t}{p_1} + \frac{1-t}{p_2}$，$t\in(0,1)$. 这时

$$1 = \frac{tp}{p_1} + \frac{(1-t)p}{p_2}.$$

记 $r = \frac{p_1}{tp}$，及 $r' = \frac{p_2}{(1-t)p}$，对 r 与r'这一对共轭指标应用

Hölder 不等式，得

$$\int_X |f|^p d\mu = \int_X |f|^{tp+(1-t)p} d\mu$$
$$\leqslant \left(\int_X |f|^{p_1} d\mu\right)^{\frac{tp}{p_1}} \left(\int_X |f|^{p_2} d\mu\right)^{\frac{(1-t)p}{p_2}}$$

因此

$$N_p(f) \leqslant N_{p_1}(f)^t N_{p_2}(f)^{1-t}.$$

定理证毕.

现在讨论 f 的L^p 模当$p \to \infty$ 或0 时的极限. 下面的两个定理分别指出. 粗略而言，L^∞ 就是 $\lim\limits_{p\to\infty} L^p$，而 $L^0 = \lim\limits_{p\to 0} L^p$ 可以想象为$\log^+ L$ (即$\{f: \log^+|f| \in L^1\}$，其中

$$\log^+ x = \max(\log x, 0)).$$

更确切地说，我们有

定理(1.10) 下述等式恒成立

$$\lim_{q\to\infty} \|f\|_q = \|f\|_\infty, \quad \forall f \in \bigcup_p \bigcap_{p\leqslant q<\infty} L^q. \tag{18}$$

从而在空间 $L^\infty \cap (\bigcup\limits_p \bigcap\limits_{p\leqslant q} L^q)$ 上，$\|\cdot\|_\infty$ 与 $\lim\limits_{q\to\infty} \|\cdot\|_q$ 是两个相同的范数.

证明 设 f 是任意可测函数，则对任意 $M < \|f\|_\infty$，$E = \{x: |f(x)| > M\}$是正测度集. 这样

$$\|f\|_q \geqslant \left(\int_X |f|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \geqslant M|E|^{\frac{1}{q}}.$$

令 $q \to \infty$，由 M 之任意性，即得

$$\varliminf_{q\to\infty} \|f\|_q \geqslant \|f\|_\infty.$$

特别地，这就证明了当 $\|f\|_\infty = \infty$ 时，等式(18)成立. 现设

$\in \bigcup_p \bigcap_{p\leq q<\infty} L^q$，要证 $\|f\|_\infty \geq \overline{\lim_{q\to\infty}} \|f\|_q$. 不妨设 $\|f\|_\infty$ 有限并且等于 1. 设 $f\in L^q, \forall q\geq q_0$，取有限测度集 E 使得

$$\int_{E^c} |f|^{q_0}\, d\mu \leq 1,$$

则我们有

$$\begin{aligned}\|f\|_q^q &= \int_E |f|^q\, d\mu + \int_{E^c} |f|^q\, d\mu \\ &\leq |E| + \int_{E^c} |f|^{q_0}\, d\mu \leq |E| + 1.\end{aligned}$$

这样

$$\overline{\lim_{q\to\infty}} \|f\|_q \leq \lim_{q\to\infty} (|E|+1)^{\frac{1}{q}} = 1 = \|f\|_\infty.$$

定理证毕.

注 当 $|X|=\infty$ 时，L^∞ 与 $\bigcup_p \bigcap_{p\leq q} L^q$ 的确无包含关系. 当 $|X|<\infty$ 时，定理的结论化为

$$L^\infty = \left\{ f\in \bigcap_q L^q : \lim_{q\to\infty} \|f\|_q < \infty \right\}.$$

注意，L^∞ 可以是 $\bigcap_q L^q$ 的真子集.

定理(1.11) 设 $|X|=1$，则下述等式恒成立

$$\lim_{q\to 0} \|f\|_q = \exp\left(\int_X \log |f|\, d\mu\right), \quad \forall f\in \bigcup_{q>0} L^q. \tag{19}$$

证明 设 $f\in \bigcup_{q>0} L^q$，即存在 q_0，使 $f\in L^{q_0}$. 不妨设 $q_0=1$，否则我们代替 $|f|$ 而考虑 $|f|^{q_0}$. 我们要利用下面的初等不等式

$$\log t \leq t-1, \quad \forall t\in (0,\infty). \tag{20}$$

将 $t=\dfrac{|f|}{\|f\|_1}$ 代入，并对两边在 X 上积分，得

$$\int_X \log|f|\,d\mu \leqslant \log\int_X |f|\,d\mu,$$

从而，不管 $q>q_0$ 或 $q\leqslant q_0$，都有

$$\int_X \log|f|^q\,d\mu \leqslant \log\int_X |f|^q\,d\mu,$$

$$\int_X \log|f|\,d\mu \leqslant \log\left(\int_X |f|^q\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

这证明了

$$\exp\left(\int_X \log|f|\,d\mu\right)\leqslant \varliminf_{q}\|f\|_q. \tag{21}$$

注意对一切 x，当 $p\to 0_+$ 时，$\dfrac{|f|^p-1}{p}$ 单调下降地收敛于 $\log|f|$，这是数学分析的一个习题. 此外 $\dfrac{|f|^{q_0}-1}{q_0}$ 绝对可积. 故由 Levi 单调收敛定理得

$$\lim_{q\to 0}\frac{1}{q}\left(\int_X |f|^q\,d\mu-1\right)=\lim_{q\to 0}\int_X\left(\frac{|f|^q-1}{q}\right)d\mu$$

$$=\int_X \log|f|\,d\mu. \tag{22}$$

应用式(22)，(20)，(21)有

$$\int_X \log|f|\,d\mu=\lim_{q\to 0}\frac{1}{q}\left(\int_X |f|^q\,d\mu-1\right)$$

$$\geqslant \overline{\lim_{q\to 0}}\ \frac{1}{q}\log\int_X |f|^q d\mu \geqslant \underline{\lim_{q\to 0}}\ \log\left(\int_X |f|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\geqslant \int_X \log|f|\,d\mu .$$

这证明了式(19)．定理证毕.

注 条件“$|X|=1$”与“$f\in L^{p_0}$ 对某个p_0”中除去任何一个，都不能使(19)仍然成立.

作为本节的结束，我们证明 L^p 的基本性质中一个最重要的定理.

定理(1.12) 当 $1\leqslant p\leqslant\infty$ 时，L^p 是Banach 空间；当 $0<p<1$ 时，L^p 是完备距离线性空间，并且距离是平移不变的(这样的空间称为Frechét 空间)．

证明 现在已不难证明，当 $1\leqslant p\leqslant\infty$ 时，$\|\cdot\|_p$ 的确是一个范数；当 $0<p<1$ 时，$\|\cdot\|_p^p$ 是一个距离函数．剩下的只是证明完备性．$p=\infty$ 的情形是平凡的．设$\{f_n\}$是 $L^p(1\leqslant p<\infty)$中的 Cauchy 列，选子序列$\{f_{n_k}\}$使得

$$\|f_m-f_{n_k}\|_p\leqslant 2^{-k},\quad \forall m\geqslant n_k .$$

则级数

$$g(x)=\sum_1^\infty |f_{n_{k+1}}-f_{n_k}|$$

定义了一个 a.e.取有限值的函数，$\|g\|_p\leqslant 1$，所以级数

$$f(x)=f_{n_1}(x)+\sum_1^\infty (f_{n_{k+1}}-f_{n_k})$$

也定义了一个 L^p 中的函数$f(x)$，并且它是$\{f_{n_k}\}$的几乎处处收敛的极限．此外还有

$$\|f-f_{n_k}\|_p\leqslant\sum_{j=k}^\infty \|f_{n_{j+1}}-f_{n_j}\|_p\leqslant 2^{-k+1}.$$

这说明$\{f_{n_k}\}$在L^p中收敛于f．既然$\{f_n\}$是Cauchy序列，当然也有$\{f_n\}$在L^p中收敛于f．当$0<p<1$时的完备性的证明也是一样的．只需注意到估计

$$\int_X\left(\sum_{k=1}^{\infty}|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}|\right)^p d\mu\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\int_X|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}|^p d\mu$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}2^{-kp}<\infty\ .$$

定理获证．

注　当$p=2$时，L^2还是一个Hilbert空间，其内积为

$$\langle f,g\rangle=\int_X f\bar{g}\,d\mu,\ \forall f,g\in L^2. \tag{23}$$

这个空间是除有限维向量空间以外最重要的Hilbert空间的例子．

§1.2　L^p $(1\leqslant p<\infty)$的对偶空间

本章内从本节开始的以后各节，我们讨论L^p的更深入一些的性质，先从对偶性质开始．

定理(2.1)　设$1\leqslant p\leqslant\infty$，则$L^{p'}$可连续地嵌入到$L^p$的Banach对偶空间$(L^p)^*$内去．且$g\in L^{p'}$产生的$L^p$上的有界线性泛函$l_g$满足

$$\|l_g\|_{(L^p)^*}=\|g\|_{p'}. \tag{1}$$

证明　设$g\in L^{p'}$，则Hölder不等式说明如下定义的

$$l_g(f)=\int_X f\bar{g}\,d\mu \tag{2}$$

是L^p上的一个有界线性泛函，且$\|l_g\|\leqslant\|g\|_{p'}$．现证明也有$\|g\|_{p'}\leqslant\|l_g\|$．当$1<p\leqslant\infty$时，只需令

$$f=|g|^{p'-1}\frac{g}{|g|}=|g|^{p'-1}\operatorname{sgn}\bar{g},\qquad (3)$$

其中$\operatorname{sgn}\lambda=\dfrac{\bar{\lambda}}{|\lambda|}$，对任意复数$\lambda$($\lambda=0$时，理解$\operatorname{sgn}0=1$)．便有

$$\|l_g\|\geqslant l_g(f)\|f\|_p^{-1}=\|g\|_{p'}^{p'}\|g\|_{p'}^{-\frac{p'}{p}}=\|g\|_{p'}.$$

当$p=1$时，不妨设$\|g\|_\infty>0$．对任意$M<\|g\|_\infty$，取集合$\{x:|g|>M\}$的有限正测度子集E，令

$$f=|E|^{-1}\chi_E\operatorname{sgn}\bar{g},$$

则$\|f\|_1=1$，但

$$l_g(f)=\int_X f\bar{g}\,d\mu=|E|^{-1}\int_E|g|\,d\mu\geqslant M.$$

由M的任意性，知$\|l_g\|\geqslant\|g\|_\infty$．总之，我们已经证明了当$1\leqslant p\leqslant\infty$时；$L^{p'}\subset(L^p)^*$，且嵌入映射$g\to l_g$是保范的．定理证毕．

下面我们要证明，对$1\leqslant p<\infty$，$(L^p)^*$的元素都由$L^{p'}$中的函数按如上方式产生，从而$L^{p'}=(L^p)^*$．为此，需要利用Radon-Nikodým定理，另外，还要用到L^p模的等价表示，它本身是有独立意义的，因为这是实际上判断一个函数是否属于L^p的有效手段．我们先来给出这个等价表示．

定理(2.2) 设$1\leqslant p\leqslant\infty$，则对一切可测函数$f$，不论它是否属于$L^p$，都有

$$\|f\|_p=\sup\left\{\left|\int_X f\varphi\,d\mu\right|:\varphi\in S,\|\varphi\|_{p'}\leqslant 1\right\}.\qquad (4)$$

证明 先设$f\in L^p$．根据定理(2.1)，$L^p\subset(L^{p'})^*$，并且

$\| f \|_p = \| l_f \|$，故我们有

$$\| f \|_p = \| l_f \| = \sup\left\{ \left| \int_X f \varphi \, d\mu \right| : \varphi \in L^{p'}, \| \varphi \|_{p'} \leqslant 1 \right\}.$$

当 $1 < p \leqslant \infty$ 时，S 在 $L^{p'}$ 中稠密，再由 Hölder 不等式，知，

$$\| f \|_p = \sup\left\{ \left| \int_X f \varphi \, d\mu \right| : \varphi \in S, \| \varphi \|_{p'} \leqslant 1 \right\}, 1 < p \leqslant \infty.$$

现看 $p = 1$ 的情形. 设 $f \in L^1$，对任意给定 $\varepsilon > 0$，选有限测度集 E，使 $\int_{E^c} |f| d\mu < \varepsilon$，取 $g \in L^\infty$ 在 E 外为 0，$\| g \|_\infty \leqslant 1$，满足

$$\left| \int_E f g \, d\mu \right| \geqslant \int_E |f| \, d\mu - \varepsilon.$$

再选 $\varphi \in S$，在 E 外为 0，$\| \varphi \|_\infty \leqslant 1$，并且满足

$$\| g - \varphi \|_\infty \leqslant \varepsilon \left(\int_E |f| \, d\mu \right)^{-1}.$$

这样，我们有

$$\left| \int_E f \varphi \, d\mu \right| \geqslant \left| \int_E f g d\mu \right| - \varepsilon \geqslant \int_E |f| d\mu - 2\varepsilon \geqslant \| f \|_1 - 3\varepsilon.$$

总之，我们已在 $f \in L^p$ 时证得(4)．

设 $f \notin L^p$，先看 $1 \leqslant p < \infty$．不妨假定 f 是 a．e．有限的．这样对任意大的 β，存在有限测度集 E 使

$$\beta < \int_E |f|^p \, d\mu < \infty.$$

由刚才证明的事实知存在 $\varphi \in S$，使

$$\left|\int_X f\varphi\, d\mu\right| \geq \beta,\ \|\varphi\|_{p'} \leq 1,$$

这正是(4)所要求的．现设$p=\infty$．任取增长到∞的正数列$\{\beta_k\}$．由$f\notin L^\infty$，集合$F_k=\{x:\beta_k\leq |f|<\beta_{k+1}\}$中总有无穷个的测度为正，记其指标集为$\{k_i\}$．取$F_{k_i}$的有限正测度子集$E_{k_i}$，令

$$g_i=|E_{k_i}|^{-1}\chi_{E_{k_i}}\operatorname{sgn} f,$$

则$g_i\in L^1$，且

$$\left|\int_X g_i f\, d\mu\right| = \int_X |g_i f|\, d\mu \geq \beta_{k_i}.$$

再用S中的函数φ_i在L^1中逼近g_i，使$\|\varphi_i\|_1\leq 1$，并且

$$\left|\int_X \varphi_i f\, d\mu\right| \geq \left|\int_X g_i f\, d\mu\right| - \varepsilon,$$

则$\sup\limits_i \left|\int_X \varphi_i f\, d\mu\right| = \infty$．定理证毕．

注 定理的证明中只用到S在$L^p\,(1\leq p<\infty)$中的稠密性以及在有限测度集上对L^∞中函数的逼近，因此当X是拓扑空间时，对$1\leq p<\infty$，S可用连续函数的适当子集代替．

还有一个也可用来作为判断函数是否属于L^p的类似事实，它与Hölder不等式互为逆命题．

定理(2.3) 设$1\leq p\leq\infty$，g是可测函数，如对一切$f\in L^p$，$fg\in L^1$，则$g\in L^{p'}$．

证明 $p=\infty$时是显然的，当$1\leq p<\infty$时，设$X=\bigcup X_n$，$|X_n|<\infty$，且X_n单调增．令

$$g_n=\begin{cases} |g|, & \text{当 } x\in X_n \text{ 且 } |g|\leq n \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

则 $g_n\in L^{p'}$，且 g_n 单调上升地收敛于 $|g|$. 由定理(2.1)知，每个 g_n 产生 L^p 上一个有界线性泛函 l_n，$\|l_n\|=\|g_n\|_{p'}$. 由定理条件知，对每个 $f\in L^p$，都有

$$|l_n(f)|\leqslant\int_X|g_nf|\,d\mu\leqslant\int_X|fg|\,d\mu<\infty .$$

根据泛函分析中的一致有界原理(见本书§3.1 定理 1.3)，知 $\|g_n\|_{p'}\leqslant c<\infty$. 令 $n\to\infty$，当 $1<p<\infty$ 时用Fatou 引理，当 $p=1$ 时用点收敛，便推出 $g\in L^{p'}$. 定理获证.

注 当 $p=1$ 时，这个定理可以不用一致有界原理，而直接证明，即对 $g\notin L^\infty$，我们要构造一个 $f\in L^1$，使 $fg\notin L^1$. 我们把这作为一个习题留给读者.

现在我们来完成 L^p 的对偶 $(L^p)^*$ 的刻划.

定理(2.4) 设 $1\leqslant p<\infty$，则 $L^{p'}$ 与 $(L^p)^*$ 等距同构.

证明 根据定理(2.1)，只需证明，每个 $l\in(L^p)^*$ 确是某个 $g\in L^{p'}$ 产生的 l_g. 首先考虑 $|X|<\infty$ 情形. 对每个 $E\in\mathscr{S}$，令

$$\nu(E)=l(\chi_E).$$

则 ν 是可列可加的. 事实上，若 $\{E_i\}$ 是不交集合列，则 $\sum\limits_1^\infty\chi_{E_i}$ 在 L^p 中收敛于 $\chi_{\bigcup E_i}$，故由 l 的连续性得

$$\nu\Big(\bigcup_1^\infty E_i\Big)=l(\chi_{\bigcup E_i})=\lim_n\sum_1^n l(\chi_{E_i})=\sum_1^\infty\nu(E_i).$$

这说明 ν 是一个复测度①. 此外，由于

$$|\nu(E)|\leqslant\|l\|\,\|\chi_E\|_p=\|l\|\,|E|^{\frac{1}{p}},$$

① 设 $(X,\mathscr{S})$ 是一可测空间，$X\in\mathscr{S}$，ν 是定义在 $\mathscr{S}$ 上取值复数的函数. 如 $\nu(\varnothing)=0$，且是可列可加的，则称 ν 是 $(X,\mathscr{S})$ 上的一个复测度. 注意复数都指有限的数. 因此，复测度自动满足 $|\nu|(X)<\infty$，$|\nu|$ 是 ν 的全变差测度.

我们知道 ν 关于 μ 绝对连续，故由Radon - Nikodým 定理，存在唯一 $g \in L^1$，使得

$$l(\chi_E) = \nu(E) = \int_E \overline{g}\, d\mu = \int_X \overline{g}\chi_E\, d\mu.$$

由 l 的线性，知对一切$\varphi \in S$ 也有

$$l(\varphi) = \int_X \overline{g}\, \varphi d\mu. \qquad (5)$$

此外还有

$$\sup\left\{\left|\int_X \overline{g}\, \varphi d\mu\right| : \varphi \in S, \|\varphi\|_p \leqslant 1\right\} \leqslant \sup_{\varphi}\{|l(\varphi)|\}$$

$$\leqslant \sup_{\varphi}\|\varphi\|_p \|l\| \leqslant \|l\|.$$

由定理(2.2)知 $g \in L^{p'}$，且 $\|g\|_{p'} \leqslant \|l\|$. 现在指出由这个 g 产生的 l_g 就是原来的 l. 事实上，根据 l 的连续性. Hölder 不等式，以及S 在L^p $(1 \leqslant p < \infty)$ 中稠密，知式(5)对一切 $f \in L^p$ 成立，这就是说 $l = l_g$.

现设 $|X| = \infty$，记 $X = \bigcup X_n$，$|X_n| < \infty$，$X_n \subset X_{n+1}$. 记

$$L^p(X_n) = \{f \in L^p : f|_{X_n^c} = 0 \text{ a.e.}\}.$$

设 $l \in (L^p)^*$，则 l 也在$L^p(X_n)$上产生一个有界线性泛函 l_n，由刚证明的事实，知存在唯一$g_n \in L^{p'}(X_n)$，使得

$$l_n(f) = \int_{X_n} \overline{g_n} f d\mu, \quad \forall f \in L^p(X_n).$$

$$\|g_n\|_{p'} \leqslant \|l_n\| \leqslant \|l\|, \text{（设 } g_n|_{X_n^c} = 0).$$

由唯一性知

$$g_n = g_m \quad \text{a.e. 于} X_n \cap X_m, \quad \forall\, n, m.$$

这样，存在唯一 g，使

$$g|_{X_n} = g_n, \quad \text{且} \ \|g\|_{p'} \leqslant \sup \|g_n\|_{p'} \leqslant \|l\|.$$

现证这个 g 就是所要求的. 对任意 $f \in L^p$, $f\chi_{X_n}$ 在 L^p 中收敛于 f，并且

$$l(f\chi_{X_n}) = \int_{X_n} \overline{g_n} f\, d\mu = \int_X \overline{g} f \chi_{X_n}\, d\mu.$$

令 $n \to \infty$，同样由 l 的连续性与Hölder 不等式，知

$$l(f) = \int_X \overline{g} f\, d\mu = l_g(f).$$

定理证毕.

§1.3 $L^p\ (1 \leqslant p < \infty)$ 中的强收敛与 $L^p\ (1 < p < \infty)$ 中的弱收敛

我们首先讨论 L^p 中序列依 L^p 范数的收敛，简称强收敛，或 L^p 中的收敛.

定理(3.1) 设 $1 \leqslant p < \infty$，$\{f_n\}_1^\infty$ 是 L^p 中序列. 则 $\{f_n\}$ 强收敛于 f，当且仅当下述三条件同时成立：

(a) $\{f_n\}$ 依测度收敛于 f（简记为 $f_n \xrightarrow{m} f$）；

(b) 对任给的 $\varepsilon > 0$，存在有限测度集 A_ε 使

$$\left(\int_{A_\varepsilon^c} |f_n|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \varepsilon, \quad \forall\, n.$$

(c) 对任给的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta_\varepsilon > 0$，使对一切可测集 E，只要 $|E| \leqslant \delta_\varepsilon$，就有

$$\left(\int_E |f_n|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \varepsilon, \quad \forall\, n.$$

证明 设 $\{f_n\}$ 在 L^p 中收敛于 f，则对任意 $\lambda > 0$，当 $n \to \infty$ 时，有

$$|\{x:|f_n-f|>\lambda\}|\leqslant\lambda^{-p}\int_{\{|f_n-f|>\lambda\}}|f_n-f|^p\,d\mu$$

$$\leqslant\lambda^{-p}\|f_n-f\|_p^p\to 0,$$

这说明$f_n\xrightarrow{m}f$．现设$\varepsilon>0$，则存在n_0使当$n>n_0$时，有$\|f_n-f\|_p\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$，再选有限测度集$B_\varepsilon$与$C_\varepsilon$，使得

$$\left(\int_{B_\varepsilon^c}|f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\ ;\quad\left(\int_{C_\varepsilon^c}|f_n|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\varepsilon,\ n\leqslant n_0.$$

令$A_\varepsilon=B_\varepsilon\bigcup C_\varepsilon$，则当$n>n_0$与$n\leqslant n_0$时分别有

$$\left(\int_{A_\varepsilon^c}|f_n|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\int_{A_\varepsilon^c}|f_n-f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_{A_\varepsilon^c}|f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant\varepsilon,$$

$$\left(\int_{A_\varepsilon^c}|f_n|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\int_{C_\varepsilon^c}|f_n|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\varepsilon.$$

这就推出了(b)．类似地，可推出(c)．事实上，对给定的$\varepsilon>0$，先取n_0，再根据n_0选取$\delta_\varepsilon^{(1)}$，$\delta_\varepsilon^{(2)}$，使得

$$\left(\int_E|f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\ ,\ \forall E\ ,\ \text{只要}\ |E|\leqslant\delta_\varepsilon^{(1)},$$

$$\left(\int_E|f_n|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\varepsilon,\ \forall E,\ \text{只要}\ |E|\leqslant\delta_\varepsilon^{(2)},\ \text{当}\ n\leqslant n_0.$$

令$\delta_\varepsilon=\min(\delta_\varepsilon^{(1)},\delta_\varepsilon^{(2)})$，则对任意$E$，$|E|<\delta_\varepsilon$，便有

$$\left(\int_E|f_n|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\|f-f_n\|_p+\left(\int_E|f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\varepsilon,\ \text{当}\ n>n_0.$$

$$\left(\int_E |f_n|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \varepsilon, \quad \text{当 } n \leqslant n_0 .$$

这证明了条件(a)，(b)，(c)的必要性．

现证充分性．由$f_n \xrightarrow{m} f$，知在任意有限测度集上，有

$$\int_E |f|^p\, d\mu \leqslant \sup_n \int_E |f_n|^p\, d\mu .$$

这是因为在E上有子列$\{f_{n_k}\}$a.e.收敛于f，再用Fatou引理便可．这说明f本身也满足条件(c)．任给$\varepsilon>0$，根据条件(b)，(c)选出A_ε与δ_ε，再对$\varepsilon'=\varepsilon|A_\varepsilon|^{-\frac{1}{p}}$与$\delta_\varepsilon$根据依测度收敛性选取$n_0$，使得

$$|\{x : |f_n-f|>\varepsilon'\}| \leqslant \delta_\varepsilon, \text{当 } n \geqslant n_0 ,$$

这样当$n \geqslant n_0$时，便有

$$\begin{aligned}
&\|f_n-f\|_p \\
&\leqslant \left(\int_{A_\varepsilon \cap \{|f_n-f|>\varepsilon'\}} |f_n-f|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + \left(\int_{A_\varepsilon \cap \{|f_n-f|\leqslant\varepsilon'\}} |f_n-f|\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{A_\varepsilon} |f_n-f|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} . \\
&\leqslant 2\varepsilon+\varepsilon'|A_\varepsilon|^{\frac{1}{p}}+2\varepsilon \leqslant 5\varepsilon .
\end{aligned}$$

这就完成了定理的证明．

注1 本定理中当只讨论条件的充分性时，(a)可用下面的条件$(a)'$代替：

$(a)'$ $\quad f_n \to f \quad$ a.e.

改变后的条件组$(a)'+(b)+(c)$对保证f_n强收敛于f仍是充分

的，其证明基本上一样，只需在 A_ε 与 δ 选定以后，在 A_ε 上利用 Egoroff 定理，得到一个 $B\subset A_\varepsilon$，满足 $|B|\leqslant\delta_\varepsilon$，而在 $A_\varepsilon\setminus B$ 上 $\{f_n\}$ 一致收敛于 f，后面的步骤就完全一样了.

注 2 我们还考虑如下两个条件

$(b)'$ 设 $\{E_k\}_1^\infty$ 是可测集的任意递降到空集的序列(即 $E_k\supset E_{k+1}$，$\bigcap\limits_1^\infty E_k=\varphi$)，有

$$\lim_{k\to\infty}\int_{E_k}|f_n|^p\,d\mu=0\ ,\qquad \text{对} n \text{ 一致}.$$

$(c)'$ 记 $E_{k,n}=\{x:|f_n|>k\}$，有

$$\lim_{k\to\infty}\int_{E_{k,n}}|f_n|^p\,d\mu=0\ ,\quad \text{对} n \text{ 一致}.$$

条件 $(b)'$ 有时被称为"函数列 $\{|f_n|^p\}$ 的积分有对 n 一致的可列可加性"；性质 (c) 称为"函数列 $\{|f_n|^p\}$ 的积分有对 n 一致的绝对连续性".(对测度而言，也有一致可列可加性与一致绝对连续性的概念，见下节的定义).本文中我们约定性质 (b)，(c) 合起来为 $\{f_n\}$ 的一致 p 可积性. 易知 $(b)+(c)\Longleftrightarrow(b)'+(c)'$. 因此，将本定理及这两个注归纳得到：$\{f_n\}$ 在 L^p 中收敛于 f，当且仅当 $\{f_n\}$ 是一致 p 可积的，同时 $f_n\xrightarrow{m}f$. 而只讨论充分性时，"$f_n\xrightarrow{m}f$"可用"$f_n\to f$ a.e."代替.

推论(3.2) (Lebesgue 控制收敛定理) 设 $1\leqslant p<\infty$，$\{f_n\}$ 是 L^p 中序列，使 $f_n\xrightarrow{m}f$ 或者 $f_n\to f$，a.e. 并且存在 $g\in L^p$ 使 $|f_n|\leqslant g$，则 $\{f_n\}$ 强收敛于 f.

证明 $\{f_n\}$ 所需要的一致 p —可积性，由控制函数 g 的存在保证. 由此得出结论. 推论获证.

除了控制收敛定理以外，还有一个判别 L^p 中序列 $\{f_n\}$ 强收敛的方便条件，这就是

定理(3.3) 设 $1\leqslant p<\infty$，$\{f_n\}$ 是 L^p 中序列，f 是 L^p 中函

数，且 $f_n \xrightarrow{m} f$ 或者 $f_n \to f$，a.e.，此外还有 $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$，则一定有 $\{f_n\}$ 强收敛于 f.

证明 先设 $p=1$．我们首先证明 $\{|f_n|\}$ 在 L^1 中收敛于 $|f|$．这样 $\{f_n\}$ 的一致可积性便可由 $\{|f_n|\}$ 的强收敛推出．从而得到 $\{f_n\}$ 在 L^1 中收敛．为证 $\{|f_n|\}$ 的强收敛，注意到

$$|f_n|+|f|=\max(|f_n|,|f|)+\min(|f_n|,|f|),$$

以及

$$\min(|f_n|,|f|)\leqslant |f|,$$

此外还有

$$\min(|f_n|,|f|)\xrightarrow{m}|f| \text{ 或者 } \min(|f_n|,|f|)\to|f|, \text{a.e.}$$

应用控制收敛定理，知

$$\|\min(|f_n|,|f|)\|_1 \to \|f\|_1.$$

所以

$$\|\max(|f_n|,|f|)\|_1 \to \|f\|_1.$$

因此

$$\int_X ||f_n|-|f||d\mu$$

$$=\int_X (\max(|f_n|,|f|)-\min(|f_n|,|f|))d\mu \to 0.$$

这样，就在 $p=1$ 时证明了 $\{f_n\}$ 强收敛于 f.

当 $p>1$ 时，函数列 $\{|f_n|^p\}$ 对指标 1 满足定理的条件，故它在 L^1 中收敛于 $|f|^p$，从而 $\{|f_n|^p\}$ 是一致可积族．再由定理(3.1)，知 $\{f_n\}$ 在 L^p 中收敛于 f．定理至此证毕．

注 条件"$f_n \xrightarrow{m} f$"在许多场合均可代替条件"$f_n \to f$，a.e."．以本定理为例，假设我们已经证明了当"$f_n \to f$，a.e."时定理的结论成立，我们要推出当用"$f_n \xrightarrow{m} f$"代替"$f_n \to f$， a.e.”时，定理的结论亦然. 假设不然，则存在$\{f_n\}$的子序列，无妨设就是它自己，使$\int_X |f_n-f|^p d\mu \geqslant \alpha > 0$. 但因存在$\{f_n\}$的子序列$\{f_{n_k}\}$使得$f_{n_k} \to f$, a.e.，故我们应有$\|f_{n_k}-f\|_p \to 0$. 这样便得出矛盾. 反证法便完成了上述断言的证明. 这个推理很典型，我们还将会在以后遇到.

L^p中序列的强收敛是一个比较强的性质，它不太容易满足，同时在许多问题中又不一定非要它不可，例如，为了判断一个三角级数是L^p中某函数的Fourier级数，并不需要检验它的部分和或某种求和强收敛于L^p中的某个函数，而只需它们有某种较弱的收敛性，这种收敛性就是在Banach空间(甚至更一般的拓扑向量空间)理论中十分重要的所谓弱收敛.

定义(3.4) 设B是一个Banach空间，B^*是它的对偶空间. B中使所有$l \in B^*$都连续的最弱拓扑称为B中的**弱拓扑**. 在这种拓扑下，B中广义序列$\{x_\alpha\}$的收敛，就是对每个$l \in B^*$，广义纯量序列$\{l(x_\alpha)\}$的收敛. B中序列$\{x_n\}$在弱拓扑下的收敛就称为$\{x_n\}$的**弱收敛**. B中集合A称为**弱序列紧的**，如果A中每个序列$\{x_n\}$都有一个子序列$\{x_{n_k}\}$在B中弱收敛于某个$x \in B$. $\{x_n\} \subset B$称为弱Cauchy列，如果纯量序列$\{l(x_n)\}$对每个$l \in B^*$都是Cauchy列. B称为**弱完备的**，如每个弱Cauchy序列都有弱极限. 平行地，B^*中使每个$x \in B$作为B^*上的线性泛函都连续的最弱拓扑称为B^*的**弱*拓扑**. 上述弱概念都有对应的弱*概念.

下面我们要讨论$L^p(1 \leqslant p < \infty)$在弱拓扑下的收敛问题(根据定义，序列$\{f_n\}$在$L^p(1 \leqslant p < \infty)$中弱收敛于$f \in L^p$，就是指对于任意$g \in L^{p'}$，$\int_X f_n g\, d\mu$收敛于$\int_X f g d\mu$)与序列紧性问题. 这类问题当$1<p<\infty$时比较容易，$p=1$时要复杂得多，我

们将分别在本节与下一节进行讨论.

定理(3.5) 设 $1<p<\infty$，则L^p 中集合A 是弱序列紧的，当且仅当A 是有界的，此外L^p 是弱完备的.

证明 定理(2.4)断言，当 $1<p<\infty$ 时，L^p 是自反Banach空间．设A 是无界的，则有序列$\{f_n\}\subset A$，使 $\|f\|_p\to\infty$，它当然不可能有弱收敛的子序列．这是因为由一致有界原理知，任意弱收敛的序列$\{f_{n_k}\}$的范数是有界的．这就证明了任何弱序列紧集 A 都是有界的．相反的断言要用到泛函分析中的一个著名事实，即Banach 空间的对偶空间内的有界子集是弱$*$相对紧的(Banach－Alaoglu 定理)．现设A 是L^p 的任意有界集，既然$L^p=(L^{p'})^*$，故它是$(L^{p'})^*$内弱$*$相对紧的，当然更是弱$*$序列紧的．注意到L^p 作为$L^{p'}$的对偶的弱$*$拓扑与L^p 的弱拓扑是一回事，则A 的弱序列紧性获证.

现证 L^p 是弱完备的，设$\{f_n\}$是 L^p 中任意弱Cauchy 列，由一致有界原理，知它是 L^p 中有界集，故由弱序列紧性知,存在子列弱收敛于某个$f\in L^p$，这个f 也是序列$\{f_n\}$自己的弱极限．定理证毕.

现在讨论 L^p 中有界序列的弱极限.

定理(3.6) 设 $1<p<\infty$，$\{f_n\}$是L^p 中有界序列，且存在可测函数f，使得$f_n\xrightarrow{m}f$ 或 $f_n\to f$ a.e.，则$\{f_n\}$弱收敛于f.

证明 首先考虑$f_n\to f$ a.e.的情形．由Fatou 引理知

$$f\in L^p，且\ \|f\|_p\leqslant\sup\|f_n\|_p\leqslant c.$$

任意给定 $g\in L^{p'}$、$\varepsilon>0$，选取有限测度集 A_ε 与正数δ_ε，使得

$$\left(\int_{A_\varepsilon^c}|g|^{p'}d\mu\right)^{\frac{1}{p'}}\leqslant\frac{\varepsilon}{6c},$$

$$\left(\int_E|g|^{p'}d\mu\right)^{\frac{1}{p'}}\leqslant\frac{\varepsilon}{6c}，只要\ |E|\leqslant\delta_\varepsilon.$$

在集合 A_ε 上应用Egoroff 定理，知存在集合$B\subset A_\varepsilon$，使$|A_\varepsilon\cap B^c|\leqslant\delta_\varepsilon$，而$f_n$在$B$ 上一致收敛于f．选 n_0，使得当$n\geqslant n_0$时，有

$$|f(x)-f_n(x)||B|^{\frac{1}{p}}\|g\|_{p'}\leqslant\frac{\varepsilon}{3}\text{，对 }x\in B.$$

于是只要 $n\geqslant n_0$，便有

$$\left|\int_X fg\,d\mu-\int_X f_n g\,d\mu\right|\leqslant\int_X|f-f_n||g|\,d\mu$$

$$\leqslant\int_{A_\varepsilon\cap B^c}|f-f_n||g|d\mu+\int_B|f-f_n||g|d\mu+\int_{A_\varepsilon^c}|f-f_n||g|d\mu$$

$$\leqslant\left(\int_{A_\varepsilon\cap B^c}|g|^{p'}\,d\mu\right)^{\frac{1}{p'}}\|f_n-f\|_p+\left(\int_B|f-f_n|^pd\mu\right)^{\frac{1}{p}}\|g\|_{p'}$$

$$+\left(\int_{A_\varepsilon^c}|g|^{p'}\,d\mu\right)^{\frac{1}{p'}}\|f_n-f\|_p$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\qquad(1)$$

当条件换成$f_n\xrightarrow{m}f$ 时，只需事先选取子列$\{f_{n_k}\}$a.e. 收敛于f，仍由Fatou 引理，知也有$\|f\|_p\leqslant c$. 后面的证明完全类似，只需要在 A_ε 上利用依测度收敛性，对$\varepsilon'=(6\|g\|_{p'}|A_\varepsilon|^{\frac{1}{p}})^{-1}\varepsilon$与$\delta_\varepsilon$得到$n_0$，使得当$n\geqslant n_0$ 时，集合

$$B_n\quad\{x\in A_\varepsilon:|f_n-f|\leqslant\varepsilon'\}$$

满足$|A_\varepsilon\cap B_n^c|\leqslant\delta_\varepsilon$ 再在式(1)中将 B 换成B_n，便得所要的结论．定理证毕．

注 1 上述定理中$f_n\xrightarrow{m}f$ 情形的结论可以不必再证一遍，它可由$f_n\to f$ a.e. 情形的结论直接推出来，如同定理(3.3)后的注中指出的那样．

注2 本定理对$p=1$时不成立，例如，取$f_n=n\chi_{(0,\frac{1}{n})}$，则$\{f_n\}$是$L^1(0,1)$中有界集，且$f_n\xrightarrow{m}0$与$f_n\to 0$，a.e.都成立，但$\{f_n\}$并不弱收敛于0.

现在讨论L^p中弱收敛与强收敛的关系. 我们知道，在任意Banach空间B中，序列$\{x_n\}$强收敛蕴含弱收敛，也蕴含范数$\|x_n\|$收敛. 在Hilbert空间中可证明弱收敛与范数收敛一起推出强收敛，这后一断言是容易证明的. 事实上，记内积为$\langle\ ,\ \rangle$，则有

$$\begin{aligned}&\|x_n-x\|^2=\langle x_n-x,x_n-x\rangle\\&=\langle x_n,x_n\rangle-\langle x,x_n\rangle-\langle x_n,x\rangle+\langle x,x\rangle\to 0.\end{aligned}$$

这里对第一项是用范数收敛，第二、三项用弱收敛. 对一般Banach空间则要附加条件才能得到上述等价.

定义(3.7) Banach空间称为**一致凸的**，如果对任意$\varepsilon>0$，存在$\delta_\varepsilon>0$，使得只要x,y满足

$$\|x\|=\|y\|=1,\quad \|x-y\|\geqslant\varepsilon,$$

则有$\left\|\dfrac{x+y}{2}\right\|\leqslant 1-\delta_\varepsilon$. Banach空间称为**局部一致凸的**，如果对单位球面上的任意x，以及单位球面上的任何序列$\{x_n\}$，只要$\left\|\dfrac{x_n+x}{2}\right\|\to 1$，便有$\|x_n-x\|\to 0$.

注 一致凸性蕴含局部一致凸性. 事实上，如果$\|x_n-x\|\to 0$不成立，则存在子列$\{x_{n_k}\}$与$\alpha>0$，使得$\|x_{n_k}-x\|\geqslant\alpha$，则由一致凸性知$\left\|\dfrac{x+x_{n_k}}{2}\right\|\leqslant 1-\delta_\alpha$，这与$\left\|\dfrac{x+x_{n_k}}{2}\right\|\to 1$矛盾.

引理(3.8) 设B是一个局部一致凸空间. 则$\{x_n\}$强收敛于

x，当且仅当$\{x_n\}$弱收敛于x，以及$\|x_n\|\to\|x\|$.

证明 必要性部分是无条件地成立的. 事实上，如果$\{x_n\}$强收敛于x，则对于任意$l\in B^*$，

$$|l(x_n)-l(x)|\leqslant\|l\|\|x_n-x\|\to 0.$$

又由范数的三角不等式得

$$|\|x_n\|-\|x\||\leqslant\|x_n-x\|\to 0.$$

现在利用局部一致凸性证明条件的充分性. 设$\{y_n\}$弱收敛于y，且$\|y_n\|\to\|y\|$. 如果$y=0$，则$\|y_n\|\to 0$，这意味着$\{y_n\}$强收敛于0. 故可设$y\neq 0$且$y_n\neq 0$，令

$$x_n=\|y_n\|^{-1}y_n,\ x=\|y\|^{-1}y.$$

则$\{x_n\}$弱收敛于x，$\|x_n\|=\|x\|=1$. 如果$\{x_n\}$不强收敛于x，则由局部一致凸性知存在子列$\{x_{n_k}\}$与$\alpha<1$使

$$\left\|\frac{1}{2}(x_{n_k}+x)\right\|\leqslant\alpha<1,\ \forall k.$$

现构造$f\in B^*$，使得$f(x)=\|x\|=1$，且$\|f\|=1$(对任意Banach空间，这样的f都是存在的，它由Hahn－Banach定理保证). 则对这个f，将有

$$\left|\frac{1}{2}(f(x_{n_k})+1)\right|\leqslant\|f\|\left\|\frac{1}{2}(x_{n_k}+x)\right\|\leqslant\alpha<1.$$

当然不可能有$f(x_{n_k})\to f(x)$，这个矛盾证明了$\{x_n\}$必强收敛于x，引理获证.

引理(3.9) 设$1<p<\infty$，则L^p是一致凸空间.

证明 这是如下Clarkson不等式的直接结果

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p+\left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p\leqslant\frac{1}{2}\|f\|_p^p+\frac{1}{2}\|g\|_p^p,\ p\geqslant 2,\tag{2}$$

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^{p'}+\left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^{p'}\leqslant\left(\frac{1}{2}\|f\|_p^p+\frac{1}{2}\|g\|_p^p\right)^{\frac{1}{p-1}},$$

$$1<p\leqslant 2. \tag{3}$$

式(2)，(3)都是如下初等不等式的结果

$$\left|\frac{z+w}{2}\right|^p+\left|\frac{z-w}{2}\right|^p\leqslant\frac{|z|^p}{2}+\frac{|w|^p}{2},\ \forall z,w\in\mathbb{C},p\geqslant 2, \tag{4}$$

$$|z+w|^{p'}+|z-w|^{p'}\leqslant 2(|z|^p+|w|^p)^{\frac{1}{p-1}},\ \forall z,w\in\mathbb{C},$$
$$1<p\leqslant 2. \tag{5}$$

(4)，(5)有初等证明，但比较麻烦，我们将在第三章最后一节中用算子内插这一比较深刻的工具给出它们的证明．引理证毕．

定理(3.10) (Radon－Riesz) 设 $1<p<\infty$，$\{f_n\}$是 L^p 中序列，则$\{f_n\}$强收敛于f，当且仅当$\{f_n\}$弱收敛于f，且 $\|f_n\|_p\to\|f\|_p$.

证明 这是引理(3.8)与(3.9)的直接结果．

注 本定理对$p=1$不成立，例如，令$f_n=1+\sin nx$，则$\{f_n\}$在$L^1(0,2\pi)$中弱收敛于函数$f\equiv 1$，且$\|f_n\|_1\to\|f\|_1$，但$\{f_n\}$并不强收敛于f．

§1.4 L^1 中的弱收敛

现在讨论L^1在弱拓扑下，序列的收敛与序列的紧性．这种情形远比$p>1$时复杂．此时，集合函数理论中著名的 Vitali－Hahn－Saks 定理是解决这个问题的关键事实．

设$(X,\mathscr{F},\mu)$是所谓一般测度空间(全σ有限的完备的非负测度空间)．记

$$\mathscr{F}_1=\{E\in\mathscr{F}:|E|<\infty\}.$$

在$\mathscr{F}_1$上定义如下数值函数

$$d(E_1,E_2)=\mu(E_1\Delta E_2),\ \forall E_1,E_2\in\mathscr{F}_1, \tag{1}$$

其中Δ表示集合的对称差

$$E_1\Delta E_2=(E_1\setminus E_2)\bigcup(E_2\setminus E_1)=E_1\bigcup E_2\setminus E_1\bigcap E_2.$$

如果把满足 $\mu(E_1\Delta E_2)=0$ 的集合 E_1,E_2 称为属于同一等价类，则$\{\mathscr{F}_1,d\}$作为等价类的空间是一完备距离空间. 这是因为，根据

$$\mu(E_1\Delta E_2)=\int_X|\chi_{E_1}-\chi_{E_2}|d\mu,$$

它与 L^1 的闭子空间$\{\chi_E:E\in\mathscr{F}_1\}$是等距地一一对应的.

设λ是$(X,\mathscr{F})$上任意一个复测度，则当λ关于μ绝对连续(记为$\lambda\ll\mu$)时，λ局限于$\mathscr{F}_1$作为距离空间$\{\mathscr{F}_1,d\}$上的函数是有定义的. 这意思是，对$(\mathscr{F}_1,d)$的同一等价类，λ的值是唯一的. 事实上，由于

$$\mu(E\Delta F)=\mu(E\setminus E\bigcap F)+\mu(F\setminus E\bigcap F),$$

当$\mu(E\Delta F)=0$时，必有$\mu(E\setminus E\bigcap F)=\mu(F\setminus E\bigcap F)=0$，而

$$\lambda(E)+\lambda(F\setminus E\bigcap F)=\lambda(E\bigcup F)=\lambda(F)+\lambda(E\setminus E\bigcap F), \tag{2}$$

故从$\mu(E\Delta F)=0$总能推出$\lambda(E)=\lambda(F)$. 此外，$\lambda\ll\mu$还推出λ关于距离d是连续函数，这是因为，由$\mu(E_n\Delta E)\to 0$，知

$$\mu(E\setminus E\bigcap E_n)\to 0\ 与\ \mu(E_n\setminus E\bigcap E_n)\to 0,$$

从而由式(2)(用E_n代替其中F)即知$\lambda(E_n)\to\lambda(E)$. 反过来，对$(X,\mathscr{F})$上任意复测度$\lambda$，如果$\lambda$可以看成是距离空间$\{\mathscr{F}_1,d\}$上的函数，则必须$\lambda\ll\mu$. 事实上，如果$\mu(E)=0$，则$E$与空集$\phi$是同一等价类，故$\lambda(E)=\lambda(\phi)=0$，这说明$\lambda\ll\mu$. 由此

可见．为了能利用距离空间$\{\mathscr{F}_1, d\}$这一工具，我们只能考虑$(X, \mathscr{F})$上那些关于μ绝对连续的测度λ．此外，我们重申只有集合的μ测度才简记为$|\cdot|$．

我们先给出测度空间上测度序列的两个重要概念．

定义(4.1) 设$(X, \mathscr{F}, \mu)$是全σ有限非负测度空间，$\{\lambda_n\}$是其上复测度的一个序列．说$\{\lambda_n\}$关于μ是**一致绝对连续的**，如果

$$\lim_{|E|\to 0} \lambda_n(E) = 0 \text{，对 } n \text{ 一致；} \tag{3}$$

说$\{\lambda_n\}$对n**一致可列可加**，如果对可测集的任意单调下降族$\{E_k\}$，满足$\bigcap E_k = \varnothing$，都有

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_n(E_k) = 0 \quad \text{对} n \text{一致．} \tag{4}$$

定理(4.2) (Vitali－Hahn－Saks) 设$\{\lambda_n\}$是$(X, \mathscr{F}, \mu)$上复测度的序列，满足$\lambda_n \ll \mu$，并且有有限极限

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n(E) = \lambda(E), \quad \forall E \in \mathscr{F}_1, \tag{5}$$

则$\{\lambda_n\}$关于μ是一致绝对连续的．此外，当$\mu(X) < \infty$时，可以推出λ是可列可加的，从而λ是一个关于μ绝对连续的复测度．

证明 我们已经指出过，λ_n都是距离空间$\{\mathscr{F}_1, d\}$上的连续函数，故对任意$\varepsilon > 0$，集合

$$F_k(\varepsilon) = \{E \in \mathscr{F}_1 : \sup_n |\lambda_k(E) - \lambda_{k+n}(E)| \leqslant \varepsilon\}$$

是$\{\mathscr{F}_1, d\}$中可列个闭集的交

$$F_k(\varepsilon) = \bigcap_n \{E \in \mathscr{F}_1 : |\lambda_k(E) - \lambda_{k+n}(E)| \leqslant \varepsilon\},$$

从而也是闭集．由(5)知

$$\{\mathscr{F}_1, d\} = \bigcup_k F_k(\varepsilon).$$

因为 $\{\mathscr{F}_1, d\}$是完备距离空间，所以是Baire 意义下的第二纲集(见 §3.1 定理 1.2)，故存在 k_0，使得 $F_{k_0}(\varepsilon)$ 包含 $\{\mathscr{F}_1, d\}$ 的一个球

$$B(E_0, \delta)=\{E \in \mathscr{F}_1:\ d(E, E_0)<\delta\},$$

从而

$$\sup_n |\lambda_{k_0}(E)-\lambda_{k_0+n}(E)| \leqslant \varepsilon, \quad \forall E \in B(E_0, \delta).$$

现设 $E \in \{\mathscr{F}_1, d\}$ 是使得 $\mu(E) \leqslant \delta$ 的任意元素，注意集合等式

$$E=E \bigcup E_0 \diagdown (E_0 \diagdown E \bigcap E_0)=E_1 \diagdown E_2,$$

$$E_1, E_2 \in B(E_0, \delta),$$

由于 $E_1=E_2 \bigcup E$ 是不交并，而每个 λ_k 又是可加的，故当$k \geqslant k_0$ 时，有

$$\begin{aligned}
&|\lambda_k(E)| \leqslant |\lambda_{k_0}(E)|+|\lambda_{k_0}(E)-\lambda_k(E)| \\
&\leqslant |\lambda_{k_0}(E)|+|\lambda_{k_0}(E_1)-\lambda_k(E_1)|+|\lambda_{k_0}(E_2)-\lambda_k(E_2)| \\
&\leqslant |\lambda_{k_0}(E)|+2\varepsilon.
\end{aligned}$$

根据 λ_{k_0} 的绝对连续性，只要 $\mu(E)<\eta$，便有 $|\lambda_{k_0}(E)| \leqslant \varepsilon$. 故只要 $\mu(E) \leqslant \min(\delta, \eta)$，当$k \geqslant k_0$ 时，便有 $|\lambda_k(E)| \leqslant 3\varepsilon$. 而当 $k<k_0$ 时，根据 $\lambda_k \ll \mu$，只要 $|E|$ 充分小，当然也有$\lambda_k(E)$ 任意小，这就证明了(3)对 n 一致成立.

现设 $|X|<\infty$ ，只要我们能证明λ 是可列可加的，它就是一个复测度. 至于它关于μ 的绝对连续性可由$\lambda_k \ll \mu$ 对k 一致而得出. 现在我们来证明λ 是可列可加的. 在 $|X|<\infty$ 的条件下，这是$\lambda_k \ll \mu$ 对k 一致这一事实的结果. 事实上，λ 显然是有限可加的. 设$\bigcup\limits_1^{\infty} E_i$ 是任一不交并，由 $|X|<\infty$ ，知 $\left|\bigcup\limits_{n+1}^{\infty} E_i\right| \to 0$，故对任给 $\delta>0$，存在 n_0，使得当$n \geqslant n_0$ 时，$\left|\bigcup\limits_{n+1}^{\infty} E_i\right| \leqslant \delta$. 现对任

意给定的 $\varepsilon>0$，设 δ 就是根据 λ_k 关于 k 一致绝对连续所决定的 δ，即使得

$$|\lambda_k(E)|\leqslant\varepsilon\text{，只要 }|E|\leqslant\delta.$$

这样，只要 $n\geqslant n_0$，选 k_n 充分大，便有

$$\begin{aligned}&|\lambda(\bigcup_1^\infty E_i)-\lambda(\bigcup_1^n E_i)|\\ \leqslant&|\lambda(\bigcup_1^\infty E_i)-\lambda_{k_n}(\bigcup_1^\infty E_i)|+|\lambda_{k_n}(\bigcup_{n+1}^\infty E_i)|\\ &+|\lambda_{k_n}(\bigcup_1^n E_i)-\lambda(\bigcup_1^n E_i)|\leqslant 3\varepsilon.\end{aligned}$$

注意其中 $|\lambda_{k_n}(\bigcup_{n+1}^\infty E_i)|\leqslant\varepsilon$ 正是用到了 $\lambda_k\ll\mu$ 关于 k 是一致的.

本定理至此证毕.

我们的目的是希望 λ 是一个关于 μ 绝对连续的测度，定理(4.2)虽然做到了这一点，但附加了一个令人不快的限制，即 $|X|<\infty$．所幸的是这个限制差不多是可去掉的，并且要得到此，仅仅利用定理(4.2)就够了．"差不多"的意思是指式(5)中条件要稍微加强一下.

推论(4.3) 设$(X,\mathscr{F})$是一个可测空间，$X\in\mathscr{F}$，$\{\lambda_n\}$是复测度的序列，且有有限极限

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n(E)=\lambda(E),\quad\forall E\in\mathscr{F}.\tag{6}$$

则 $\{\lambda_n\}$的可列可加性对 n 是一致的.

证明 回忆一下，当 $X\in\mathscr{F}$ 时，复测度的定义蕴含了每个 λ_n 都是有界测度，即 $|\lambda_n|(X)<\infty$．现在在$(X,\mathscr{F})$上引进一个新的测度

$$\mu(E)=\sum_{j=1}^\infty 2^{-j}(|\lambda_j|(X))^{-1}|\lambda_j|(E),\ \forall E\in\mathscr{F}.\tag{7}$$

μ 是一个概率测度．显然 $|\lambda_j|\ll\mu$，当然 $\lambda_j\ll\mu$，$\forall j$．这样，由

定理(4.2)知 $\lambda_j \ll \mu$ 对 j 一致．现在 $\mu(X)=1$，$\{\lambda_j\}$ 的可列可加的一致性便由 $\lambda_j \ll \mu$ 对 j 一致而得到．事实上，设 $\{E_k\}$ 是单调递降于空集的任意集合族，则 $\mu(E_k)\to 0$，式(4)便由式(7)推出．推论获证．

定理(4.4) 设 $\{\lambda_n\}$ 是 $(X,\mathscr{F},\mu)$ 上复测度的序列，$\lambda_n \ll \mu$，并且式(6)中的有限极限存在，则 λ 是关于 μ 绝对连续的复测度．

证明 由定理(4.2)与推论(4.3)，知 $\{\lambda_n\}$ 的可列可加性以及关于 μ 的绝对连续对 n 都是一致的．前者可推出 λ 是一个复测度，后者可推出 $\lambda \ll \mu$．定理获证．

推论(4.5) 设 $\{f_n\}$ 是 L^1 中的有界集，且极限

$$\lambda(E)=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\,d\mu,\quad \forall E\in\mathscr{F} \tag{8}$$

存在，则存在 $f\in L^1$，使 $\{f_n\}$ 弱收敛于 f．

证明 用 f_n 为密度函数定义测度 λ_n (即 $\lambda_n(E)=\int_E f_n\,d\mu$，对一切 $E\in\mathscr{F}$)，简记 $\lambda_n=f_n\,d\mu$．由于 $\{f_n\}$ 是 L^1 有界的，式(8)中极限是一个(有限)复数．根据定理(4.3)，知复测度 $\lambda\ll\mu$．由 Radon－Nikodým 定理，存在 $f\in L^1$，使 $\lambda=f\,d\mu$，我们来证明这个 f 就是 $\{f_n\}$ 的弱极限．事实上，任给 $g\in L^\infty$，由广义简单函数类在 L^∞ 中稠密，知对任意 $\varepsilon>0$，存在广义简单函数 φ，使 $\|\varphi-g\|_\infty\leqslant\varepsilon$．对这个 φ，存在 n_0，使得当 $n\geqslant n_0$ 时，

$$\left|\int_X f_n\varphi\,d\mu-\int_X f\varphi\,d\mu\right|\leqslant\varepsilon.$$

这样

$$\left|\int_X fg\,d\mu-\int_X f_n g\,d\mu\right|$$

$$\leqslant \left|\int_X f(g-\varphi)d\mu\right| + \left|\int_X \varphi(f-f_n)d\mu\right| + \left|\int_X f_n(\varphi-g)d\mu\right|$$

$$\leqslant (\|f\|_1 + \sup\|f_n\|_1 + 1)\varepsilon,$$

推论获证.

注 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu$ 对任意$E\in\mathscr{F}$存在如果减弱为只对$E\in\mathscr{F}_1$存在，则$\{f_n\}$不一定弱收敛. 例如，令$f_n=\chi_{[n,n+1]}$，则$\{f_n\}$是$L^1(0,\infty)$中的有界集，且使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu=0, \quad \forall E\in\mathscr{F}_1,$$

但$\{f_n\}$并不弱收敛到$f\equiv 0$. 上述条件可如下验证. 对$E\in\mathscr{F}_1$，由$|E|<\infty$，知$\lim\limits_{N\to\infty}|E\cap[N,\infty)|=0$，而

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu=\lim_{n\to\infty}\int_{E\cap[0,N]} f_n d\mu+\lim_{n\to\infty}\int_{E\cap[N,\infty)} f_n d\mu$$

$$\leqslant|E\cap[N,\infty)|,$$

故必有$\int_E f_n d\mu\to 0$. 这个例子也说明，定理(4.4)的条件(6)不能减弱为式(5).

定理(4.6) L^1是弱完备的.

证明 设$\{f_n\}$是L^1中弱Cauchy序列，则由一致有界原理知$\{f_n\}$是L^1中有界集. 而对任意$E\in\mathscr{F}$，因$\chi_E\in L^\infty$，故

$\int_E f_n\, d\mu$ 是 Cauchy 数列，因而存在(有限)复数 $\lambda(E)$ 作为它的极限．应用推论(4.5)，知存在 $f\in L^1$，使得 $\{f_n\}$ 弱收敛于 f．L^1 的弱完备性获证．

综合推论(4.5)与定理(4.6)，我们得到

定理(4.7) 设 $\{f_n\}$ 是 L^1 中序列，则下述三个断言等价：

(a) $\{f_n\}$ 是弱 Cauchy 序列；

(b) $\{f_n\}$ 弱收敛；

(c) $\{f_n\}$ 是 L^1 中有界列，且极限

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\, d\mu,\quad \forall E\in\mathscr{F}$$

存在．

在实际应用中，往往只需要判断序列 $\{f_n\}$ 是否存在弱收敛子序列．而无需事先知道这个序列本身也弱收敛．这引导到弱序列紧性的讨论．

定理(4.8) 设集合 $A\subset L^1$ 是弱序列紧的，则 A 是 L^1 中有界集，并且复测度集合

$$\{\lambda_f = f\, d\mu : f\in A\} \tag{9}$$

关于 μ 是一致绝对连续的，它们的可列可加性也是一致的．反之，A 的有界性与测度集合(9)的一致可列可加性一起蕴含 A 是弱序列紧的．

证明 设 A 是弱序列紧的，则由一致有界原理知 A 是有界的．设 $\{\lambda_f\}$ 关于 μ 不是一致绝对连续的，这时，存在某个 $\varepsilon>0$，与 $\{E_k\}$，$\{f_k\}$ 满足 $|E_k|\to 0$ 及 $f_k\in A$，使得 $\left|\int_{E_k} f_k\, d\mu\right|\geqslant\varepsilon$．由 A 是弱序列紧的，知 $\{f_k\}$ 有子序列(不妨设就是它自己)是弱收敛的．故根据定理(4.2)，$\lambda_k\ll\mu$ 对 k 一致，这与 $|E_k|\to 0$，

而 $\left|\int_{E_k} f_k\, d\mu\right| \geqslant \varepsilon$ 矛盾．这就证明了$\lambda_f \ll \mu$ 对$f\in A$ 一致．现设$\{\lambda_f : f\in A\}$的可列可加性不一致，这时存在$\varepsilon>0$ 与一个递降于空集的集序列$\{E_k\}$、以及$\{f_k\}\subset A$，使得 $\left|\int_{E_k} f_k\, d\mu\right| \geqslant \varepsilon$．同前面一样，不妨设$\{f_k\}$是弱收敛的．由推论(4.3)知$\{\lambda_{f_k}\}$的可列可加性是一致的，这与 $\left|\int_{E_k} f_k\, d\mu\right| \geqslant \varepsilon$ 矛盾，$\{\lambda_f : f\in A\}$的一致可列可加性也获证．

现设 A 是有界的，且$\{\lambda_f : f\in A\}$的可列可加性是一致的．设$\{f_n\}$是 A 中的任意一个序列．记$\{\varphi_{n,m}\}$对每个 n 是a.e.收敛于f_n的简单函数序列．$\{\varphi_{n,m}\}$的所有取非零值的集合至多可列个，考虑由这些集合生成的集合代数$\mathscr{A}$，它仍由可列个元素组成．记$\widetilde{\mathscr{F}}$为$\mathscr{A}$生成的σ 代数，则$\{f_n\}$是$L^1(X,\widetilde{\mathscr{F}},\mu)$的有界子集．对每个$E\in\mathscr{A}$，$\{\lambda_{f_n}(E)\}$是复平面上的有界集，故由对角线原理可找到$\{f_n\}$的子列（不妨设就是它自己），使得极限

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\, d\mu\ ,\quad \forall E\in\mathscr{A}$$

存在，下面来证明，这个极限对任意$E\in\widetilde{\mathscr{F}}$也存在．事实上，记

$$\mathscr{F}_1=\{F\in\widetilde{\mathscr{F}}：使\lim_{n\to\infty}\lambda_{f_n}(F\cap G)存在，\forall G\in\mathscr{A}\},$$

$$\mathscr{F}_2=\{F\in\widetilde{\mathscr{F}}：使 F\cap E\in\mathscr{F}_1,\quad \forall E\in\mathscr{F}_1\}.$$

只要证明$\mathscr{F}_2$是一个包含$\mathscr{A}$的σ 代数，就有$\mathscr{F}_2=\widetilde{\mathscr{F}}$．设$G_1\in\mathscr{A}$，要证明$\forall E\in\mathscr{F}_1$ 与$\forall G_2\in\mathscr{A}$，$\lambda_{f_n}(G_1\cap E\cap G_2)$极限存在．而这是显然的，因为$E\in\mathscr{F}_1$，$G_1\cap G_2\in\mathscr{A}$．这说明$\mathscr{A}\subset\mathscr{F}_2$．

现在证明$\mathscr{F}_2$在集合的求补与求交运算下是封闭的. 设$F_1, F_2 \in \mathscr{F}_2$, $E \in \mathscr{F}_1$任意, 则当然$F_1 \cap F_2 \cap E \in \mathscr{F}_1$, 此外, 若$G \in \mathscr{A}$, 则因为$F^c \cap E \cap G = E \cap G \setminus F \cap E \cap G$, 由$\lambda_{f_n}$的可减性知, $\lambda_{f_n}(F^c \cap E \cap G)$极限存在. 这就完成了$\mathscr{F}_2$是一个代数的证明. 特别地, 我们证明了, 它对有限并是封闭的. 剩下要证它对可列并也封闭. 设$\bigcup F_m$是可列并, $E \in \mathscr{F}_1, G \in \mathscr{A}$, 则

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_{f_n}\left(\bigcup_1^M (F_m \cap E \cap G)\right)\text{存在},$$

以及

$$\lim_{M \to \infty} \lambda_{f_n}\left(\bigcup_1^M (F_m \cap E \cap G)\right)\text{存在, 且对 } n \text{ 一致}.$$

这样$\lambda_{f_n}\left(\bigcup_1^M (F_m \cap E \cap G)\right)$是两指标的 Cauchy 序列, 故两指标的极限存在, 且

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_{f_n}\left(\bigcup_1^\infty (F_m \cap E \cap G)\right) = \lim_{n \to \infty} \lim_{M \to \infty} \left(\bigcup_1^M (F_m \cap G \cap E)\right).$$

这说明$\mathscr{F}_2$是一个σ代数. 如上面已指出的, 有$\mathscr{F}_2 = \widetilde{\mathscr{F}}$. 特别地, 由于$E, G$可取为$X$, 知$\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_{f_n}(F)$存在有限, $\forall F \in \widetilde{\mathscr{F}}$. 这样由推论(4.5)知$\{f_n\}$在$L^1(X, \widetilde{\mathscr{F}}, \mu)$中有弱极限$f$. 但因$L^1(X, \widetilde{\mathscr{F}}, \mu)$等范地嵌入到$L^1(X, \mathscr{F}, \mu)$, 以及对每个$g \in L^\infty(X, \mathscr{F}, \mu)$都存在$\tilde{g} \in L^\infty(X, \widetilde{\mathscr{F}}, \mu)$, 使得$g$, $\tilde{g}$在$L^1(X, \widetilde{\mathscr{F}}, \mu)$上有相同的泛函值. 这说明$\{f_n\}$在$L^1(X, \mathscr{F}, \mu)$中也弱收敛于$f$, 定理证毕.

推论(4.9) 设A是L^1中序列, 记$|A| = \{|f|, f \in A\}$, 则A与$|A|$或者同时弱序列紧, 或者都不是.

证明 显然, A与$|A|$的有界性是相同的, 现在证明A与$|A|$关于μ的一致绝对连续性与可列可加性也都是相同的. 无疑

地，$|A|$ 的这两个性质分别强于A 的对应性质，故只要证其逆也成立．如果不然，设 A 的元素有对μ 的一致绝对连续性，但$|A|$没有．如上一个定理的证明中指出的那样，存在$\varepsilon>0$ 与$\{E_k\}$，$\{f_k\}$使得$|E_k|\to 0$，但是$\int_{E_k}|f_k|d\mu>\varepsilon$，$\forall k$．分解$f_k$为

$$f_k=f_k^{(1)}-f_k^{(2)}+i(f_k^{(3)}-f_k^{(4)}),\quad f_k^{(j)}\geqslant 0,$$
$$f_k^{(1)}\cdot f_k^{(2)}=f_k^{(3)}\cdot f_k^{(4)}=0.$$

记$E_k^{(j)}=\{x\in E_k: f_k^{(j)}>0\}$．因为

$$\int_{E_k}|f_k|d\mu=\int_{E_k}\left(\sum_1^4|f_k^{(j)}|^2\right)^{\frac{1}{2}}d\mu\leqslant\sum_1^4\int_{E_k^{(j)}}f_k^{(j)}d\mu,$$

所以，至少存在一个 j，记为j_0，使得有无穷个k 满足

$$\int_{E_k^{(j_0)}}f_k^{(j_0)}d\mu\geqslant\frac{\varepsilon}{4}.$$

因而

$$\left|\int_{E_k^{(j_0)}}f_kd\mu\right|\geqslant\int_{E_k^{(j_0)}}f_k^{(j_0)}d\mu\geqslant\frac{\varepsilon}{4}\text{，对无穷个 }k.$$

由$|E_k^{(j_0)}|\to 0$ 知，这与$\{f_kd\mu\}$对μ 的一致绝对连续性矛盾．故$|A|$的元素的绝对连续性必须是一致的．

现在，设 A 同时是一致绝对连续与一致可列可加的，但$|A|$的元素的可列可加性不是一致的．这时，存在$\varepsilon>0$，与一个递降于空集的集列$\{E_k\}$，以及A 中一个弱收敛的函数列$\{f_k\}$，使得$\int_{E_k}|f_k|d\mu\geqslant\varepsilon$，在$(X,\mathscr{F})$上引进概率测度

$$\lambda(E)=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}(|\lambda_k|(X))^{-1}|\lambda_k|(E),\quad\forall E\in\mathscr{F},$$

其中$\lambda_k = f_k d\mu$．则$\lambda_k \ll \lambda$ 且$\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k(E)$存在，$\forall E \in \mathscr{F}$．故由定理(4.2)知 $\lambda_k \ll \lambda$，对 k 一致.但刚才我们已经证明了，由$\lambda_k \ll \lambda$ 对 k 一致，可以推出$|\lambda_k| \ll \lambda$ 对 k 一致.而这是与$\int_{E_k} |f_k| d\mu \geqslant \varepsilon$ 矛盾的，定理证毕．

利用这个推论，可以得到 L^1 中强收敛与弱收敛的如下关系．

定理(4.10)　设$\{f_n\}$是 L^1 中序列．则$\{f_n\}$强收敛于f，当且仅当$\{f_n\}$弱收敛于f 且在任意有限测度集上$f_n \xrightarrow{m} f$．

证明　必要性是显然的，只需证充分性．设$\{f_n\}$弱收敛于f且在任意有限测度集上$f_n \xrightarrow{m} f$，则由推论(4.9)知，$\{|f_n| d\mu\}$与$\{f_n d\mu\}$一样也有对 μ 的一致绝对连续性，以及一致的可列可加性(这两者合起来就是以前指出的一致可积性)．再由定理(3.1)知$\{f_n\}$强收敛于f．定理证毕．

注　由定理(3.1)知，本定理将 L^1 改为L^p $(1<p<\infty)$也对．此外，当只考虑条件的充分性时，“$f_n \xrightarrow{m} f$”可用“$f_n \to f$，a．e．”代替．

§1.5　连续函数空间

本节我们研究连续函数空间，这时底空间要求从一般测度空间转到赋有拓扑结构的空间．连续函数空间的重要性在于：它几乎到处可见，凡有拓扑结构的地方，都有连续函数；它性质较好，可以用来逼近既有拓扑结构也有测度结构的空间内的可积函数；从逼近论的观点看，它经常是 L^∞ 的一种“替代”；此外，它是交换Banach 代数的重要、简单、典型的代表，而且在某种意义上来说．所有交换Banach 代数都是这一特殊交换Banach 代数的子代数(根据Gelfand 理论)．不过，正如我们在本章前言指出的，本节将只介绍Stone－Weierstrass 逼近定理与Arzelà－Ascoli 紧性定理．

为了读者查阅方便，我们首先叙述 Riesz 表示定理．本节考虑的是局部紧T_2拓扑空间(T_2的意义是，对X的任意两点$x_1 \neq x_2$，存在邻域V_{x_1}，V_{x_2}，使得$V_{x_1} \cap V_{x_2} = \varnothing$)，$C_0(X)$表示连续且无穷远处趋于 0 的全体函数所组成的Banach 空间，$M(X)$表示X上所有有界正规复值Borel 测度在通常线性运算与全变差范数下所成的Banach 空间．

Riesz 表示定理：$C_0(X)^*$与$M(X)$在下述映射下等距同构．

$$\mu \to l_\mu : l_\mu(f) = \int_X f(x)\,d\mu(x), \quad \forall f \in C_0(X).$$

现在我们来讨论 Stone－Weierstrass 定理．经典的著名的 Weierstrass 逼近定理说，$\mathbb{R}$ 上有限闭区间上的任意连续函数，可用多项式在这个区间上一致逼近．类似地，周期连续函数可用三角多项式一致逼近．M．Stone 给出了这个定理在一般拓扑空间上的推广，这个推广条件简单，证明巧妙，非常漂亮．

定义(5.1) 设X是一个(局部紧T_2)拓扑空间，$\mathscr{F}$是X上定义的(复值或实值)连续函数组成的任何集合，我们称$\mathscr{F}$是可分辨X的，如果$\forall x, y \in X$，$x \neq y$，存在$f \in \mathscr{F}$，使$f(x) \neq f(y)$．

引理(5.2) 设X是紧拓扑空间，A是实连续函数代数$C^R(X)$的一个闭子代数，则A在min 与max 两运算下封闭．

证明 我们要利用数学分析中的一个初等事实(古典 Weierstrass 定理的一个特例，它可初等地证明)：定义在$[-1,1]$区间上的连续函数$|x|$可用多项式一致逼近，设这样的多项式为$\{P_n(x)\}$．对任意$g \in A$，$g \neq 0$，以及$[-1,1]$上任意多项式$P(x)$，由A是代数知$P\left(\frac{g}{\|g\|_\infty}\right) \in A$．再根据$\frac{g}{\|g\|_\infty}$是$\left\{P_n\left(\frac{g}{\|g\|_\infty}\right)\right\}$的一致极限，而$A$又是闭的，故$\frac{g}{\|g\|_\infty}$

$\in A$ ，从而 $|g|\in A$. 注意初等表示式

$$\min(a,b)=\frac{a+b-|a-b|}{2},$$

$$\max(a,b)=\frac{a+b+|a-b|}{2},\forall a,b\in\mathbb{R},$$

知 A 在min 与max 运算下封闭，引理证毕 .

现在我们过渡到通向主要定理的关键引理.

引理(5.3) 设 X 紧，A 是$C^R(X)$的一个任意子集，满足

(1) 在 min 与max 下封闭;

(2) $\forall x,y\in X$ ，$\forall a,b\in\mathbb{R}$,（当$x=y$ 时，有$a=b$）存在 $g_{x,y}(t)\in A$ ，使

$$g_{x,y}(x)=a, \quad g_{x,y}(y)=b.$$

则$\overline{A}=C^R(X)$.

证明 任取$f\in C^R(X)$与$\varepsilon>0$，我们要证明存在 A 中函数 g，使得$|f(x)-g(x)|<\varepsilon,\forall x\in X$. $\forall x,y\in X$，令 $a=f(x)$，$b=f(y)$，设 $g_{x,y}(t)\in A$ 为定理条件(2)中给定的函数. 现固定y，由于$g_{x,y}(t)$与 $f(t)$都是连续函数，且在 $t=x$ 处相等，故存在邻域V_x，使得

$$g_{x,y}(t)>f(t)-\varepsilon, \quad \forall t\in V_x.$$

由 X 的紧性知存在$\{x_i\}_1^n$，使得 $X=\bigcup\limits_1^n V_{x_i}$. 现令

$$g_y=\max(g_{x_1,y}\cdots g_{x_n,y}),$$

则由性质(1)，$g_y\in A$，且

$$g_y(t)>f(t)-\varepsilon, \quad \forall t\in X, \ g_y(y)=f(y). \qquad (1)$$

同样的推理知存在$\{y_j\}_1^m$，$\{U_{y_j}\}_1^m$，使得$X=\bigcup\limits_1^m U_{y_j}$，且

$$g_{y_j}(t)<f(t)+\varepsilon, \quad \forall t\in U_{y_j}, \ \forall j.$$

这样 $g=\min(g_{y_1}\cdots g_{y_m})\in A$，且

$$g(t)<f(t)+\varepsilon, \ \forall t\in X.$$

由式(1)，当然也有

$$g(t)>f(t)-\varepsilon, \quad \forall t\in X.$$

这样 $|g-f|<\varepsilon$ 一致成立. 引理获证.

注 假设引理中条件(2)再加上限制：对某两定点 x_1, x_2，当 $x=x_1$、$y=x_2$ 时，a 也要求与 b 一样，则结论变为

$$\overline{A}=\{f\in C^R(X): f(x_1)=f(x_2)\}.$$

证明是完全一样的.

从前述两个引理可以直接推出本节的一个主要定理.

定理(5.4) (Stone－Weierstrass) 设 X 紧，A 是 $C^R(X)$ 的一个可分辨 X 的子代数，且含常数1，则 $\overline{A}=C^R(X)$.

证明 我们把 $\overline{A}$ 取作引理(5.3)中的集合，由引理(5.2)知它在 min 与 max 运算下封闭. 现在我们证明 A 可分辨 X 与含常数1这两个条件，蕴含了引理(5.3)中的条件(2). 事实上，$\forall x$、y，a、b（当 $x=y$ 时要求 $a=b$），令

$$g_{x,x}(t)=a, \quad \forall t\in X,$$

$$g_{x,y}(t)=\frac{a-b}{h(x)-h(y)}h(t)+\frac{ah(y)-bh(x)}{h(y)-h(x)} \qquad (2)$$

$$x\neq y, \ \forall t\in X.$$

其中 $h\in A$ 是满足 $h(x)\neq h(y)$ 的函数. 由于 A 是代数，且 $1\in A$，知 $g_{x,x}, g_{x,y}\in A$，这就证明了 $\overline{A}$ 满足引理(5.3)中的两个条件，故由该引理知 $\overline{A}=C^R(X)$，定理获证.

注1 如果定理条件中"A 可分辨 X"改为如下意义下的"A 弱可分辨 X"：除某两点 x_1, x_2 外，对其他点 A 皆可分辨. 则由引理(5.3)后面的注知，定理的结论相应地变为

$$\overline{A}=\{f\in C^R(X): f(x_1)=f(x_2)\}.$$

证明中唯一要改动的是，在 $g_{x,y}(t)$ 的定义式(2)中补充

$$g_{x_1,x_2}(t)=a.$$

注2 注1指出了定理中的条件"A 可分辨 X"是必要的，

这是因为，根据 X 的T_2，性，显然$C^R(X)\neq\{f\in C^R(X):f(x_1)=f(x_2)\}$. 后面我们将用例子指出，条件 $1\in A$ 却不是必要的，为此先看看除去条件 $1\in A$ 后，将会有怎样的结果.

定理(5.5) 设 X 紧，A 是$C^R(X)$的可分辨 X 的子代数，则或者$\overline{A}=C^R(X)$，或者存在 $t_0\in X$，使得

$$\overline{A}=C^R_{t_0}(X)=\{f\in C^R(X):f(t_0)=0\}.$$

证明 先考虑 $\forall x\in X$，存在$g\in A$，使得 $g(x)\neq 0$ 的情形. 要证引理(5.3)中的条件(2)此时成立，从而$\overline{A}=C^R(X)$. 首先指出，$\forall x,y\in X$，$x\neq y$，存在 $h\in A$，使$h(x)\neq 0$，$h(x)\neq h(y)$. 这只需分别取 $h_1\in A$，$h_2\in A$，使得

$$h_1(x)\neq h_1(y),\quad h_2(x)\neq 0.$$

再令

$$h(t)=\begin{cases}h_1(t), & 当\ h_1(x)\neq 0\\ h_2(t), & 当\ h_1(x)=0,h_2(x)\neq h_2(y),\\ h_1(t)+h_2(t), & 当\ h_1(x)=0,h_2(x)=h_2(y).\end{cases}$$

我们进一步指出，h 可以改造得此外还有 $h(y)=0$. 事实上，当 $h(y)\neq 0$ 时，考虑

$$\widetilde{h}(t)=\frac{h(t)}{h(y)}-\left(\frac{h(t)}{h(y)}\right)^2.$$

则 $\widetilde{h}(x)\neq 0$(因为 $h(x)\neq 0$，$h(x)\neq h(y)$)，$\widetilde{h}(y)=0$. 现进一步考虑 $\dfrac{1}{\widetilde{h}(x)}\widetilde{h}(t)$，它便在 x 为1，在 y 为0. 类似可得 A 中在y 为1，在 x 为0 的函数. 这说明引理(5.3)中的条件(2)确实成立. 现设存在 $t_0\in X$，使得 A 中函数都在t_0 为 0. 考虑 $\widetilde{A}=\{f+c:f\in A,c\in\mathbb{R}\}$，则 $\widetilde{A}$ 是$C^R(X)$的子代数，可分辨 X，含常数 1，故 $\forall f\in C^R_{t_0}(X)$以及 $\varepsilon>0$，存在$g\in A$，$c\in\mathbb{R}$，

使得 $\|f-(g+c)\|_{\infty}\leqslant\varepsilon$．特别以 t_0 代入，知 $|c|\leqslant\varepsilon$，从而 $\|f-g\|\leqslant 2\varepsilon$． $\overline{A}=C^R_{t_0}(X)$ 获证．

注 1 如果可分辨 X 的条件改为除 x_1，x_2 外可分辨 X，则结论为或者 $\overline{A}=\{f\in C^R(X):f(x_1)=f(x_2)\}$，或者存在 $t_0\in X$，使得 $\overline{A}=\{f\in C^R(X):f(x_1)=f(x_2),f(t_0)=0\}$．我们把证明作为一个习题留给读者．

注 2 现在举例说明定理(5.4)中条件 $1\in A$ 不是必要的．设 A 是区间[1, 2] 上所有不带零次幂的多项式的全体并补充函数0所成的代数．则它可分辨 X，且 $\forall x$，存在 $f\in A$，使得 $f(x)\neq 0$，故 $\overline{A}=C^R(X)$．但 $1\notin A$．

上面的讨论，我们都假设了 X 是紧的，我们现在考虑 X 只是局部紧 T_2 情形．我们还考虑复函数子代数 A 的情形．

定理(5.6) 设 X 是局部紧 T_2 空间，A 是 $C^R_0(X)$ 的可分辨 X 的子代数，则或者 $\overline{A}=C^R_0(X)$，或者 $\overline{A}=C^R_{0,t_0}(X)$，对某固定 $t_0\in X$．

证明 考虑 X 的单点紧化 X_{∞}．则 $C^R_0(X)=C^R_{\infty}(X_{\infty})|_X$．$A=A_{\infty}|_X$，其中 $A_{\infty}=\{f_{\infty}:f_{\infty}|_X=f,f\in A\}$．$A_{\infty}$ 是 $C^R(X_{\infty})$ 的子代数．假设 $\forall x\in X$，存在 $f\in A$，使 $f(x)\neq 0$，则 A_{∞} 是可分辨 X_{∞} 的，且存在一点，即 ∞，使 A_{∞} 中一切函数均在该点取值为0. 故由定理(5.5)知 $\overline{(A_{\infty})}=C^R_{\infty}(X_{\infty})$，即 $(\overline{A})_{\infty}=C^R_{\infty}(X_{\infty})$，从而 $\overline{A}=C^R_0(X)$．当存在 $t_0\in X$，使得 $\forall f\in A$，有 $f(t_0)=0$，则 A_{∞} 除 t_0 与 ∞ 外可分辨 X_{∞}，故

$$\overline{(A_{\infty})}=\{f\in C^R(X_{\infty}):f(t_0)=f(\infty)=0\}=C^R_{\infty,t_0}(X_{\infty}).$$

从而 $\overline{A}=C^R_{0,t_0}(X)$．定理证毕．

我们现在来看两个具体例子．

例 1 设 X 是 $\mathbb{R}^n$ 的紧子集．则每个 $f\in C^R(X)$ 可用实多项式序列在 X 上一致逼近．这是由于所有实多项式构成一个可分辨 X 的子代数，且含常数1．

例 2 $\{\cos kx\}_0^{\infty}$ 生成的实线性空间在 $C^R([0,\pi])$ 中稠密，

这是因为它是一个子代数，其乘法封闭是根据

$$2\cos kx\cos mx=\cos(k+m)x+\cos(k-m)x\ ,\ \forall k\ ,m\geqslant 0\ .$$

它可分辨 $[0,\pi]$,(因 $\cos x$ 在$[0,\pi]$ 单调),且含常数 1 是显然的.

现在我们来看复函数代数 $C(X)$的情形. 在不附加任何条件时, 定理(5.4)对 $C(X)$是不成立的, 在对 A 加上自共轭的条件(意指$f\in A\Rightarrow\overline{f}\in A$)后, 则相应的结果对$C(X)$成立.

定理(5.7) 设 X 紧, A 是$C(X)$可分辨 X 的子代数, 自共轭, 则或者$\overline{A}=C(X)$, 或者$\overline{A}=C_{t_0}(X)$, 对某 $t_0\in X$.

证明 设 A^R 为A 中所有实函数的全体以实数域作纯量的实代数,则它可分辨X (否则A 不能分辨X),因此,或者$\overline{A}^R=C^R(X)$,或者 $\overline{A}^R=C^R_{t_0}(X)$. 在第一种情形, 推出$\overline{A}=C(X)$. 事实上, $\forall f\in C(X)$, 任给 $\varepsilon>0$, 存在 g, $h\in A^R$, 分别逼近 $\mathrm{Re}f$ 与$\mathrm{Im}f$ ，故

$$\|f-(g+ih)\|_\infty\leqslant\|\mathrm{Re}f-g\|_\infty+\|\mathrm{Im}f-h\|_\infty\leqslant 2\varepsilon\ ,$$

而 $g+ih\in A$, 于是$f\in\overline{A}$. 第二种情况推出 $\overline{A}=C_{t_0}(X)$ 是类似的, 定理证毕.

定理(5.8) 设 X 是局部紧T_2 空间, A 是$C_0(X)$可分辨 X 的子代数, 且自共轭, 则或者$\overline{A}=C_0(X)$, 或者 $\overline{A}=C_{0,t_0}(X)$.

证明是类似的.

例 3 全体三角多项式$\left\{\sum\limits_{-n}^{n}\alpha_k e^{ikx}\right\}_{-\infty}^{\infty}$ 在$C(\mathbb{T})$中稠密, 这里$\mathbb{T}$是复平面上的单位圆周. 这时, 定理(5.7)的条件很容易验证.

例 4 设 $X=\{z:|z|\leqslant 1\}$, 考虑复多项式全体 $\left\{\sum\limits_{0}^{n}\alpha_k z^k\right\}_0^{\infty}$ 则它不在 $C(X)$ 中稠密. 这是因为复多项式的一致极限必须是开圆内解析的、闭圆上连续的函数. 定理(5.7)不能应用的原因是

该子代数不自共轭.

下面，我们讨论两个有关的问题．一是连续函数的扩张问题，一是 X 上有紧支集的连续函数的全体 $C_{00}(X)$ 在 $C_0(X)$ 中的稠密性问题．先看局部紧 T_2 空间的一个初等性质．

引理(5.9) 设 X 是局部紧 T_2 空间，C 是紧集，U 是开集，$C\subset U$，则存在 $f\in C_{00}^R(X)$，使得 $f|_C=1$，$f|_{U^c}=0$，$0\leqslant f\leqslant 1$．

证明 承认局部紧 T_2 空间的全正则性，即单点与不含此点的闭集可被函数分离．这样，对每个 $y\in C$，存在 $f_y(x)\in C^R(X)$，使 $0\leqslant f_y\leqslant 1$，$f_y(y)=1$，$f|_{U^c}=0$，令 $O_y=\{x:f_y(x)>\frac{1}{2}\}$，则 $\{O_y\}_{y\in C}$ 构成了 C 的开覆盖．故存在 $\{y_i\}_1^n$ 使得 $C\subset\bigcup\limits_1^n O_{y_i}$．令 $g=1-\prod\limits_{i=1}^n(1-f_{y_i})$，则 $0\leqslant g\leqslant 1$，并且 $g|_{U^c}=0$，$g|_C>\frac{1}{2}$．再令 $f=\min(2g,1)$，则 $0\leqslant f\leqslant 1$，$f|_{U^c}=0$，$f|_C=1$．如果 $\overline{U}$ 是紧的，则 $f\in C_{00}(X)$，定理获证．在一般情况下，由局部紧 T_2 性质，对任意紧集 C，开集 U，$C\subset U$，总存在开集 V，使得 $\overline{V}$ 紧，且 $C\subset V\subset\overline{V}\subset U$．在前述证明中，用 V 代替 U，则引理(5.9)证完．

定理(5.10) 若 X 是局部紧的 T_2 空间，则 $C_{00}(X)$ 在 $C_0(X)$ 中稠密．

证明 设 $f\in C_0(X)$，则对任意 $\varepsilon>0$，存在紧集 K 使得 $|f|\big|_{K^c}\leqslant\varepsilon$．由引理(5.9)，存在 $\chi\in C_{00}^+(X)=\{f\in C_{00}^R(X):f\geqslant 0\}$，使得 $0\leqslant\chi\leqslant 1$，$\chi|_K=1$．这样 $\chi f\in C_{00}(X)$ 满足

$$|f-\chi f|=0,\ x\in K,$$
$$|f-\chi f|\leqslant 2|f|\leqslant 2\varepsilon,\quad x\in K^c.$$

定理得证.

现在用 Stone－Weierstrass 定理给出关于连续函数扩张的

Tietze 定理.

定理(5.11) (Tietze 扩张定理) 设X是局部紧T_2空间,Y是非空紧集, U是开集, $Y \subset U \subset X$, 则$C(Y)$中的元素都可保范数地扩充为在U^c上为0的$C_{00}(X)$中的函数.

证明 不妨设$\overline{U}$是紧集,只考虑$C^R(Y)$情形.设D为$C^R(Y)$中那些能扩张为在U^c上为0的函数的全体. 显然, 它是子代数, 且包含常数(应用引理(5.9)), 此外, 它还可分辨Y.最后一点是由于, 设$x, y \in Y$, $x \neq y$, 则存在x的邻域W, 使$y \notin W$, 选择x的邻域V, 使得V是紧集, 且$\overline{V} \subset U \cap W$. 则由引理(5.9)知, 存在$\varphi \in C_{00}^{+}(X)$, 使 $\varphi|_{\overline{V}} = 1$, $\varphi|_{(U \cap W)^c} = 0$. 这样$\varphi|_Y \in D$, 且$\varphi$分辨了$x, y$(因$\varphi(x) = 1$, $\varphi(y) = 0$). 下面证明, 每个$f \in D$都有保范的扩张. 设$f \in D$, $\alpha = \max\{f(y): y \in Y\}$, $\beta = \min\{f(y): y \in Y\}$, 设$g$是$f$的属于$C_{00}(X)$且在$U$外为0的扩充. 记$\widetilde{\alpha} = \max(\alpha, 0)$, $\widetilde{\beta} = \min\{\beta, 0\}$, 令

$$\varphi = \min(\max(g, \widetilde{\beta}), \widetilde{\alpha}),$$

则$\varphi \in C^R(X)$, $\varphi(x) = f(x)$, $\forall x \in Y$, $\varphi|_{U^c} = 0$, 且

$$\|\varphi\|_\infty = \max(\widetilde{\alpha}, -\widetilde{\beta}) = \max(|\alpha|, |\beta|) = \|f\|_\infty.$$

最后证明D是闭的, 设$f \in \overline{D}$, $\{f_n\} \subset D$, $f_n \to f$一致. 取$\{f_{n_k}\}$使得$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_\infty \leqslant 2^{-k}$, 则

$$f = f_{n_0} + \sum_{0}^{\infty} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k}).$$

设g_k是$f_{n_{k+1}} - f_{n_k}$的保范扩张, g_0是f_{n_0}的相应的扩张, 则$g = \sum^{\infty}$ 便在$C(X)$中收敛, 且和函数是f的所需扩张, 从而$f \in D$. 这样, 由 Stone-Weierstrass 定理知$D = C^R(Y)$. 定理获证.

下面, 我们转到本节的另一个主题, 即$C(X)$中紧集的刻划问题. 说得确切些就是, 设X是紧T_2拓扑空间, K是$C(X)$的

任意子集，我们要给出刻划 K 是相对紧集的必要充分条件.

定义(5.12) 距离空间内的子集 K 称为**全有界的**，如对每个$\varepsilon>0$，都存在有限个以 K 中元素为心，半径为ε 的球覆盖K .

定义(5.13) 称距离空间内的子集 K 为**序列紧的**，如果其中任意序列$\{x_n\}$都有子序列$\{x_{n_k}\}$收敛于原空间的某点；称为**列紧的**，若 K 的任意可列开覆盖必有有限子覆盖；称为**相对列紧的**，若$\overline{K}$ 是列紧的；称为**紧或相对紧的**，若对应的列紧，相对列紧概念中可列覆盖改为任意覆盖.

引理(5.14) 设 K 是距离空间X 内的任意子集，则下述断言等价：

(a) K 是序列紧的，或等价地$\overline{K}$ 是序列紧的，

(b) K 是全有界的，$\overline{K}$ 是完备的，

(c) $\overline{K}$ 是列紧的，

(d) $\overline{K}$ 是紧的.

证明 (a)中两断言等价是显然的.

(a)$\Rightarrow$(b) 设$\varepsilon>0$，任取x_1 作球$S(x_1,\varepsilon)$.在其外找x_2 作球$S(x_2,\varepsilon)$. 再在 $S(x,\varepsilon)\bigcup S(x_2,\varepsilon)$外找$x_3$ 作球 $S(x_3,\varepsilon)$，如此继续. 它只能在有限步中止. 否则$\{x_n\}_1^\infty$ 将是两两相距至少ε 的无穷点列，而不能有收敛子序列. 故 K 全有界. 现设$\{x_n\}_1^\infty$ 是$\overline{K}$ 中的Cauchy 列. 由$\overline{K}$ 序列紧性及闭性，知$\{x_n\}$有子序列收敛于$\overline{K}$ 中某点，此点必是整个序列$\{x_n\}$的极限，这就证明了$\overline{K}$ 完备 .

(b)$\Rightarrow$(a) 设$\{x_k\}_1^\infty\subset K$. 对 $\varepsilon=\dfrac{1}{n}$ 作全有界性质中的有限覆盖球族. 对$n=1$，$\{x_k\}_1^\infty$ 有无穷子列$\{x_{1,k}\}_1^\infty$含于某个半径为1 的球 S_1内，同样又有$\{x_{1,k}\}_1^\infty$ 的无穷子列$\{x_{2,k}\}_1^\infty$ 含于某个半径为 $\dfrac{1}{2}$ 的球S_2 内 . 如此继续下去，则对角线子列$\{x_{k,k}\}_1^\infty$ 便满足$x_{k,k}\in S_k$，而$\{S_k\}_1^\infty$ 是递降的半径趋于0 的一

个球族. 故$\{x_{k,k}\}_1^{\infty}$ 是 Cauchy 序列. 由$\overline{K}$ 完备，推出它有极限属于$\overline{K}$，从而 K 序列紧获证.

在证明$(c)\Longleftrightarrow(a)$之前，我们要证明，全有界蕴含了$\overline{K}$ 作为相对距离空间是可分的，从而具有可列基. K 全有界显然推出$\overline{K}$ 全有界. 设$\left\{S(x_i^{(n)},\frac{1}{n})\right\}_{i=1}^{k_n}$，$n=1,2,\cdots$，是$\overline{K}$ 的全有界性给出的球族，要证$\{x_i^{(n)}\}$是$\overline{K}$ 的稠密子集. 事实上，任给$x\in\overline{K}$，则对一切 n，存在$x_i^{(n)}$，使得 $x\in S(x_i^{(n)},\frac{1}{n})$，也就是说，$x$ 的$\frac{1}{n}$ 球邻域必含这个点 $x_i^{(n)}$. 这证明了$\{x_i^{(n)}\}$的稠密性. 我们现在来证明，集合

$$\mathscr{O}=\left\{S(x_i^{(n)},\frac{1}{n}):\ i=1,\cdots,\ k_n,n=1,2\ \cdots\right\}$$

构成了$\overline{K}$ 的一个开基. 设 G 是$\overline{K}$ 的任意开集，$x\in G$，则x 有半径$\rho<1$ 的(相对，下同)球邻域 $S(x,\rho)\cap\overline{K}\subset G$，$S(x,\frac{\rho}{3})\cap\overline{K}$ 必含此稠集中的某点 y. 设 $\frac{\rho}{2}>\frac{1}{n}\geqslant\frac{\rho}{3}$. 则 $y\in S(x,\frac{\rho}{3})\cap\overline{K}\subset S(x,\frac{1}{n})\cap\overline{K}$，这样，$S(y,\frac{1}{n})\cap\overline{K}\subset S(x,\frac{2}{n})\cap\overline{K}\subset S(x,\rho)\cap\overline{K}\subset G$. 这说明了 G 中每点都属于一个包含在G 内的上述$\mathscr{O}$ 中的(相对)球中. $\mathscr{O}$ 是开基获证. 至此我们已经证明了(a)与(b)等价，且它们都蕴含$\overline{K}$ 有可列基.

$(a)\Rightarrow(c)$ 用反证法，如果(c)不成立，则存在空间的递增开集序列$\{G_n\}_1^{\infty}$，满足$G_n\subsetneqq G_{n+1}$，$\overline{K}\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n$，以及$(G_{n+1}$

$\setminus G_n)\bigcap\overline{K}\neq\phi$. 取$a_n\in(G_{n+1}\setminus G_n)\bigcap\overline{K}$. 这时$\{a_n\}_1^{\infty}$便没有收敛子序列. 这是因为对空间的任意点a，总可找到a的某个邻域，使它只含此序列的有限个点.（当$a\notin\overline{K}$时显然；$a\in\overline{K}$时存在n_0使$a\in G_{n_0+1}\setminus G_{n_0}$，这个$G_{n_0+1}$便是所求的邻域.

$(c)\Rightarrow(a)$ 设$\{a_1,a_2\cdots\}$是任意序列. 令$A_n=\{a_n,a_{n+1}\cdots\}$，$F_n=\overline{A}_n$，则$F_n$是非空闭集的递降序列，故$\bigcap\limits_n F_n$非空. 任取$a\in\bigcap\limits_n F_n$，则$a$便是$\{a_1,a_2\cdots\}$的某个子序列的极限.

至此，我们证明了$(a),(b),(c)$是等价的，且均蕴含距离空间有可列基. 从而由列紧性可推出紧性，即$(c)\Rightarrow(d)$. 而$(d)\Rightarrow(c)$是显然的. 引理证毕.

注 我们下面需要的仅仅是(b)与(d)等价. 它的证明中往往借助于序列紧概念. 故为了完备起见，我们给出了这个引理.

现过渡到紧空间X上复连续函数代数$C(X)$的子集K的相对紧性判别法. 前述引理中给出的几个等价性质，甚至最简单的全有界性实际上也并不好应用. 下面将介绍的 Arzelà – Ascoli 定理把全有界性化为更好判别的有界性与等度连续性.

定义(5.15) 设X是任意拓扑空间，$K\subset C(X)$. 我们称K是**等度连续**的，如果对每个$\varepsilon>0$，每个$x\in X$，都存在邻域$V=V(x,\varepsilon)$，使

$$\sup_{f\in K}\sup_{y\in V}|f(x)-f(y)|\leqslant\varepsilon .$$

定理(5.16) (Arzetá – Ascoli) 设X紧，$K\subset C(X)$，则K相对紧，当且仅当K有界且等度连续.

证明 由于$C(X)$是完备距离空间，引理(5.14)中条件(b)中$\overline{K}$完备永远成立，因此，根据引理(5.14)，只需证明全有界性等价于有界加上等度连续. 我们来证明后者可以推出前者. 任给$\varepsilon>0$，由K的等度连续性与X的紧性，知存在$\{V(x_i,\varepsilon)\}_1^n$，覆盖了$X$，其中$V(x_i,\varepsilon)=V_i$是$x_i$的满足下述关系的邻域

$$\sup_{f\in K}\sup_{y\in V_i}|f(y)-f(x_i)|\leqslant\varepsilon. \tag{3}$$

记 $B=\{f(x_i):1\leqslant i\leqslant n, f\in K\}$. 由 K 的有界性，知B 是复平面 $\mathbb{C}$ 内的有界集，故相对紧，从而全有界. 于是存在有限个复数集 $\{c_j\}_1^m$，使 $B\subset\bigcup_{j=1}^{m}S(c_j,\varepsilon)$. 考虑任意将 $\{1\cdots n\}$映到 $\{1,\cdots m\}$内的映射 $\pi:\pi(i)=j$，其总数是有限个. 令

$$K_\pi=\{f\in K:f(x_i)\in S(c_{\pi(i)},\varepsilon),\ i=1\ \cdots n\}. \tag{4}$$

则 $K=\bigcup_{\pi}K_\pi$,.现证每个K_π 均是直径小于等于4ε 的集合，由此便知K 是全有界的. 事实上，任取$f_1, f_2\in K_\pi$, $x\in X$. 则 $x\in V_i$ 对某个 i. 这样

$$\begin{aligned}|f_1(x)-f_2(x)|\leqslant|f_1(x)-f_1(x_i)|+|f_1(x_i)-c_{X(i)}|\\ +|c_{X(i)}-f_2(x_i)|+|f_2(x_i)-f_2(x)|\leqslant4\varepsilon.\end{aligned}$$

至此，我们证明了K 有界且等度连续蕴含了K 全有界. 反过来的蕴含关系比较容易证明，我们把它留给读者作为一个习题. 定理至此证毕.

§1.6 $\mathbb{R}^n$上的 L^p 空间与某些光滑函数空间

$\mathbb{R}^n$ 有很丰富的结构，例如可以定义平移与伸缩，由此可以诱导出作用在函数上的平移、伸缩与微分等运算. 这些结构无疑会使 $\mathbb{R}^n$ 上的L^p 理论远比只有测度结构时的L^p 理论更丰富. 本节我们主要有兴趣于平移，伸缩以及微分运算与L^p 理论相结合所得到的一些结果. 例如，我们可以用平移与伸缩定义L^p 的逼近单位，即每个$f\in L^p$ 可以用这两种运算得到的函数序列在L^p 意义下或点态意义下任意逼近，并且这个函数序列可以足够光滑，俗称光滑化子. 此外我们还可以用L^p 中的度量来描述函数的连

续模，进而研究普通的 Lipschitz 空间Λ_α，以及 L^p 中的Lipschitz 空间$\Lambda_{p,\alpha}$．最后我们还可结合微商与 L^p 得到Sobolev 空间L_k^p．当然本节我们只是初步接触函数的光滑性与 L^p 理论的结合，我们在第四章还会回到这个课题，更细微地讨论一些结合这两种概念所得到的空间：Hardy 空间 H_p、BMO 空间与 Besov 空间$B_{p,q}^s$．

所谓平移变换 τ_h 是对 $h\in\mathbb{R}^n$ 所定义的如下变换

$$\tau_h: x \to x-h,\quad \forall x\in\mathbb{R}^n. \tag{1}$$

它自然诱导出作用在函数上的算子

$$\tau_h: f(x) \to \tau_h f(x) = f(x-h). \tag{2}$$

所谓伸缩变换 d_δ，$\delta>0$，是 $\mathbb{R}^n$ 上的如下变换

$$d_\delta: x \to \delta x,\quad \forall x\in\mathbb{R}^n. \tag{3}$$

同样它也可诱导作用在函数上的算子

$$d_\delta: f(x) \to d_\delta f(x) = f(\delta x). \tag{4}$$

这两类变换可被用来构成作用在函数空间上的卷积算子序列，本节我们首先讨论这一问题．

定理(6.1) 当 $1\leqslant p\leqslant\infty$ 时，每个τ_h 都是L^p 的保范算子．而当$1\leqslant p<\infty$ 时，对$f\in L^p$ 或 $f\in C_0$ 固定，τ_h 是由$\mathbb{R}^n$ 到L^p 内或C_0 内的连续算子，这里 C_0 如通常那样表示$\mathbb{R}^n$ 上所有无穷远处为0 的连续函数的空间．

证明 τ_h 的保范性显然．为证第二个断言，简记

$$\Delta_p(f,h) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\tau_h f(x) - f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

注意到

$$\|\tau_{h_1}f - \tau_{h_2}f\|_p = \|\tau_{h_1-h_2}f - f\|_p = \Delta_p(f, h_1-h_2),$$

因此充分地只需证明 $\lim\limits_{h\to 0}\Delta_p(f,h)=0$．对任意$\varepsilon>0$，存在

$f_1 \in C_{00}(\mathbb{R}^n)$ 使 $f_2 = f - f_1$ 满足 $\|f_2\|_p \leqslant \varepsilon$，我们把 C_0 情形看成 $p = \infty$ 情形，讨论是一样的. 注意 $\tau_h f_1 - f_1 \to 0$ 对 x 一致，故只需 h 充分小，例如 $|h| < \delta$ 就有 $\|\tau_h f_1 - f_1\|_p \leqslant \varepsilon$. 这样

$$\Delta_p(f, h) \leqslant \Delta_p(f_1, h) + \Delta_p(f_2, h) \leqslant 3\varepsilon, \quad |h| < \delta .$$

定理证毕 .

函数

$$\omega_p(f, \delta) = \sup_{|h| \leqslant \delta} \Delta_p(f, h), \tag{5}$$

称为 f 的 L^p 中的连续模，它是更为人熟知的 C 中的连续模的类似，同 C 中连续模一样，它是一个有界、连续、递增、与次可加的函数. 由次可加性知，$\omega_p(f, \delta) = o(\delta)$ 当且仅当 f 为常数函数. 事实上，由

$$\omega_p(f, \delta) \leqslant m\, \omega_p\left(f, \frac{\delta}{m}\right) = \delta\, \frac{m}{\delta}\, \omega_p\left(f, \frac{\delta}{m}\right) \to 0,$$

$$m \to \infty,$$

知 $\omega_p(f, \delta) = 0$，$\forall \delta > 0$. 这显然只当 $f \equiv c$，a . e . 才有可能.

还有一个类似事实也反映 L^p 中函数的光滑性，此即关于 Lebesgue 点的下述断言 .

定理(6.2) 设 $1 \leqslant p < \infty$ ，$f \in L^p$，则

$$\int_{B(0, h)} |f(x \pm t) - f(x)|^p\, dt = o(h^n), \text{ a . e .} \tag{6}$$

其中 $B(0, h)$ 表示以 0 为心，h 为半径的 $\mathbb{R}^n$ 中的球，

证明 设 r 是有理数，则因 $f(x \pm t) - r$ 作为 t 的函数属于 L^p . 故由Lebesgue 关于积分的微分定理(见 §3.4 推论 4.3)，知

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{|B(0, h)|} \int_{B(0, h)} |f(x \pm t) - r|^p\, dt = |f(x) - r|^p,$$

$$\text{a . e . } x, \tag{7}$$

记 E_r 为使(7)式不成立的点集，$E=\bigcup\limits_{r\text{ 有理数}} E_r$. 则 E 是零测集.

不妨设 $f(x)$ 处处有限，要证 $\forall x \notin E$，式(6)成立. 事实上. 对 $x \notin E$，任给 $\varepsilon>0$，找有理数 r 使 $|f(x)-r|<\varepsilon$，则当 h 充分小时，有

$$\left(\frac{1}{|B(0,h)|}\int_{B(0,h)}|f(x\pm t)-f(x)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{|B(0,h)|}\int_{B(0,h)}|f(x\pm t)-r|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+|f(x)-r|\leqslant 2|f(x)-r|+\varepsilon\leqslant 3\varepsilon.$$

这就证明了定理.

注 使式(6)成立的 x 称为 f 的Lebesgue 点. 本定理说对任意 $f\in L^p$，$1\leqslant p<\infty$，几乎所有的点都是 f 的 Lebesgue 点.

现在我们用平移与伸缩变换来定义 L^p 中的某种意义下的逼近单位. 逼近单位概念来自于拓扑代数(即一个既有拓扑结构又有代数结构并且两者适当配合的集合). 设 A 是一个没有单位的拓扑代数，元素族 $\{x_\alpha\}$ 称为 A 的一个左或右逼近单位，如果 $x_\alpha\cdot x\to x$，或者 $x\cdot x_\alpha\to x$，$\forall x$. L^p 空间一般不是一个代数. 但 L^p 中所有元素可以与 L^1 中元素作卷积，它是一种类型的乘法，我们将在 §1.7 与 §2.1 对它作更多的讨论. 设 $\{\varphi_n\}$ 是 L^1 中函数序列，自然可问什么时候仍有

$$f*\varphi_n(x)=\int\varphi_n(x-y)f(y)dy\to f(x). \tag{8}$$

这里收敛通常考虑 L^p 中收敛与几乎处处点收敛两种. 在 L^p 收敛的情形，则说 $\{\varphi_n\}$ 是 L^p 的逼近单位；在点收敛的情形，则说 $\{\varphi_n\}$ 是 L^p 的点逼近单位. 将伸缩变换应用于上述卷积，可

以构造出 L^p 的这两种收敛意义下的许多逼近单位来.

定理(6.3) 设 $\varphi(x)\in L^1$, $\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)dx=1$. 对任意 $\varepsilon>0$,

记 $\varphi_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-n}\varphi(\varepsilon^{-1}x)$. 则有

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f*\varphi_\varepsilon(x)=f(x),\quad \forall f\in L^p,\ 1\leqslant p<\infty\ ,\ \text{与} f\in C_0.$$

证明 我们有

$$\varphi_\varepsilon * f(x)-f(x)=\int_{\mathbb{R}^n}(f(x-y)-f(x))\varphi_\varepsilon(y)dy.$$

由广义 Minkowski 不等式(见 §1.7 习题 1)

$$\|\varphi_\varepsilon * f-f\|_p\leqslant\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)-f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}|\varphi_\varepsilon(y)|dy$$

$$\leqslant\int_{\mathbb{R}^n}\omega_p(f,|y|)|\varphi_\varepsilon(y)|dy=\int_{\mathbb{R}^n}\omega_p(f,\varepsilon|y|)|\varphi(y)|dy\to 0.$$

其中最后一步用了控制收敛定理, 因被积函数被 $2\|f\|_p|\varphi(y)|$ 控制. 而 $\omega_p(f,\varepsilon|y|)\to 0$ 处处. 定理证毕.

对点收敛的逼近单位要求要严格得多. 一个应用上方便, 条件又不太苛刻的点收敛逼近单位如下定理中所述.

定理(6.4) 设 $\varphi\in L^1$, $\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)dx=1$, 并且 φ 的最小径向递降控制函数, 即

$$\psi(x)=\sup_{|y|\geqslant|x|}|\varphi(y)|, \tag{9}$$

也是 L^1 中函数, 即 $A=\int_{\mathbb{R}^n}\psi(x)dx<\infty$, 则对上述$\{\varphi_\varepsilon\}$, 有

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f*\varphi_\varepsilon(x)=f(x),\quad \text{a.e.}\ \forall f\in L^p,\ 1\leqslant p\leqslant\infty. \tag{10}$$

其中$p=\infty$ 时函数空间是L^∞ 不是指 C_0.

证明 我们需要应用关于 Hardy－Littlewood 极大算子M

$$Mf(x)=\sup_{B=B(x,r)}\frac{1}{|B|}\int_B|f(y)|dy$$

的如下事实(见§3.4 中定理4.2，4.4，4.9)

$$|\{Mf>\lambda\}|\leqslant\frac{c}{\lambda^p}\|f\|_p^p,\quad\forall\lambda>0,\forall f\in L^p,1\leqslant p<\infty, \tag{11}$$

以及对满足定理条件的 φ 有

$$\sup_{\varepsilon>0}|f*\varphi_\varepsilon(x)|\leqslant AMf(x). \tag{12}$$

下面我们利用这些事实证明 $1\leqslant p<\infty$ 时的式(10). 这个证明很典型，我们可以叙述得一般些. 设$\{T_\alpha\}$是定义在 L^p 上的线性算子族，其极大算子 T^*

$$T^*f(x)=\sup_\alpha|T_\alpha f(x)| \tag{13}$$

满足更一般些的式(11)，即其中右边可以换为 $\frac{c}{\lambda^q}\|f\|_p^q$，对某个 q，$1\leqslant q<\infty$. 并且对L^p 的某个稠密子集D 的所有元素f，$\{T_\alpha f(x)\}$ a.e.收敛于$f(x)$，则对所有 $f\in L^p$，也必有 $\lim T_\alpha f(x)=f(x)$, a.e. 现来证明这个断言. 任取$f\in L^p$，无妨设$T_\alpha f(x)$是实值的(否则分实、虚部考虑). 记

$$\theta_f(x)=|\overline{\lim}\,T_\alpha f(x)-\underline{\lim}\,T_\alpha f(x)|. \tag{14}$$

对f 的任意分解$f=g+h$，$g\in D$，总有

$$\theta_f(x)=\theta_h(x)\leqslant 2T^*h(x).$$

现设 $\varepsilon>0$ 与 $\delta>0$ 是任意给的，并设 $\|h\|_p\leqslant\varepsilon$，则

$$|\{\theta_f>\delta\}|\leqslant\left|\left\{T^*h>\frac{\delta}{2}\right\}\right|\leqslant\frac{c}{\delta^q}\|h\|_p^q\leqslant c\left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^q.$$

由 ε 是任意的，知 $|\{\theta_f>\delta\}|=0$，$\forall\delta>0$，因此，$\theta_f=0$，a.e.，从而 $\lim T_\alpha f(x)$ a.e. 存在，$\forall f\in L^p$. 现证这个极限只能是 $f(x)$ 自己，事实上，记 $\widetilde{\theta_f}(x)=|\lim T_\alpha f(x)-f(x)|$，则同样的证明知 $\widetilde{\theta_f}(x)=0$，a.e，这便证明了断言.

现在将这个结论应用于定理中所述情况：$T_\varepsilon f=f*\varphi_\varepsilon$，由(12)，(11)知 T^* 满足要求，而当 $1\leqslant p<\infty$ 时，对 $D=C_{00}$ 中所有元素 g，$T_\varepsilon g\to g$. 这样当 $1\leqslant p<\infty$ 时获证. 当 $p=\infty$ 时，对任意方体 I，令 $f=f\chi_I+f\chi_{I^c}=f_1+f_2$，易知 $\varphi_\varepsilon*f_2(x)\to f_2(x)$，$\forall\ x\in I$；同时因 $f_1\in L^1$，故 $\varphi_\varepsilon*f_1(x)\to f_1(x)$，a.e.，$x\in I$. 定理证毕.

上面构造的逼近单位能对函数提供任意光滑的逼近函数，这只需提高 $\varphi(x)$ 的光滑度. 此外，我们还可以适当修改，得到不仅光滑而且具有紧支集的逼近函数. 最后，如果被逼近的函数有某种意义的可微性，则我们也能得到同时使其导数逼近这个函数的 导数的逼近函数. 我们这里所指的导数是如下意义的弱导数. 设 $\alpha=(\alpha_1\cdots\alpha_n)$ 是多重指标(指 $\alpha_j\in\mathbb{Z}_+$，$j=1,\cdots,n$)，记

$$|\alpha|=\sum_1^n\alpha_i,\ D^\alpha=\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}. \tag{15}$$

设 f，g 是局部可积函数，我们说 g 是 f 的弱 α 阶导数 $\dfrac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}$，如果

$$\int_{\mathbb{R}^n}f\frac{\partial^\alpha\varphi}{\partial x^\alpha}dx=(-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^n}g\varphi dx,\quad\forall\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n). \tag{16}$$

这里$\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$是$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$(即无穷次可微且有紧支集的函数集合)的另一通用记法.(也有细微差别,通常记号$\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$暗指其中赋予了一个特定的拓扑结构,见§2.9.)

定理(6.5) 设 $1\leqslant p<\infty$,$f\in L^p$,且$\forall\alpha$;$|\alpha|\leqslant k$,$\dfrac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}$ 在如上弱意义下存在,且属于L^p,则存在$\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$中函数序列$\{f_m\}$,使$\{f_m\}$与$\left\{\dfrac{\partial^\alpha f_m}{\partial x^\alpha}\right\}$在$L^p$中收敛于$f$与$\dfrac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}$,$\forall\alpha$,$|\alpha|\leqslant k$.

证明 设$\psi\in\mathscr{D}$,$\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}\psi dx=1$,令$f_\varepsilon=f*\psi_\varepsilon$,则$f_\varepsilon\in C^\infty$(表示$\mathbb{R}^n$上无穷次可微函数的全体),且由Young不等式(见§1.7习题3),有$\|f_\varepsilon\|_p\leqslant\|\psi_\varepsilon\|_1\|f\|_p=\|f\|_p$还有$\|f_\varepsilon-f\|_p\to 0$,并且

$$\frac{\partial^\alpha f_\varepsilon}{\partial x^\alpha}=\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}*\psi_\varepsilon. \tag{17}$$

式(17)可用如下推导获得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^\alpha f_\varepsilon(x)}{\partial x^\alpha}&=\int_{\mathbb{R}^n}f(y)\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\psi_\varepsilon(x-y)dy\\&=(-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^n}f(y)\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha}\psi_\varepsilon(x-y)dy\\&=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha}f(y)\psi_\varepsilon(x-y)dy=\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}*\psi_\varepsilon.\end{aligned}$$

这样,$\dfrac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}f_\varepsilon$也在$L^p$中收敛于$\dfrac{\partial^\alpha y}{\partial x^\alpha}f$.这就是说,$\{f_\varepsilon\}$除了

不必具有紧支集外，满足其他所有要求．现稍作修改，设 $\delta(x)\in\mathscr{S}$，且 $\delta(0)=1$．考虑函数族 $\left\{\delta\left(\frac{x}{m}\right)f_{\frac{1}{m}}(x)\right\}$，则它就是所要求的．事实上

$$\delta\left(\frac{x}{m}\right)f_{\frac{1}{m}}(x)-f(x)=\delta\left(\frac{x}{m}\right)\left(f_{\frac{1}{m}}-f\right)$$

$$+f\left(\delta\left(\frac{x}{m}\right)-1\right),$$

显然在 L^p 中收敛于0；此外，对非零α，

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\left(\delta\left(\frac{x}{m}\right)f_{\frac{1}{m}}(x)\right)=\delta\left(\frac{x}{m}\right)\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}f_{\frac{1}{m}}(x)$$

$$+O\left(\frac{1}{m}\sum_j|h_j(x)|\right)$$

中的第一项同样在L^p 中收敛于 $\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}$，而第二项求和号$\sum$ 中是有限个L^p 中的函数，其范数有不依赖于 m 的上界，故第二项在 L^p 中收敛于0．这证明了定理的断言．

现讨论 L^p 连续模及某些相关问题．

定义(6.6) 设 $1\leqslant p<\infty$，$f\in L^p$，式(5) 定义的函数 $\omega_p(f,\delta)$称为f的L^p **连续模**．如果对某$\alpha>0$，有

$$\omega_p(f,\delta)=O(\delta^\alpha),\tag{18}$$

则称$f\in\Lambda_{p,\alpha}$．对$f\in\Lambda_{p,\alpha}$，令

$$\|f\|_{\Lambda_{p,\alpha}}=\|f\|_p+\inf\{A:\omega_p(f,\delta)\leqslant A\delta^\alpha\}.\tag{19}$$

现在利用前面有关逼近单位的一些事实，给出某些特殊指标时的空间 $\Lambda_{p,\alpha}$ 的刻划．

定理(6.7) 设 $\alpha=1$，$1<p<\infty$，则 $f\in\Lambda_{p,\alpha}$ 当且仅当 f 及 f 的弱意义下的导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ 都属于 L^p，$j=1,\cdots,n$．

证明 设 $f\in\Lambda_{p,1}$，$\omega_p(f,\delta)\leqslant A\delta$（无妨设 A 是式(19)中的极小常数），e_j 是 x_j 轴上的单位向量，则

$$\left\{m\left(f\left(x+\frac{e_j}{m}\right)-f(x)\right)\right\}$$

是 L^p 中以 A 为范数的上界的有界集．由 L^p 的有界集的弱序列紧性（见§1.3 定理 3.5），知存在子列

$$\left\{m_k\left(f\left(x+\frac{e_j}{m_k}\right)-f(x)\right)\right\}$$

有弱极限 g_j，特别地，$\forall\varphi\in\mathscr{D}$ 在下式两边取极限

$$\int_{\mathbb{R}^n} m_k\left(f\left(x+\frac{e_j}{m_k}\right)-f(x)\right)\varphi(x)dx$$

$$=\int_{\mathbb{R}^n} m_k f(x)\left(\varphi\left(x-\frac{e_j}{m_k}\right)-\varphi(x)\right)dx, \tag{20}$$

即得

$$\int_{\mathbb{R}^n} g_j\varphi\,dx=-\int_{\mathbb{R}^n} f\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\,dx. \tag{21}$$

这就是说，g_j 是 f 的弱导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$，并且由 $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ 是 L^p 中半径为 A 的球内的元素的弱极限，知 $\left\|\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right\|_p\leqslant A$．这样，

$$\|f\|_p+\sum_{1}^{n}\left\|\frac{\partial f}{\partial x_j}\right\|_p\leqslant\|f\|_p+nA\leqslant n\|f\|_{\Lambda_{p,1}}.$$

反过来，设 $f\in\mathscr{S}$，则 f 有如下积分表示

$$f(x+y)-f(x)=\int_0^{|y|}\langle\nabla f,y'\rangle(x+sy')ds.\qquad(22)$$

其中 ∇f 是 f 的梯度向量 $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1},\cdots\dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right)$，$y'$ 是 y 方向的单位向量，即 $y=|y|y'$，此外，$\langle\quad,\quad\rangle$ 是借用的 $\mathbb{R}^n$ 中内积的记号，即

$$\langle\nabla f,y'\rangle=\frac{\partial f}{\partial x_1}y_1'+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}y_n'.\qquad(23)$$

式(22)的证明如下：引进定义在 $[0,1]$ 的函数 $f(x+ty)$，则

$$\frac{d}{dt}f(x+ty)=\langle\nabla f,y\rangle(x+ty),$$

从而

$$f(x+y)-f(x)=\int_0^1\frac{d}{dt}f(x+ty)dt$$

$$=\int_0^1\langle\nabla f,y\rangle(x+ty)dt$$

$$=\int_0^{|y|}\langle\nabla f,y'\rangle(x+sy')ds.$$

这便得到了式(22)．由式(22)及广义 Minkowski 不等式即得

$$\|f(x+y)-f(x)\|_p=\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_0^{|y|}\langle\nabla f,y'\rangle(x+sy')ds\right|^p ds\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant\int_0^{|y|}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\langle\nabla f,y'\rangle(x+sy')\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}ds$$

$$\leqslant|y|\sum_1^n\left\|\frac{\partial f}{\partial x_j}\right\|_p. \tag{24}$$

现设$f\in L^p$使得

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}\ \text{在弱意义下存在，且属于}L^p, j=1,\cdots n.$$

由定理(6.5)知存在$\{f_m\}\subset\mathscr{S}$，使

$$\lim_{m\to\infty}f_m=f,\quad \lim_{m\to\infty}\frac{\partial f_m}{\partial x_j}=\frac{\partial f}{\partial x_j},\ j=1,\cdots n.$$

将式(24)应用于f_m，并令$m\to\infty$即得

$$\|f(x+y)-f(x)\|_p\leqslant|y|\sum_1^n\left\|\frac{\partial f}{\partial x_j}\right\|_p.$$

这就是说

$$\|f\|_{\Lambda_{p,1}}=\|f\|_p+\sup_\delta\frac{\omega_p(f,\delta)}{\delta}\leqslant\|f\|_p+\sum_1^n\left\|\frac{\partial f}{\partial x_j}\right\|_p.$$

定理获证.

空间$\left\{f\in L^p:\ \dfrac{\partial f}{\partial x_j}\in L^p\right\}$就是我们即将要定义的所谓Sobolev空间$L_1^p$.

当维数 $n=1$ 时，定理 (6.7) 可以更精确化.

定理(6.8) 设 $1<p<\infty$，则$\mathbb{R}$ 上可测函数$f(x)$使得

$$\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right\}_{h\in\mathbb{R}}$$

是 L^p 中的有界集，当且仅当f 的普通意义下的导数f'存在，且 $f'\in L^p$. 而可测函数f 使得 $\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right\}_{h\in\mathbb{R}}$ 是 L^1 中有界集，当且仅当f 是$\mathbb{R}$ 上有界变差函数.

证明 设f 使得 $\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right\}_{h\in\mathbb{R}}$ 是L^p 中有界集，$1\leqslant p<\infty$. 构造适当光滑且有紧支集的在几乎处处点收敛意义下的逼近单位$\{\varphi_\varepsilon(x)\}$. 令

$$f_\varepsilon(x)=\int_{\mathbb{R}}\varphi_\varepsilon(y)f(x-y)dy,$$

则

$$\left(\int_{\mathbb{R}}|f_\varepsilon(x+h)-f_\varepsilon(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\int_{\mathbb{R}}\omega_p(f,|h|)|\varphi_\varepsilon(y)|dy$$

$$\leqslant A|h|.$$

对每个 $\varepsilon>0$，$f_\varepsilon'(x)$处处存在，故由 Fatou 引理知$\|f_\varepsilon'\|_p\leqslant A$. 当$1<p<\infty$ 时，存在$\mathbb{R}$ 上 L^p 函数$g(x)$ 与$\{f_\varepsilon(x)\}$ 的一个子序列$\{f_{\varepsilon_k}\}$，使得$\{f_{\varepsilon_k}'\}$弱收敛于g. 特别地，对任意 x_0，x，有

$$\lim_{k\to\infty}\int_{x_0}^{x}f_{\varepsilon_k}'(t)dt=\int_{x_0}^{x}g(t)\,dt. \qquad (25)$$

如果取 x_0 使 $\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(x_0)=f(x_0)$，则对几乎所有 x，有

$$f(x)=\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x)=f(x_0)+\int_{x_0}^{x} g(t)dt .$$

这说证明了，可以在一个零测集上修改 $f(x)$ 的值，使得它有普通意义下的导数 $g(x)$，并且 $g\in L^p$.

现看 $p=1$ 情形. 同样取 x_0 使 $\lim\limits_{n\to 0} f_n(x_0)=f(x_0)$ 存在. 考虑函数族 $\left\{\int_{x_0}^{x} f_n(t)dt\right\}$，则它是一个一致有界的，且全变差也是一致有界的函数族. 根据 Helly 选择原则（见 §1.7 习题 25），知有子序列 $\left\{\int_{x_0}^{x} f_{n_k}(t)dt\right\}$ 在所有点 $x\in\mathbb{R}$ 都收敛于某个有界变差函数 $F(x)$. 这样，对几乎所有的 x，也有

$$\begin{aligned}f(x)-f(x_0)&=\lim_{k\to\infty}(f_{n_k}(x)-f_{n_k}(x_0))\\&=\lim_{k\to\infty}\int_{x_0}^{x} f_{n_k}(t)dt=F(x).\end{aligned}$$

这也证明了，可以在零测集上修改 $f(x)$ 的值，使得它是 $\mathbb{R}$ 上有界变差函数.

必要性至此获证. 现证充分性.

设 $1<p<\infty$，设可测函数 f 使 $f'\in L^p$，则

$$f(x+h)-f(x)=\int_{x}^{x+h} f'(t)\,dt ,$$

$$|f(x+h)-f(x)|^p\leqslant\int_{\mathbb{R}}\chi_h(x,t)|f'(t)|^p dt|h|^{p-1} .$$

其中

$$\chi_h(x,t)=\begin{cases}1 & x\leqslant t\leqslant x+h,\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1 & t-h\leqslant x\leqslant t,\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$$

这样

$$\|f(x+h)-f(x)\|_p\leqslant\left(\int_{\mathbb{R}}|h|^{p-1}|f'(t)|^p\int_{\mathbb{R}}\chi_h(x,t)dx\,dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant|h|\|f'\|_p.$$

当$p=1$时，由f是有界变差知，它可在$\mathbb{R}$上产生一个有界测度μ。这样，对任意区间(a,b)，

$$|f(b)-f(a)|=\left|\int_a^b d\mu\right|\leqslant\int_a^b|d\mu|,$$

其中$|\mu|$为μ的全变差测度．这样，(不妨设$h\geqslant 0$)

$$\int_{\mathbb{R}}|f(x+h)-f(x)|dx\leqslant\int_{\mathbb{R}}\int_x^{x+h}d|\mu|dx$$

$$=\int_{\mathbb{R}}\int_{t-h}^{t}dx\,d|\mu|\leqslant|h|\|\mu\|.$$

这就证明了

$$\omega_1(f,|h|)\leqslant|h|\|\mu\|.$$

定理证毕．

比空间$\Lambda_{p,\alpha}$更自然的Lipschitz空间是普通意义下的Lipschitz

空间Λ_α. 本节我们只考虑$0<\alpha\leqslant 1$时Λ_α如何用积分来刻划的问题.

定义(6.9) 设$f\in C(\mathbb{R}^n)$, 则

$$\omega(f,\delta)=\sup_{0\leqslant|h|\leqslant\delta}\sup_x|f(x+h)-f(x)| \tag{26}$$

称为f的**连续模**. 对$0<\alpha\leqslant 1$, 定义 Lipschitz 空间Λ_α为

$$\Lambda_\alpha=\{f\in C(\mathbb{R}^n):\ \omega(f,\delta)\leqslant A\delta^\alpha\}.$$

并记

$$\|f\|_{\Lambda_\alpha}=\inf\{A:\omega(f,\delta)\leqslant A\delta^\alpha,\ \forall\ \delta\}. \tag{27}$$

显然, $\|\cdot\|_{\Lambda_\alpha}$有如下等价写法

$$\|f\|_{\Lambda_\alpha}=\sup_I\sup_{x,y\in I}\frac{|f(x)-f(y)|}{|I|^{\frac{\alpha}{n}}}. \tag{28}$$

其中, I表示边平行于坐标轴的方体(简称方体), $|I|$表示方体的体积.

定义式(26)与(28)中均要求$f\in C(\mathbb{R}^n)$这一先决条件. 我们下面要给出的Λ_α的积分刻划说明这一先决条件只是表面的. 为给出这种积分刻划, 我们先给出$\|\cdot\|_{\Lambda_\alpha}$的两个等价范数.

定义(6.10) 设$0<\alpha\leqslant 1$, $1\leqslant q<\infty$, 定义

$$\widetilde{\Lambda}_\alpha=\left\{f\in L^\infty_{loc}:\|f\|_{\widetilde{\Lambda}_\alpha}=\sup_I\frac{\|(f-f_I)\chi_I\|_\infty}{|I|^{\frac{\alpha}{n}}}<\infty\right\}, \tag{29}$$

$$\widetilde{\Lambda}_\alpha^{(q)}=\left\{f\in L^q_{loc}:\|f\|_{\widetilde{\Lambda}_\alpha^{(q)}}=\sup_I|I|^{-\frac{\alpha}{n}}\left(\frac{1}{|I|}\int_I|f-f_I|^q\cdot dx\right)^{\frac{1}{q}}<\infty\right\}. \tag{30}$$

其中 $L^q_{loc}(\mathbb{R}^n)$ 表示它的元素在任意有界集上属于 L^q，其中 $1\leqslant q\leqslant\infty$（如果底空间只是一般测度空间，则 L^q_{loc} 表示在任意有限测度集合上 q 次可积的函数的空间）．此外，f_I 是 f 在 I 上的积分平均，即 $\frac{1}{|I|}\int_I f(x)dx$．

定理(6.11) 设 $0<\alpha\leqslant 1$，$1\leqslant q<\infty$，则

$$\Lambda_\alpha=\widetilde{\Lambda}_\alpha=\widetilde{\Lambda}^{(q)}_\alpha. \tag{31}$$

且空间的相等除了指集合的相等以外，还包括范数的等价．

证明 显然，$\Lambda_\alpha\subset\widetilde{\Lambda}_\alpha\subset\widetilde{\Lambda}^{(q)}_\alpha$，且空间的包含除了集合的包含以外，还包含空间的连续嵌入，或等价地(对赋范或拟赋范空间而言)．包含范数的相应不等式：粗略地说，同一元素在越小空间内的范数越大．为证反向包含关系，充分地只需证 $\widetilde{\Lambda}^{(q)}_\alpha\subset\Lambda_\alpha$，等价地只需证 $\|f\|_{\Lambda_\alpha}\leqslant c\|f\|_{\widetilde{\Lambda}^{(q)}_\alpha}$．设 $f\in\widetilde{\Lambda}^{(q)}_\alpha$，$I$，$J$ 是任意两个方体，且 $I\subset J$，则

$$|f_I-f_J|\leqslant\frac{1}{|I|}\int_I|f-f_J|dx\leqslant\left(\frac{1}{|I|}\int_I|f-f_J|dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant\left(\frac{|J|}{|I|}\right)^{\frac{1}{q}}|J|^{\frac{\alpha}{n}}\|f\|_{\widetilde{\Lambda}^{(q)}_\alpha}. \tag{32}$$

由此可进一步推出更精确的估计

$$|f_I-f_J|\leqslant c\,|J|^{\frac{\alpha}{n}}\|f\|_{\widetilde{\Lambda}^{(q)}_\alpha},\quad\forall I;J,I\subset J. \tag{33}$$

事实上，记 $I_0=I$，$I_k=2^kI$，其中 2^kI 表示 I 的同心扩大，扩大倍数为2^k，设$2^NI\subsetneqq J\subset 2^{N+1}I$．用 $2^{N+1}I$ 简记 J．则我们有

$$|f_I-f_J|\leqslant\sum_{k=0}^{N}|f_{I_k}-f_{I_{k+1}}|\leqslant\sum_{k=0}^{N}2^{\frac{n}{q}}|I_{k+1}|^{\frac{\alpha}{n}}\|f\|_{\widetilde{\Lambda}^{(q)}_\alpha}$$

$$\leqslant c2^{\frac{n}{q}}\sum_{k=0}^{N}2^{(k+1)\frac{\alpha}{n}}|I|^{\frac{\alpha}{n}}\|f\|_{\tilde{\Lambda}_\alpha^{(q)}}\leqslant c2^{\frac{N\alpha}{n}}|I|^{\frac{\alpha}{n}}\|f\|_{\tilde{\Lambda}_\alpha^{(q)}}$$

$$\leqslant c|J|^{\frac{\alpha}{n}}\|f\|_{\tilde{\Lambda}_\alpha^{(q)}}.$$

这就证明了(33)．现设 I 任意给定，$x,y\ni I$，并设 $I_1\ni x$，$I_2\ni y$，$I_i\subset I$，$i=1,2$．则

$$|f_{I_1}-f_{I_2}|\leqslant|f_{I_1}-f_I|+|f_I-f_{I_2}|\leqslant c|I|^{\frac{\alpha}{n}}\|f\|_{\tilde{\Lambda}_\alpha^{(q)}}.$$

令 I_1 缩小至 x，I_2 缩小至 y，则由 Lebesgue 关于积分的微分定理(见 §3.4 推论 4.3)，知对几乎所有的 x,y，都有

$$|f(x)-f(y)|\leqslant c|I|^{\frac{\alpha}{n}}\|f\|_{\tilde{\Lambda}_\alpha^{(q)}},$$

从而

$$\|f\|_{\Lambda_\alpha}\leqslant c\|f\|_{\tilde{\Lambda}_\alpha^{(q)}}.$$

定理证毕．

下面我们讨论可微性与 L^p 的结合所得到的Sobolev 空间 L_k^p．我们只讨论 Sobolev 空间理论中比较重要的一个定理，即嵌入定理．

定义(6.12) 设 $k\in\mathbb{Z}_+$，即 k 为非负整数，$1\leqslant p\leqslant\infty$，定义

$$L_k^p=\left\{f\in L^p:\ \forall\,\alpha=(\alpha_1\cdots\alpha_n),\ |\alpha|\leqslant k,\text{有}\ \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}\in L^p\right\}. \tag{34}$$

$$\|f\|_{L_k^p}=\sum_{|\alpha|\leqslant k}\left\|\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}\right\|_p. \tag{35}$$

其中 $\alpha=0$ 时 $\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}$ 如通常那样表示 f 本身．

下面我们给出 Sobolev 空间嵌入定理，它说f 连同它的(弱)微商的某种 L^p 属性蕴含f 本身对适当大的q 的L^q 属性.

定理(6.13) (Sobolev) 设 $k\in\mathbb{Z}_+$，$1\leqslant p<\infty$，$\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{p}-\dfrac{k}{n}$，则

(a) 若 $q<\infty$，则 $L_k^p\subset L^q$ ($\subset$ 表示连续嵌入)，

(b) 若 $q=\infty$，则 $L_k^p\subset L^r(K)$，$\forall r<\infty$，$\forall$ 紧集 K，

(c) 若 $p>\dfrac{k}{n}$，则每个 $f\in L_k^p$ 可在一零测集上修改而成为连续函数.

证明 首先证明 $k=1$ 情形. 一般k 情形可由归纳法而得，这只需注意如下两件事：一是$f\in L_k^p$，当且仅当 f 与 $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$，$j=1\cdots n$，都属于$L_{k-1}^p$；二是若令 q^*，$\dfrac{1}{q^*}=\dfrac{1}{p}-\dfrac{k-1}{n}$，则 $\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{q^*}-\dfrac{1}{n}$. 现证 $k=1$ 情形. 先假设$p>1$.

(a) 我们要用到如下初等等式，即对充分好的函数f，例如$f\in\mathscr{D}$(或只是$f\in\mathscr{S}$，$\mathscr{S}$ 表示Schwartz 函数类，见 §2.8)，都有

$$f(x)=c\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{j=1}^{n}\frac{y_j}{|y|^n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x-y)dy, \qquad (36)$$

其中 c 是仅依赖于n 的常数，无需精确化. 它可如下证明，其思想我们已在式(22)的证明中用到. 设$f(x)$在无穷远处快速衰减且一次连续可微，对 $\xi\in S_{n-1}$ ($\mathbb{R}^n$ 中单位球面)有

$$\frac{df}{dt}(x-t\xi)=-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x-t\xi)\xi_j=-\langle\nabla f(x-t\xi),\xi\rangle,$$

故

$$f(x)=\int_0^{\infty}\langle\nabla f(x-t\xi),\ \xi\rangle dt.$$

在球面 S_{n-1} 上对上式关于 ξ 积分，并将球面极坐标化为普通坐标，即得

$$f(x)=c\int_{S_{n-1}}\int_0^{\infty}\langle\nabla f(x-t\xi),\xi\rangle dt d\sigma(\xi)$$

$$=c\int_{\mathbb{R}^n}\left\langle\nabla f(x-y),\ \frac{y}{|y|}\right\rangle\frac{dy}{|y|^{n-1}}$$

$$=c\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x-y)\frac{y_j}{|y|^n}dy.$$

这就是等式(36). 现在应用分数次积分算子 I_α

$$I_\alpha f(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(x-y)}{|y|^{n-\alpha}}dy,\ 0<\alpha<n, \tag{37}$$

的(L^p, L^r)有界性质，其中 $\frac{1}{r}=\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{n}$（见 §1.7 题 4），我们得到

$$\|f\|_q\leqslant c\sum_{j=1}^{n}\left\|I_1\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)\right\|_q\leqslant c\sum_{j=1}^{n}\left\|\frac{\partial f}{\partial x_j}\right\|_p$$

$$\leqslant c\|f\|_{L_1^p},\ \forall f \text{ 充分好}. \tag{38}$$

现设 $f\in L_1^p$ 是任意的，取好函数（例如$\mathscr{S}$ 中函数）序列$\{f_m\}$，使 $f_m\to f$ 在L^p 中,以及 $\frac{\partial}{\partial x_j}f_m$ 也在 L^p 中收敛,极限 g_j 必须是$\frac{\partial f}{\partial x_j}$，这是因为 $\frac{\partial f_m}{\partial x_j}$ 在L^p 中收敛蕴含

$$\int g_j\varphi dx=\lim_{m\to\infty}\int\frac{\partial f_m}{\partial x_j}\varphi dx=-\lim_{m\to\infty}\int f_m\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}dx$$

$$= -\int f \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = \int \frac{\partial f}{\partial x_j} \varphi dx, \quad \forall \varphi \in \mathscr{D} .$$

而式(38)蕴含f_m也在L^q中收敛于f，且f满足(38)．断言(a)获证．

(b) 设$f \in L_1^p$，K是任意紧集．取$\eta \in \mathscr{D}$，$\eta|_K = 1$，既然在弱可微意义下，有

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\eta f) = \frac{\partial \eta}{\partial x_j} f + \eta \frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad j = 1, \cdots n,$$

这说明$\eta f \in L_1^p$．现设$\{f_m\} \subset \mathscr{D}$是在$L_1^p$中收敛于$f$的序列，则$\{\eta f_m\}$便是收敛于$\eta f$的序列．选$\rho$充分大，使得以原点为心，$\rho$为半径的球包含$-K_1 + K$，其中$K_1 = \text{supp}\,\eta$[①]．则

$$|\eta(x) f_m(x)| \leqslant c \int_{|y| \leqslant \rho} \sum_1^n \left| \frac{\partial}{\partial y_j}(\eta f_m)(x-y) \right| |y|^{-n+1} dy,$$

$$\forall x \in K .$$

注意每个$\frac{\partial}{\partial x_j}(\eta f_m) \in L^p$，而$|y|^{-n+1}\chi_{\{|y| \leqslant \rho\}} \in L^s$，$\forall s$，$\frac{1}{s} > \frac{n-1}{n}$．故由卷积算子的Young不等式(见§1.7题3)，知

$$\|\eta f_m\|_r \leqslant c \|f_m\|_{L_1^p}, \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{s} - 1 > \frac{1}{p} - \frac{1}{n} = 0 .$$

其中r可任意大，只不过系数c依赖于r．这完成了(b)中断言的证明．

(c) 证明基本上同(b)．只需注意此时$p > n$，故$|y|^{-n+1}$

① 对连续函数f，supp$f$定义为$\{x : f(x) \neq 0\}$的闭包，称为f的支集．

· $\chi_{\{|y|\le \rho\}} \in L^{p'}$，因而

$$\sup_{x\in K} |f_m(x) - f_l(x)| \le c\sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial \eta(f_m - f_l)}{\partial x_i} \right\|_p .$$

这说明$\{f_m\}$在紧集K上一致收敛，因此，f可在某个零测集上修改成为连续的.

现还剩下$k=1$与$p=1$的情形. 此时要用到如下不等式

$$\|f\|_{q_n} \le \left(\prod_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_1 \right)^{\frac{1}{n}}, \quad \forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

$$q_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right). \tag{39}$$

这可对维数进行归纳而得. $n=1$时，$q_1=\infty$，有

$$\|f\|_\infty = \left\| \int_{-\infty}^{x} f'(t)dt \right\|_\infty \le \|f'\|_1 .$$

设$n-1$时已证，注意$q_{n-1}=\dfrac{n-1}{n-2}$与$n-1$正是一对共轭指标，故（记$dx=dx'dx_n$）

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |f|^{q_n} dx' \le \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial f}{\partial x_n} \right| dx_n \right)^{\frac{1}{n-1}} |f| \, dx'$$

$$\le \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial f}{\partial x_n} \right| dx_n \, dx' \right)^{\frac{1}{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |f|^{q_{n-1}} dx' \right)^{\frac{1}{q_{n-1}}}$$

$$\le \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_n} \right| dx \right)^{\frac{1}{n-1}} \left(\prod_{j=1}^{n-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right| dx' \right)^{\frac{1}{n-1}} .$$

两边关于 x_n 积分，并利用推广的Hölder 不等式(见 §1.7 题 2).

$$\int_X \prod_{j=1}^{n} |f_j|^{r_j}\, d\mu \leqslant \prod_{j=1}^{n}\left(\int_X |f_j|\, d\mu\right)^{r_j},$$

$$\text{其中}\quad 0<r_j<1,\ \sum_{j=1}^{n} r_j=1,$$

则得

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f|^{q_n} dx \leqslant \left(\prod_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}\right| dx\right)^{\frac{1}{n-1}},$$

$$\|f\|_{q_n} \leqslant \left(\prod_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}\right| dx\right)^{\frac{1}{n}}.$$

由 $\mathscr{D}$ 在 L_1^p 中稠密，知(39)对一切 $f\in L_1^p$ 成立. 这正是所需要的 $p=1$，$k=1$ 情形的断言. 定理至此全部获证.

最后，我们借助 L^p 中连续模的概念讨论 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 的子集的紧性问题.

定理(6.14) 设 $1\leqslant p<\infty$，A 是 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 的子集. 则 A 是相对紧的，当且仅当 A 是有界的，且对任意 $\varepsilon>0$，存在有界闭区域 K_ε 与正数 δ_ε 使

$$\left(\int_{K_\varepsilon^c} |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \varepsilon,\quad \forall f\in A, \tag{40}$$

$$\Delta_p(f,h)=\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h)-f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \varepsilon,$$

$$\text{只要}\ |h|\leqslant \delta_\varepsilon,\ \forall f\in A. \tag{41}$$

证明 条件的必要性方面，我们只证式(41)的必要性，其他条件的必要性证明更容易，我们把它留给读者. 对任意给定的 ε，

以 $\frac{\varepsilon}{3}$ 为半径，A 的每个元素为心作球$B(f,\frac{\varepsilon}{3})$，则这些球的并集覆盖了 A 的闭包$\overline{A}$．由$\overline{A}$ 的紧性知存在有限个球

$$B(f_i,\frac{\varepsilon}{3})\quad 1\leqslant i\leqslant m,$$

它们的并覆盖了$\overline{A}$．对这有限个$\{f_i\}_1^m$，存在 $\delta_\varepsilon>0$ 使

$$\Delta_p(f_i,h)\leqslant\frac{\varepsilon}{3}．\quad 只要\quad |h|\leqslant\delta_\varepsilon,\ i=1\cdots m.$$

设$f\in A$ 任意，则存在$i\in\{1,2\cdots m\}$，使$f\in B(f_i,\frac{\varepsilon}{3})$．这样，当$|h|<\delta_\varepsilon$ 时，有

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x+h)-f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x+h)-f_i(x+h)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f_i(x+h)-f_i(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f_i(x)-f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\varepsilon.$$

这完成了条件的必要性的证明．

现证条件的充分性．设$\{\varphi_{\frac{1}{m}}\}_1^\infty$ 是如定理(6.3)中给出的 L^p 中适当光滑的，有紧支集的，在L^p 收敛意义下的逼近单位．记$F_m(f)=f*\varphi_{\frac{1}{m}}$，则

$$\|F_m(f)-f\|_p\leqslant\int_{\mathbb{R}^n}\Delta_p(f,\frac{1}{m}y)|\varphi(y)|dy\to 0,$$

对$f\in A$ 一致．

现设$\varepsilon>0$，K_ε 是使得下式成立的$\mathbb{R}^n$ 中有界闭区域

$$\left(\int_{K_\varepsilon^c}|f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\varepsilon,\quad \forall f\in A.$$

并设 m_0 使得 $\|F_{m_0}(f)-f\|_p\leqslant\varepsilon$，对 $f\in A$ 一致．在 K_ε 上考虑连续函数空间 $C(K_\varepsilon)$，则 $\{F_{m_0}(f)|_{K_\varepsilon}: f\in A\}$ 是 $C(K_\varepsilon)$ 的子集．因为

$$|F_{m_0}(f,x)|=\left|\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_{\frac{1}{m_0}}(y)f(x-y)dy\right|\leqslant\|\varphi_{\frac{1}{m_0}}\|_{p'}\cdot\|f\|_p,$$

$$\begin{aligned}&|F_{m_0}(f,x+h)-F_{m_0}(f,x)|\\=&\left|\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_{\frac{1}{m_0}}(y)(f(x+h-y)-f(x-y))dy\right|\\\leqslant&\|\varphi_{\frac{1}{m_0}}\|_{p'}\cdot\Delta_p(f,h),\end{aligned}$$

知 $\{F_{m_0}(f): f\in A\}$ 是 $C(K_\varepsilon)$ 的有界子集，且是等度一致连续的．由 Arzela－Ascoli 定理（见 §1.5 定理5.16）知 $\{F_{m_0}(f): f\in A\}$ 是 $C(K_\varepsilon)$ 的相对紧集，当然更是 $L^p(K_\varepsilon)$ 的相对紧集．这样，对 A 的任意序列 $\{f_n\}$，存在子序列 $\{f_{n_k}\}$ 与 k_0，使当 $k_1, k_2\geqslant k_0$ 时，$\|F_{n_{k_1},m_0}-F_{n_{k_2},m_0}\|_{L^p(K_\varepsilon)}\leqslant\varepsilon$，其中 $F_{n_k,m_0}=f_{n_k}*\varphi_{\frac{1}{m_0}}$．这样

$$\begin{aligned}&\|f_{n_{k_1}}-f_{n_{k_2}}\|_{L^p(K_\varepsilon)}\\\leqslant&\|f_{n_{k_1}}-F_{n_{k_1},m_0}\|_{L^p(K_\varepsilon)}+\|F_{n_{k_1},m_0}-F_{n_{k_2},m_0}\|_{L^p(K_\varepsilon)}\\&+\|F_{n_{k_2},m_0}-f_{n_{k_2}}\|_{L^p(K_\varepsilon)}\\\leqslant&3\varepsilon,\end{aligned}$$

故

$$\|f_{n_{k_1}}-f_{n_{k_2}}\|_p\leqslant\|f_{n_{k_1}}-f_{n_{k_2}}\|_{L^p(K_\varepsilon)}+\left(\int_{K_\varepsilon^c}|f_{n_{k_1}}|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+\left(\int_{K_\varepsilon^c}|f_{n_{k_2}}|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant 5\varepsilon .$$

因而 $\{f_{n_k}\}$在 L^p 中收敛. 这就证明了A 的相对紧性. 定理证毕.

§1.7 进一步事实、习题与注记

1. 证明如下广义 Minkowski 不等式. 设(X,dx)与(Y,dy)是任意两个一般测度空间, $K(x,y)$是乘积空间上非负可测函数, $1\leqslant p\leqslant\infty$. 则

$$\left(\int_X\left(\int_Y k(x,y)dy\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\int_Y\left(\int_X k(x,y)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} dy .$$

这个不等式说明一个函数族对参变量求和以后的 L^p 模总小于等于它们的L^p 模对参变量的求和.

2. 证明如下广义 Hölder 不等式. 设$(X,\mathscr{F},\mu)$是任意一般测度空间, $f_i\in L^1_+$, $0<\alpha_i<1$, $i=1\cdots n$, 且 $\sum_1^n\alpha_i=1$, 则

$$\|f_1^{\alpha_1}\cdots f_n^{\alpha_n}\|_1\leqslant\|f_1\|_1^{\alpha_1}\cdots\|f_n\|_1^{\alpha_n} .$$

3. 证明如下 Young 不等式. 设$1\leqslant p,q\leqslant\infty$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}\geqslant 1$. 令$r$ 使得 $\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}-1$, 则 $L^p(\mathbb{R}^n)$与 $L^q(\mathbb{R}^n)$中函数的卷积

$$f*g(x)=\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$

满足

$$\|f*g\|_r\leqslant\|f\|_p\|g\|_q,\quad \forall f\in L^p,\ g\in L^q.$$

更一般些，若$f_i\in L^{r_i}(\mathbb{R}^n)$，$i=1\cdots n$，$\frac{1}{r_1}+\cdots+\frac{1}{r_n}\geqslant(n-1)$，$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_1}+\cdots+\frac{1}{r_n}-(n-1)$，且$f=f_1*f_2*\cdots*f_n$，则有

$$\|f\|_r\leqslant\|f_1\|_{r_1}\cdots\|f_n\|_{r_n}.$$

4．设$0<\alpha<n$，$1<p<\infty$，q 满足 $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{n}$，以及$k(x)=|x|^{\alpha-n}$．定义如下积分算子$I_\alpha$．

$$I_\alpha f(x)=k*f(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}dy,$$

称为α次分数次积分算子．从Fourier 变换的观点看，I_α 是满足如下性质的算子

$$(I_\alpha f)^\wedge(\xi)=c|\xi|^{-\alpha}\hat{f}(\xi),\ \forall\xi\in\mathbb{R}^n,\forall f\ 充分好．$$

其中 ^ 表示Fourier 变换．这个等式只用到Fourier 变换的定义(见 §2.1)，以及函数 $|x|^{\alpha-n}$的Fourier 变换(作为某种意义下的极限)是$c|\xi|^{-\alpha}$的初等计算．本书中不需要用到这一事实，但却要用到I_α作为定义在$L^p(\mathbb{R}^n)$上的算子的有界性质：

$$\|I_\alpha f\|_q\leqslant c\|f\|_p,\quad \forall f\in L^p,\quad 1<p<\infty,$$

其中 $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{n}$，$c$ 只依赖于p,q,n．这一不等式的比

较简单的证明是先证 I_α 是所谓弱 (L^p, L^q) 有界的，即

$$|\{I_\alpha f>\lambda\}| \leqslant \left(\frac{c}{\lambda}\|f\|_p\right)^q, \ \forall \lambda>0, \forall f \in L^p, 1 \leqslant p<\infty,$$

然后再应用 Marcinkiewicz 内插定理（见 §3.5 定理 5.7）. 这个弱型不等式的证明是初等的. 对给定 $\lambda>0, \delta$ 待定，令

$$k_1=k(x)\chi_{\{|x|\leqslant\delta\}}, \quad k_2=k(x)\chi_{\{|x|>\delta\}}, \ k(x)=|x|^{\alpha-n}.$$

这样我们得（无妨设 $\|f\|_p=1$）

$$|k_2 * f(x)| \leqslant \int_{|y|>\delta}^{*} |y|^{\alpha-n}|f(x-y)|\, dy$$

$$\leqslant \left(\int_{|y|>\delta} |y|^{(\alpha-n)p'} dy\right)^{\frac{1}{p'}} \|f\|_p=c\delta^{-\frac{n}{q}}.$$

若令 δ 使 $c\delta^{-\frac{n}{q}}=\lambda$ 则（注意 $\|k_1\|_1=c\delta^\alpha$）

$$|\{|k*f|>2\lambda\}| \leqslant |\{|k_1*f|>\lambda\}| \leqslant \frac{1}{\lambda^p}\|k_1 f\|_p^p$$

$$\leqslant \frac{1}{\lambda^p}\|k_1\|_1^p\|f\|_p^p=\frac{1}{\lambda^p} c\,\delta^{\alpha p}=c\lambda^{-q}.$$

这便证明了所需要的弱型不等式.

5. 设 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 是任意一般测度空间, $1 \leqslant p<\infty$，证明当 $p=1$ 时 Minkowski 不等式中等号成立，当且仅当存在非负可测函数 $\rho(x)$，使在集合 $\{x: f(x)g(x) \neq 0\}$ 上 $f(x)=\rho(x) \cdot g(x)$. 当 $1<p<\infty$ 时等号成立，当且仅当存在非负实数 a 使

$$f=ag \text{ 或 } g=af.$$

6. 设 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 是任意一般测度空间, $1 \leqslant p<\infty$，设 f, g 都在 L^p 的球 $B(0, r)=\{h: \|h\|<r\}$ 内，则

$$\int_X \left||f|^p-|g|^p\right| d\mu \leqslant 2pr^{p-1}\|f-g\|_p.$$

这说明映射$f \to |f|^p$是L^p到L^1内连续的(提示：证明初等不等式

$$|x^p - y^p| \leqslant p|x-y|(x^{p-1}+y^{p-1}), 1 \leqslant p < \infty, \forall x, y \in \mathbb{R}_+.)$$

7. 设$(X, \mathscr{F}, \mu)$同题5，但$0<p<1$，则

$$\|f+g\|_p \leqslant 2^{\frac{1}{p}-1}(\|f\|_p + \|g\|_p).$$

另外，如果X包含两个不交的正测度集，则存在$f, g \in L^p$，使得$\|f+g\|_p > \|f\|_p + \|g\|_p$.

8. 设$(X, \mathscr{F}, \mu)$是一般测度空间，$f \in L^\infty \bigcap L^{p_0}$，$\|f\|_\infty > 0$，令$\alpha_n = \int_X |f|^n d\mu$. 证明$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \|f\|_\infty$.

9. 在$[0, \infty)$上构造函数$f \in L^p$，但$f \notin L^q$对任意$q \neq p$，其中$0<p<\infty$.

10. 设f是一般测度空间$(X, \mathscr{F}, \mu)$上非负可测函数，$\int_X f\, d\mu = c$，$0<c<\infty$. 则

$$\lim_{n\to\infty} \int_X n \log\left(1+\left(\frac{f}{n}\right)^\alpha\right) d\mu = \begin{cases} \infty, & 0<\alpha<1, \\ c, & \alpha = 1, \\ 0, & 1<\alpha<\infty. \end{cases}$$

(提示：$\alpha<1$时用Fatou引理；而当$\alpha \geqslant 1$时注意初等不等式$\log(1+x^\alpha) \leqslant \alpha x$).

11. 设$(X, \mathscr{F}, \mu)$是一概率空间，μ取$[0,1]$中间的所有值，$\Phi(u)$是$\mathbb{R}_+$上可测函数；或者$(X, \mathscr{F}, \mu)$是一无原子的概率空间，$\Phi(u)$是$\mathbb{R}_+$上连续函数. 则等式

$$\Phi(\lim_{p\to 0} \|f\|_p) = \int_X \Phi(f) d\mu,$$

对一切非负可测函数f成立，当且仅当$\Phi(u)=a\log u+b$，a，$b\in\mathbb{R}_+$.

注 我们称测度空间的可测集为原子，如果A的任何可测子集B，只有$|B|=0$，或$|B|=|A|$.

12．设$0<p<\infty$，设$f\in L^p(\mathbb{R}^n)$且一致连续，则$f\in C_0(\mathbb{R}^n)$.

13．讨论如下各种收敛概念之间的关系：$L^p(1\leqslant p<\infty)$中弱收敛，强收敛，$\{f_n\}$的一致收敛，几乎处处收敛与依测度收敛.

14．设$1<p<\infty$，$f\in L^p(\mathbb{R})$以及$\{f_n\}\subset L^p(\mathbb{R})$，则$\{f_n\}$弱收敛于$f$，当且仅当$\{f_n\}$是有界的，且

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^x f_n(t)dt=\int_0^x f(t)dt,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

15．设$(X,\mathscr{F},\mu)$是任意一般测度空间，若$\{f_n\}$在$L^p(1\leqslant p<\infty)$中弱收敛于某f，则$\|f\|_p\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\|f_n\|_p$.

16．设$(X,\mathscr{F},\mu)$同上题，且$\{f_n\}$在L^p中(弱收敛)于f，$\{g_n\}$在$L^{p'}$中弱收敛于g，其中$1<p<\infty$，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$. 则

$$\int_X f_n g_n d\mu\to\int_X fgd\mu.$$

17．证明如下不等式．设f是$[0,h]$上绝对连续函数，满足$f(0)=f(h)=0$，$f(x)>0$，$x\in(0,h)$，则

$$\int_0^h|f(x)f'(x)|dx\leqslant\frac{h}{4}\int_0^h|f'(t)|^2dt.$$

18．设$[a,b]$是$\mathbb{R}$上有限闭区间，f在$[a,b]$上绝对连

续，且$f(a)=f(b)$，$\int_a^b f(t)dt=0$．则

$$\int_a^b |f(t)|^2 dt \leqslant \left(\frac{b-a}{2\pi}\right)^2 \int_a^b |f'(t)|^2 dt .$$

19．设f 在$[a,b]$ 上绝对连续，$f(a)=0$，设$p\geqslant 0$，则

$$\int_a^b |f|^p |f'| dx \leqslant \frac{1}{p+1}(b-a)^p \int_a^b |f'|^{p+1} dx .$$

20．设$f\in C^{(n-1)}([a,b])$，$f^{(n-1)}$绝对连续，$f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0$，则

$$\int_a^b |f^{(n)} f| dx \leqslant \frac{(b-a)^n}{n!}\int_a^b |f^{(n)}|^2 dx .$$

21．证明 Mills 比$R(x)=e^{\frac{x^2}{2}}\int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ 满足

$$x(1+x^2)^{-1}\leqslant R(x)\leqslant x^{-1}, \quad \forall x .$$

22．证明 Hardy 不等式的如下推广．设$r(x)>0$ 且在$[0,\infty)$的任意有限区间上绝对连续．又设 $p>1$，并且存在某个$\lambda>0$，使得

$$\frac{xr'}{r}+\frac{p-1}{p}\geqslant\frac{1}{\lambda}, \quad \forall x .$$

则对 $f\in L_+^p$ 定义的

$$H(x)=\frac{1}{\lambda r(x)}\int_0^x r(t)f(t)dt ,$$

满足 $\|H\|_p \leqslant \lambda \|f\|_p = \lambda \left(\int_0^\infty |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$.

23．记号同题 22，但 r 满足的条件改为

$$\frac{xr'}{r} - \frac{p-1}{p} \geqslant \frac{1}{\lambda}, \quad \forall x.$$

则对 $f \in L^p_+$ 定义的

$$J(x) = \frac{r(x)}{x} \int_x^\infty \frac{f(t)}{r(t)} dt,$$

满足 $\|J\|_p \leqslant \lambda \|f\|_p$.

24．近几年来，在非线性偏微分方程的研究中形成了一个重要的技巧，即所谓"弱收敛方法"．粗略而言，这个方法大致如下．假设我们要解一个非线性偏微分方程

$$A(u) = f.$$

其中 A 是一个给定的非线性算子，f 是已知函数．一般的方法是先解近似方程

$$A_k(u_k) = f_k.$$

其中 A_k 当 k 充分大时与 A 接近(例如 A_k 是 A 的有限维投影，或离散化等)，f_k 与 f 接近，我们希望证明近似方程的解 u_k 在某种意义下收敛于原方程的解 u，这等价于说要证明 $A_k(u_k)$ 在某种意义下收敛于 $A(u)$，通常，最初的信息能给出 $\{u_k\}$(或它的某个子列)在某空间中弱收敛于某个 u，而 u_k 强收敛于 u 则往往保证了 $A_k(u_k)$ 收敛于 $A(u)$．因此所谓"弱收敛方法"的主要内容之一，便是研究某些空间(通常是 Sobolev 空间 L^p_k)中序列的弱收敛性何时蕴含了强收敛性．这本质上是 L^p 空间中弱收敛与强收敛的关系的研究．这方面的一些研究可以在L．C．Evans 的书 [E] 中找到．我们这里只是指出微分方程研究中关心的弱收敛是

哪些. 它们主要是

$L^p(1\leqslant p<\infty)$中: $f_n \xrightarrow{\text{弱}} f$, 如果 $\int_{\mathbb{R}^n} f_n g dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f g dx$,

$$\forall g\in L^{p'},$$

L^∞ 中: $f_n \xrightarrow{\text{弱}*} f$, 如果 $\int_{\mathbb{R}^n} f_n g dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f g dx$,

$$\forall g\in L^1,$$

$M(\mathbb{R}^n)$ 中: $\mu_n \xrightarrow{\text{弱}} \mu$, 如果 $\int_{\mathbb{R}^n} g d\mu_n \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} g d\mu$,

$$\forall g\in C_{00},$$

$L_k^p(1\leqslant p<\infty)$中: $f_n \xrightarrow{\text{弱}} f$, 且 $D^\alpha f_n \xrightarrow{\text{弱}} D^\alpha f$,

$\forall\alpha$, $|\alpha|\leqslant k$, 均在 L^p 中.

这里个别叙述与传统的稍有差别, 例如对 $M(\mathbb{R}^n)$的弱收敛, 传统的应是对一切 $g\in M(\mathbb{R}^n)^*$, 这里是对一切 $g\in C_{00}$, 此外, L_k^p 中的弱收敛, 传统的是

$$\langle f_n, g\rangle \longrightarrow \langle f, g\rangle,\quad \forall g\in(L_k^p)^*,$$

其中$\langle f, g\rangle$表示泛函 g 在f 上的作用. 但这个传统的定义与这里的叙述事实上是等价的, 这只需注意到, 粗略地说, $(L_k^p)^*$ 是由所有那些 g 使得它自己以及它的"k 次积分"都属于 $L^{p'}$ 所组成的(形式上记为 $L_{-k}^{p'}$). 这一事实我们将在(§4.8 命题 8.20)中不加证明地指出.

25. 根据泛函分析中的 Banach – Alauglu 定理: "若B_1, B_2 是 Banach 空间, 且$B_1=B_2^*$, 则 B_1 的有界集是弱$*$ 相对紧的", 知 $M(\mathbb{R})$的任意有界集是弱$*$ 紧的, 其中 $M(\mathbb{R})$ 中弱$*$ 收敛的定义是 $\forall f\in C_0$, $\langle f, \mu_n\rangle$收敛. 关于用点收敛代替弱收敛的相应事实, 是由古典的 Helly 定理所揭示. 这个定理说, 若

$\{F_n(x)\}$是区间$(a,b)\subset\mathbb{R}$上的一个有界变差函数序列，其全变差是有界的，且对某$x_0\in(a,b)$，$\{F_n(x_0)\}$是有界的，则存在子序列$\{F_{n_k}(x)\}$与有界变差函数$F(x)$，使得$\lim\limits_{k\to\infty}F_{n_k}(x)=F(x)$处处成立，且$|F(x_0)|\leqslant\sup\limits_n|F_n(x_0)|$，以及$\mathrm{V}(F)\leqslant\sup\limits_n\mathrm{V}(F_n)$，其中V表示全变差．证明这个定理．

26．一个比连续概念更一般的是所谓半连续的概念．设X是任意拓扑空间，f是X上定义的不取$-\infty$值的实值函数．f称为在x_0处下半连续，如果当$f(x_0)<\infty$时，对任意$\varepsilon>0$，存在x_0的邻域V_ε使$f(x)>f(x_0)-\varepsilon$，$\forall x\in V_\varepsilon$；当$f(x_0)=\infty$时，对任意$\alpha>0$，存在$x_0$的邻域$V_\alpha$，使$f(x)>\alpha$，$\forall x\in V_\alpha$．如果$f(x)$在所有$x\in D$都下半连续，则谓$f$在$D$下半连续；如果$-f(x)$下半连续，则称$f$上半连续．下半连续在正系数的线性组合，有限个中取极小，以及任意个中取sup等的运算下是封闭的．此外，下半连续性可以等价地定义为：$\forall\alpha\in\mathbb{R}$，$\{x:f(x)>\alpha\}$是开集．用收敛的语言，也可等价地定义为：对一切收敛于x_0的广义序列$\{x_\alpha\}$，有$f(x_0)\leqslant\varliminf f(x_\alpha)$．此外，紧集$K$上的下半连续函数$f$总取到它的极小值．证明这些断言．

27．关于凸函数．设I是$\mathbb{R}$的任意有限或无限区间，I上定义的实值函数$\Phi(x)$称为凸的，如果对一切$a,b\in I$，与$t\in[0,1]$，总有

$$\Phi(ta+(1-t)b)\leqslant t\Phi(a)+(1-t)\Phi(b).$$

这个不等式的几何解释是说，联结曲线$y=\Phi(x)$上任意两点$(a,\Phi(a))$与$(b,\Phi(b))$的弦总不会有任何部分严格位于曲线的该段弧的下方．证明，如果事先假定Φ是I上连续函数，则只要存在$t_0\in(0,1)$使上述不等式对t_0成立，但a,b可任意，则Φ便是凸函数．下面设Φ是I上凸函数．

(a) 证明$\forall(x_1\cdots x_n)\subset I$与正实数族$(t_1\cdots t_n)$，有

$$\Phi\left(\frac{t_1x_1+\cdots+t_nx_n}{t_1+\cdots+t_n}\right)\leqslant\frac{1}{t_1+\cdots+t_n}\left(t_1\Phi(x_1)+\cdots+t_n\Phi(x_n)\right).$$

(*b*) 证明对 I 的任意内点 x ($\in I^{\circ}$)，Φ 的左，右导数 $D^-\Phi(x)$ 与 $D^+\Phi(x)$ 存在，且满足

$$-\infty<D^-\Phi(x)\leqslant D^+\Phi(x)<\infty,$$

$$D^-\Phi(x_1)\leqslant D^+\Phi(x_1)\leqslant D^-\Phi(x_2)\leqslant D^+\Phi(x_2),\quad \text{只要 } x_1\leqslant x_2.$$

这样，$\Phi(x)$ 在 I 的内部是连续的，$D^+\Phi$（类似地 $D^-\Phi$）是单调增的，从而除至多可列个点外是连续的，而在 $D^+\Phi$（或 $D^-\Phi$）的连续点 x 处必有 $D^-\Phi(x)=D^+\Phi(x)$，从而 Φ 除至多可列点外是可微的，且导数单调增加.

(*c*) 证明 Φ 在 I 上是凸函数，当且仅当 Φ 是不减函数 φ 的积分.

(*d*) 设 $x_0\in I^0$，且 k 是满足 $D^-\Phi(x_0)\leqslant k\leqslant D^+\Phi(x_0)$ 的数，则过点 $(x_0,\Phi(x_0))$ 且以 k 为斜率的直线总在曲线的下部，即

$$\Phi(x)\geqslant k(x-x_0)+\Phi(x_0),\quad \forall x\in I.$$

这样的直线称为曲线 $y=\Phi(x)$ 在点 x_0 处的支撑线.

(*e*) 证明如下关于积分的 Jensen 不等式. 设 $(X,\mathscr{F},\mu)$ 是任意有限(非负)测度空间，$f\in \operatorname{Re}L^1(X)$，$f(X)\subset I$，则对 I 上任意凸函数 Φ，只要 $\Phi\circ f\in L^1(X)$，总有

$$\Phi\left(\frac{1}{\mu(X)}\int_X f\,d\mu\right)\leqslant\frac{1}{\mu(X)}\int_X\Phi\circ f\,d\mu.$$

提示：无妨设 $\gamma=\dfrac{1}{\mu(X)}\displaystyle\int_X f\,d\mu$ 属于 I 的内部，在端点情况是平凡的. 设 k 是过 $\{\gamma,\Phi(\gamma)\}$ 的任一支撑线的斜率，则

$$\Phi(f(x))\geqslant k(f(x)-\gamma)+\Phi(\gamma),\quad \text{a.e. } x\in X.$$

28．设Φ 是 $\mathbb{R}$ 上实函数，且对一切实值有界可测函数f，有

$$\Phi\left(\int_0^1 f(x)dx\right)\leqslant \int_0^1 \Phi(f(x))\,dx .$$

则 Φ 是凸函数.

29．设$(X,\mathscr{F},\mu)$是概率空间，f，g 是非负可测函数，满足 $f\cdot g\geqslant 1$，a．e．则 $\|f\|_1\|g\|_1\geqslant 1$．

30．设$\Phi(u)$是 $\mathbb{R}_+$ 上任意一个满足条件 $\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{\Phi(u)}{u}=\infty$ 的正值函数，A 是一般测度空间$(X,\mathscr{F},\mu)$上可测函数的集合，满足 $\int_X \Phi(|g|)d\mu\leqslant k<\infty$，$\forall g\in A$．则 A 中函数有一致绝对连续的积分．此即，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\,\delta_\varepsilon>0$，使得只要 $|E|<\delta_\varepsilon$．就有

$$\int_E |g|d\mu\leqslant\varepsilon,\ \forall g\in A .$$

31．设$\Phi(u)$是 $\mathbb{R}_+$ 上满足$\Phi(0)=0$的增加凸函数．$(X,\mathscr{F},\mu)$是任意一般测度空间．f是其上定义的可测函数．定义

$$L^\Phi=\{f\ 可测:\ \rho_\Phi(f)=\int_X \Phi(|f|)\,d\mu<\infty\},$$

L^Φ 不必是一个线性空间．例如 $\rho_\Phi(f)<\infty$ 甚至并不保证 $\rho_\Phi(2f)<\infty$．为了得到一个更合理的空间，定义

$$N_\Phi(f)=\inf\{\lambda:\rho_\Phi\left(\frac{f}{\lambda}\right)\leqslant 1\},$$

$$\widetilde{L}^\Phi=\{f\ 可测:\ N_\Phi(f)<\infty\},$$

$\widetilde{L}^\Phi$ 称为由凸函数定义的Orlicz空间．$N_\Phi(\cdot)$是一个范数(应用

Φ 的凸性证明三角不等式). 单位球 $B=\{f:N_\Phi(f)\leqslant 1\}$ 是闭的，并且这个集合与集合 $\{f:\rho_\Phi(f)\leqslant 1\}$ 是一样的. Fatou 引理说明

$$\int_X \Phi\left(\frac{|f|}{N_\Phi(f)}\right)d\mu=\int_X \lim_{\varepsilon\to 0}\Phi\left(\frac{|f|}{N_\Phi(f)+\varepsilon}\right)d\mu$$

$$\leqslant \lim_{\varepsilon\to 0}\int_X \Phi\left(\frac{|f|}{N_\Phi(f)+\varepsilon}\right)d\mu\leqslant 1.$$

从而由 Φ 的凸性，当 $N_\Phi(f)\leqslant 1$ 时有

$$\frac{1}{N_\Phi(f)}\int_X \Phi(|f|)\,d\mu\leqslant\int_X \Phi\left(\frac{|f|}{N_\Phi(f)}\right)d\mu\leqslant 1.$$

这说明在闭单位球 B 上，$\rho_\Phi(f)\leqslant N_\Phi(f)$；从而在 L^Φ 中，$N_\Phi(f_n-f)\to 0$，推出 $\rho_\Phi(f_n-f)\to 0$.

32．记号同 31，并设 Φ 是限制增长的，即 $\Phi(2u)\leqslant c\Phi(u)$，$\forall\ u>0$（这样的条件有时称为 ∇_2 条件）. 证明序列 $\{f_n\}$ 在 $\widetilde{L}^\Phi$ 中收敛于 f，当且仅当 $\rho_\Phi(f_n-f)\to 0$. 且我们有 §1.3 中定理(3.1)的类似，即 $\{f_n\}$ 在 $\widetilde{L}^\Phi$ 中收敛于 f，当且仅当 $\{f_n\}$ 依测度收敛于 f，且 $\forall\varepsilon>0$，存在有限测度集 A_ε 与正数 δ_ε，使得

$$\int_{A_\varepsilon^c}\Phi(|f_n|)d\mu\leqslant\varepsilon,\ \forall n.$$

$$\int_E \Phi(|f_n|)d\mu\leqslant\varepsilon,\quad \text{只要 } |E|<\delta_\varepsilon,\ \forall n.$$

33．设 Φ 是限制增长的凸函数，则 $\{f_n\}$ 在 $\widetilde{L}^\Phi$ 中收敛于 f，当且仅当 $f_n\xrightarrow{m}f$，以及 $\rho_\Phi(f_n)\longrightarrow\rho_\Phi(f)$.

34．记号同 32．设 $\theta>0$，使得 $\int_X\Phi\left(\frac{|f|}{\theta}\right)d\mu=1$．证明

$N_\Phi(f)=\theta$，举例说明可以有 $\int_X \Phi\left(\frac{|f|}{N_\Phi(f)}\right)d\mu<1$.

35. 现在设 $\Phi(u)$ 是 $\mathbb{R}_+$ 上满足 $\Phi(0)=0$，以及 $\lim\limits_{u\to\infty}\Phi'(u)=\infty$ 的增加凸函数，记 $\varphi(u)=\Phi'(u)$（在间断点处按左连续规范化），则 §1.1 中定义的 φ 的（广义）逆函数 $\psi(v)$ 是处处取有限值的左连续增加函数. 我们称 $\Psi(v)=\int_0^v \psi(s)ds$ 为 $\Phi(u)$ 的 Young 补函数.（例如

$$\Phi(u)=\frac{u^p}{p},\Psi(v)=\frac{v^{p'}}{p'},\ 1<p<\infty,\ \frac{1}{p'}+\frac{1}{p}=1;$$

以及

$$\Phi(u)=e^u-u-1,\ \Psi(v)=(1+v)\log(1+v)-v,$$

便是典型的两对Young 互补函数）. 对这样的 Φ，$\widetilde{L^\Phi}$ 有如下等价定义

$$\widetilde{L^\Phi}=\{f \text{ 可测}: fg\in L^1,\ \forall g,\rho_\Psi(g)\leqslant 1\},$$

$$\|f\|_\Phi=\sup\left\{\left|\int_X fg\,d\mu\right|:\rho_\Psi(g)\leqslant 1\right\}.$$

试证明

$$\int_X \Phi\left(\frac{|f|}{\|f\|_\Phi}\right)d\mu\leqslant 1,$$

$$N_\Phi(f)\leqslant\|f\|_\Phi\leqslant 2N_\Phi(f).$$

利用这个新范数，可以证明 $\widetilde{L^\Phi}$ 是完备的，因而是一个Banach空间，以及

$$\left|\int_X fg\,d\mu\right|\leqslant\|f\|_\Phi\|g\|_\Psi,\quad \forall f\in\widetilde{L^\Phi},\ \forall g\in\widetilde{L^\Psi},$$

$$\left|\int_X fgd\mu\right| \leqslant 2N_\Phi(f)N_\Psi(g) \quad \forall f\in\widetilde{L^\Phi}, \quad \forall g\in\widetilde{L^\Psi}.$$

这个积分不等式说明 $\widetilde{L^\Phi}$，$\widetilde{L^\Psi}$ 互相连续地嵌入到对方的对偶空间内去．

36．设 Φ 是限制增长的Young 凸函数，则简单函数类S 在$\widetilde{L^\Phi}=(L^\Phi)$中稠密，以及 $(\widetilde{L^\Phi})^*=\widetilde{L^\Psi}$．

37．设 Φ 同题36．设可测函数 g 使得 $\forall f\in\widetilde{L^\Phi}$ 都有 $fg\in L^1$，则 $g\in\widetilde{L^\Psi}$．设可测函数序列$\{g_n\}$使得 $\forall f\in\widetilde{L^\Phi}$，$\{fg_n\}$ 是 L^1 中有界集（界可以依赖于f），则$\{g_n\}$是 $\widetilde{L^\Psi}$ 中有界集．如果$\{g_n\}$只是使得 $\forall f\in L^\Phi$，$\{fg_n\}$是 L^1 中有界集，则存在 $\theta>0$ 使$\{\theta g_n\}$满足 $\rho_\Psi(\theta g_n)\leqslant 1$．证明这些断言．

38．设$(X,\mathscr{F},\mu)$与$(Y,\widetilde{\mathscr{F}},\nu)$是任意两个一般测度空间，$\Phi$，$\Phi_1$ 是两个如题31 中的凸函数，设 T 是定义在 L^Φ 上取值于 L^{Φ_1} 中的正齐次算子（T 称为正齐次的，如 $\forall\alpha\in\mathbb{R}_+$，只要$f$ 使Tf 有定义，则$T(\alpha f)$也有定义，且$|T(\alpha f)|=\alpha|T(f)|$），满足．

$$\int_Y \Phi_1(|Tf|)d\nu\leqslant A\int_X \Phi(|f|)d\mu+B, \ \forall f\in L^\Phi.$$

则T 可以扩充为$\widetilde{L^\Phi}$ 上的算子，且有

$$N_{\Phi_1}(Tf)\leqslant CN_\Phi(f), \ \forall f\in\widetilde{L^\Phi}$$

39．设$\Phi(u)$是$\mathbb{R}_+$ 上满足$\Phi(0)=0$ 的增加凸函数，$\varphi(u)=\Phi'(u)$按左（或右）连续规范化．令

$$q_\Phi=\inf_{u>0}\frac{u\varphi(u)}{\Phi(u)}, \qquad p_\Phi=\sup_{u>0}\frac{u\varphi(u)}{\Phi(u)}.$$

（a）证明Φ 是限制增长的，当且仅当$p_\Phi<\infty$，且此时$p_\Phi\leqslant\sup\limits_{u>0}\dfrac{\Phi(2u)}{u}-1$．

（b）证明当$p=p_\Phi<\infty$ 时 $\dfrac{\Phi(u)}{u^p}$ 是u 的下降函数，从而

$\forall \lambda \geqslant 1$，有

$$\Phi(\lambda u) \leqslant \lambda^p \Phi(u), \quad \forall u > 0.$$

(c) 证明 $\dfrac{\Phi(u)}{u^q}$ 是 u 的上升函数，从而 $\forall \lambda \geqslant 1$ 有

$$\Phi(\lambda u) \geqslant \lambda^q \Phi(u), \quad \forall u > 0.$$

这说明 Φ 增加得比u^q 快，但(b)中结论说 Φ 增加得比u^p 慢.

(d) 对指标 $p \in [1, \infty]$，记 p' 为 p 的相伴数，设Φ 是 Young 函数、，Ψ 是Φ 的 Young 补函数．证明 $q_\Phi' = p_\Psi$.

(e) 同样设 Φ，Ψ 是Young 互补函数，证明$p_\Phi > 1$，且

$$\Psi(v) \leqslant (p_\Phi - 1)\Phi(\psi(v)),$$

其中 $\psi(v) = \Psi'(v)$.

注 记

§1.1— 1.3 内容比较初等、可以在很普通的实分析类书籍中找到类似的叙述．§1.4 中定理(4.2)，推论(4.3)，与定理(4.4) 合起来称之为 Vitali－Hahn－Saks 定理，其证明是广为流行的，属于S．Saks．关于L^1 中序列的弱紧性的定理(4.8)与推论(4.9)，基本上取材于Dunford－Schwartz [DS]．§1.5 中Stone－Weierstrass 定理与Ascoli－Aizela 定理的证明也是比较流行的．§1.6 主要取材于 Stein [St2]，例如关于 L^p 的点逼近单位的定理(6.4)，光滑函数连同微商一起在 L^p 中逼近f 的定理(6.5)以及 Sobolev 嵌入定理(6.13)等．关于刻划 $\Lambda_{p,\alpha}$的定理(6.8)，取材于 Zygmund [Zy]．关于 Λ_α 的等价定义的定理(6.11)也是比较流行的，它与以后将讲述的 *BMO* 空间的John－Nirenberg 定理的处理方法相似．

第二章 经典Fourier 分析

Fourier 分析来源于函数的三角级数展开. Fourier、Dirichlet、Cantor、Riemann 等人，在上一世纪对三角级数展开的收敛、求和、唯一性等方面的研究，引导到函数的定义、集合论、Riemann 积分的建立. 他们的研究，构成了上一世纪经典实分析的核心内容. 本世纪初，Lebesgue 也是在研究三角级数展开的过程中，克服了 Riemann 积分的缺陷，建立了 Lebesgue 积分理论. 以后，加上泛函分析观点的注入，Fourier 分析成了在平面的单位圆周 $\mathbb{T}$ 与直线 $\mathbb{R}$ 上应用 Fourier 变换研究 Lebesgue 空间与连续函数空间等的有效工具。本世纪50 年代初，Schwartz 的广义函数理论，为 Fourier 分析提供了更宽阔的舞台. 我们把那些主要在 50 年代以前建立的理论，统称为经典 Fourier 分析.

具体地说，经典 Fourier 分析的第一个主要研究对象是 Fourier 级数理论. 从近代的观点看，函数的自变量所在的底空间就是复平面(或二维实平面)上的单位圆周 $\mathbb{T}$. 单位圆周可以通过 $x \to e^{ix}$ 而与 $\mathbb{R}$ 的任何一个长为 2π 的区间(通常是 $[-\pi,\pi)$ 或 $[0,2\pi)$)等同起来. 如果把 $\mathbb{R}$ 看成一个群 (对通常的加法而言)，$\mathbb{Z}$ 是整数群，$2\pi\mathbb{Z}$ 是 2π 的整数倍构成的群，则 $\mathbb{T}$ 同构于商群 $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. 定义在 $\mathbb{T}$ 上的函数等同于以 2π 为周期的函数. $\mathbb{T}$ 上的函数可积相当于对应的以 2π 为周期的函数在 $[-\pi,\pi)$ 可积:

$$\int_{\mathbb{T}} f(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx .$$

这样区间 $[-\pi,\pi)$ 可以看作 $\mathbb{T}$ 的模型，$\mathbb{T}$ 上的测度可以看成 $\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue 测度在 $[-\pi,\pi)$ 的限制. 因此，$\mathbb{T}$ 构成一测度空间.

根据第一章，我们便有空间 $L^p(\mathbb{T})$, $0<p\leqslant\infty$. 它完全等同于

$$\left\{f: 以 2\pi 为周期、\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^p dt<\infty\right\}.$$

实数的拓扑自然诱导出 $\mathbb{T}$ 上的拓扑，因此 $\mathbb{T}$ 上可以定义连续函数空间 $C(\mathbb{T})$，它等同于以 2π 为周期的连续函数．其范数定义为

$$\|f\|_{C(\mathbb{T})}=\max_x|f(x)|.$$

同样，还有 $\mathbb{T}$ 上的有界 Borel 测度空间 $M(\mathbb{T})$．注意 $\mathbb{T}$ 上的有界 Borel 测度都是由有界变差函数产生的Lebesgue－Stieltjes 测度．

$\mathbb{T}$ 上可以自然定义平移算子 $\tau: x\to x-h$. $\mathbb{T}$ 上 Lebesgue 积分的一个最重要的性质是，它对平移是不变的：

$$\int_{\mathbb{T}}f(t)dt=\int_{\mathbb{T}}f(t-h)dt=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx.$$

$\mathbb{T}$ 的另外一个重要特点是它的紧性．紧性的一个重要表现是有下面的包含关系：

$$C(\mathbb{T})\subset L^\infty(\mathbb{T})\subset L^p(\mathbb{T})\subset L^1(\mathbb{T})\subset M(\mathbb{T}),$$

其中 $1<p<\infty$.

经典 Fourier 分析的另一个主要研究对象是所谓的Fourier积分理论．50 年代以前基本上只有一维结果，50 年代以后才有了比较丰富的高维内容．它的研究对象不再是周期函数，而是 $\mathbb{R}^n$ 上的非周期函数．这时的底空间 $\mathbb{R}^n$ 仍然是一个加法群，同时在它的自然拓扑下构成一个交换局部紧 T_2 拓扑群，通常的 Lebesgue 测度也是在平移下不变的测度．这些是与 $\mathbb{T}$（乃至 $\mathbb{T}^n$）相似的地方．因此按照 Fourier 级数理论平行建立的 Fourier 积分理论，无论从方法与结果而言，大体上与 Fourier 级数理论差不多．当然差别也是存在的，一方面 $\mathbb{T}$（乃至 $\mathbb{T}^n$）的拓扑结构是紧的，而 $\mathbb{R}^n$ 则否，因此在某些方面，Fourier 积分比 Fourier 级数在成熟方面或难易方面要欠缺一些．但作为补偿，由于 $\mathbb{R}^n$ 具有比群结

构更多的结构，例如伸缩变换与正交变换，以及更完整的微分结构．更完整之意是指 $\mathbb{R}^n$ 除自己以外，Fourier 变换自变量所在的底空间，称为 $\mathbb{R}^n$ 的对偶空间，也是 $\mathbb{R}^n$，它也具有微分结构；而 $\mathbb{T}^n$ 则否，其对偶空间是 $\mathbb{Z}^n$．因此 $\mathbb{R}^n$ 上的 Fourier 积分理论在某些方面又更丰富，也更富有生命力．

本章将对经典 Fourier 分析(包括级数与积分两种理论)中的最基本的结果与方法作一介绍．其中 Fourier 级数部分主要是对一维，而 Fourier 积分部分则为了便于与该领域的近代发展衔接而对高维进行叙述．主要内容有Fourier 变换的初等性质，Fourier 展开的收敛与求和，连续函数的三角逼近，L^p 的 Fourier 分析(包括 L^2 理论，共轭函数的 L^p 理论，联系整函数增长级与 Fourier 变换支集大小的 Wiener－Paley 理论)，正定函数与 Bochner 定理，Fourier 级数的绝对收敛，以及广义函数的 Fourier 分析等．这些内容，不仅在偏微分方程、解析数论、概率统计等学科中有许多应用，而且是本书以后各章的基础．它们将为后面的内容提供问题、背景、模型与方法，因为近代实分析正是在经典 Fourier 分析的基础上发展起来的．

§ 2.1　Fourier 变换的初等性质

能定义 Fourier 变换的对象首先是底空间上的可积函数与有界测度．我们的底空间是 $\mathbb{T}$ 与 $\mathbb{R}^n$．按习惯，我们考虑 $\mathbb{T}$ 上的规范化测度 $\frac{dx}{2\pi}$，它使全空间 $\mathbb{T}$ 的测度为1，而 $\mathbb{R}^n$ 上规范化测度为 a_0dx，其中 $a_0=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}$ (这个记号将永远适用)．我们的研究对象是 $L^1\left(\mathbb{T},\frac{dx}{2\pi}\right)$、$M(\mathbb{T})$、$L^1(\mathbb{R}^n,a_0dx)$与 $M(\mathbb{R}^n)$．其中空间 $M(\cdot)$

的定义见 §1.5，在那里我们叙述了 Riesz 表示定理．根据这样的测度的取法，相应的 L^p 范数应理解为（仅仅在本章我们才作这样的理解）

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{T})}=\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}},\ 1\leqslant p<\infty, \tag{1}$$

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}=\left(a_0\int_{\mathbb{R}^n}|f|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}},\ 1\leqslant p<\infty, \tag{2}$$

而 $\|\cdot\|_\infty$ 将不受影响．此外，为了保证 L^1 能够保持范数地嵌入到 M 中，相应地也应有

$$\|d\mu\|_{M(\mathbb{T})}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|d\mu|$$

$$=\sup\left\{\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi\,d\mu\right|:\varphi\in C(\mathbb{T}),\ \|\varphi\|_\infty\leqslant 1\right\}, \tag{3}$$

$$\|d\mu\|_{M(\mathbb{R}^n)}=a_0\int_{\mathbb{R}^n}|d\mu|$$

$$=\sup\left\{\left|a_0\int_{\mathbb{R}^n}\varphi\,d\mu\right|:\varphi\in C_0(\mathbb{R}^n),\ \|\varphi\|_\infty\leqslant 1\right\}, \tag{4}$$

式(3)，(4)中第一个等式给出的是全变差范数，第二个等式给出的是 $C(\mathbb{T})^*$ 与 $C_0(\mathbb{R}^n)^*$ 中的范数．已知 L^1 与 M 是 Banach 空间．按照群上调和分析的近代观点，被研究的对象最好还应该有更多的代数结构，这样便可研究一些代数结构在 Fourier 变换下的同态或同构．所幸 L^1 与 M 的确可以赋于卷积作为乘法，还可赋于对合运算使之成为对合 Banach 代数．本书并不打算沿着这个观点走下去，读者只要求知道有这么回事，并不要求了解细节

(当然有兴趣的读者例外，他们可以参考有关群上调和分析的专著). 但卷积却是个非常重要的概念，不可不知道. 对合这个概念对本书说来比较次要一些，为了完全的目的，也一并给出定义. 我们只叙述 $\mathbb{R}^n$ 情形，$\mathbb{T}$ 的情形是类似的.

现在讨论卷积与对合这两个算子. 我们在 §1.6, §1.7 已经遇到过卷积算子，(相差一个常数倍)它是

$$f*g(x)=a_0\int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy. \tag{5}$$

由 Young 不等式知

$$\|f*g\|_p\leqslant\|f\|_1\|g\|_p,\ 1\leqslant p\leqslant\infty. \tag{6}$$

这特别说明当 $p=1$ 时，卷积算子可以看成定义在 $L^1(\mathbb{R}^n)$上的"乘法"，并且使 $L^1(\mathbb{R}^n)$成为 Banach 代数(一个 Banach 空间 A 称为一个 Banach 代数，如果其中定义了一个满足结合律以及与线性运算联系的分配律的乘法，且 $\|xy\|\leqslant\|x\|\|y\|$). 此外$L^1(\mathbb{R}^n)$上还有一个自然的对合运算(代数 A 中 $*$ 运算称为对合，如果

$(\alpha x+\beta y)^*=\bar{\alpha}x^*+\bar{\beta}y^*,\ x^{**}=x,\ (xy)^*=y^*x^*,\ x,y\in A$,
α,β 为复数纯量，其上横线 — 表示复数的共轭)

$$f(x)\to f^*(x)=\bar{f}(-x). \tag{7}$$

我们如何将(5), (7)定义的这两个运算扩充至 $M(\mathbb{R}^n)$呢? 注意到 $M(\mathbb{R}^n)=C_0(\mathbb{R}^n)^*$，因此我们只需考虑 $M(\mathbb{R}^n)$中元素在 $C_0(\mathbb{R}^n)$上是如何作用的就行了.

定义(1.1) 设 $\mu,\nu\in M(\mathbb{R}^n)$. 定义 $\mu*\nu$ 为由 $C_0(\mathbb{R}^n)^*$ 中元素

$$\varphi\to l(\varphi)=a_0\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x+y)d\mu(x)d\nu(y),\quad\forall\varphi\in C_0(\mathbb{R}^n), \tag{8}$$

所对应的$M(\mathbb{R}^n)$中的元素. 这个运算 $*$ 称为卷积. 对 $\mu\in M(\mathbb{R}^n)$,

定义 μ^* 为 $C_0(\mathbb{R}^n)^*$ 中元素

$$\varphi \to l(\varphi)=\left(\int_{\mathbb{R}^n}\varphi^*(x)d\mu(x)\right)^-, \quad \forall\varphi\in C_0(\mathbb{R}^n), \quad (9)$$

所对应的 $M(\mathbb{R}^n)$中的元素，这个 $*$ 称为对合.

注　易知式(8)，(9)中 $l(\varphi)$ 的确定义了 $C_0(\mathbb{R}^n)$上有界线性泛函，因而的确分别对应于 $M(\mathbb{R}^n)$中某个元素，记为$\mu*\nu$, μ^*. 易知，

$$\|\mu*\nu\|\leqslant\|\mu\|\|\nu\|, \quad \|\mu^*\|=\|\mu\|. \quad (10)$$

如果 $d\mu=fdx$, $d\nu=gdx$, $f,g\in L^1$，则这里定义的卷积与对合与 L^1 上原来的定义相同. 此外，由于 $\mathbb{R}^n$ 是交换群，知卷积是交换的，请读者自行证明这些断言.

对于这两个运算，我们主要关心的是它们与 Fourier 变换有什么关系. 在讨论这个关系以前，自然地应先定义 Fourier 变换，以及讨论 Fourier 变换的一些初等性质.

设$f\in L^1(\mathbb{T})$, f 的 Fourier 变换(此时通常称为 Fourier 系数)被定义为

$$\hat{f}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx, \ n\in\mathbb{Z}. \quad (11)$$

$\sum\limits_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)e^{inx}$ 被称为f 的Fourier 级数，记为

$$f\sim\sum_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)e^{inx}. \quad (12)$$

$M(\mathbb{T})$的所有元素都由$\mathbb{T}$上有界变差函数生成；所以测度的 Fourier 级数理论就是 Fourier－Stieltjes 级数理论. 设 $F(x)$有界变差，则

$$(dF)\hat{}\,(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-inx}dF(x), \quad n\in\mathbb{Z}, \quad (13)$$

称为 F 的 Fourier – Stieltjes 变换（或系数，这里积分是 Riemann – Stieltjes 积分）.

$$dF \sim \sum_{-\infty}^{\infty} (dF)^{\wedge}(n) e^{inx} \tag{14}$$

称为 Fourier – Stieltjes 级数。f 或 dF 的 Fourier 系数$\{\hat{f}(n)\}$, $\{(dF)^{\wedge}(n)\}$通常简单地记为某个复数序列，例如$\{c_n\}$. 高维情形是类似的. $\mathbb{R}^n$ 情形

$$\hat{f}(\xi) = a_0 \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx,\ \forall f \in L^1(\mathbb{R}^n), \tag{15}$$

$$(d\mu)^{\wedge}(\xi) = a_0 \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}\, d\mu(x),\quad \forall \mu \in M(\mathbb{R}^n), \tag{16}$$

分别称为f 的 Fourier 变换与 $d\mu$ 的 Fourier – Stieltjes 变换，其中$(d\mu)^{\wedge}$ 经常简记为$\hat{\mu}$. 而

$$f \sim a_0 \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \hat{f}(\xi) d\xi, \tag{17}$$

$$d\mu \sim a_0 \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} (d\mu)^{\wedge}(\xi) d\xi, \tag{18}$$

分别称为f 的Fourier 积分与 $d\mu$ 的 Fourier – Stieltjes 积分. 这里 $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$, $x \cdot \xi = \sum_1^n x_j \xi_j$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中内积. 现在讨论 Fourier 变换的初等性质. 仍然主要只对 $\mathbb{R}^n$ 叙述，偶尔提到 $\mathbb{T}$ 情形.

定理（1.2） 设 $\mu \in M$，则 $\hat{\mu}$ 一致连续，且

$$\|\hat{\mu}\|_{\infty} \leqslant \|\mu\|_M. \tag{19}$$

证明 式(19)是显然的．一致连续性是因

$$\hat{\mu}(\xi+\eta)-\hat{\mu}(\xi)=a_0\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}(e^{-ix\cdot\eta}-1)d\mu(x),$$

而被积函数当 $\eta\to 0$ 时对 ξ 一致地对一切 x 有界地趋于0，加之 μ 是有界测度，即得断言．定理证毕．

对 L^1 中元素结论要更强一些，即有所谓 Riemann－Lebesgue 引理．

定理(1.3) (Riemann－Lebesgue) $\forall f\in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\hat{f}\in C_0(\mathbb{R}^n)$.

证明 设 $f\in L^1$，由定理(1.2)，只要证 $\lim\limits_{|\xi|\to\infty}\hat{f}(\xi)=0$．设 $\xi\in\mathbb{R}^n$，令 $\eta=\dfrac{\xi}{|\xi|^2}\pi$，则

$$\hat{f}(\xi)=a_0\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}f(x)dx=a_0\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x+\eta)\cdot\xi}f(x+\eta)dx$$

$$=-a_0\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}f(x+\eta)dx=\frac{a_0}{2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}(f(x)-f(x+\eta))dx.$$

令 $|\xi|\to\infty$，这时有 $|\eta|\to 0$．因此，

$$|\hat{f}(\xi)|\leqslant\frac{1}{2}\|f(\cdot)-f(\cdot+\eta)\|_1\to 0.$$

这就证明了定理．

注 这个证明很典型，从它还可以得到由 f 的光滑性推出 Fourier 变换的大小估计，见§2.9 的有关习题．

现在讨论 Fourier 变换与平移、伸缩，正交变换，以及微分运算等的关系．

定理(1.4) 设 τ_η，d_δ 分别是平移算子与伸缩算子(见§1.6)，Q_ρ 是由 $\mathbb{R}^n$ 上正交变换 ρ 如下生成的正交变换

$$f \to Q_\rho f(x)=f(\rho(x)). \tag{20}$$

则我们有

$$(\tau_h f)^\wedge(\xi)=e^{-ih\cdot\xi}\hat{f}(\xi), \tag{21}$$

$$(e^{ih\cdot x}f)^\wedge(\xi)=(\tau_h\hat{f})(\xi), \tag{22}$$

$$(d_\delta f)^\wedge(\xi)=\delta^{-n}\hat{f}\left(\frac{\xi}{\delta}\right), \tag{23}$$

$$(Q_\rho f)^\wedge(\xi)=Q_\rho\hat{f}(\xi). \tag{24}$$

证明 式(21), (22), (23)直接由定义得. 如看(23), 有

$$a_0\int_{\mathbb{R}^n} f(\delta x)e^{-ix\cdot\xi}\ dx=\frac{a_0}{\delta^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\cdot\frac{\xi}{\delta}}dx=\frac{1}{\delta^n}\hat{f}\left(\frac{\xi}{\delta}\right).$$

现在看(24). 设 ρ 是正交变换, 这时 ρ^{-1} 等于 ρ 的转置 ρ'. 注意到 ρ 的 Jacobian 为1, 有

$$\begin{aligned}(Q_\rho f)^\wedge(\xi)&=a_0\int_{\mathbb{R}^n} f(\rho(x))e^{-ix\cdot\xi}dx\\&=a_0\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,e^{-i\rho^{-1}(x)\cdot\xi}dx=a_0\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\cdot\rho(\xi)}dx\\&=\hat{f}(\rho(\xi))=Q_\rho\hat{f}(\xi).\end{aligned}$$

定理证毕.

注 在 $\mathbb{T}$ 情形, 式(21), (22) 同样成立, (23)有下述类似结果: 记 $f_{(m)}(x)=f(mx)$, $m\in\mathbb{Z}$, 则

$$(f_{(m)})^\wedge(n)=\begin{cases}\hat{f}\left(\dfrac{n}{m}\right), & \text{当 } m \text{ 除得尽 } n,\\ 0, & \text{当 } m \text{ 除不尽 } n.\end{cases}$$

证明作为习题留给读者.

推论(1.5) 设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上径向函数(即 $f(x)$ 只依赖于 x 的长度 $|x|$, 与 x 的方向无关), 则 $\hat{f}$ 亦然.

证明 设 $|\xi_1|=|\xi_2|$, 则存在正交变换 ρ 使得 $\xi_2=\rho(\xi_1)$. 既然 f 是径向的, 则 $Q_\rho f=f$, 故 $Q_\rho \hat{f}=(Q_\rho f)^\wedge=\hat{f}$. 特别 $\hat{f}(\xi_2)=\hat{f}(\rho(\xi_1))=\hat{f}(\xi_1)$. 这就完成了证明.

现在讨论微分运算与 Fourier 变换的关系.

定理(1.6) 设 $f\in L^1$, 且 $x_kf\in L^1$, 其中 x_k 是 x 的第 k 个坐标, 则 $\hat{f}$ 关于 ξ_k 可微, 且

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_k}(\xi)=(-ix_kf)^\wedge(\xi). \tag{25}$$

类似地, 若 $f\in L^1$, 且 $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ 在通常意义下存在且属于 L^1, 或在 L^1 中按如下意义下存在, 即存在 $g\in L^1$, 使

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h_k}\to g \text{ 在 } L^1 \text{ 中}, \quad h=(0,\cdots,h_k,\cdots,0).$$

则

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^\wedge(\xi)=i\xi_k\hat{f}(\xi). \tag{26}$$

一般地 设 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$是一多重指标, 其中 α_j 是非负整数, D^α 是微分单项式

$$D^\alpha=\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}, \quad |\alpha|=\sum_j^n \alpha_j. \tag{27}$$

设 $P(x)$是任一多项式, $P(D)$是对应的微分多项式, 即用 D^α 代替

$$x^\alpha=x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n} \tag{28}$$

所得到的微分式，则对充分好的函数 f（例如在 Schwartz 函数类 $\mathscr{S}$ 中），有

$$P(D)\hat{f}(\xi)=(P(-ix)f)^{\wedge}(\xi), \tag{29}$$

$$P(i\xi)\hat{f}(\xi)=(P(D)f)^{\wedge}(\xi). \tag{30}$$

证明 设 $h=(0,\cdots,h_k,\cdots,0)$，则

$$\frac{\hat{f}(\xi+h)-\hat{f}(\xi)}{h_k}=\left(\frac{e^{-ix\cdot h}-1}{h_k}f\right)^{\wedge}(\xi)$$

$$=a_0\int_{R^n}\frac{e^{-ix\cdot h}-1}{h_k}f(x)e^{-ix\cdot\xi}dx.$$

当 $h_k\to 0$ 时，被积函数被 $|x_kf(x)|$ 控制，且收敛于 $-ix_kf(x)\cdot e^{-ix\cdot\xi}$. 这就给出了(25). 当 $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ 在通常意义下存在时，分部积分即得(26). 当 $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ 在 L^1 中存在时，注意到

$$(\tau_{-h}f-f)^{\wedge}(\xi)=(e^{ih\cdot\xi}-1)\hat{f}(\xi),$$

我们有

$$\left\|\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^{\wedge}(\xi)-\frac{e^{ih\cdot\xi}-1}{h_k}\hat{f}(\xi)\right\|_{\infty}\leqslant\left\|\frac{\partial f}{\partial x_k}-\frac{\tau_{-h}f-f}{h_k}\right\|_1.$$

注意到 $\dfrac{e^{ih\cdot\xi}-1}{h_k}\to i\xi_k$，这就给出了(26). 式(29)，(30)可类似证得. 定理证毕.

注 式(26)在 $\mathbb{T}$ 情形下的类似为：若 f 是 $\mathbb{T}$ 上绝对连续函数，则 f' 的 Fourier 系数为

$$(f')^{\wedge}(n)=in\hat{f}(n),\quad\forall n. \tag{31}$$

此外,设$f\in L^1,\hat{f}(0)=0$,则$F(x)=\int_{-\pi}^{x}f(t)dt$的 Fourier 系数为

$$\hat{F}(n)=\frac{1}{in}\hat{f}(n),\quad n\neq 0. \tag{32}$$

与式(32)类似,设$g(x)$是$\mathbb{T}$上有界变差函数,则

$$\hat{g}(n)=\frac{1}{in}(dg)^{\wedge}(n),\ \forall n\neq 0. \tag{33}$$

作为(31)的应用,可得 Fourier 级数绝对收敛的如下的充分性条件:设f使得f'绝对连续,则f的 Fourier 级数绝对收敛. 作为习题请读者证明这些断言.

最后我们回到卷积、对合与 Fourier 变换的关系.

定理(1.7) 设$\mu,\nu\in M(\mathbb{R}^n)$,则

$$(\mu*\nu)^{\wedge}(\xi)=\hat{\mu}(\xi)\hat{\nu}(\xi), \tag{34}$$

$$(\mu^*)^{\wedge}(\xi)=\overline{\hat{\mu}(\xi)}. \tag{35}$$

证明 当$\mu=fdx,\nu=gdx,f,g\in L^1$时,(34),(35)的证明是直接的. 一般情形,注意到式(34),(35)左右两边出现的函数都是有界连续函数,充分地只需证明它们作为作用在L^1上的泛函是一样的,一旦得证,则它们必须处处相等. 注意下述出现的积分都是绝对收敛的,故可自由交换积分次序. 于是$\forall g\in L^1$,

$$\int_{\mathbb{R}^n}(\mu*\nu)^{\wedge}(\xi)g(\xi)d\xi=\int_{\mathbb{R}^n}a_0\int_{\mathbb{R}^n}e^{-ix\cdot\xi}g(\xi)d\xi d\mu*\nu(x)$$

$$=a_0^2\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-i(x+y)\cdot\xi}g(\xi)d\xi d\mu(x)d\nu(y)$$

$$=\int_{\mathbb{R}^n}\hat{\mu}(\xi)\hat{\nu}(\xi)g(\xi)d\xi.$$

这里应用了$\hat{g}(\xi)\in C_0(\mathbb{R}^n)$的事实. 类似地,我们有

$$\int_{\mathbb{R}^n}(\mu^*)^{\wedge}(\xi)g(\xi)d\xi=a_0\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-ix\cdot\xi}g(\xi)d\xi d\mu^*(x)$$

$$=a_0\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}e^{ix\cdot\xi}g(\xi)d\xi\right)^{-}d\mu(x)\right)^{-}$$

$$=a_0\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}e^{-ix\cdot\xi}d\mu(x)\right)^{-}g(\xi)d\xi=\int_{\mathbb{R}^n}\overline{\hat{\mu}(\xi)}g(\xi)d\xi.$$

定理获证.

Fourier 变换与卷积、对合的上述关系非常重要. 它指出, 对固定 $\xi\in\mathbb{R}^n$, Fourier 变换 $\wedge$ (有时也记为$\mathscr{F}$)建立了$M(\mathbb{R}^n)$到 $\mathbb{C}$ 内的对合 Banach 代数同态. (两个代数体系之间的同态是那些与所讨论的代数体系内的所有运算可交换的映射.)如果不固定ξ, 而将 $\hat{\mu}(\xi)$ $(\mu\in M(\mathbb{R}^n))$或 $\hat{f}(\xi)$ $(f\in L^1(\mathbb{R}^n))$, 看成 $\mathbb{R}^n$ 上的函数, 则$\mathscr{F}$建立了 $M(\mathbb{R}^n)$到全体有界一致连续函数所组成的代数的一个子代数 $B(\mathbb{R}^n)$(称为 Fourier－Stieltjes 代数)上的同构, 以及 $L^1(\mathbb{R}^n)$到 $C_0(\mathbb{R}^n)$的一个子代数 $A(\mathbb{R}^n)$(称为 Fourier 代数)上的同构(一一映上的同态称为同构). 这里同态断言中映射与各种运算的可交换性, 有些是显然的, 有些可由本定理推得. 同构断言中所要求的映射的一一性, 就是在下节要建立的 Fourier 变换的唯一性定理的一个推论.

§2.2 Fourier 展开的收敛与求和

首先考虑(一维)Fourier 级数的收敛. 设 $f\in L^1(\mathbb{T})$, f 的 Fourier 级数为

$$f\sim\sum_{-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}.$$

它的Fourier 部分和算子由上述级数的对称部分和定义

$$S_N(f,x)=\sum_{-N}^{N} c_n e^{inx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x-y)f(y)dy, \qquad (1)$$

其中

$$D_N(x)=\sum_{|n|\leqslant N} e^{inx}=\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}, \qquad (2)$$

称为 Dirichlet 核。它是一个 N 阶三角多项式，是 x 的偶函数，并且满足

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} D_N(x)dx=1, \qquad (3)$$

$$|D_N(x)|\leqslant c\min\left(\frac{1}{\sin\frac{|x|}{2}}, N\right). \qquad (4)$$

式(4)反映部分和算子本身性质不够好. 通常是将它适当修改而考虑所谓求和算子，通常是线性求和算子. 考虑矩阵$\{\lambda_{kn}\}$，先作和$\sum_{-\infty}^{\infty}\lambda_{kn}c_n e^{inx}$，然后考虑这个和当 $k\to\infty$ 时的极限. 如果极限存在，则说$\sum_{-\infty}^{\infty}c_n e^{inx}$可用$\{\lambda_{kn}\}$求和. 我们将在§2.9习题中介绍一般的级数的正规矩阵求和. 本节对 Fourier 级数只讨论两种最简单的求和，即$(c,1)$求和与 Abel－Poisson 求和. $(c,1)$和定

义为

$$\sigma_N(f,x)=\frac{1}{N+1}\sum_{j=0}^{N}S_j(f,x)=\sum_{j=-N}^{N}\left(1-\frac{|j|}{N+1}\right)c_j e^{ijx}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_N(x-y)f(y)dy. \tag{5}$$

容易证明

$$K_N(x)=\sum_{-N}^{N}\left(1-\frac{|j|}{N+1}\right)e^{ijx}=\frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}(N+1)x}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2. \tag{6}$$

$K_N(x)$称为 Fejér 核. 它也是 N 阶三角多项式，偶函数，且满足

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_N(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}K_N(x)dx=1, \tag{7}$$

$$0\leqslant K_N(x)\leqslant c\min\left(\frac{1}{N+1}\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}},N\right). \tag{8}$$

f 的 Fourier 级数的 Abel 和定义为

$$f(x,r)=\sum_{-\infty}^{\infty}r^{|n|}c_n e^{inx}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(x-y)f(y)dy. \tag{9}$$

容易证明

$$P_r(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}r^{|n|}e^{inx}=\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2},\ 0\leqslant r<1. \tag{10}$$

它称为Poisson 核，是x的偶函数，满足

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}P_r(x)dx=1, \tag{11}$$

$$0\leqslant P_r(x)\leqslant\frac{c(1-r)}{(1-r)^2+x^2}\ . \tag{12}$$

估计式(8)与(12)本质上是一样的，只需把$\frac{1}{N}$与$1-r$对应就可看出．这类估计，即非负性、以及原点邻域外的控制形式，远比(4)为好．因而这两个求和算子，对Fourier级数来说，比部分和算子性质要好．Poisson核还有一个优点是与解析、调和性的联系．由于

$$P_r(x)=\mathrm{Re}\frac{1+z}{1-z}\ ,z=re^{ix}\ ,\ 0\leqslant r<1,\ |x|<\pi\ , \tag{13}$$

因此它是调和函数．它的共轭调和函数是

$$Q_r(x)=\mathrm{Im}\ \frac{1+z}{1-z}\ =\frac{2r\sin x}{1-2r\cos x+r^2}\ , \tag{14}$$

称为共轭Poisson核。我们在§2.5将会看到，共轭Poisson核使我们可在Fourier分析中引入卓有成效的复方法．这方法的一个重要结果是关于共轭函数算子的有界性．它在讨论部分和算子$\{S_N\}$是否在$L^p(\mathbb{T})$，$1\leqslant p<\infty$，与$C(\mathbb{T})$中依范数收敛，将是一个有用的工具．所谓共轭函数，指的是

$$\widetilde{f}(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x-y)}{2\mathrm{tg}\,\frac{y}{2}}\,dy\,. \tag{15}$$

在§2.5中将证明，若$f\in L^p(\mathbb{T})$，$1\leqslant p\leqslant\infty$，或$C(\mathbb{T})$，则$\widetilde{f}$在一

定意义下是存在的，且$f \to \tilde{f}$是$L^p(\mathbb{T})$有界的，$1<p<\infty$，但不在$L^1(\mathbb{T})$与$C(\mathbb{T})$中有界.

引理(2.1) 设B是$\mathbb{T}$上函数构成的Banach 空间，三角多项式的全体$\mathscr{P}$在B中稠密. 则Fourier部分和算子序列$\{S_N\}_1^\infty$在B中依范数收敛，当且仅当$\{S_N\}_1^\infty$是B上一致有界算子序列.

证明 设$S_N(f)\to f$，$\forall f\in B$，则由一致有界原理(见§3.1定理1.3)知$\{S_N\}$一致有界，即$\|S_N\|\leqslant c$. 反之，$\forall f\in B$，任给$\varepsilon>0$，找$g\in\mathscr{P}$，使$\|f-g\|_B\leqslant\varepsilon$，则当$N$大于$g$的阶，有

$$\|S_N(f)-f\|_B\leqslant\|S_N(f-g)\|_B+\|f-g\|_B\leqslant c\|f-g\|_B\leqslant c\varepsilon .$$

引理证毕.

定理(2.2) 设$B=L^p(\mathbb{T})$，$1\leqslant p<\infty$，或$C(\mathbb{T})$. 则对任意$f\in B$，有$\{S_N(f)\}_1^\infty$在B中收敛于f，当且仅当共轭函数算子$f\to\tilde{f}$是B上有界算子.

证明 只需证$\{S_N\}$一致有界与共轭函数算子有界等价. 为此将S_N修改为

$$S_N^*(f,x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_N^*(x-y)f(y)dy , \tag{16}$$

其中

$$D_N^*(x)=D_N(x)-\cos Nx=\frac{\sin Nx}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} . \tag{17}$$

既然$S_N-S_N^*$是一个以$\cos Nx$为核定义的卷积算子，它在空间B中显然是一致有界的. 因此充分地只需证明$\{S_N^*\}$的一致有界性与共轭算子的有界性等价. 后者显然推出前者，这是因为在(16)中，把$\sin N(x-y)$展开，便有

$$S_N^*(f,x)=\sin Nx\,(\cos Nxf)^\sim(x)-\cos Nx(\sin Nxf)^\sim(x) . \tag{18}$$

反过来，设$\{S_N\}$一致有界．对 $f\in B$ 定义

$$T_n f=\sum_{0}^{2n}\hat{f}(k)e^{ikx}=e^{inx}Sn\left(e^{-inx}f,x\right),$$

则$\{T_n\}$也是 B 上一致有界算子序列．显然，对任意$p\in\mathscr{S}$，$T_n(p)$在 B 中收敛，而 $\mathscr{S}$ 在 $L^p(\mathbb{T})$，$1\leqslant p<\infty$ 与 $C(\mathbb{T})$中是稠密的(见定理(2.11)后的说明)．因此，$\{T_n\}$在 B 上收敛，即 $\forall f\in B$，$T_n f\to\sum_{0}^{\infty}\hat{f}(k)e^{ikx}$ 在 B 中，记其极限算子为 T^+．类似地可定义 T^-，

$$f\to T^-f\sim\sum_{-\infty}^{-1}\hat{f}(k)e^{ikx},$$

它也是 B 上有界算子．由于共轭函数算子等于 $-i(T^+-T^-)$(见§2.5)，便知它是 B 上有界算子．定理获证．

结合共轭函数算子的有界性结果与本定理便知$\{S_N\}$在 L^p，$1<p<\infty$，上收敛，但在 L^1 与 C 上则不然．

现在讨论$\{S_N\}$的定点收敛．只讲一个常用的充分性判别法．先将式(16)进一步改写为

$$S_N(f,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin Ny}{y}f(x-y)dy+\varepsilon(x),\qquad(19)$$

其中 $\varepsilon(x)$ 是f 与

$$\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{y}{2}}-\frac{2}{y}\right)\sin Ny+\cos Ny=\rho(y)+\cos Ny$$

的卷积．我们首先指出，$\forall f\in L^1(\mathbb{T})$，$\varepsilon(x)=o(1)$[①]对 x 一致成

① 如通常，$o(1)$表示无穷小，$O(1)$表示有界．一般地设 f,g 是两个非负函数或序列，则$f=o(g)$，$f=O(g)$分别表示当自变量趋于某极限时，$\frac{f}{g}=o(1)$，$\frac{f}{g}=O(1)$；而 $f\approx g$ 则表示 $\frac{f}{g}+\frac{g}{f}=O(1)$．

立. 其中对应于 $\cos Ny$ 的那一项是显然的，它是 Riemann－Lebesgue 引理的推论. 至于对应于$\rho(y)$的那一项，也是 $o(1)$，只需用到 $\rho(y)$在 $[-\pi,\pi]$ 上有界变差的事实. 事实上，先用 $h\in C^1(\mathbb{T})$(一次连续可微函数)在 L^1 中逼近f，则这一步带来的误差至多为 $\|\rho\|_\infty\|f-h\|_1=o(1)$(对 x 一致). 现设$f\in C^1(\mathbb{T})$，则有

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\rho(y)e^{iNy}dy$$

$$=\frac{1}{iN}f(x-y)\rho(y)e^{iNy}\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{iN}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-y)e^{iNy}d\rho(y)$$

$$+\frac{1}{iN}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x-y)\rho(y)e^{iNy}dy=O\left(\frac{1}{N}\right),$$

对 x 一致地成立. 这证明了断言. 现给出 $S_N(f,x)$定点收敛的下述 Dirichlet－Jordan 判别法.

定理(2.3) (Dirichlet－Jordan)设f 是 $\mathbb{T}$ 上有界变差函数，则

(*a*). $\lim\limits_{N\to\infty} S_N(f,x_0)=\dfrac{1}{2}(f(x_0+0)+f(x_0-0))$，有界地收敛;

(*b*). 若此外，f 在区间 I(包括左右端点)连续，则上述收敛对 $x\in I$ 一致.

证明 修改定义 f 在可列个不连续点上的值，使$f(x)=\dfrac{1}{2}\cdot(f(x+0)+f(x-0))$处处成立. 不妨只需考虑($a$)中 $x_0=0$ 情形. 此时

$$S_N(f,0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(-y)\frac{\sin Ny}{y}dy+o(1)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(f(y)+f(-y))\frac{\sin Ny}{y}\,dy+o(1),$$

其中$f(y)+f(-y)=g(y)$是有界变差的．既然任意有界变差函数的实虚部都可表示为单调函数的差，故不妨设 g 自己在 $[0,\pi]$ 上单调增．这样我们有

$$S_N(f,0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(g(y)-g(+0))\frac{\sin Ny}{y}\,dy$$

$$+g(+0)\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin Ny}{y}\,dy+o(1)$$

$$=J+\frac{1}{2}g(+0)+o(1).$$

其中的 J 可用积分第二中值公式以及有界变差函数的 Fourier 系数的估计处理，从而得到

$$J=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\delta}+\int_{\delta}^{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}\,(g(\delta)-g(+0))\int_{\xi}^{\delta}\frac{\sin Ny}{y}\,dy$$

$$+O\left(\frac{1}{N}\,\mathrm{V}\left(\frac{g(y)-g(+0)}{y}\,\chi_{[\delta,\pi]}\right)\right)=o(1).$$

这里应用了$g(\delta)-g(+0)=o(1)$，$\displaystyle\int_{\xi}^{\delta}\frac{\sin Ny}{y}\,dy=O(1)$，以及$\mathrm{V}(\cdot)$有限的事实．这样 $S_N(f,0)=\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))+o(1)$获证．收敛是有界的是因为对任意有界变差函数 f，

$$S_N(f,x)=\sigma_N(f,x)+\frac{1}{N+1}\sum_{-N}^{N}|k|c_ke^{ikx}=O(\|f\|_\infty+\mathrm{V}(f)). \tag{20}$$

这就证明了(a)．

现看 (b) 中断言．有

$$S_N(f,x)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(f(x+y)-f(x+0)+f(x-y)-f(x-0))\frac{\sin Ny}{y}dy+$$

$$(f(x+0)+f(x-0))\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin Ny}{y}dy+o(1).$$

其中第一项对 $x\in I$ 一致是 $o(1)$ 可如 (a) 一样处理，只需注意到，实有界变差函数表示为单调函数的差的分解并不破坏连续性．定理获证．

这个定理推出 Fourier 级数总是可以逐项积分的．

推论(2.4) 设 $f\in L^1(\mathbb{T})$，$f\sim\sum_{-\infty}^{\infty}c_n e^{inx}$．则

$$\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=c_0x\Big|_{\alpha}^{\beta}+\sum_{-\infty}^{\infty}{}'\frac{c_n}{in}(e^{in\beta}-e^{in\alpha}),\qquad(21)$$

其中级数是普通收敛，且对 α,β 一致．

证明 考虑函数 $\int_{-\pi}^{x}f(t)dt-c_0x$，它是有界变差连续函数，而且 Fourier 级数是

$$\int_{-\pi}^{x}f(t)dt-c_0x\sim d+\sum_{-\infty}^{\infty}{}'\frac{c_n}{in}e^{inx},$$

其中 d 是某个常数．由定理(2.3)知，这个级数处处收敛．用 α,β 代入即得推论结论．

Fourier 部分和的几乎处处收敛是一个相当深入的问题．其中，"对 $f\in L^2$，$S_N(f,x)\to f(x)$ a.e."是著名的 Lusin 猜测．L. Carleson 于 1966 年作出了肯定的回答．其后不久，R. Hunt 将

结果推广到$f\in L^p$, $1<p<\infty$. $p=1$时，其结论是否定的，则早在1921年由A. Kolmogorov证明. 我们在此不讨论这些问题.

现转到Fourier展开的求和，以$\mathbb{R}^n$情形为对象进行叙述，偶尔也与$\mathbb{T}$或$\mathbb{R}$进行对照. 为了引进$\mathbb{R}^n$上几个常见的求和方法，我们先看$\mathbb{R}$上如何定义.

设$f\in L^1(\mathbb{R})$，则f的Fourier 变换为

$$\hat{f}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ix\xi}dx, \tag{22}$$

f 的Fourier积分为

$$f(x)\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi. \tag{23}$$

Fourier积分的部分和算子为

$$S_\lambda(f,x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\lambda}^{\lambda}\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\lambda y}{y}f(x-y)dy, \tag{24}$$

$(c,1)$和算子为

$$\sigma_\omega(f,x)=\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}S_\lambda(f,x)d\lambda=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\omega}^{\omega}\left(1-\frac{|\xi|}{\omega}\right)\cdot$$

$$\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos\omega y}{\omega y^2}f(x-y)dy. \tag{25}$$

为了引进Abel-Poisson求和算子与Gauss-Weierstrass 求和算子，我们先叙述几个初等的积分等式，实际上是计算几个函数

的一维 Fourier 变换.

引理 (2.5) 设 $t>0$, 则

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx^2}e^{\pm ix\xi}dx=\frac{1}{\sqrt{2t}}\,e^{-\frac{\xi^2}{4t}}\,. \tag{26}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-t|x|}e^{\pm ix\xi}dx=\frac{1}{\pi}\,\frac{t}{\xi^2+t^2}\,, \tag{27}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\,\frac{t}{\xi^2+t^2}\,e^{\pm ix\xi}d\xi=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-t|x|}. \tag{28}$$

证明 由

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx=1, \tag{29}$$

应用围道积分即得

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx^2}e^{\pm ix\xi}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\left(x\mp\frac{i\xi}{2t}\right)^2}dx\,e^{-\frac{\xi^2}{4t}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx^2}dx\,e^{-\frac{\xi^2}{4t}}=\frac{1}{\sqrt{2t}}\,e^{-\frac{\xi^2}{4t}}\,.$$

这就是 (26). 式 (27)的证明是容易的. 事实上, 我们有

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-t|x|}e^{\pm ix\xi}\,dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{(\pm i\xi-t)x}dx+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{(\pm i\xi+t)x}\,dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{\pm i\xi+t}-\frac{1}{\pm i\xi-t}\right)=\frac{1}{\pi}\ \frac{t}{\xi^2+t^2}\ .$$

为证式(28)，我们需要如下初等事实：设 $A,B>0$，$f\geqslant 0$，且 $\int_0^{\infty} f(y^2)dy<\infty$.则

$$\int_0^{\infty} f\left(\left(Ax-\frac{B}{x}\right)^2\right)dx=\frac{1}{A}\int_0^{\infty} f(x^2)dx\ . \qquad (30)$$

事实上，作代换 $y=Ax-\dfrac{B}{x}$，则 $x\in(0,\infty)$与 $y\in(-\infty,\infty)$ 互相映照，因此

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y^2)dy=\int_0^{\infty} f\left(\left(Ax-\frac{B}{x}\right)^2\right)\left(A+\frac{B}{x^2}\right)dx\ .$$

再作代换 $x=-\dfrac{B}{At}$，则 $x\in(0,\infty)$与 $t\in(-\infty,0)$互相映照，故

$$B\int_0^{\infty} f\left(\left(Ax-\frac{B}{x}\right)^2\right)\frac{dx}{x^2}=A\int_{-\infty}^{0} f\left(\left(At-\frac{B}{t}\right)^2\right)dt\ .$$

这样便得

$$\int_0^{\infty} f(y^2)dy=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(y^2)dy$$

$$=\frac{1}{2}A\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\left(Ax-\frac{B}{x}\right)^2\right)dx=A\int_0^{\infty} f\left(\left(Ax-\frac{B}{x}\right)^2\right)dx\ .$$

从而(30)得证. 现来证明式(28). 我们有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+t^2}e^{\pm ix\xi}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}e^{-(x^2+t^2)u}due^{\pm ix\xi}dx$$

$$=\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ux^2\pm ix\xi}dxe^{-t^2u}du$$

$$=\int_{0}^{\infty}\sqrt{\frac{\pi}{u}}e^{-\frac{\xi^2}{4u}-t^2u}du=2\sqrt{\pi}\int_{0}^{\infty}e^{-\left(tv-\frac{|\xi|}{2v}\right)^2}e^{-t|\xi|}dv$$

$$=\frac{2\sqrt{\pi}}{t}\int_{0}^{\infty}e^{-v^2}dve^{-t|\xi|}=\frac{\pi}{t}e^{-t|\xi|}.$$

引理至此全部获证.

注 式(26), (27), (28)的高维类似是

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-t|x|^2}e^{\pm ix\cdot\xi}dx=\left(\frac{1}{2t}\right)^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{|\xi|^2}{4t}},\qquad(31)$$

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-t|x|}e^{\pm ix\cdot\xi}dx$$

$$=\frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\frac{t}{(|\xi|^2+t^2)^{\frac{n+1}{2}}},\qquad(32)$$

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}P_t(\xi)e^{\pm ix\cdot\xi}d\xi=e^{-t|x|}.\qquad(33)$$

其中 $P_t(\xi)$是式(32)中两边表示的函数. 式(31)显然是一维结

果的平凡推广．式(32)的证明是类似的．从式(28)的推导中我们已得

$$e^{-t|x|}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{it|x|y}}{1+y^2}\,dy=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{u}}\,e^{-u-\frac{t^2|x|^2}{4u}}\,du,$$

故(暂记(32)左边的函数为 $P_t(\xi)$)

$$P_t(\xi)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\frac{t^2|x|^2}{4u}}e^{\pm ix\cdot\xi}dxdu$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\left(\frac{2u}{t^2}\right)^{\frac{n}{2}}\frac{1}{\sqrt{u}}\,e^{-\left(1+\frac{|\xi|^2}{t^2}\right)u}du$$

$$=\frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}t^{-n}u^{\frac{n-1}{2}}e^{-\left(1+\frac{|\xi|^2}{t^2}\right)u}du$$

$$=\frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\frac{t}{(|\xi|^2+t^2)^{\frac{n+1}{2}}},$$

这就是(32)．$P_t(\xi)$称为 $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 上的 Poisson 核．需要指出，Poisson 核还有一个常见的定义，即

$$\int_{\mathbb{R}^n}e^{-2\pi t|x|}e^{-2\pi ix\cdot\xi}dx=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}\cdot\frac{t}{(|\xi|^2+t^2)^{\frac{n+1}{2}}},$$

它是我们这里的 $\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}$ 倍．至于式(33)，它可应用我们将要建立的 Fourier 逆转公式来证明．

现在定义 $\mathbb{R}$ 上 Fourier 积分的 Abel－Poisson 求和与 Gauss－Weierstrass 求和.

$$f_P(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t|\xi|}\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi , \tag{34}$$

$$f_G(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t|\xi|^2}\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi . \tag{35}$$

我们马上要指出，这种从Fourier 变换出发定义的求和，可以通过对 f 自己的积分来表示. 根据这样的表示，Poisson 和正是 f 与 Poisson 核

$$P_t(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{t}{x^2+t^2}=\mathrm{Re}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{i}{z}, \quad z=x+it ,$$

的卷积. 引进

$$Q_{(t)}(x)=\mathrm{Im}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{i}{z}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{x}{x^2+t^2}, \tag{36}$$

它称为 $\mathbb{R}^2_+$ 上的共轭 Poisson 核. 如同 $\mathbb{T}$ 的情形一样，$\mathbb{R}$ 上 Poisson 求和可应用复方法. 我们将在 §2.5 回到这一课题.

现定义 $\mathbb{R}^n$ 上的几种常见的求和算子. $(c,1)$求和与 Abel－Poisson 求和当然可以定义为 $\mathbb{R}$ 情形的乘积(即所谓矩形求和)，但这涉及到多参数问题，在调和分析中这是很复杂的待发展领域. 比较常用的是用径向函数来定义(即所谓球形求和)，例如 Gauss－Weierstrass 求和，以及径向的 Abel－Poisson 求和. 此外作为径向的$(c,1)$和的推广有所谓 Bochner－Riesz 求和. 我们下面只着重讨论 Gauss－Weierstrass 求和与径向的 Abel－Poisson 求和，也顺便看看别的一些求和.

矩形$(c,1)$求和定义为

$$\sigma_\omega(f,x)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\int_{-\omega}^{\omega}\prod_{j=1}^{n}\left(1-\frac{|\xi_j|}{\omega_j}\right)\hat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi$$

$$\omega=(\omega_1,\cdots,\omega_n) . \tag{37}$$

Gauss – Weierstrass 求和既是乘积形式也是径向形式，定义为

$$f_G(x,t)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-t|\xi|^2}\hat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi. \tag{38}$$

径向的 Abel – Poisson 和定义为

$$f_P(x,t)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-t|\xi|}\hat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi. \tag{39}$$

我们希望用统一的方法来处理这些求和法. 设 $\Phi(x)\in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\varphi=\hat{\Phi}$, $t>0$, 记 $\varphi_t(x)=t^{-n}\varphi\left(\frac{x}{t}\right)$. 定义 f 的 Fourier 积分的 Φ 平均(或 Φ 求和)为

$$f_\Phi(x,t)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(t\xi)\hat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi. \tag{40}$$

我们要讨论的是，对 Φ 加什么样的条件，可以保证 Φ 平均在 L^p 与 C 空间收敛，或点态收敛.

引理(2.6) 设 $\Phi, f\in L^1$, $\varphi=\hat{\Phi}$. 则

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(t\xi)\hat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_t(y-x)f(y)dy. \tag{41}$$

证明 这可由 Fubini 定理推出. 事实上

$$\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(t\xi)\hat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi=\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(t\xi)(\tau_{-x}f)^\wedge(\xi)d\xi$$

$$=\int_{\mathbb{R}^n}\tau_{-x}f(y)(\Phi(t\xi))^\wedge(y)dy=\int_{\mathbb{R}^n}\tau_{-x}f(y)\varphi_t(y)dy$$

$$=\int_{\mathbb{R}^n} f(y+x)\varphi_t(y)dy=\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_t(y-x)f(y)dy\ .$$

引理证完.

引理(2.6)告诉我们，上面定义的 Φ 平均实际上是卷积算子，我们对它并不陌生．在 §1.6 所得到的关于逼近单位的一些结果，可以应用到对 Φ 平均的研究．我们先给出三种求和的积分表示.

命题(2.7) $\forall f\in L^1(\mathbb{R}^n)$，有

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\int_{-\omega_1}^{\omega_1}\cdots\int_{-\omega_n}^{\omega_n}\prod_{j=1}^{n}\left(1-\frac{|\xi_j|}{\omega_j}\right)\hat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi$$

$$=\left(\frac{1}{\pi}\right)^n\int_{\mathbb{R}^n}\prod_{j=1}^{n}\frac{1-\cos\omega_j y_j}{\omega_j y_j^2}f(x-y)dy\ , \tag{42}$$

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-t|\xi|}\hat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

$$\cdot\int_{\mathbb{R}^n}\frac{t}{(|y|^2+t^2)^{\frac{n+1}{2}}}f(x-y)dy, \tag{43}$$

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-t|\xi|^2}\hat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{2t}\right)^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{|y|^2}{4t}}f(x-y)dy\ . \tag{44}$$

证明 由式(31)，(32)，(33)知

$$e^{-t|\xi|^2}\ 与\left(\frac{1}{2t}\right)^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\ ,$$

$$e^{-t|\xi|} \text{ 与 } \frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\frac{t}{(|x|^2+t^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$

是彼此互为 Fourier 变换的两对函数，此外

$$\prod_{j=1}^{n}\left(1-\frac{|\xi_j|}{\omega_j}\right) \text{ 与 } \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\prod_{j=1}^{n}\frac{1-\cos\omega_j x_j}{\omega_j x_j^2}$$

也彼此互为 Fourier 变换. 由引理 2.6, 并注意这里出现的函数都是偶函数, 式 (41) 可改为卷积的标准形式(即 $\varphi(y-x)$ 可改为 $\varphi(x-y)$), 从而 $x-y$ 既可出现在 φ 中也可出现在 f 中. 命题证完.

定理 (2.8) 设 φ 属于 $L^1(\mathbb{R}^n)$, $a_0\int_{\mathbb{R}^n}\varphi dx=1$, 且 φ 是偶函数. 则对 $f\in L^p$, $1\leqslant p<\infty$ 或 $f\in C_0$

$$f_\Phi(x,t)=f*\varphi_t(x)\to f, \text{依范数成立;} \tag{45}$$

此外假设

$$|\varphi(x)|\leqslant c(1+|x|)^{-n-\varepsilon},\quad \varepsilon>0, \tag{46}$$

则对 $f\in L^p$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, 也有 $\lim\limits_{t\to 0}\varphi_t*f(x)=f(x)$, 在 f 的连续点成立.

证明 事实上, 我们已在 §1.6 定理(6.3)中给出过(4.5). 记 $B=L^p$, $1\leqslant p<\infty$, 或 C_0,

$$f_\Phi(x,t)-f(x)=a_0\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_t(y)(f(x-y)-f(x))dy,$$

$$\|f_\Phi(\cdot,t)-f(\cdot)\|_B\leqslant a_0\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi_t(y)|\,\|f(\cdot-y)-f(\cdot)\|_B\,dy$$

$$=\int_{|y|\leqslant\delta}+\int_{|y|>\delta}.$$

由 $f\in L^p$，或 C_0，知 $\lim\limits_{y\to 0}\|f(\cdot-y)-f(\cdot)\|_p=0$，再由

$$\lim_{t\to 0}\int_{|y|>\delta}|\varphi_t(y)|dy=\lim_{t\to 0}\int_{|y|>\frac{\delta}{t}}|\varphi(y)|dy=0,$$

即得 (45). 现设 x 是 f 的连续点，$f\in L^p$，$1\leqslant p\leqslant\infty$，则

$$f_\Phi(x,t)=f(x)+a_0\int_{R^n}\varphi_t(y)(f(x-y)-f(x))dy$$

$$=f(x)+\int_{|y|\leqslant\delta}+\int_{|y|>\delta},$$

$$\left|\int_{|y|\leqslant\delta}\right|\leqslant\varepsilon\int_{R^n}|\varphi_t(y)|dy,$$

$$\left|\int_{|y|>\delta}\right|\leqslant a_0|f(x)|\int_{|y|>\delta}|\varphi_t(y)|dy$$

$$+a_0\|f\|_p\left(\int_{|y|>\delta}|\varphi_t(y)|^{p'}dy\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

由显然的等式

$$\lim_{t\to 0}\left(\int_{|y|>\delta}|\varphi_t(y)|^{p'}dy\right)^{\frac{1}{p'}}=0\qquad 1<p\leqslant\infty, \tag{47}$$

以及

$$\lim_{t\to 0}\sup_{|y|>\delta}|\varphi_t(y)|=\lim_{t\to 0}\sup_{|y|>\delta}\frac{Ct^{\varepsilon}}{(t+|y|)^{n+\varepsilon}}=0, \tag{48}$$

便得 $f_\Phi(x,t)=f(x)+o(1)$. 定理得证.

注. 假设 $\{\varphi_t\}$ 不是由 $\varphi\in L^1$ 的伸缩形成的族，而是 L^1 中的

任意族，但满足

$$a_0\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_t(x)dx=1, \tag{49}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi_t(x)|dx\leqslant c,\quad \forall\, t>0, \tag{50}$$

$$\lim_{t\to 0}\int_{|x|>\delta}|\varphi_t(x)|dx=0,\ \delta>0. \tag{51}$$

则同样的证明给出 $\varphi_t*f\to f$, $\forall f\in L^p$, $1\leqslant p<\infty$，或C_0. 若(51)换为

$$\lim_{t\to 0}\left(\int_{|y|>\delta}|\varphi_t(x)|^{p'}dx\right)^{\frac{1}{p'}}=0,\ 1\leqslant p'\leqslant\infty, \tag{52}$$

则 $\forall f\in L^p$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, $\varphi_t*f\to f$ 在f 的连续点处成立. 为称呼方便，我们也称一个满足(49)、(50)，(51)的 L^1 中的族为一个逼近单位，而称一个满足(49)，(50)，(52)的族为一个 L^p 点逼近单位.

现在应用定理(2.8)于我们已引进的几个求和算子. 先看Gauss－Weierstrass 求和.

$$\Phi(t\xi)=e^{-t|\xi|^2},\ \varphi_t(x)=\left(\frac{1}{2t}\right)^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

它显然满足(49)，(50)，(51)、(52). 因此由定理(2.8)得

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-t|\xi|^2}\hat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{2t}\right)^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{|y|^2}{4t}}f(x-y)dy\to f(x). \tag{53}$$

只要f适当好，收敛可以在L^p与C空间内依范数或点态地成立。由此我们可以推出下述 Fourier 逆转公式.

定理(2.9) 设$f,\hat{f}$都属于$L^1(\mathbb{R}^n)$，则

$$f(x)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi\text{，处处成立.} \qquad (54)$$

证明 由$f\in L^1$，知(53)中间积分在L^1中收敛于f. 但由$\hat{f}\in L^1$知，左边积分控制收敛，且它的极限是式(54)右边的积分. 定理证毕.

式(54)表明，如果 Fourier 变换在某空间上有某种意义下的逆算子，则这逆算子必然具有如下之形式

$$f\to\check{f}(\xi)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{ix\cdot\xi}f(x)dx. \qquad (55)$$

我们称它为 Fourier 逆变换，或记为$\mathscr{F}^{-1}$. Fourier 变换的这个性质给许多问题的讨论带来了方便.

再将定理(2.8)应用于 Poisson 求和. 我们已定义

$$\begin{aligned}P_t(\xi)&=\frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\frac{t}{(|\xi|^2+t^2)^{\frac{n+1}{2}}}\\&=(2\pi)^{\frac{n}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}\frac{t}{(|\xi|^2+t^2)^{\frac{n+1}{2}}}\\&=(2\pi)^{\frac{n}{2}}c_n\frac{t}{(|\xi|^2+t^2)^{\frac{n+1}{2}}}.\end{aligned} \qquad (56)$$

在本书的后面部分，永远用c_n表示特殊常数$\dfrac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}$. 记$\alpha=a_0\int_{\mathbb{R}^n}P_t(\xi)d\xi$. 我们先不管$\alpha$是否为 1. 显然$\{P_t\}$满足(50)，

(51), (52). 考察式(43)两边. 假设 f 与 $\hat{f}$ 都属于 L^1, 则

$$\lim_{t\to 0} a_0\int_{R^n} P_t(x-y)f(y)dy=\alpha f(x),\quad \text{在 } L^1 \text{ 中},$$

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\int_{R^n} e^{-t|\xi|}\hat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\int_{R^n}\hat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi.$$

第一个事实当 $\alpha=1$ 时我们已知, 一般 α 时的证明是一样的. 第二个事实用到控制收敛定理. 既然 $\hat{f}\in L^1$, 这样, 由定理(2.9)所述的 Fourier 逆转公式知 $\alpha=1$ 必须成立. 同样, 我们曾经遗留下式(33)的证明, 它也是定理(2.9)的结果; $e^{-t|x|}\in L^1$, 它的 Fourier 变换 $P_t(\xi)\in L^1$, 故式(54)立即给出(33).

最后看定理(2.8)应用于$(c,1)$求和可以得到什么, 不能得到什么. 此时,

$$\Phi\left(\frac{x}{\omega}\right)=\prod_{j=1}^{n}\left(1-\frac{|x_j|}{\omega_j}\right),\ \varphi_{\frac{1}{\omega}}(\xi)$$

$$=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\prod_{j=1}^{n}\frac{1-\cos\omega_j y_j}{\omega_j y_j^2}=K_\omega(\xi).$$

严格讲这里参数 $\omega=(\omega_1,\cdots,\omega_n)$ 已不是单参数, 我们的记号 $\Phi\left(\frac{x}{\omega}\right)$ 与 $\varphi_{\frac{1}{\omega}}(\xi)$ 已经有些勉强了. 但我们还能由定理(2.8)得到一些结果. 首先我们约定 $\omega\to\infty$ 是指所有 $\omega_j\to\infty$. 在这样的约定下, 仍有

$$\lim_{\omega\to\infty}\int_{|x|\geq\delta}|\varphi_{\frac{1}{\omega}}(\xi)|d\xi=0. \tag{57}$$

这是因为 $|x|\geq\delta$ 意味着至少一个 $|x_j|\geq c\delta$, 而 $\omega\to\infty$ 意味着所

有 $\omega_j \to \infty$，故乘积中至少一个因子为 $o(1)$，其它因子保持有界. 此外，(49)，(50)显然成立(只是一维结果). 这样由定理(2.8)，知

$K_\omega * f(x) \to f$，依范数，$\forall f \in L^p, 1 \leq p < \infty, C_0$，

$K_\omega * f(x) \to f(x)$，点态，$\forall f \in L^\infty$，在 f 的连续点.

注意我们的确得不到 $f \notin L^\infty$ 时的上述点态收敛结果. 我们将在 Fourier 级数情形举出反例.

最后看看 Bochner－Riesz 求和. 设 $0 \leq \delta$，令

$$BR^{(\delta)}(\xi) = (1 - |\xi|^2)^\delta \chi_{\{|\xi| \leq 1\}}. \tag{58}$$

注意任意径向函数 $f(x)$ 的 Fourier 变换有如下表示

$$\hat{f}(\xi) = a_0 \int_0^\infty f(r) \int_{|x|=r} e^{-ix\cdot\xi}\, d\sigma(x) dr$$

$$= a_0 \int_0^\infty f(r) r^{n-1} (|\xi| r)^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(r|\xi|) dr.$$

当 $f(r) = (1 - r^2)^\delta \chi_{\{r \leq 1\}}$，有

$$\hat{f}(\xi) = c\, |\xi|^{-\frac{n}{2}-\delta} J_{\frac{n}{2}+\delta}(|\xi|),$$

其中 $J_{\frac{n}{2}+\delta}$ 是 Bessel 函数. 由于当 $\nu > -\dfrac{1}{2}$ 时，Bessel 函数 $J_\nu(x)$ 满足

$$\lim_{x \to 0} \frac{J_\nu(x)}{x^\nu} = c, \quad |J_\nu(x)| \leq \frac{c}{\sqrt{x}}, \quad x > 0,$$

我们得

$$br^{(\delta)}(\xi)=BR^{(\delta)\wedge}(\xi)=\begin{cases}\text{有界，在任意紧集上，}\\ O\left(|\xi|^{-\frac{n+1}{2}-\delta}\right)\text{，在 }\xi=\infty\text{ 邻域.}\end{cases}$$

这样当 $\delta>\dfrac{n-1}{2}$ 时，$br^{(\delta)}\in L^1$，定理(2.8)可用. 指标 $\dfrac{n-1}{2}$ 称为 Bochner－Riesz 平均的临界指标. 当 $\delta\leqslant\dfrac{n-1}{2}$ 时，Bochner－Riesz 平均还有许多问题值得研究.

作为定理(2.8)的推论，可以得到 Fourier 变换的唯一性定理.

定理(2.10) 设 $\mu\in M(\mathbb{R}^n)$使 $\hat{\mu}(\xi)=0$ 处处，则 $\mu=0$.

证明 充分地只需证明 μ 在 $C_0(\mathbb{R}^n)$的稠密子空间 $C_{00}(\mathbb{R}^n)=\{f\in C(\mathbb{R}^n):\ \mathrm{supp}f$ 是紧的$\}$上作用为 0. 但易知 $\forall g\in L^1(\mathbb{R}^n)$，有

$$\int_{\mathbb{R}^n}\hat{g}(\xi)d\mu(\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}g(x)\hat{\mu}(x)dx=0\,.$$

现在我们的任务就是用 $A(\mathbb{R}^n)=L^1(\mathbb{R}^n)^\wedge$ 中的函数来逼近$C_{00}(\mathbb{R}^n)$中的函数. 设 $f\in C_{00}$，由定理(2.8)知 $f*P_t$ 一致逼近 f. 但 $f\in L^1$(这是我们用 C_{00} 代替 C_0的理由)，我们有

$$a_0\int_{\mathbb{R}^n}f(y)P_t(x-y)dy=a_0\int_{\mathbb{R}^n}e^{-t|\xi|}\hat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi\,,$$

同时 $e^{-t|\xi|}\hat{f}(\xi)\in L^1$，这便实现了用 $A(\mathbb{R}^n)$中函数一致逼近 f 的目的. 这证明了推论.

注 我们实际上已证明了 $A(\mathbb{R}^n)$在 $C_0(\mathbb{R}^n)$中是稠密的.

现在我们希望上面考虑过的在连续点处的收敛定理能改进为对所有 Lebesgue 点处的几乎处处收敛定理. 但这已不是新任务，我们已在第一章定理(6.4)中讨论过这个问题，那里将证明中的有关极大函数的部分后移到§3.4. 我们这里只叙述这个结果.

定理(2.11) 设 $\varphi\in L^1$，φ 的最小径向控制函数

$$\psi(x)=\operatorname*{ess\,sup}_{|y|\geq|x|}|\varphi(y)|\in L^1. \tag{59}$$

则 $\forall f\in L^p, 1\leqslant p\leqslant\infty$，在$f$ 的 Lebesgue 点处，有

$$\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_t(x-y)f(y)dy=f(x)\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)dx. \tag{60}$$

最后我们指出上述讨论可以无更改地适用于$\mathbb{T}$情形，甚至更简单．有关 Fejér 核，Poisson核的估计式(7),(8)，(11),(12)，说明它们满足类似的(49)，(50)，(51),(52)，因而$(c,1)$和 $\sigma_N(f,x)$与 Poisson 和$f(x,r)$在 L^p，$1\leqslant p<\infty$，与 C 中收敛于f．作为$\sigma_N(f,x)$在 $L^p(1\leqslant p<\infty)$与 C 中收敛到f 这一事实的一个推论，三角多项式在 $L^p(1\leqslant p<\infty)$与 C 是稠密的．而 $\forall f\in L^1$，则它们在f 的连续点处点态地也收敛于f．此外，有关推论，例如 Fourier 变换的唯一性定理等都成立．为便于读者熟悉 Fourier 级数，我们把 $\sigma_N(f,x)$与 $f(x,r)$，$\forall f\in L^1$，在 f 的 Lebesgue 点收敛于$f(x)$的定理再证一遍．仍然考虑一般核定义的卷积算子序列．

定理(2.12) 设$\{K_n(x)\}$是 $L^1(\mathbb{T})$中偶函数序列，满足

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(x)dx=1,\ |K_n(x)|\leqslant\frac{cn}{1+n^2x^2}, \tag{61}$$

则 $\forall f\in L^1(\mathbb{T})$，在$f$ 的 Lebesgue 点 x 处，

$$\lim_{n\to\infty}K_n*f(x)=f(x). \tag{62}$$

证明 有

$$K_n*f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(y)f(x-y)dy=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}K_n(y)(f(x-y)$$

$$+f(x+y))dy=f(x)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}K_n(y)f_x(y)dy, \tag{63}$$

其中$f_x(y)=f(x+y)+f(x-y)-2f(x)$. 由于 x 是 Lebesgue 点，则

$$\eta(t)=\int_0^t|f_x(y)|dy=o(t), \quad t\to 0. \tag{64}$$

这样存在常数 c 使得

$$|K_n*f(x)-f(x)|=\int_0^{\frac{1}{n}}+\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}$$

$$\leqslant cn\int_0^{\frac{1}{n}}|f_x(y)|\,dy+c\frac{\eta(t)}{nt^2}\Big|_{\frac{1}{n}}^{\pi}+c\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{\eta(t)}{nt^3}\,dt$$

$$=o(1). \tag{65}$$

这就完成了证明.

我们在应用定理(2.8)于矩形$(c,1)$求和时已经看到，即使对性质非常好的 Fejér 核，多参数已经带来了很大的麻烦. 在f的连续点处，如果$f\notin L^\infty$，它的$(c,1)$平均也不见得收敛于$f(x)$. 我们现在就来举出一个二维 Fourier 级数的反例. 设$f(x)\in L^1(\mathbb{T})$，在 $x=0$ 的某个邻域为 0，设 $f\sim\sum\limits_{-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$ 是其 Fourier 级数，则$\sigma_n(f,0)$一定在某个子序列$\{n_k\}$上非零，除非f是三角多项式. 事实上，如果存在n_0使$\sigma_n(f,0)=0,\forall n\geqslant n_0$，则$\sum\limits_0^n S_k(f,0)=0$，$\forall n\geqslant n_0$，故$S_k(f,0)=0,\forall k>n_0$，故 $c_k=0$，$\forall k>n_0$. 令 $g(y)=$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos ny}{n}$，则$\{\sigma_m(g,0)\}$无界，这样对$n_k$，可找到$m_k$使$|\sigma_{n_k}(f,0)\sigma_{m_k}(g,0)|\geq k$，这说明$\{\sigma_{n_k,m_k}(fg,0)\}$不能收敛．但在0的某邻域$fg=0$，当然0是$fg$的连续点．这就是我们所要证明的．

§2.3 连续函数的三角逼近

本节讨论用三角多项式逼近连续函数．只讨论一维情形．假设所讨论的函数都是2π为周期的．重点对象是 Lipschitz 函数．我们在§1.6已经引进过，在此先回忆一下它们的定义．

定义（3.1） 设$0<\alpha\leq 1$．连续函数f称为属于Λ_α，如果

$$|f(x+h)-f(x)|\leq ch^\alpha,\ \forall x,h. \tag{1}$$

称为属于 Zygmund 类Λ_*，如果

$$|f(x+h)+f(x-h)-2f(x)|\leq ch,\ \forall x,h. \tag{2}$$

式(1)与(2)中最小的常数c称为f的相应范数．此外，一般地

$$\omega(\delta)=\omega_f(\delta)=\sup_{0\leq|h|\leq\delta}\|f(x+h)-f(x)\|_C, \tag{3}$$

称为f的连续模．

首先考虑用$(c,1)$求和逼近Λ_α中函数的阶这一比较简单的问题．

定理(3.2) 设$f\in\Lambda_\alpha$，$0<\alpha<1$，则$\sigma_n(f,x)-f(x)=O(n^{-\alpha})$对$x$一致地成立．若$f\in\Lambda_*$，则$\sigma_n(f,x)-f(x)=O(n^{-1}\log n)$对$x$一致地成立．

证明 我们已经在§2.2式(65)中得到

$$|\sigma_n(f,x)-f(x)|=\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi K_n(y)(f(x+y)+f(x-y)-2f(x))dy\right|$$

$$\leqslant c\int_0^{\frac{1}{n}} K_n(y)|f_x(y)|dy + c\int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \frac{1}{ny^2}|f_x(y)|dy = I_1 + I_2,$$

其中 $K_n(x)$是 Fejér 核. 由 $|f_x(y)|\leqslant c|y|^\alpha$, $0<\alpha\leqslant 1$, 即知

$$|I_1|\leqslant cn\left(\frac{1}{n}\right)^{1+\alpha} = cn^{-\alpha},$$

$$|I_2|\leqslant \frac{c}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi} y^{\alpha-2}\,dy \leqslant \begin{cases} cn^{-1}\log n, & \alpha=1, \\ cn^{-\alpha}, & \alpha<1. \end{cases}$$

这就证明了定理.

用$(c,1)$求和逼近连续函数, 究竟能逼近到什么程度? 下面的简单事实说明它有局限性.

定理(3.3) 设 $\sigma_n(f,x)-f(x)=o\left(\frac{1}{n}\right)$, 则 $f=$ 常数.

证明 我们有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-\sigma_n(f,x))e^{-ikx}\,dx = |k|\hat{f}(k)(n+1)^{-1}, \ |k|\leqslant n.$$

如果$\sigma_n(f,x)-f(x)=o\left(\frac{1}{n}\right)$ 对x 一致, 则 $\forall k\neq 0$, $|k|\hat{f}(k)\cdot(n+1)^{-1}=o\left(\frac{1}{n}\right)$, 从而 $\hat{f}(k)=0$. 引理证完.

这引导到我们考虑所谓最佳逼近. 主要内容是 D. Jackson 与 S. Bernstein 的正反定理.

定义(3.4) 设$f\in C(\mathbb{T})$, $n\in\mathbb{Z}_+$, $\mathscr{T}_n$ 是所有阶数不超过 n 的三角多项式组成的集合. 则称

$$E_n(f)=\min_{T\in P_n}\|f-T\|_\infty \tag{4}$$

为 f 的 n 次**最佳逼近**.

显然，$E_n(f)$是单调下降趋于0的序列. 注意最佳逼近多项式是可以达到的. 事实上，设$\{T_k\}$是n次三角多项式序列使$\|f-T_k\|_\infty\leqslant E_n(f)+\frac{1}{k}$，则特别$\|T_k\|_\infty\leqslant c$. 由于$T_k$的系数是$T_k$的Fourier系数，故它们的所有Fourier系数的集合$\{c_0^{(k)},\cdots,c_n^{(k)}\}$是复数的有界集，故存在子列使得$\lim\limits_{k\to\infty}c_j^{(k)}=c_j$，$j=0,\cdots,n$. 于是以$\{c_j\}_0^n$为系数的$T(x)$即达到最佳逼近，这是因为

$$\|f-T\|_\infty\leqslant\varlimsup_{k\to\infty}\|f-T_k\|_\infty\leqslant E_n(f),$$

而 $E_n(f)\leqslant\|f-T\|_\infty$ 是显然的.

虽然对光滑程度较高的函数来说，$(c,1)$平均离最佳逼近甚远，但$(c,1)$平均的一个简单修改，即所谓De la Vallée－Poussin求和，或称延迟的算术平均，却基本能达到最佳逼近.

定理(3.5) 令

$$\tau_n(f,x)=2\sigma_{2n-1}(f,x)-\sigma_{n-1}(f,x)=\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}S_k(f,x). \tag{5}$$

则我们有

$$\|\tau_n(f,x)-f(x)\|_\infty\leqslant 4E_n(f),\quad \forall f\in C. \tag{6}$$

证明 设 T 是f的n阶最佳逼近多项式. 有

$$f(x)=T(x)+R(x),$$

其中 $\|R(x)\|_\infty\leqslant E_n(f)$. 我们如前用$S_k(f,x)$表示$f$的Fourier级数的部分和，$\sigma_k(f,x)$表示$(c,1)$和. 则当$k\geqslant n$，有

$$S_k(f,x)=T(x)+S_k(R,x),$$

从而

$$\frac{1}{m}\sum_{k=n}^{n+m-1} S_k(f,x)=T(x)+\frac{1}{m}\sum_{k=n}^{n+m-1} S_k(R,x).$$

注意到 $l\sigma_{l-1}(f,x)=\sum\limits_{k=0}^{l-1} S_k(f,x)$，我们得

$$\left(1+\frac{n}{m}\right)\sigma_{n+m-1}(f,x)-\frac{n}{m}\sigma_{n-1}(f,x)$$

$$=T(x)+\left(1+\frac{n}{m}\right)\sigma_{n+m-1}(R,x)-\frac{n}{m}\sigma_{n-1}(R,x).$$

已知，当 $1\leqslant p\leqslant\infty$ 时映射 $f\to\sigma_k(f)$ 是 L^p 有界的，且其界为 1（因为 $\|K_n\|_1=1$），故 $\|\sigma_l(R,x)\|_\infty\leqslant\|R\|_\infty$，从而

$$\left\|\left(1+\frac{n}{m}\right)\sigma_{n+m-1}(f,x)-\frac{n}{m}\sigma_{n-1}(f,x)-T(x)\right\|_\infty$$

$$\leqslant\left(1+\frac{2n}{m}\right)E_n(f).$$

由 $T(x)=f(x)-R(x)$ 以及 $\|R(x)\|_\infty\leqslant E_n(f)$，知

$$\left\|f(x)-\left(1+\frac{n}{m}\right)\sigma_{n+m-1}(f,x)+\frac{n}{m}\sigma_{n-1}(f,x)\right\|_\infty$$

$$\leqslant 2\left(1+\frac{n}{m}\right)E_n(f).$$

取 $m=n$，便得到 (6)．证完.

值得指出的是，τ_n 作为三角多项式，它的阶是 $2n$ 而不是 n．下面我们要应用 τ_m 的如下积分表示

$$\tau_m(f,x)=\frac{1}{\pi m}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\frac{h(mt)}{t^2}\,dt, \tag{7}$$

其中

$$h(t)=\cos t-\cos 2t. \tag{8}$$

我们不准备详细证明此式，只想形式地推导一下．事实上，根据亚纯函数的展开

$$\frac{1}{\sin^2 z}=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-n\pi)^2}, \tag{9}$$

我们有(注意式(5)，以及等式

$$\frac{1}{m}\sum_{k=m}^{2m-1}\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}=\frac{h(mt)}{2\sin^2\frac{t}{2}}\ )$$

$$\begin{aligned}\tau_m(f,x)&=\frac{1}{2\pi m}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\frac{h(mt)}{2\sin^2\frac{t}{2}}dt\\&=\frac{1}{2\pi m}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)h(mt)\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{(t-2n\pi)^2}dt\\&=\frac{1}{\pi m}\sum_{-\infty}^{\infty}\int_{(2n-1)\pi}^{(2n+1)\pi}f(x+t)h(mt)\frac{dt}{t^2}\\&=\frac{1}{\pi m}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x+t)h(mt)}{t^2}dt.\end{aligned}$$

其中我们用到了$f(x)$，$h(mx)$的2π 周期性．这样得到了(7)．由(7)，我们得到

$$\begin{aligned}&\tau_m(f,x)-f(x)\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(f\left(x+\frac{t}{m}\right)+f\left(x-\frac{t}{m}\right)-2f(x)\right)\frac{h(t)}{t^2}dt.\end{aligned} \tag{10}$$

这里我们用到初等事实

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt=\frac{1}{2}\pi, \quad \cos t-\cos 2t=2\left(\sin^2 t-\sin^2\frac{t}{2}\right).$$

记

$$H_0(t)=\frac{h(t)}{t^2}, \quad H_i(t)=\int_t^{\infty}H_{i-1}(y)dy, \quad i=1,2,\cdots. \tag{11}$$

我们来证明:

(i) $H_i(t)=O\left(\frac{1}{t^2}\right)$, 当 $t\to\infty$. 因此定义 H_i 的积分是绝对收敛的.

(ii) $H_3(0)=H_5(0)=\cdots=H_{2i+1}(0)=0$.

事实上, 若记 $h_i(t)$为$h(t)$的第 i 次周期的且没有常数项的原函数, 即

$$h_i(t)=\pm(\cos t-2^{-i}\cos 2t)\text{或}\pm(\sin t-2^{-i}\sin 2t),$$

则我们有(应用分部积分)

$$H_1(t)=\int_t^{\infty}\frac{h(y)}{y^2}dy=-\frac{h_1(t)}{t^2}-2!\frac{h_1(t)}{t^3}-\cdots-p!\frac{h_p(t)}{t^{p+1}}$$

$$+(p+1)!\int_t^{\infty}\frac{h_p(y)}{y^{p+2}}dy.$$

它显然推出 $H_1(t)=O(t^{-2})$, 当 $t\to\infty$ 时. 再一次积分, 类似估计就可得 $H_2(t)=O(t^{-2})$. 继续下去便证明了(i).

为证(ii), 利用如下两个初等的积分等式.

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}H_0(t)dt=1, \quad \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\cos\frac{t}{m}H_0(t)dt=1, \quad m\geqslant 1. \tag{12}$$

它们可直接从式(7)分别应用于$f(x)\equiv 1$与$f(x)=\cos x$，然后令$x=0$而得到．分部积分式(12)的第二个式子，

$$1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\cos\frac{t}{m}\,H_0(t)dt$$

$$=-\frac{2}{\pi}H_1(t)\cos\frac{t}{m}\Big|_0^{\infty}-\frac{2}{\pi m}\int_0^{\infty}\sin\frac{t}{m}\,H_1(t)dt$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}H_0(t)dt+\frac{2}{\pi m}H_2(t)\sin\frac{t}{m}\Big|_0^{\infty}-\frac{2}{\pi m^2}\int_0^{\infty}\cos\frac{t}{m}\,H_2(t)dt$$

$$=1-\frac{2}{\pi m^2}\int_0^{\infty}\cos\frac{t}{m}\,H_2(t)dt.$$

因此

$$\int_0^{\infty}\cos\frac{t}{m}\,H_2(t)dt=0\,.$$

令$m\to\infty$，由于$H_2(t)$绝对可积，用控制收敛定理便得出$\int_0^{\infty}H_2(t)dt=0$．继续分部积分，并注意$H_{2i}(x)$在$x=0$邻域有界，因而$H_{2i}(t)$绝对可积，可得$\int_0^{\infty}H_{2i}(t)dt=0$．

现在我们可以得到Jackson正定理了．

定理(3.6) (Jackson)设f是k次连续可微，$\omega_k(\delta)$为$f^{(k)}$的连续模，即$\omega_k(\delta)=\omega_{f^{(k)}}(\delta)$．则

$$E_n(f)\leqslant cn^{-k}\omega_k\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{13}$$

特别地，当$f^{(k)}\in\Lambda_\alpha$，$0<\alpha<1$时，$E_n(f)\leqslant cn^{-k-\alpha}$. 进一步，对应于$\alpha=1$的情形，若$f^{(k)}\in\Lambda_*$，就有$E_n(f)\leqslant cn^{-k-1}$.

证明 对(10)实行分部积分得

$$
\begin{aligned}
&\tau_m(f,x)-f(x)\\
&=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left(f(x+\frac{t}{m})+f(x-\frac{t}{m})-2f(x)\right)H_0(t)dt\\
&=-\frac{1}{\pi}H_1(t)\left(f(x+\frac{t}{m})+f(x-\frac{t}{m})-2f(x)\right)\Bigg|_0^\infty\\
&\quad+\frac{1}{\pi m}\int_0^\infty\left(f'(x+\frac{t}{m})-f'(x-\frac{t}{m})\right)H_1(t)dt\\
&=-\frac{1}{\pi}H_2(t)\left(f'(x+\frac{t}{m})-f'(x-\frac{t}{m})\right)\Bigg|_0^\infty\\
&\quad+\frac{1}{\pi m^2}\int_0^\infty\left(f''(x+\frac{t}{m})+f''(x-\frac{t}{m})\right)H_2(t)dt\\
&=-\frac{1}{\pi}H_3(t)\left(f''(x+\frac{t}{m})+f''(x-\frac{t}{m})\right)\Bigg|_0^\infty\\
&\quad+\frac{1}{\pi m^3}\int_0^\infty\left(f'''(x+\frac{t}{m})-f'''(x-\frac{t}{m})\right)H_3(t)dt.
\end{aligned}
$$

如此继续可到达所希望的导数阶. 这里所有被积出项都为0，因为在$t=\infty$处$H_i(\infty)=0$，而$f^{(i+1)}$有界；在$t=0$处$H_{2i+1}(0)=0$或$\left[f^{(2i+1)}\left(x+\frac{t}{m}\right)-f^{(2i+1)}\left(x-\frac{t}{m}\right)\right]\Bigg|_{t=0}=0$. 由此，当$|f^{(k)}|\leqslant M$时，有$\|\tau_m(f,x)-f(x)\|_\infty\leqslant c_k m^{-k}M$，当然更有$E_{2m-1}(f)$，

从而 $E_{2m}(f)$ 被 $c_k m^{-k} M$ 控制.

设 f 为定理中所设. 对任意 $\delta>0$, 令 $f(x)=f_\delta(x)+g(x)$, 其中

$$f_\delta(x)=\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta} f(x+t)dt=\frac{1}{2\delta}\int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t)dt$$

$$=\frac{F(x+\delta)-F(x-\delta)}{2\delta}, \tag{14}$$

其中 F 是 f 的积分. 注意 f_δ 是 $k+1$ 次连续可微的, 且

$$\left|f_\delta^{(k+1)}(x)\right|=\left|\frac{f^{(k)}(x+\delta)-f^{(k)}(x-\delta)}{2\delta}\right|\leqslant\delta^{-1}\omega_k(\delta).$$

此外, 显然

$$|g(x)|=|f(x)-f_\delta(x)|=\left|\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta}(f(x)-f(x+t))dt\right|\leqslant\omega_f(\delta).$$

$$|g^{(k)}(x)|=|f^{(k)}(x)-f_\delta^{(k)}(x)|\leqslant\omega_k(\delta).$$

由刚证明的, 得 (记 $\widetilde{E}_n(f)=\|\tau_n(f)-f\|_\infty$)

$$E_{2n}(f)\leqslant\widetilde{E}_n(f_\delta)+\widetilde{E}_n(g)\leqslant c_k n^{-k-1}\delta^{-1}\omega_k(\delta)+c_k n^{-k}\omega_k(\delta).$$

令 $\delta=\dfrac{\pi}{n}$, 即得 (13). 剩下要证的是由 $f^{(k)}\in\Lambda_*$, 可推出 $E_n(f)\leqslant c_k n^{-k-1}$. 定义 $f_{\delta\delta}$ 为 f_δ 的再一次平均, 即

$$f_{\delta\delta}(x)=\frac{1}{4\delta^2}\int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta} f(x+u+v)dudv$$

$$= \frac{1}{4\delta^2}\int_{-2\delta}^{2\delta} f(x+t)(2\delta-|t|)dt$$

$$= \frac{1}{4\delta^2}\int_0^{2\delta} (f(x+t)+f(x-t))(2\delta-t)dt.$$

仍令 $f=f_{\delta\delta}+g$，有（记 $f^{(k)}$ 的 Zygmund 类中的模为 M）

$$|f_{\delta\delta}^{(k+2)}(x)| = \left|\frac{f_\delta^{(k+1)}(x+\delta)-f_\delta^{(k+1)}(x-\delta)}{2\delta}\right|$$

$$= \left|\frac{f^{(k)}(x+2\delta)+f^{(k)}(x-2\delta)-2f^{(k)}(x)}{4\delta^2}\right| \leqslant \frac{M}{2\delta}.$$

$$|g^{(k)}(x)| = |f_{\delta\delta}^{(k)}(x)-f^{(k)}(x)|$$

$$= \frac{1}{4\delta^2}\left|\int_0^{2\delta} (f^{(k)}(x+t)+f^{(k)}(x-t)-2f^{(k)}(x))(2\delta-t)dt\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{4\delta^2}\int_0^{2\delta} Mt(2\delta-t)dt \leqslant \frac{1}{2}M\delta.$$

类似前面的推理，令 $\delta=\frac{\pi}{n}$，便得

$$E_{2n}(f) \leqslant \widetilde{E}_n(f_{\delta\delta}) + \widetilde{E}_n(g) \leqslant c_k n^{-k-2}\delta^{-1}M + c_k n^{-k}M\delta \leqslant cMn^{-k-1}$$

定理获证.

现在来证明定理(3.6)的逆定理，它由 f 的最佳逼近阶推断出 f 自身的光滑程度. 为此，需要下述 Bernstein 不等式.

引理(3.7) (Bernstein) 设 $T(x)$ 是 n 次三角多项式，则

$$\|T'(x)\|_\infty \leqslant 2n\|T(x)\|_\infty. \tag{15}$$

证明 我们有

$$T(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}T(t)D_n(x-t)dt,$$

$$T'(x)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}T(x+t)D_n'(t)dt.$$

这里 $D_n(t)$是Dirichlet 核. 令 $Q(t)=-\sum_{k=1}^{n-1}\sin(2n-k)t$.则

$$T'(x)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}T(x+t)(D_n'(t)+Q(t))dt$$

$$=\frac{2n}{\pi}\int_0^{2\pi}T(x+t)\sin ntK_{n-1}(t)dt.$$

其中 $K_{n-1}(t)$是 $n-1$ 阶 Fejér 核. 由此推出(15)是显然的.

定理(3.8) (Bernstein) 设 f 使 $E_n(f)\leqslant c_k n^{-k-\alpha}$, $0<\alpha\leqslant 1$. 则 f 是 k 次连续可微的, 且当 $0<\alpha<1$ 时, $f^{(k)}\in\Lambda_\alpha$; 当 $\alpha=1$, $f^{(k)}\in\Lambda_*$, 且 $\omega_k(\delta)=O(\delta\log\delta^{-1})$.

证明 设 T_n 是 f 的 n 次最佳逼近三角多项式. 则

$$f(x)=T_1+\sum_{n=1}^{\infty}(T_{2^n}-T_{2^{n-1}})=T_1+\sum_{n=1}^{?}u_n, \tag{16}$$

其中 u_n 是 2^n 次三角多项式, 且 $|u_n(x)|\leqslant 2E_{2^{n-1}}(f)=O(2^{-n(k+\alpha)})$. 用引理(3.7), 当 $j\leqslant k$时, 还有$|u_n^j(x)|\leqslant O(2^{-n(k-j+\alpha)})$. 对(16)逐项微分 j 次, 所得级数绝对一致收敛, 说明 $f^{(k)}$存在且连续. 记 $g=f-T_1$, 充分地只需对 g 证明定理的结论. 设 $0<h\leqslant\frac{1}{2}$, N 是满足 $2^{-N}<h\leqslant 2^{-(N-1)}$的正整数. 我们有

$$g^{(k)}(x+h)-g^{(k)}(x)=\sum_1^{\infty}(u_n^{(k)}(x+h)-u_n^{(k)}(x))=\sum_1^N+\sum_{N+1}^{\infty}$$
$$=P+Q.$$

注意u_n是2^n次多项式，$\|u_n\|_\infty=O(2^{-n(k+\alpha)})$，我们有

$$|P|\leqslant h\sum_1^N\|u_n^{(k+1)}\|_\infty\leqslant h\sum_1^N(2^n)^{k+1}O(2^{-n(k+\alpha)})$$

$$=\begin{cases}O(h^\alpha),\text{ 当 }\alpha<1,\\ O(h\log h^{-1}),\text{ 当 }\alpha=1.\end{cases}$$

而对Q，不论是否$\alpha=1$，均有

$$|Q|\leqslant\sum_{N+1}^\infty 2\|u_n^{(k)}\|_\infty\leqslant\sum_{N+1}^\infty 2^{nk}O(2^{-n(k+\alpha)})=O(2^{-N\alpha})=O(h^\alpha).$$

剩下要证明当$\alpha=1$时，$f^{(k)}\in\Lambda_*$，或等价地$g^{(k)}\in\Lambda_*$。取h，N如上，有

$$g^{(k)}(x+h)+g^{(k)}(x-h)-2g^{(k)}(x)$$

$$=\sum_1^\infty(u_n^{(k)}(x+h)+u_n^{(k)}(x-h)-2u_n^{(k)}(x))$$

$$=\sum_1^N+\sum_{N+1}^\infty.$$

第二项同前一样，而对第一项有

$$\left|\sum_1^N\right|\leqslant h^2\sum_1^N\|u_n^{(k+2)}\|_\infty\leqslant h^2\sum_1^N 2^{n(k+2)}O(2^{-n(k+1)})=O(h^2 2^N)=O(h).$$

这样$g^{(k)}\in\Lambda_*$，从而$f^{(k)}\in\Lambda_*$。定理获证。

特别当$k=0$时，我们用最佳逼近刻划了Lipschitz函数类：当$0<\alpha<1$时，$f\in\Lambda_\alpha$当且仅当$E_n(f)=O(n^{-\alpha})$；$f\in\Lambda_*$当且仅当$E_n(f)=O(n^{-1})$。

§ 2.4　L^2的Fourier分析

先看Fourier级数情形。由于三角函数系$\{e^{inx}\}_{-\infty}^{\infty}$构成了Hilbert空间$L^2(\mathbb{T})$的一组标准正交基，故Fourier级数的$L^2$理

论有完整而简单的结果. $\{e^{inx}\}_{-\infty}^{\infty}$ 的标准正交性是显然的.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}e^{-imx}\,dx=\delta_{n,m},\quad \forall n,m\in\mathbb{Z}. \tag{1}$$

它之所以构成一组基是由 Fourier 变换的唯一性定理, 即

$$f\in L^2,\ f\perp e^{inx},\qquad \forall n\Rightarrow f\equiv 0. \tag{2}$$

因此我们有

定理(4.1) 设 $f\in L^2, f\sim\sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$, S_N 为其部分和, 则

$$\|f-S_N\|_2=\inf_{T\in\mathscr{T}_N}\|f-T\|_2,$$

其中 $\mathscr{T}_N$ 是 N 阶三角多项式集合.

证明 注意, $\mathscr{T}_N$ 是 $\{e^{inx}\}_{-N}^{N}$ 生成的 $L^2(\mathbb{T})$ 的子空间, S_N 为 f 到 $\mathscr{T}_N$ 上的正交投影, 由几何的考虑即知 S_N 是 f 在 $\mathscr{T}_N$ 上的最佳逼近元. 这个事实也可从下面的等式得到: 设 $T=\sum\limits_{-N}^{N}a_n e^{inx}$, 则

$$\|f-T\|_2^2=\|f\|_2^2+\sum_{-N}^{N}|a_n-c_n|^2-\sum_{-N}^{N}|c_n|^2. \tag{3}$$

定理获证.

定理(4.2) (Bessel)如下 Bessel 不等式成立

$$\left(\sum_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\|f\|_2,\ \forall f\in L^2. \tag{4}$$

证明 在(3)中令 $a_n=c_n$, 则得

$$\|f\|_2^2=\sum_{-N}^{N}|\hat{f}(n)|^2+\|f-S_N\|_2^2$$

令 $N\to\infty$ 即得. 证毕.

定理(4.1), (4.2), 还只用到$\{e^{inx}\}_{-\infty}^{\infty}$ 的正交性, 并没有用到它的基性质. 但下一个定理要用到.

定理(4.3) (Parseval) 我们有 Parseval 等式

$$\left(\sum_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\|f\|_2, \qquad \forall f\in L^2, \tag{5}$$

以及它的极化形式

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{g}(x)dx, \forall f,g\in L^2. \tag{6}$$

证明 设$f\in L^2$, 则 Bessel 不等式说明 $\{\hat{f}(n)\}_{-\infty}^{\infty}\in l^2$, 且$\{S_N\cdot(f,x)\}_0^{\infty}$ 构成了 L^2 的 Cauchy 序列. 由L^2 的完备性知它有极限 $g\in L^2$, 且 $\hat{g}(n)=\hat{f}(n)$, $\forall n$, 并且 $\|g\|_2=\left(\sum_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. 由 Fourier 变换唯一性定理知 $g=f$. 此外, 设 $f,g\in L^2$, 则

$$\|f+g\|_2^2=\|f\|_2^2+\|g\|_2^2+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f\overline{g}+\overline{f}g)dx,$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(n)+\hat{g}(n)|^2=\sum_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(n)|^2+\sum_{-\infty}^{\infty}|\hat{g}(n)|^2+\sum_{-\infty}^{\infty}(\hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}+\overline{\hat{f}(n)}\hat{g}(n)).$$

因此

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\overline{g}dx\right)=\mathrm{Re}\left(\sum_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}\right).$$

考虑$f+ig$，得

$$\|f+ig\|_2^2=\|f\|_2^2+\|g\|_2^2+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(ig\bar{f}-i\bar{g}f)dx,$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}+i\hat{g}|^2=\sum_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}|^2+\sum_{-\infty}^{\infty}|\hat{g}|^2+i\sum_{-\infty}^{\infty}(\hat{g}\bar{\hat{f}}-\bar{\hat{g}}\hat{f}).$$

故

$$\operatorname{Im}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\bar{g}dx\right)=\operatorname{Im}\left(\sum_{-\infty}^{\infty}\hat{f}\bar{\hat{g}}\right).$$

这完成了定理的证明.

利用$(c,1)$平均在L^2中的可求和结果也可以得到Parseval等式，因为

$$\|f\|_2^2-\sum_{-N}^{N}|\hat{f}(n)|^2=\|f-S_N\|_2^2\leqslant\|f-\sigma_N\|_2^2\to 0.$$

下面的Riesz－Fisher定理说明Fourier变换把L^2映到l^2上.

定理（4.4） （Riesz－Fisher）$\forall\{c_n\}_{-\infty}^{\infty}\in l^2$，存在$f\in L^2$，使$f\sim\sum_{-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$.

证明 令$S_N=\sum_{-N}^{N}c_ne^{inx}$. 则$\{S_N\}$是$L^2$中Cauchy序列. 故$\{S_N\}$在$L^2$中有极限$f$，且

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S_N(x)e^{-inx}dx=c_n,\forall n.$$

定理证毕.

综合上述结果，我们得到

定理（4.5） Fourier变换是$L^2(\mathbb{T})$到l^2上的等距同构算子，即酉算子.

在 L^p 空间中，只有 L^2 能用函数的 Fourier 变换的大小刻划 $\|f\|_2$. 对 $p\neq 2$ 的 L^p, 我们只有如下的 Hausdorff－Young 不等式: 对 $1\leqslant p<2$, 由 $f\in L^p$ 可推出 $\{\hat{f}(n)\}_{-\infty}^{\infty}\in l^{p'}$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$, 且它的 $l^{p'}$ 模可被 f 的 L^p 模控制. 另外，若 $\{c_n\}_{-\infty}^{\infty}\in l^p$, 则 $\sum\limits_{-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}\in L^{p'}$ 且其 $L^{p'}$ 模可被 $\{c_n\}$ 的 l^p 模控制. 这些是我们将在第三章介绍的算子内插的结果(见 §3.5). 我们不能指望当交换 p,p' 位置时有任何肯定的结果. 例如存在连续函数 f 使得 $\sum\limits_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(n)|^{2-\varepsilon}=\infty$, 对任意 $\varepsilon>0$ 成立. 此外，若 $\sum\limits_{-\infty}^{\infty}|c_n|^2=\infty$ (它当然可以使 $\sum\limits_{-\infty}^{\infty}|c_n|^{2+\varepsilon}<\infty$, $\forall\,\varepsilon>0$), 则对几乎所有可能的 $\{\varepsilon_n\}_{-\infty}^{\infty}$ 的选择，其中 $\varepsilon_n=\pm 1$, $\sum\limits_{-\infty}^{\infty}\varepsilon_nc_ne^{inx}$ 不是任何函数的 Fourier 级数. 这说明，一方面，性质好的函数(如连续函数)，其 Fourier 系数，按大小而言，也可以只满足 l^2 可和性; 另一方面，存在序列，其性质只比 l^2 可和性稍差一点，而以它们为系数构成的三角级数性质却很坏. 这被认为是 Fourier 级数理论的缺陷. 近年出现的所谓小波分析，它是 Fourier 分析的一个新发展，可以弥补这一缺陷. 它对很多熟知的函数空间，仅由函数的小波系数的大小便能刻划该函数在这些空间的范数. 就 Fourier 级数理论而言，当然也可发展一些理论来弥补或减轻这一缺陷. 例如所谓 Littlewood－Paley 理论，便能给出某个函数是否属于 L^p 的经由 Fourier 展开而作的判别法则: $f\in L^p$, $1<p<\infty$, 当且仅当它的 Littlewood－Paley g 函数属于 L^p. 我们将在 §3.7 讨论这一问题.

现在讨论 Fourier 积分的 L^2－理论. 直到现在为止，我们只对 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 与 $M(\mathbb{R}^n)$ 中的元素定义了 Fourier 变换. Fourier 变换能否对 L^p, $1<p<\infty$ 中的函数定义呢? $p=2$ 是最简单的情形，

我们现在对它给以肯定的回答．稍微不同于 Fourier 级数情形，此时$\{e^{ix\cdot\xi}\}_{\xi\in\mathbb{R}^n}$已经不具有通常意义下的正交性了，因此方法要适当修改．

定理(4.6)　$\forall f\in L^1\cap L^2$，有$\|f\|_2=\|\hat{f}\|_2$．

证明　设$f\in L^1\cap L^2$，记$f^*(x)=\overline{f(-x)}$．令

$$g(x)=f*f^*(x)=a_0\int_{\mathbb{R}^n}f(x+y)\overline{f(y)}dy.$$

由关于卷积的 Young 不等式知$g\in L^1$．此外卷积 $f*g$ 还是$(L^p, L^{p'})$到 C_0 内的有界算子，其中$1<p<\infty$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$．事实上，设 $B_1=B(0,r_1)$，$B_2=B(0,r_2)$使得

$$\left(\int_{B_1^c}|g|^{p'}dy\right)^{\frac{1}{p'}}\leqslant(2\|f\|_p)^{-1}\varepsilon,$$

$$\left(\int_{B_2^c}|f|^{p}dy\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant(2\|g\|_{p'})^{-1}\varepsilon.$$

再令 $B_3=B(0,r_3)$，其中$r_3\geqslant r_1+r_2$，则

$$\forall x\in B_3^c,\ \forall y\in B_1,\ 有\ x-y\in B_2^c.$$

从而当 $x\in B_3^c$ 时，有

$$\left|\frac{1}{a_0}f*g(x)\right|=\left|\left(\int_{B_1^c}+\int_{B_1}\right)f(x-y)g(y)dy\right|$$

$$\leqslant\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{B_1^c}|g|^{p'}dy\right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$+\left(\int_{B_1}|f(x-y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|g|^{p'}dy\right)^{\frac{1}{p'}}\leqslant\varepsilon.$$

这证明了 $\lim\limits_{|x|\to\infty}(f*g)(x)=0$. 而 $f*g\in C$ 则是显然的. 应用到此处的 $g=f*f^*$,由 $\hat{g}=|\hat{f}|^2$,以及 Abel－Poisson 可和性得

$$a_0\int_{\mathbb{R}^n}|f|^2\,dy=g(0)=\lim_{t\to 0}a_0\int_{\mathbb{R}^n}e^{-t|\xi|}|\hat{f}(\xi)|^2d\xi .$$

既然 $|\hat{f}|^2\geq 0$, Fatou 引理给出 $\hat{f}\in L^2$, 且

$$a_0\int_{\mathbb{R}^n}|f|^2dy=a_0\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{f}|^2\,d\xi .$$

这就证明了定理.

既然 $L^1\cap L^2$ 在 L^2 中稠密, 故 Fourier 变换可以唯一地扩充为整个 L^2 上的等距算子. 如同对 L^1 一样, 仍记这个算子为 $\mathscr{F}$ 或 $\wedge$. 对$f\in L^2$, $\mathscr{F}f$ 可以定义为 $\mathscr{F}f_n$ 在 L^2 中的极限, 其中 $\{f_n\}$是任何序列, 满足 $f_n\in L^1\cap L^2, f_n\to f(L^2)$. 特别地可取 $f_n=f\chi_{\{|x|\leq n\}}$.

定理(4.7) $\mathscr{F}$ 是映$L^2(\mathbb{R}^n)$到 $L^2(\mathbb{R}^n)$上的, 即值域是整个 $L^2(\mathbb{R}^n)$.

证明 由 $\mathscr{F}$ 等距, 知其值域$(L^2)^\wedge$ 是闭的. 如果$(L^2)^\wedge\neq L^2$, 则存在非零 $g\in L^2$, 使 $g\perp(L^2)^\wedge$. 特别,

$$\lim_{n\to\infty}\int g_n\hat{f}\,dx=\int g\hat{f}\,dx=0,\quad \forall f\in L^1\cap L^2,$$

其中 $\{g_n\}\subset L^1\cap L^2$, $g_n\to g$ 在 L^2 中. 但

$$\lim_{n\to\infty}\int g_n\hat{f}\,dx=\lim_{n\to\infty}\int \hat{g}_n f\,dx=\int \hat{g} f\,dx .$$

这里用到 $\hat{g}_n\to\hat{g}$ 在 L^2 中这一事实. 上式为0说明 $\hat{g}\perp L^1\cap L^2$, 因此$\hat{g}=0$. 从而 $\|g\|_2=\|\hat{g}\|_2=0$. 这与 g 非零矛盾. 定理证毕.

Hilbert 空间上的一个等距线性且映满值域的算子一定是一个酉算子. (所谓酉算子是Hilbert 空间上满足 $T^*=T^{-1}$ 的线性算

子，其中 T^* 表示共轭算子，T^{-1} 是逆算子.）这是因为

$$\langle x,y\rangle=\langle Tx,Ty\rangle=\langle x,T^*Ty\rangle,\quad \forall\, x,y .$$

这推出 $T^*T=I$. 既然 T^{-1} 存在，这进一步推出 $T^*=T^*TT^{-1}=T^{-1}$. 这样，Fourier 变换算子 $\mathscr{F}$ 的逆算子 $\mathscr{F}^{-1}$ 就是 $\mathscr{F}^*$. 进一步需要刻划 $\mathscr{F}^{-1}$ 是什么. 我们在 Fourier 逆转公式的讨论中已指出 $\mathscr{F}^{-1}$ 就是 Fourier 逆变换 $\vee$

$$\vee:\ g\to \check{g},\ \check{g}(x)=a_0\int_{\mathbb{R}^n} g(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi . \tag{7}$$

现在在 L^2 情况我们证明这个事实.

定理（4.8） 我们有 $\mathscr{F}^{-1}=\vee$，其中 $\vee$ 由式(7)首先对 $g\in L^1\cap L^2$ 定义，然后通过极限对 $g\in L^2$ 定义.

证明 只需证明 $\mathscr{F}^*=\vee$. $\forall f,g\in L^1\cap L^2$，有

$$\langle \hat{f},g\rangle=a_0\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(x)\overline{g(x)}dx=a_0^2\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}f(x)e^{-ix\cdot\xi}dx\,\overline{g(\xi)}d\xi$$

$$=a_0^2\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}g(\xi)\,e^{ix\cdot\xi}\,d\xi\right)^- f(x)dx=\langle f,\check{g}\rangle .$$

现设 $f,g\in L^2$. 任取 $\{f_n\}$，$\{g_n\}\subset L^1\cap L^2$，使 $f_n\to f$，$g_n\to g$（在 L^2 中）. 则 $\hat{f}_n\to\hat{f}$. 完全同样的讨论知也有 $\check{g}_n\to\check{g}$. 这样

$$\langle \hat{f},g\rangle=\lim_{n\to\infty}\langle \hat{f}_n,g_n\rangle=\lim_{n\to\infty}\langle f_n,\check{g}_n\rangle=\langle f,\check{g}\rangle .$$

这证明了 $\mathscr{F}^*=\vee$. 定理获证.

注 Fourier 变换 $\wedge$ 与 Fourier 逆变换 $\vee$ 互为共轭这一事实的建立只用到 $\wedge$ 与 $\vee$ 的定义以及 L^2 有界性，如定理（4.8）的证明所示. 但要断言 $\wedge$ 的逆算子是 $\vee$，这却用到了 $\wedge$ 的等距性. 而

这要用到某些求和核中所含常数的精确值,例如我们对 Gauss－Weierstrass 核所作的那样. 当然我们也可以从 Poisson 核出发,但需要先证明 $a_0\int_{\mathbb{R}^n} P_t(\xi)d\xi=1$,其中

$$P_t(\xi)=\frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(\frac{n+1}{2})\frac{t}{(t^2+|\xi|^2)^{\frac{n+1}{2}}}\ .$$

把上述结果综合起来,我们便得到 L^2 理论中最重要的 Plancherel 定理.

定理(4.9) (Plancherel) Fourier变换可以扩充为 L^2 上的酉算子. 其逆就是 Fourier 逆变换 $\vee$.

作为它的推论的 Parseval 关系有如下形式.

定理(4.10) $\forall f,g\in L^2$, 我们有

$$\int \hat{f}g\,dx=\int f\hat{g}\,dx\ , \tag{8}$$

$$\int \hat{f}\overline{g}\,dx=\int f(\overset{\vee}{g})^{-}dx\ , \tag{9}$$

$$\int f\overline{g}\,dx=\int \hat{f}\overline{\hat{g}}\ dx\ . \tag{10}$$

现在完成对 $1\leqslant p\leqslant 2$ 的 L^p 中函数的 Fourier 变换的定义. 我们要用到将在 §3.5 介绍的一个算子内插定理, 即所谓 Riesz－Thorin 定理(定理5.2). 它说, 设 T 是定义在测度空间 (X,μ) 上的简单函数类上的线性算子, 取值于 (Y,v) 上的可测函数空间内. 如果 T 是 (L^{p_i},L^{q_i}) 有界的(即 $\|Tf\|_{q_i}\leqslant M_i\|f\|_{p_i}$), 其中 $1\leqslant p_i,q_i\leqslant\infty$, $i=1,2$, 其界为 M_i.则对 $0\leqslant\theta\leqslant 1$, $\frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_1}+\frac{\theta}{p_2}$, $\frac{1}{q}$

$= \dfrac{1-\theta}{q_1} + \dfrac{\theta}{q_2}$，$T$ 也是(L^p, L^q)有界的，并且

$$\left(\int_Y |Tf|^q dv\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant M_1^{1-\theta} M_2^{\theta} \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \forall \text{简单函数} f. \tag{11}$$

考虑 Fourier 变换算子. 它是 $(L^1(\mathbb{R}^n), L^\infty(\mathbb{R}^n))$与$(L^2(\mathbb{R}^n) L^2(\mathbb{R}^n))$有界的，其界均为 1. 故对 $1 \leqslant p \leqslant 2$，有

$$\left(a_0 \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}|^{p'} d\xi\right)^{\frac{1}{p'}} \leqslant \left(a_0 \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \ \forall \text{简单函数 } f. \tag{12}$$

对一般 $f \in L^p$，设$\{f_n\}$是收敛于 f 的简单函数列. 定义 $\hat{f} = \lim\limits_n \hat{f}_n$ ($L^{p'}$中的极限)，它仍满足 (12). 这就是所谓 Hausdorff－Young 不等式. 这样，当 $1 \leqslant p \leqslant 2$ 时，我们对 L^p 的函数定义了 Fourier 变换. 当 $p > 2$ 时，情况比较复杂，留到以后再讲. 关于 L^p 中的 Fourier 积分理论，本节中我们还叙述一个简单事实. 在后面两节再回到这个课题.

两个函数的卷积的 Fourier 变换等于两个函数的 Fourier 变换的乘积这一事实在 L^p 领域也成立.

定理 (4.11) 设 $f \in L^1$，$g \in L^p$，$1 \leqslant p \leqslant 2$. 则

$$(f * g)^{\wedge}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi), \quad \text{a.e. 成立}. \tag{13}$$

证明 设 $\{g_n\} \subset L^1 \cap L^p$，使 $g_n \to g\,(L^p)$. 这时 $\hat{g}_n \to \hat{g}\,(L^{p'})$. 既然 $\hat{f}$ 有界，故也有 $\hat{f}\hat{g}_n \to \hat{f}\hat{g}\,(L^{p'})$. 此外 $f * g_n \to f * g\,(L^p)$，故 $(f * g_n)^{\wedge} \to (f * g)^{\wedge}\,(L^{p'})$. 这样得

$$(f * g)^{\wedge}(\xi) = \lim_{n \to \infty} (f * g_n)^{\wedge}(\xi) = \lim_{n \to \infty} \hat{f}(\xi)\hat{g}_n(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).$$

定理获证.

下面我们讨论与复解析有关的 Paley－Wiener 定理. 为简单

起见，只考虑一维. 这个定理深刻揭示了复平面上解析函数的指数增长性与它在实轴上限制的 Fourier 变换的紧支集的大小之间的联系.

定义(4.12) 设 $F(z)$是定义在 $\mathbb{C}$ 上的整函数，$\sigma>0$，我们称它为是指数型 σ 的，如果对每个 $\varepsilon>0$，存在 A_ε，使得

$$|F(z)|\leqslant A_\varepsilon e^{(\sigma+\varepsilon)|z|},\quad \forall z\in\mathbb{C}. \tag{14}$$

下面的 Phragmen－Lindelof 定理，是极大模原理从有界域到无界域的一种推广，也是研究解析函数的增长性的一个重要工具.

引理(4.13) (Phragmen－Lindelof) 设 S 是 $\mathbb{C}$ 内由过原点的两条射线围成的角形域，夹角 $\dfrac{\pi}{\alpha}$. 设 $f(z)$在 S 上解析，在 $\overline{S}$ 连续，且

$$|f(z)|\leqslant Ae^{|z|^\beta},\ 0\leqslant\beta<\alpha,z\in S.$$

则只要在两条边界上 $|f(z)|\leqslant M$，便有 $|f(z)|\leqslant M$，$\forall z\in S$.

证明 无妨设两条射线的夹角以正实轴为角平分线. 考虑

$$F(z)=f(z)e^{-\varepsilon z^\gamma},\ \beta<\gamma<\alpha,\ \varepsilon>0.$$

对 $z\in S$，有

$$z^\gamma=|z|^\gamma e^{i\gamma\theta}=|z|^\gamma(\cos\gamma\theta+i\sin\gamma\theta),$$

$$\cos\gamma\theta\geqslant\cos\frac{\gamma}{\alpha}\ \frac{\pi}{2}>0,\ |\theta|\leqslant\frac{\pi}{2\alpha}.$$

这说明 $F(z)$在两条边界射线上与 $f(z)$有相同的界 M. 而在射线所夹的弧上，有

$$|F(z)|\leqslant Ae^{|z|^\beta-\varepsilon|z|^\gamma\cos\frac{\gamma}{\alpha}\frac{\pi}{2}}\to0,\ |z|\to\infty,$$

这是因为 $\varepsilon>0$ 是固定的，同时 $\beta<\gamma$. 由普通的极大模原理知，在

这两条射线所夹的，半径任意大的扇形上，从而在$\overline{S}$上，有$|F(Z)| \leqslant M$. 因此

$$|f(z)| \leqslant M e^{\varepsilon|z|^{\gamma}\cos\gamma\theta}, z=|z|e^{i\theta} \in \overline{S}.$$

令 $\varepsilon \to 0$ 即得断言. 证毕.

下面应用这个引理对指数型整函数由它的在实轴上的限制的控制推出它在整个平面上的控制.

引理(4.14) 设 $F(z)$是指数型σ 的整函数. 设在 x 轴上有 $|F(x)| \leqslant 1$, 则

$$|F(x+iy)| \leqslant e^{\sigma|y|}, \quad \forall z=x+iy. \tag{15}$$

证明 任取$\varepsilon>0$, 考虑 $F_\varepsilon(z)=F(z)e^{i(\sigma+\varepsilon)z}$, 先在 S 为第一象限情形应用引理(4.13). 显然有

$$|F_\varepsilon(x)| \leqslant 1, x \geqslant 0,$$
$$|F_\varepsilon(iy)|=|F(iy)|e^{-(\sigma+\varepsilon)y} \leqslant A_\varepsilon, y \geqslant 0.$$

此时 $\alpha=2$. 取 $\beta=\dfrac{3}{2}$, 有

$$|F_\varepsilon(z)| \leqslant A_\varepsilon e^{(\sigma+\varepsilon)(|z|-y)} \leqslant A_\varepsilon e^{2(\sigma+\varepsilon)|z|} \leqslant B_\varepsilon e^{|z|^{\frac{3}{2}}}.$$

这说明引理(4.13)中的条件满足, 故

$$|F_\varepsilon(z)| \leqslant \max(A_\varepsilon, 1)=A_\varepsilon, \forall z=x+iy, x \geqslant 0, y \geqslant 0. \tag{16}$$

当 $x \leqslant 0$ 时有相同估计. 故得

$$|F(z)| \leqslant A_\varepsilon e^{(\sigma+\varepsilon)y}, \forall z=x+iy, y \geqslant 0.$$

现在常数还没有达到所希望的程度. 取 S 为上半平面再应用引理于 $F_\varepsilon(z)$. 此时 $\alpha=1, \beta=0$ (见(16)), $M=1$. 故 $|F_\varepsilon(x+iy)| \leqslant 1$,

$y\geqslant 0$, 从而 $|F(x+iy)|\leqslant e^{(\sigma+\varepsilon)y}$, 令 $\varepsilon\to 0$, 即得 $y\geqslant 0$ 的估计, $y\leqslant 0$ 情形由考虑 $F(-z)$而得. 引理证毕.

上述点态估计有类似的积分估计.

引理(4.15) 设 $F(z)$是指数型 σ 的整函数, 且 $\left(\int_{-\infty}^{\infty}|F(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant 1$. 则

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}|F(x+iy)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant e^{\sigma|y|},\ \forall y. \tag{17}$$

证明 设 $\varphi(x)$连续有紧支集, $\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi|^2\,dx=1$. 考虑

$$G(z)=\int_{-\infty}^{\infty}F(z-t)\varphi(t)dt. \tag{18}$$

则 $G(z)$仍是指数型σ 的整函数, 且

$$|G(x)|\leqslant\|F(x)\|_2\|\varphi\|_2\leqslant 1,\quad\forall x.$$

故由引理(4.14)得

$$|G(x+iy)|=\left|\int_{-\infty}^{\infty}F(x+iy-t)\varphi(t)dt\right|\leqslant e^{\sigma|y|},\ \forall y.$$

对所有这样的 φ 取 sup 即得引理断言. 证毕.

现在我们进一步将指数型整函数的对 $\int_{-\infty}^{\infty}|F(x+iy)|^2\,dx$ 的控制与 $F(x)$ 的 Fourier 变换的支集大小联系起来.

引理(4.16) 设 $F(x+iy)$是带形 $\{z: |\mathrm{Im} z|<a\}$内的解析函数，$f_0=F|_{\mathbb{R}}$. 则下述断言等价:

$$(\mathrm{i}) \int_{-\infty}^{\infty}|F(x+iy)|^2 dx \leqslant c<\infty, \ \forall y, |y|<a, \tag{19}$$

$$(\mathrm{ii}) (f_0)^{\wedge}(\xi) e^{a|\xi|} \in L^2(\mathbb{R}). \tag{20}$$

证明 (ii)⇒(i). 设 $\hat{f}_0$ 满足(20). 令

$$F(x+iy)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_0(\xi) e^{i(x+iy)\xi} d\xi, \quad |y|<a. \tag{21}$$

由条件知这个积分绝对收敛，且在带形$\{z=x+iy: |y|<a\}$的任意紧子集上一致，而被积函数对每个固定的 ξ 是 z 的解析函数，故积分结果也是带形上的解析函数. 这个解析函数局限于 $y=0$ 与原来的 $F(x+iy)$局限于 $y=0$, 有相同的 Fourier 变换 $\hat{f}_0$, 故 这两个局限相同，从而这两个解析函数也相同(所以我们用了同一记号). 由 Plancherel 定理有

$$\int_{-\infty}^{\infty}|F(x+iy)|^2 dx=\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}_0(\xi) e^{-y\xi}|^2 d\xi$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}_0(\xi)|^2 e^{2a|\xi|} d\xi<+\infty, \quad \forall y, |y|<a.$$

(i)⇒(ii). 假设(19)成立. 记$f_y(x)=F(x+iy)$, 则 $\hat{f}_y(\xi)$ 在L^2 中存在. 假设$\hat{f}_0$ 充分好使(21)中右边积分可以定义, 则 $F(x+iy)$就由这个积分表示, 故$\hat{f}_y(\xi)=\hat{f}_0(\xi) e^{-y\xi}$, 从而由 Plancherel 定理有

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}_0(\xi) e^{-y\xi}|^2 d\xi=\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}_y(\xi)|^2 d\xi$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}|F(x+iy)|^2dx\leqslant c\,,\quad \forall\, y\,,|y|<a\,.$$

只考虑左边积分的 $\int_{-\infty}^{0}$ 与 $\int_{0}^{\infty}$ 部分，在其中分别令$y\to a$ 与 $y\to -a$，即得 (20)．现证明不对 $\hat{f}_0$ 作任何先验假定，也能得到 $\hat{f}_y(\xi)=\hat{f}_0(\xi)e^{-y\xi}$ 这个表示．考虑卷积

$$F_\lambda(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(z-t)K_\lambda(t)dt\,,\quad z=x+iy\,,\qquad (22)$$

其中 $K_\lambda(t)$是 $\mathbb{R}$ 上的 Fejér 核，即满足

$$\hat{K}_\lambda(\xi)=c\left(1-\frac{|\xi|}{\lambda}\right)^{+}=c\left(1-\frac{|\xi|}{\lambda}\right)\chi_{\{|\xi|\leqslant\lambda\}},\ \lambda>0\,,$$

的 $L^1(\mathbb{R})$中的函数(见 §2.2)．对任意固定的 z, $F(z-t)\in L^2$, $z=x+iy$, $|y|<a$，同时 $K_\lambda(t)\in L^2$(这因 $\hat{K}_\lambda\in L^2$)，故积分绝对收敛，且当 z 属于带形的任意紧集时，上述收敛是一致的．此外，被积函数对固定的 t 是 z 的解析函数．故 $F_\lambda(z)$解析，且

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}|F_\lambda(x+iy)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\|K_\lambda\|_1\left(\int_{-\infty}^{\infty}|F(x+iy)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant c,\qquad\qquad \forall\, y\,,|y|<a\,.$$

这说明 $F_\lambda(z)$满足 $F(z)$对应的条件，且还满足其他好性质．为验证这一点，记 $f_{\lambda,y}(x)=F_\lambda(x+iy)=f_y*K_\lambda(x)$．则

$$\hat{f}_{\lambda,y}(\xi)=\hat{f}_y(\xi)\hat{K}_\lambda(\xi)\,.\qquad (23)$$

这说明 $\hat{f}_{\lambda,y}$ 的支集含于 $\{\xi:|\xi|\leqslant\lambda\}$，特别，$\hat{f}_{\lambda,0}$ 也如此，故

$\hat{f}_{\lambda,0}(\xi)e^{a|\xi|}\in L^2$，从而由上面指出的，有

$$\hat{f}_{\lambda,y}(\xi)=\hat{f}_{\lambda,0}(\xi)e^{-y\xi}. \tag{24}$$

结合(23)与(24)，注意 $\hat{K}_\lambda(\xi)\neq 0$ 于 $\{\xi:|\xi|<\lambda\}$，这就推出 $\hat{f}_y(\xi)=\hat{f}_0(\xi)e^{-y\xi}$ 于 $\{\xi:|\xi|<\lambda\}$. 令 $\lambda\to\infty$，即完成引理的证明.

现在把带形区域换为半平面. 我们有

引理(4.17) 设 $F(x+iy)$ 是 $y>0$ 上的解析函数. 则下述断言等价.

(i) $$\int_{-\infty}^{\infty}|F(x+iy)|^2\,dx\leqslant c<\infty,\quad \forall y>0. \tag{25}$$

(ii) 存在 $\hat{f}_0\in L^2$，$\operatorname{supp}\hat{f}_0\subset[0,\infty)$，使

$$F(x+iy)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}\hat{f}_0(\xi)e^{i(x+iy)\xi}\,d\xi,\quad y>0. \tag{26}$$

证明 (ii)$\Rightarrow$(i)是 Plancherel 定理的结果.

(i)$\Rightarrow$(ii). 现在的麻烦是我们无法直接谈 $F(x+iy)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的局限，需要某种极限处理. 仍记 $f_y(x)=F(x+iy)$，则 $\hat{f}_y(\xi)$ 在 L^2 中存在. 我们先证 $\forall y_0>0$, $\operatorname{supp}\hat{f}_{y_0}(\xi)\subset[0,\infty)$（简称 $\hat{f}_{y_0}(\xi)$ 支于 $[0,\infty)$）. $F(x+iy)$ 在包含 $\operatorname{Im}z=y_0$ 的带形上解析. 如同上面引理中所作的那样，不妨先设 $\hat{f}_{y_0}(\xi)$ 有紧支集，另作一解析函数

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}_{y_0}(\xi)e^{i(x+iy)\xi}\,d\xi,\quad y>-y_0.$$

则它就是 $F(x+i(y+y_0))$. 这是因为 $F(x+iy_0)$ 的 Fourier 变换是 $\hat{f}_{y_0}(\xi)$，而上面积分定义的解析函数在 $y=0$ 的局限的 Fourier

变换也是$\hat{f}_{y_0}(\xi)$. 由 Plancherel 定理，有

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}_{y_0}(\xi)|e^{-2y\xi}d\xi=\int_{-\infty}^{\infty}|F(x+i(y+y_0))|^2\,dx\leqslant c\,,\forall y>-y_0\,.$$

从而更有$\int_{-\infty}^{0}\leqslant c\,,\forall\, y>-y_0$. 令$y\to\infty$即得

$$\hat{f}_{y_0}(\xi)\chi_{(-\infty,0)}(\xi)=0\,,\quad \text{a.e.}$$

这就证明了$\hat{f}_y(\xi)$支于$[0,\infty)$, $\forall\, y>0$. 下面我们要应用调和函数的边值理论(见 §4.9 习题 4, 习题 5). 它说当$\int_{-\infty}^{\infty}|F(x+iy)|^2dx\leqslant c$, $\forall y>0$, 调和函数族$\{F(x+iy)\}_{y>0}$有L^2意义与点态意义下的边值f_0, 且$F(x+iy)$是f_0的 Poisson 积分，即

$$F(x+iy)=P_y{*}f_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}P_y(x-t)f_0(t)dt\,,$$

$$P_y(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{y}{y^2+x^2}\,.$$

我们利用这个边值理论由$\operatorname{supp}\hat{f}_y\subset[0,\infty)$推出$\hat{f}_0$亦然. 事实上这是下面等式的结果.

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}_y(\xi)-\hat{f}_0(\xi)|^2d\xi=\int_{-\infty}^{\infty}|F(x+iy)-f_0(x)|^2dx\to 0\,,$$

当$y\to 0$时. 现在进一步推出(26)成立. 已知$\hat{f}_0\in L^2$, 且其支集含于$[0,\infty)$, 故可定义如下解析函数

$$G(x+iy)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}\hat{f}_0(\xi)e^{i(x+iy)\xi}d\xi\,,\qquad y>0\,.$$

要证明它就是原来的 $F(x+iy)$. 注意 G 满足

$$\int_{-\infty}^{\infty}|G(x+iy)|^2dx=\int_0^{\infty}|\hat{f}_0(\xi)|^2e^{-2y\xi}d\xi\leqslant c\,,\qquad \forall\, y>0\,,$$

以及

$$\int_{-\infty}^{\infty}|G(x+iy)-f_0(x)|^2dx=\int_0^{\infty}|\hat{f}_0(\xi)|^2(1-e^{-2y\xi})d\xi\to 0,y\to 0,$$

说明 $G(x+iy)=P_y*f_0(x)=F(x+iy)$. 引理获证

现在我们可以得到如下 Paley－Wiener 定理了.

定理(4.18) (Paley－Wiener) 设 $F(x)\in L^2$. 则如下断言等价.

(i). $F(x)$是指数型 σ 的整函数 $F(x+iy)$在 x 轴上的局限;

(ii). $\hat{F}\in L^2$, 且 $\mathrm{supp}\hat{F}\subset[-\sigma,\sigma]$.

证明 (ii)⇒(i)是显然的. 这只需定义整函数

$$F(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sigma}^{\sigma}\hat{F}(\xi)e^{i(x+iy)\xi}d\xi\,,\ z=x+iy\,.$$

则显然有

$$|F(z)|\leqslant A\|F\|_2\left(\int_{-\sigma}^{\sigma}e^{2|\xi||y|}d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\in Ae^{\sigma|\xi|}\,.$$

(i)⇒(ii) 是上述几个引理的结果. 不妨设 $\int_{-\infty}^{\infty}|F(x)|^2dx\leqslant 1$.

令

$$G_+(z)=e^{i\sigma z}F(z), \quad z=x+iy, y\geqslant 0.$$

则由引理(4.15)知

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}|G_+(x+iy)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}=e^{-\sigma y}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|F(x+iy)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant e^{-\sigma y}e^{\sigma y}=1, y\geqslant 0.$$

由引理(4.17)知 G_+ 局限于 x 轴的 Fourier 变换，即

$$(e^{i\sigma x}F)^\wedge(\xi)=\hat{F}(\xi-\sigma)$$

的支集含于 $[0,\infty)$. 也就是说 $\hat{F}(\xi)$ 支于 $[-\sigma,\infty)$. 考虑 $F(-z)$，它也是指数型整函数. 同样在上半平面讨论，知 $\hat{F}(-\xi)$ 支于 $[-\sigma,\infty)$，即 $\hat{F}(\xi)$ 支于 $(-\infty,\sigma]$. 总之，$\hat{F}(\xi)$ 支于这两个集的交 $[-\sigma,\sigma]$. 这就证明了(i)⇒(ii). 定理获证.

§2.5 Fourier 分析中的复方法

一维 Fourier 级数与 Fourier 积分的研究中可以成功地使用复方法，这是因为如下的Fourier 级数与 Fourier 积分

$$\sum_0^{\infty} c_n e^{inx}, \int_0^{\infty}\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi \qquad (1)$$

不是别的，正是单位圆内或上半平面内的解析函数 .

$$\sum_0^{\infty} c_n z^n, z=re^{ix}, \int_0^{\infty}\hat{f}(\xi)e^{iz\xi}d\xi, z=x+it$$

在圆周 $\mathbb{T}$ 与 $\mathbb{R}$ 上的边值. 对一般的级数与积分

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi, \qquad (2)$$

很自然地可以配上一个与之共轭的级数与积分

$$-i\sum_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sgn} n c_n e^{inx}, \quad -i\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sgn}\xi \hat{f}(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi, \tag{3}$$

使得(2)$+i$(3)是解析函数的边值. 从(2)到(3)相当于定义了一个作用在函数上的算子. 这个算子就是 Fourier 级数理论中的共轭函数算子与 Fourier 积分理论中的Hilbert 变换，其定义分别是

$$\tilde{f}(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x-y)}{2\operatorname{tg}\frac{y}{2}}\,dy, \quad Hf(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x-y)}{y}\,dy, \tag{4}$$

其中积分是用如下主值意义来定义的，即

$$\text{p. v.}\int=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|y|\geqslant\varepsilon}. \tag{5}$$

这类积分是我们将在 §3.6 与第五章要讨论的所谓奇异积分中的典型而简单的代表，那里所得到的所有结果当然对这里的算子有效. 但在本节我们先单独处理这两个算子，用的是复方法，由此也可见复方法在调和分析中的意义之一斑. 历史上，奇异积分算子理论却是从推广这两个算子到高维开始的. 因为复方法不适用于高维情形. 所以才产生了适合高维的实方法. 这两个算子本质是一样的，处理也相同. 我们主要讨论 Hilbert 变换.

首先是 Hf 的存在性问题.

定理(5.1) 设 $1\leqslant p\leqslant\infty$,$f\in L^p(\mathbb{R})$，则 $Hf(x)$几乎处处存在.

证明 我们已引进过上半平面内的 Poisson 核 $P_t(x)$与共轭 Poisson 核 $Q_t(x)$，它们是

$$P_t(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{t}{x^2+t^2}, \quad Q_t(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{x}{x^2+t^2}, \quad x\in\mathbb{R}, t>0. \tag{6}$$

注意

$$P_t(x)+iQ_t(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{i}{z}\,,\ z=x+it \tag{7}$$

是 $\mathbb{R}^2_+$ 内解析函数. 设 $f\in L^p(\mathbb{R})$，考虑 f 的下述两个调和扩充

$$u(z)=P_t*f(x),\quad v(z)=Q_t*f(x)\,,\ z=x+it. \tag{8}$$

则 $u(z)+iv(z)$ 是 $\mathbb{R}^2_+$ 内解析函数. 我们首先断言 $v(z)$ 当 $t\to 0$ 时的径向边值的存在性与 $Hf(x)$ 的存在性模零测集是等价的(即除一个零测集外，两个存在性点集一样). 事实上，我们有

$$\begin{aligned}
&v(x+it)-\frac{1}{\pi}\int_{|y|>t}\frac{f(x-y)}{y}\,dy\\
&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{y}{y^2+t^2}\,(f(x-y)-f(x+y))dy\\
&\quad-\frac{1}{\pi}\int_t^{\infty}\frac{f(x-y)-f(x+y)}{y}\,dy\\
&=\frac{1}{\pi}\int_0^{t}\frac{y}{y^2+t^2}\,(f(x-y)-f(x+y))dy\\
&\quad+\frac{1}{\pi}\int_t^{\infty}\frac{t^2}{y(y^2+t^2)}(f(x-y)-f(x+y))dy\\
&=O\left(\frac{1}{t}\int_0^{t}|f(x-y)-f(x+y)|dy\right)\\
&\quad+O\left(\int_t^{\infty}\frac{t}{y^2+t^2}\,|f(x-y)-f(x+y)|dy\right)=J_1+J_2.
\end{aligned}$$

现设 x 是 f 的 Lebesgue 点，记 $\eta(t)=\int_0^t|f(x-y)-f(x+y)|dy$,

则当 $t\to 0$ 时 $\eta(t)=o(t)$. 因此, 对 $\varepsilon>0$, 存在 δ, 使当 $t\leqslant\delta$ 时 $\eta(t)\leqslant\varepsilon t$. 从而 $J_1=o(1)$; 同时

$$J_2=O\left(\frac{t\eta(t)}{y^2}\Big|_t^\delta+\int_t^\delta\frac{t\eta(y)}{y^3}dy\right.$$

$$\left.+\int_\delta^\infty\frac{t}{y^2}\ (|f(x-y)|+|f(x+y)|)dy\right)=o(1)+O\left(\varepsilon\int_t^\delta\frac{t}{y^2}\,dy\right)$$

$$+O\left(t\int_\delta^\infty\frac{1}{y^2}\,(|f(x-y)|+|f(x+y)|)\,dy\right)=o(1).$$

这就证明了断言. 其次我们断言只要 $f\in L^p$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, 则 $v(z)$ 的非切向极限是几乎处处存在的. 事实上, 不妨设 $f\geqslant 0$. 这时 $f(z)=u(z)+iv(z)$ 是上半平面内实部非负的解析函数. 考虑 $g(z)=e^{-f(z)}$, 则 g 是有界解析函数. 由调和函数的边值理论 (见 §4.9 习题 4, 5) 知这样的解析函数可以表示为 $\mathbb{R}$ 上有界函数(记为 $g(x)$)的 Poisson 积分, 并且以这个函数为其几乎处处的非切向边值. 既然 $u(z)$ 是 $f\in L^p$ 的 Poisson 积分, $u(z)$ 也有几乎处处的非切向边值 $f(x)$, 且这个边值是有限的. 这推出 $g(x)\neq 0$, a.e. 故 $\log g(z)$ 的虚部 $-iv(z)$ 有几乎处处的非切向边值. 这样, $Hf(x)$ 几乎处处存在. 定理证毕.

类似的讨论可以估计 $v(z)$ 的非切向极大函数 $v^*(x)$ 与极大的 Hilbert 变换 $H^*f(x)$ 的差, 其中

$$v^*(x)=\sup\{|v(z)|: z=y+it\in\Gamma_\alpha(x)\}, \tag{9}$$

而 $\Gamma_\alpha(x)$ 是 $\mathbb{R}^2_+$ 内以 $x\in\mathbb{R}$ 为顶点的 "宽度" 为 $\alpha>0$ 的锥

$$\Gamma_\alpha(x)=\{y+it:|x-y|<\alpha t\}, \tag{10}$$

以及

$$H^*f(x)=\sup_{\varepsilon}\left|\frac{1}{\pi}\int_{|y|>\varepsilon}\frac{f(x-y)}{y}\,dy\right|. \tag{11}$$

定理 (5.2) 设 $1\leqslant p<\infty$, $f\in L^p(\mathbb{R})$, $z=x+it\in\Gamma_\alpha(x_0)$, $x_0\in\mathbb{R}$. 则

$$\left|v(z^*)-\frac{1}{\pi}\int_{|x-y|>2\alpha t}\frac{f(y)}{x-y}\,dy\right|\leqslant c_\alpha\, P_t*|f|(x_0). \tag{12}$$

证明 有

$$\left|v(z)-\frac{1}{\pi}\int_{|x-y|>2\alpha t}\frac{f(y)}{x-y}\,dy\right|$$

$$=\left|\frac{1}{\pi}\int_{|x-y|\leqslant 2\alpha t}\frac{x-y}{(x-y)^2+t^2}f(y)dy+\right.$$

$$\left.\frac{1}{\pi}\int_{|x-y|>2\alpha t}\frac{t^2}{[(x-y)^2+t^2]\,(x-y)}f(y)dy\right|.$$

注意 $|x-x_0|<\alpha t$. 这样当 $|x-y|\leqslant 2\alpha t$ 时, $|x_0-y|\leqslant 3\alpha t$. 故

$$\int_{|x-y|\leqslant 2\alpha t}\frac{|x-y|}{(x-y)^2+t^2}|f(y)|dy\leqslant c_\alpha\int_{|x-y|\leqslant 2\alpha t}\frac{|f(y)|}{t}\,dy$$

$$\leqslant c_\alpha\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t|f(y)|}{(x_0-y)^2+t^2}\,dy. \tag{13}$$

而当 $|x-y|>2\alpha t$, 有 $|x_0-y|\leqslant\frac{1}{2}|x-y|$, 故

$$\int_{|x-y|>2\alpha t}\frac{t}{(x-y)^2+t^2}|f(y)|dy\leqslant c_\alpha\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t|f(y)|}{(x_0-y)^2+t^2}\,dy. \tag{14}$$

式(13)，(14)右边正是 $c_\alpha P_t * |f|(x_0)$. 这就证明了定理.

推论(5.3) 设 $1 \leqslant p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R})$，则 $\forall \ x \in \mathbb{R}$，有

$$|v^*(x) - H^*f(x)| \leqslant c_\alpha \sup_{t>0} \ P_t * |f|(x). \tag{15}$$

读者不难从(12)推出(15).

现在用复方法讨论 H 在 $L^2(\mathbb{R})$上的表现.

定理(5.4) Hilbert 变换 H 是 $L^2(\mathbb{R})$上的保范算子，且$H^2 = -I$（恒等算子），从而也是反对称的.

证明 记

$$K_t(x) = P_t(x) + iQ_t(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{i}{z}, \ z = x + it. \tag{16}$$

则对每个 $t>0$, $K_t(x) \in L^2(\mathbb{R})$，故它有 Fourier 变换. 为求出这个 Fourier 变换，充分地只需看谁的 Fourier 逆变换是 $K_t(x)$，这是因为 Fourier 变换在 L^2 上可以逆转. 事实上

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty 2e^{-t\xi} e^{ix\xi} d\xi = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{t - ix} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{i}{z}.$$

这说明

$$(K_t)^\wedge(\xi) = 2e^{-t\xi}\chi_{[0,\infty)}(\xi). \tag{17}$$

已知

$$(P_t)^\wedge(\xi) = e^{-t|\xi|}, \tag{18}$$

故

$$(Qt)^\wedge(\xi) = -i\operatorname{sgn}\xi\, e^{-t|\xi|} = -i\operatorname{sgn}\xi\,(P_t)^\wedge(\xi). \tag{19}$$

现设 $f \in L^1 \cap L^2$, $\hat{f}$ 是其 Fourier 变换. 则 $-i\operatorname{sgn}\xi\hat{f}(\xi)$是某个

$g\in L^2$ 的 Fourier 变换. 作调和延拓.

$$P_t*g(x),\quad Q_t*f(x).$$

它们都是 L^1 函数与 L^2 函数的卷积, 故是 L^2 中函数. 由定理(4.11)给出的关系 $(f*g)^\wedge(\xi)=\hat f(\xi)\hat g(\xi)$ 知

$$(P_t*g)^\wedge(\xi)=-i\operatorname{sgn}\xi\,(P_t)^\wedge(\xi)\hat f(\xi)=(Q_t*f)^\wedge(\xi).$$

由定理(5.1)的证明已知 $Q_t*f(x)$ 有几乎处处的非切向边值 $Hf(x)$, 同时 $P_t*g(x)$ 的边值为 $g(x)$, 故

$$Hf(x)=g(x),\quad (Hf)^\wedge(\xi)=-i\operatorname{sgn}\xi\,\hat f(\xi).\tag{20}$$

我们现在还只对 $L^1\cap L^2$ 建立了(20). 由它以及 Plancherel 定理知, H 局限于 $L^1\cap L^2$ 是 L^2 等距的. 由于 $L^1\cap L^2$ 在 L^2 中稠密, 知 H 在整个 L^2 等距, 且式(20)在 L^2 上成立. $H^2=-I$ 由(20)立即推出. 最后 H 的反对称性是因

$$\langle f,Hg\rangle=\langle Hf,H^2g\rangle=-\langle Hf,g\rangle,\quad \forall f,g\in L^2.$$

定理证明至此完毕.

现在我们讨论 H 在 $L^p(\mathbb{R})$ 的有界性, 其中 $1<p<\infty$, 但 p 不是奇整数. 如下的复方法只对 $\mathbb{T}$ 情形适用, 因此我们将首先考虑 $\mathbb{T}$ 情形. 而 $\mathbb{R}$ 情形的结果可以由 $\mathbb{T}$ 情形推出, 如 §2.9 习题 27 所示. 首先我们要用到如下的 Cauchy 定理, 它只是 Fourier 级数逐项积分的结果: 设 $F(z)$ 是 $D=\{z=re^{i\theta}:r<1\}$ 内的解析函数, 则

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(re^{ix})dx=F(0).\tag{21}$$

其次, 我们还需用到如下初等不等式

$$|\sin\theta|^p \leqslant \alpha\cos p\theta + \beta\cos^p\theta\ ,\ |\theta| \leqslant \frac{\pi}{2}\ , \tag{22}$$

其中 $0<p<\infty$, p 不是奇整数，α,β 是仅依赖于 p 的常数，α 可以是负的. 这是因为 (只考虑 $\theta>0$ 情形) $\cos\frac{p}{2}\pi\neq 0$, 故存在 α 使 $\alpha\cos p\theta\geqslant 1$ 在某个 $[\delta,\frac{\pi}{2}]$. 只要 $\beta\geqslant 0$, 则 (22) 在 $[\delta,\frac{\pi}{2}]$ 成立. 对此 α 再选 β 充分大，使得 $\beta\cos^p\theta\geqslant|\alpha|+1$ 于 $\theta\in[0,\delta]$. 这样的 α, β 必使 (22) 成立.

定理 (5.5) 设 $1<p<\infty$, p 不是奇整数，则

$$\|\tilde{f}\|_p \leqslant c_p\|f\|_p\ ,\ \forall f\in L^p(\mathbb{T})\ . \tag{23}$$

证明 不妨设 $f\geqslant 0$, 否则考虑 f_+ 与 f_-. 考察 f 的两个到圆内的调和扩充

$$u(re^{ix}) = P_r * f(x),\quad v(re^{ix}) = Q_r * f(x)\ .$$

由于 $f(z)=u(z)+iv(z)$ 的实部处处不为 0 (只要 f 不恒为 0), $F(z)=f^p(z)$ 有确切定义且仍为圆内解析函数. 记 $F(z)=R^p(z)e^{ip\Phi(z)}$, 则 (21) 给出

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}R^p\cos p\Phi\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}R^pe^{ip\Phi}dx$$

$$= F(0) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx\right)^p,$$

这里积分是在圆周 $|z|=r<1$ 上的积分. 这样我们在式 (22) 两边乘 R^p, 再在圆周 $|z|=r$ 上积分即得

$$\int_{-\pi}^{\pi}|v(re^{ix})|^p dx \leqslant \beta \int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{ix})|^p dx + 2\pi|\alpha|\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f dx\right)^p$$

$$\leqslant (\beta+|\alpha|)\int_{-\pi}^{\pi}|f|^p dx .$$

令 $r \to 1$ 便得式(23). 定理获证.

对奇整数的 p 的有界性，或用 §3.5 介绍的 Riesz－Thorin 内插定理，或利用共轭算子的反对称性(同 H 一样证明)由对偶推理推得.

现在我们把 Hilbert 变换 H 在 $L^p(1<p<\infty)$ 上的表现，以及与 Fourier变换的关系综合在下述命题中，对共轭函数也可写出类似的命题.

命题(5.6) 设 $1<p<\infty$，则 H 是 L^p 上的有界算子，且

$$H^2=-I, \text{在 } L^p \text{ 上}, \tag{24}$$

$$Q_t * f(x) = P_t * Hf(x), \quad \forall f \in L^p, \tag{25}$$

$$(Hf)^\wedge(\xi) = -i\operatorname{sgn}\xi \hat{f}(\xi), \quad \forall f \in L^p, 1<p\leqslant 2. \tag{26}$$

证明 已知上述三式对 L^2 中函数成立. 用 $L^2 \cap L^p$ 中函数在 L^p 中逼近 f，然后取极限，即得此三式在 L^p 成立. 事实上，这三式左右两边可以取极限的理由，其中(25)是因 Q_t，P_t 都属于 $L^{p'}$，(26)的两边则用 Hausdorff－Young 不等式(即 Fourier 变换是 L^p 到 $L^{p'}$ 有界的算子). 命题获证.

§2.6 正定函数与Bochner 定理

复数序列 $\{c_n\}_{-\infty}^{\infty}$ 称为正定的，如果 $\forall N \in \mathbb{Z}_+$，$\forall$ 复数序列 $\{z_n\}_{-N}^{N}$，有

$$\sum_{-N}^{N}\sum_{-N}^{N} c_{n-m}z_n\overline{z}_m \geqslant 0 .$$

C. Herglotz 的著名定理说，$\{c_n\}_{-\infty}^{\infty}$ 是正定的，当且仅当存在 $\mathbb{T}$ 上非负测度 $d\mu$ 使 $(d\mu)^\wedge(n)=c_n$，$\forall n$. 比正定序列更为重要的是由 S. Bochner 引进的所谓的正定函数的概念. 他还得到了 Herglotz 定理的类似以及正定函数理论与应用的其它许多结果. 他是第一个认识到正定函数概念重要性的学者.

我们先讨论 $\mathbb{T}$ 上的正定函数理论，然后建立 $\mathbb{R}^n$ 情形与 $\mathbb{Z}^n$ 情形的正定函数的关系，从而得到 $\mathbb{R}^n$ 情形的一些结果.

定义 (6.1) $\mathbb{T}$ 上连续函数 $f(x)$ 称为正定的，如果 $\forall$ 点列 $\{x_n\}_1^N$ 以及复数列 $\{z_n\}_1^N$，有

$$\sum_{1}^{N}\sum_{1}^{N} f(x_n-x_m)\, z_n\, \overline{z}_m \geqslant 0 . \qquad (1)$$

引理 (6.2) 任意非负系数的三角多项式是正定函数.

证明 指数函数 e^{ikx}，$\forall k$，是正定的，这是因为

$$\sum_{1}^{N}\sum_{1}^{N} e^{ik(x_n-x_m)}z_n\overline{z}_m=\left|\sum_{1}^{N} z_n e^{ikx_n}\right|^2 \geqslant 0 .$$

又设 f、g 是正定函数，$\alpha,\beta\geqslant 0$，则 $\alpha f+\beta g$ 也是正定函数. 这就证明了引理.

引理 (6.3) 连续函数 f 是正定的，当且仅当对一切连续函数 u，有

$$\frac{1}{(4\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)u(x)\overline{u(y)}\,dxdy \geqslant 0 ; \qquad (2)$$

也当且仅当对一切指数函数 e^{ikx}，$k\in\mathbb{Z}$，有

$$\hat{f}(k)=\frac{1}{(4\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-y)\,e^{ik(x-y)}dxdy\geqslant 0\,. \qquad (3)$$

证明 设 f 是正定的，用分点 $\{x_n\}_1^N$ 对 $[-\pi,\pi]$ 作任意剖分，由此构成 Riemann和

$$\frac{1}{4\pi^2}\sum_1^N\sum_1^N f(x_n-x_m)\,u(x_n)(x_n-x_{n-1})\,\overline{u}(x_m)(x_m-x_{m-1})\,.$$

记 $z_n=u(x_n)(x_n-x_{n-1})$. 由f 的正定性，知上式 $\geqslant 0$. 令剖分变细并取极限，即得(2). (2)显然推出(3). 现由(3)推出f 的正定性. 由f 连续以及$\hat{f}(k)\geqslant 0$ 知

$$\sigma_N(f,x)=\sum_{-N}^{N}\left(1-\frac{|k|}{N+1}\right)\hat{f}(k)e^{ikx}$$

是带非负系数的三角多项式. 由引理(6.2)知它是正定函数. 而f 是$\{\sigma_N\}$的一致极限. 显然正定函数序列的一致极限仍是正定的. 引理证完.

定理 (6.4) (Bochner) 连续函数f 是正定的，当且仅当存在 l^1 中非负序列$\{c_n\}_{-\infty}^{\infty}$ 使

$$f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}. \qquad (4)$$

证明 设(4)成立，则 $\sum_{-N}^{N}c_n e^{inx}$ 是正定函数，故它的一致极限$f(x)$是正定的.反过来，设f 是正定的. 已知$\hat{f}(n)\geqslant 0\ \forall n$. 故剩下只需证明$\{\hat{f}(n)\}\in l^1$. 因为此时，$\sum_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(k)e^{ikx}$ 绝对收敛，便知(4)成立.

现在条件$f\in C(\mathbb{T})$，且$\hat{f}(n)\geqslant 0,\forall n$，下证明$\{\hat{f}(n)\}\in l^1$．事实上，

$$\sum_{-N}^{N}\left(1-\frac{|k|}{N+1}\right)\hat{f}(k)=\sigma_N(f,0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)K_N(-y)dy\leqslant\|f\|_\infty.$$

故对$M\leqslant N$，有

$$\sum_{-M}^{M}\left(1-\frac{|k|}{N+1}\right)\hat{f}(k)\leqslant\|f\|_\infty$$

先令$N\to\infty$，再令$M\to\infty$，即得

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)\leqslant\|f\|_\infty.$$

定理获证．

注 这就是S．Bochner关于正定函数的表示定理在群$\mathbb{T}$上的表述，而G．Herglotz的对应定理则是在群$\mathbb{Z}$上的表述．Bochner的一般定理说，一个（拓扑）群上的正定函数一定是对偶群上某个非负测度的Fourier变换．Bochner定理原来是在$\mathbb{R}^n$上叙述的．下面我们将给出$\mathbb{R}^n$上的Bochner定理．

正定函数还有一个重要的刻划如下：

定理（6.5） 连续函数f是正定的，当且仅当存在$g\in L^2$，使

$$f(x)=g*g^*(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(y)g^*(x-y)dy$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x+y)\overline{g}(y)dy, \tag{5}$$

其中g^*是g的对合，即$g^*(x)=\overline{g(-x)}$．

证明 设（5）成立．由

$$\hat{f}(n)=\hat{g}(n)\overline{\hat{g}(n)}=|\hat{g}(n)|^2\geqslant 0,$$

知f是正定的. 现设f是正定的, 则$\hat{f}(n)\geqslant 0$, 且$\sum_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)<\infty$. 考虑$\{\hat{f}(n)^{\frac{1}{2}}\}_{-\infty}^{\infty}$. 则由 Riesz－Fisher 定理知存在$g\in L^2$, 使$\hat{g}(n)=\hat{f}^{\frac{1}{2}}(n)$. 既然$g*g^*$与$f$的 Fourier 系数都是$\{\hat{f}(n)\}_{-\infty}^{\infty}$, 它们都是$L^1$中函数, 故它们相等. 定理证毕.

Bochner 定理可以给出Parseval 等式的另一证明. 这正是抽象调和分析中建立Fourier 分析的L^2理论的主要通路. 我们来给出这个证明. 设$g\in L^2, f=g*g^*$. 则f是正定的, 由定理(6.4)知(令$x=0$)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g(y)|^2dy=f(0)=\sum_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)=\sum_{-\infty}^{\infty}|\hat{g}(n)|^2.$$

这就是 Parseval 等式.

$\mathbb{R}^n$上的正定函数的定义是类似的. 设$\varphi(x)$是$\mathbb{R}^n$上可测函数, 说它是正定的, 如果对任意点列$\{x_n\}_1^N$, 任意复数列$\{\xi_n\}_1^N$, 其中N是任意正整数, 都有

$$\sum_1^N\sum_1^N\varphi(x_n-x_m)\xi_n\overline{\xi}_m\geqslant 0.$$

我们现在建立$\mathbb{R}^n$上与$\mathbb{Z}^n$上的正定函数两者之间的关系. 这本质上是$\mathbb{R}^n$上与$\mathbb{T}^n$上 Fourier－Stieltjes 变换两者之间的关系.

对$\mathbb{R}^n$上函数f, 我们通常是通过如下的所谓周期化, 对应于$\mathbb{T}^n$上的函数. 令

$$f_{\mathrm{T}}(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}f(x+2k\pi). \tag{6}$$

如果$f\in L^1(\mathbb{R}^n)$, 则f_{T}是2π周期的, $f_{\mathrm{T}}\in L^1(\mathbb{T}^n)$, 且$\|f_{\mathrm{T}}\|_1\leqslant\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\|f\|_1$. 同时 Fourier 变换满足

$$(f_{\mathbb{T}})^{\wedge}(k)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n}\int_{\mathbb{T}^n} f_{\mathbb{T}}(x)e^{-ikx}\,d.$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ikx}\,dx=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\hat{f}(k),\ \forall k\,. \quad (7)$$

现在讨论如何类似地建立 $M(\mathbb{R}^n)$与$M(\mathbb{T}^n)$中元素的对应. 注意我们往往是将 $M(\cdot)$作为 $C(\cdot)$的对偶空间来理解的. 设 $\mu\in M(\mathbb{R}^n)$, $\Phi_{\mathbb{T}}\in C(\mathbb{T}^n)$, 而 Φ 是 $\Phi_{\mathbb{T}}$ 的周期延拓. 则

$$\Phi_{\mathbb{T}}\to\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x)d\mu(x)$$

显然定义了 $C(\mathbb{T}^n)$上的一个有界线性泛函, 故存在唯一 $\mu_{\mathbb{T}}\in M(\mathbb{T}^n)$, 使

$$\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x)d\mu(x)=\int_{\mathbb{T}^n}\Phi_{\mathbb{T}}(x)d\mu_{\mathbb{T}}(x), \quad (8)$$

且满足 $\|\mu_{\mathbb{T}}\|\leqslant\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\|\mu\|$. (注意, 在 $\mathbb{T}^n$ 上我们应用的是规范化的 Lebesgue 测度 $\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n}dx$, 而在 $\mathbb{R}^n$ 上则是 $\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}dx$, 相应的 μ 的范数分别是

$$\|\mu_{\mathbb{T}}\|=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n}\int_{\mathbb{T}^n}|d\mu_{\mathbb{T}}|,\ \|\mu\|=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}|d\mu|\Bigg).$$

这样定义的$\mu_{\mathbb{T}}$ 称为 μ 的周期化, 它也满足 $(\mu_{\mathbb{T}})^{\wedge}(n)=(2\pi)^{\frac{n}{2}}(\mu)^{\wedge}(n)$, $\forall\, n$. 注意, 当 $\mu=gdx, g\in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\mu_{\mathbb{T}}=g_{\mathbb{T}}dx$.

如何判断 $\mathbb{R}^n$ 上一个有界，一致连续函数 $\varphi(x)$ 是某个 $\mu\in M(\mathbb{R}^n)$ 的 Fourier－Stieltjes 变换，这是一个很困难的问题．当然也有一些应用有所局限的判别法．我们讨论其中比较简单的一个．这时需要承认广义函数理论中的简单事实（见 §2.8 引理 8.4，8.5）：Schwartz 函数类 $\mathscr{S}$（无穷次可微的速降函数类）在 $C_0(\mathbb{R}^n)$ 中稠密，以及 $\mathscr{S}\,\hat{}=\mathscr{S}$，其中 $\mathscr{S}\,\hat{}$ 表示 $\mathscr{S}$ 中函数的Fourier 变换组成的类．

引理（6.6） $\mathbb{R}^n$ 上连续函数 $\varphi(x)$ 是某个 $\mu\in M(\mathbb{R}^n)$ 的 Fourier－Stieltjes 变换，当且仅当

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(\xi)\,\varphi(-\xi)d\xi\right|\leqslant c\|f\|_\infty,\ \forall f\in\mathscr{S}. \tag{9}$$

证明 实际上这是 Parseval 关系的一个推论．设 $\varphi(\xi)=\hat{\mu}(\xi)$，则

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(\xi)\varphi(-\xi)d\xi\right|=\left|\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{ix\cdot\xi}d\mu\hat{f}(\xi)d\xi\right|$$

$$=\left|\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi d\mu(x)\right|=\left|\int_{\mathbb{R}^n}f(x)d\mu(x)\right|$$

$$\leqslant\|\mu\|\,\|f\|_\infty.$$

反之，式（9）左边定义了 $C_0(\mathbb{R}^n)$ 的一个稠密子空间上的有界线性泛函，因此可保持范数连续延拓至 $C_0(\mathbb{R}^n)$，故由 Riesz 表示定理知存在 $\mu\in M(\mathbb{R}^n)$ 使

$$\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(\xi)\varphi(-\xi)d\xi=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)d\mu(x).$$

这个 μ 还满足 $\|\mu\|\leqslant c$，c 为式（9）中的常数．引理证毕．

下面我们给出 $M(\mathbb{R}^n)^\wedge$ 与 $M(\mathbb{T}^n)^\wedge$ 的联系，由此可借助 $M(\mathbb{T}^n)^\wedge$ 得到有关 $M(\mathbb{R}^n)^\wedge$ 的刻划的结果.

定理(6.7) $\mathbb{R}^n$ 上连续函数 φ 是 $M(\mathbb{R}^n)^\wedge$ 中元素，当且仅当 $\forall\lambda>0, \{\varphi(\lambda k)\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ 是 $\mu_{\lambda,\mathbb{T}}\in M(\mathbb{T}^n)$的Fourier－Stieltjes变换，其中$\|\mu_{\lambda,\mathbb{T}}\|\leqslant c$.

证明 设 $\mu\in M(\mathbb{R}^n)$使 $\varphi(\xi)=\hat{\mu}(\xi)$，$\forall\xi$. 记 μ_λ 为由 μ 诱导的 $M(\mathbb{R}^n)$中下述元素

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)d\mu_\lambda(x)=\int_{\mathbb{R}^n} f(\lambda x)d\mu(x), \quad \forall f \text{ 连续有界}, \tag{10}$$

则 $\|\mu_\lambda\|=\|\mu\|$. 用$f(x)=e^{-ik\cdot x}$ 代入上式，得

$$\hat{\mu}_\lambda(k)=\hat{\mu}(\lambda k), \quad \forall k.$$

记 $\mu_{\lambda,\mathbb{T}}$ 为 μ_λ 的周期化，则 $(2\pi)^{\frac{n}{2}}\mu_{\lambda,\mathbb{T}}$ 便满足

$$((2\pi)^{\frac{n}{2}}\mu_{\lambda,\mathbb{T}})^\wedge(k)=\hat{\mu}_\lambda(k)=\varphi(\lambda k), \quad \forall k,$$

$$\|(2\pi)^{\frac{n}{2}}\mu_{\lambda,\mathbb{T}}\|\leqslant\|\mu_\lambda\|\leqslant\|\mu\|.$$

反过来，我们需要应用引理(6.6).设 $f\in\mathscr{S}$. 由于对任意λ, $\{\varphi(\lambda k)\}$ 是$\mu_{\lambda,\mathbb{T}}$ 的 Fourier－Stieltjes变换，$\|\mu_{\lambda,\mathbb{T}}\|\leqslant c$，并且$\varphi$连续，知$\|\varphi\|_\infty\leqslant c$.故对任给 $\varepsilon>0$，存在紧集 K，以及充分小的 λ，使得(这只需用边长为 λ 的方体对 K 剖分，并作 Riemann 和)

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(\xi)\varphi(-\xi)d\xi\right|\leqslant\left|\int_K\hat{f}(\xi)\varphi(-\xi)d\xi\right|+\varepsilon$$

$$\leqslant\left|c\lambda^n\sum_k\hat{f}(\lambda k)\varphi(-\lambda k)\right|+2\varepsilon. \tag{11}$$

设 $f_{\lambda,\mathbb{T}}$ 是 $f\left(\frac{x}{\lambda}\right)$ 的周期化，即 $f_{\lambda,\mathbb{T}}(x)=\sum\limits_{k} f\left(\frac{x+2k\pi}{\lambda}\right)$，则

$$(f_{\lambda,\mathbb{T}})^{\wedge}(k)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}(d_{\frac{1}{\lambda}}f)^{\wedge}(k)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\lambda^{n}\hat{f}(\lambda k),\ \forall k. \tag{12}$$

注意由 $f\in\mathscr{S}$，知 f 衰减很快，故

$$\|f_{\lambda,\mathbb{T}}\|_{\infty}\leqslant\|f\|_{\infty}+\varepsilon\text{，只要 }\lambda\text{ 充分小.} \tag{13}$$

这样应用 $\mathbb{T}^n$ 上 Parseval 关系（证明同 $\mathbb{T}$ 一样），得

$$\begin{aligned}\left|c\lambda^{n}\sum_{k}\hat{f}(\lambda k)\varphi(-\lambda k)\right|&=\left|\sum_{k}(f_{\lambda,\mathbb{T}})^{\wedge}(k)(\mu_{\lambda,\mathbb{T}})^{\wedge}(-k)\right|\\&=\left|\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n}\int_{\mathbb{T}^n}f_{\lambda,\mathbb{T}}(x)d\mu_{\lambda,\mathbb{T}}(x)\right|\leqslant c\,\|f_{\lambda,\mathbb{T}}\|_{\infty}\leqslant c\,\|f\|_{\infty}+\varepsilon,\end{aligned} \tag{14}$$

从而

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(\xi)\varphi(-\xi)d\xi\right|\leqslant c\,\|f\|_{\infty}+3\varepsilon.$$

由 ε 之任意性，应用引理(6.6)，知存在 $\mu\in M(\mathbb{R}^n)$ 使 $\hat{\mu}(\xi)=\varphi(\xi)$，且 $\|\mu\|\leqslant c$，c 只依赖于条件中的常数. 定理证毕.

现在回到正定函数. 定理(6.7)有如下变形.

定理(6.8) 设 $\varphi(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数. 则 φ 是某个 $\mu\in M_{+}(\mathbb{R}^n)$（非负测度）的 Fourier－Stieltjes 变换，当且仅当 $\forall\lambda>0$，$\{\varphi(\lambda k)\}_k$ 是 $\mu_{\lambda,\mathbb{T}}\in M_{+}(\mathbb{T}^n)$ 的 Fourier－Stieltjes 变换.

证明 设 $\varphi(\xi)=\hat{\mu}(\xi)$，$\mu\in M_{+}(\mathbb{R}^n)$. 则由(10)定义的 $\mu_\lambda\in$

$\cdot M_+(\mathbb{R}^n)$. 此外，μ_λ的周期化 $\mu_{\lambda,\mathbb{T}}$ 也是非负的. 这就证明了条件的必要性. 现证充分性. 设 $\forall\lambda>0$, $\{\varphi(\lambda k)\}_k$ 是 $\mu_{\lambda,\mathbb{T}}\in M_+(\mathbb{T}^n)$ 的 Fourier－Stieltjes 变换，即

$$\varphi(\lambda k)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n\int_{\mathbb{T}^n}e^{-i\lambda k\cdot x}d\mu_{\lambda,\mathbb{T}}(x),\quad \forall k.$$

因此 $\|\mu_{\lambda,\mathbb{T}}\|=\varphi(0)$，故 $\mu_{\lambda,\mathbb{T}}$ 是一致有界的，由定理(6.7)知，存在 $\mu\in M(\mathbb{R}^n)$，$\|\mu\|\leqslant c\varphi(0)$ 且 $\varphi(\xi)=\hat{\mu}(\xi)$. 现在要证 μ 是非负的. 设 $f\in\mathscr{S}$ 非负，λ 充分小，仍然用 Riemann 和逼近积分，得

$$\int_{\mathbb{R}^n}f(x)d\mu(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(\xi)\varphi(-\xi)d\xi$$

$$=c\int_{\mathbb{T}^n}f_{\lambda,\mathbb{T}}(x)d\mu_{\lambda,\mathbb{T}}(x)+o(1),\ \text{当}\ \lambda\to 0\ \text{时}.$$

由于 $f_{\lambda,\mathbb{T}}$ 非负，有

$$\int_{\mathbb{R}^n}f(x)d\mu(x)\geqslant 0,\quad \forall\ \text{非负}\ f\in\mathscr{S}.$$

因此 μ 是非负测度. 定理证毕.

现在我们可以得到关于 $\mathbb{R}^n$ 上正定函数的两个 Bochner 定理.

定理(6.9) (Bochner) φ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的正定函数，当且仅当存在 $\mu\in M_+(\mathbb{R}^n)$ 使 $\varphi(\xi)=\hat{\mu}(\xi)$.

证明 假设 $\varphi=\hat{\mu}$，其中 $\mu\in M_+(\mathbb{R}^n)$，则

$$\sum_{k,m}\varphi(x_k-x_m)\xi_k\overline{\xi}_m=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{k,m}e^{-i(x_k-x_m)\cdot y}\xi_k\overline{\xi}_m d\mu(y)$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\left|\sum_k\xi_k e^{-ix_k\cdot y}\right|^2 d\mu(y)\geqslant 0.$$

故 φ 是正定函数. 现设 φ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的正定函数,则 $\forall\lambda>0,\{\varphi(\lambda k)\}_k$ 是 $\mathbb{Z}^n$ 上正定序列, 故由 Herglotz 定理知存在 $\mu_{\lambda,\mathbb{T}}\in M_+(\mathbb{T}^n)$ 使 $\varphi(\lambda k)=(\mu_{\lambda,\mathbb{T}})\hat{}\ (k)$. (这是 §2.9 中的习题 25, 请读者自行证明.)再由定理(6.8), 知存在 $\mu\in M_+(\mathbb{R}^n)$使 $\varphi=\hat{\mu}$. 定理获证.

另一个定理, 给出 $M(\mathbb{R}^n)\hat{}$ 中元素的刻划, 它在$\mathbb{T}^n$情形是平凡的: $\{d_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n}\in M(\mathbb{T}^n)\hat{}$, 当且仅当对一切三角多项式 $\sum\limits_k c_ke^{ik\cdot x}$, 有

$$\left|\sum_k c_kd_{-k}\right|\leqslant c\left\|\sum_k c_ke^{ik\cdot x}\right\|_\infty. \tag{15}$$

但在 $\mathbb{R}^n$ 情形, 一个类似的刻划却很有用.

定理(6.10) (Bochner) 设 φ 是 $\mathbb{R}^n$ 上连续函数, 则 $\varphi\in M(\mathbb{R}^n)\hat{}$, 当且仅当对一切广义三角多项式 $\sum\limits_j c_je^{i\lambda_j\cdot x}$(它是有限和, $\{\lambda_j\}$是实序列), 有

$$\left|\sum_j c_j\varphi(-\lambda_j)\right|\leqslant c\left\|\sum_j c_je^{i\lambda_j\cdot x}\right\|_\infty. \tag{16}$$

且(16)中的常数 c 与 $\|\mu\|$ 可比较(此 μ 是使得 $\varphi=\hat{\mu}$ 的测度).

证明 设 $\varphi=\hat{\mu}, \mu\in M(\mathbb{R}^n)$, 则

$$\sum_j c_j\varphi(-\lambda_j)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\sum_j c_je^{i\lambda_j\cdot x}d\mu(x).$$

(16)当然成立, 且其中的 c 被 $\|\mu\|$ 控制. 反之, 设(16)成立. 特别地, $\forall\lambda>0$, 令 $\lambda_j=\lambda j$. 则(16)化为

$$\left|\sum_j c_j\varphi(-\lambda j)\right|\leqslant c\left\|\sum_j c_je^{ij\cdot\lambda x}\right\|_\infty=c\left\|\sum_j c_je^{ij\cdot x}\right\|_\infty. \tag{17}$$

这说明 $\sum\limits_j c_j\varphi(-\lambda j)$ 定义了$C(\mathbb{T}^n)$上的一个有界线性泛函. 由

Riesz 表示定理，知存在 $\mu_{\lambda,\Upsilon}\in M(\mathbb{T}^n)$，使得 $\|\mu\|_{\lambda,1}\leqslant c$，且

$$\sum_j c_j\varphi(-\lambda j)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n\int_{\mathbb{T}^n}\sum_j c_je^{ij\cdot x}\,d\mu_{\lambda,\Upsilon}(x),\ \forall j.$$

特别取单项式 $e^{ij\cdot x}$ 则得

$$\varphi(\lambda j)=(\mu_{\lambda,\Upsilon})^{\wedge}(j),\quad \forall j.$$

这样由定理(6.7)知，存在 $\mu\in M(\mathbb{R}^n)$，$\|\mu\|\leqslant c$，使得 $\varphi=\hat{\mu}$. 证明完毕.

§2.7 绝对收敛的Fourier 级数

本节只讨论一维 Fourier 级数的绝对收敛性. 记号 $A(\mathbb{T})$，平行于 $A(\mathbb{R}^n)$，表示 $\mathbb{Z}$ 上 l^1 序列的 Fourier 逆变换的集合. 它不是别的，正是 $\mathbb{T}$ 上那些连续函数的集合，它们具有绝对收敛的 Fourier 级数. 显然这是一个线性空间. 在其中赋以范数

$$\|f\|_{A(\mathbb{T})}=\sum_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(n)|. \tag{1}$$

则 $A(\mathbb{T})$在通常的线性运算，点态乘法下组成一个 Banach 代数，且它与 l^1 等距同构，这个等距同构映射就是 $f\to\{\hat{f}(n)\}$. 它显然是一一的、线性的、保持乘法且等距. 只需验证乘法运算在此映射下的表现. 设 $f,g\in A(\mathbb{T})$，则因 $\sum\limits_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)e^{inx}$ 与 $\sum\limits_{-\infty}^{\infty}\hat{g}(m)e^{imx}$ 都是绝对一致收敛的，故

$$f(x)g(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)\hat{g}(m)e^{i(n+m)x}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{f}(k)\hat{g}(n-k)e^{inx}. \tag{2}$$

并且由一致收敛性，知

$$(fg)\hat{}(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{f}(k)\hat{g}(n-k),\quad \forall n.$$

其中右边级数正是 l^1 中乘法的定义 (注意 $l^1=L^1(\mathbb{Z})$)．对 $A(\mathbb{T})$ 的研究的主要问题是刻划 $A(\mathbb{T})$ 中的元素．这是一个未完全解决的问题，有一些充分条件．我们曾在 §2.1 中给出过一个很粗糙的结果，它可加强如下．

定理 (7.1) 设 f' 绝对连续，且 $f'\in L^2$，则 $f\in A(\mathbb{T})$．

证明 注意 f' 的 Fourier 系数是 $in\hat{f}(n)$，$\forall n\neq 0$．这样

$$\sum_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(n)|=|\hat{f}(0)|+\sum_{-\infty}^{\infty}{}'\left|\frac{(f')\hat{}(n)}{in}\right|$$

$$\leqslant\|f\|_1+\left(\sum_{-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{-\infty}^{\infty}|(f')\hat{}(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant c(\|f\|_1+\|f'\|_2).$$

定理证毕．

比较深入一些的结果有下述 Bernstein 定理与 Zygmund 定理．

定理 (7.2) (Bernstein) 设 $f\in\Lambda_\alpha$，$\alpha>\dfrac{1}{2}$．则 $f\in A(\mathbb{T})$，且

$$\|f\|_{A(\mathbb{T})}\leqslant c\|f\|_{\Lambda_\alpha}. \tag{3}$$

证明 对任意 $h\in\mathbb{T}$，

$$f(x-h)-f(x)\sim\sum_{-\infty}^{\infty}(e^{-inh}-1)\hat{f}(n)e^{inx}.$$

对任意 $m\in\mathbb{Z}_+$，当 $2^m\leqslant|n|<2^{m+1}$ 时，令 $h=\dfrac{\pi}{3\cdot 2^m}$．则因

$|nh| \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi\right]$，我们有

$$|e^{-inh}-1| \geqslant |\sin nh| \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2},$$

这样

$$\begin{aligned}\sum_{2^m \leqslant |n| < 2^{m+1}} |\hat{f}(n)| &\leqslant c 2^{\frac{m}{2}} \left(\sum_{2^m \leqslant |n| < 2^{m+1}} |\hat{f}(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant c 2^{\frac{m}{2}} \left(\sum_{-\infty}^{\infty} |e^{-inh}-1|^2 |\hat{f}(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= c 2^{\frac{m}{2}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-h)-f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant c 2^{\frac{m}{2}} |h|^{\alpha} \|f\|_{\Lambda_\alpha} \leqslant c 2^{m\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)} \|f\|_{\Lambda_\alpha},\end{aligned}$$

故

$$\|f\|_{A(\mathbb{T})} \leqslant c \sum_{0}^{\infty} 2^{m\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)} \|f\|_{\Lambda_\alpha} = c\|f\|_{\Lambda_\alpha}.$$

这就证明了定理．

上述 Bernstein 定理中的 $\alpha > \frac{1}{2}$，已是不能改进的了，即存在 $f \in \Lambda_{\frac{1}{2}}$，使 $f \notin A(\mathbb{T})$．但如果加上别的条件，则可以使 α 的值降下来．A．Zygmund 给出了这样的结果．

定理(7.3) （Zygmund）设 f 有界变差，且 $f \in \Lambda_\alpha, \alpha > 0$．则 $f \in A(\mathbb{T})$．

证明 记 f 的全变差为 V，连续模为 $\omega(\delta)$．则

$$\sum_{k=1}^{2N}\left|f\left(x+\frac{k\pi}{N}\right)-f\left(x+\frac{(k-1)\pi}{N}\right)\right|^2$$

$$\leqslant \omega\left(\frac{\pi}{N}\right)\sum_{k=1}^{2N}\left|f\left(x+\frac{k\pi}{N}\right)-f\left(x+\frac{(k-1)\pi}{N}\right)\right|.$$

在 $\mathbb{T}$ 上对不等式两边积分，并注意左边每项的积分都相等，即得

$$2N\int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(x+\frac{\pi}{2N}\right)-f\left(x-\frac{\pi}{2N}\right)\right|^2 dx\leqslant 2\pi\omega\left(\frac{\pi}{N}\right)V,$$

因此

$$2N\sum_{-\infty}^{\infty}|e^{-i\frac{\pi}{2N}n}-e^{i\frac{\pi}{2N}n}|^2|\hat{f}(n)|^2\leqslant\omega\left(\frac{\pi}{N}\right)V.$$

同样当 $2^m\leqslant|n|<2^{m+1}$ 时，令 $N=2^{m+1}$，我们得

$$\sum_{2^m\leqslant|n|<2^{m+1}}|\hat{f}(n)|^2\leqslant c\sum_{2^m<|n|<2^{m+1}}|e^{-i\frac{\pi}{2N}n}-e^{i\frac{\pi}{2N}n}|^2|\hat{f}(n)|^2$$

$$\leqslant c\,2^{-m}\omega\left(\frac{\pi}{2^{m+1}}\right)V.$$

故

$$\sum_{2^m\leqslant|n|<2^{m+1}}|\hat{f}(n)|\leqslant c\,2^{\frac{m}{2}}2^{-\frac{m}{2}}\left(\omega\left(\frac{\pi}{2^{m+1}}\right)\right)^{\frac{1}{2}}V^{\frac{1}{2}}$$

$$=c\left(\omega\left(\frac{\pi}{2^{m+1}}\right)\right)^{\frac{1}{2}}V^{\frac{1}{2}},$$

从而

$$\sum_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(n)|\leqslant cV^{\frac{1}{2}}\sum_{0}^{\infty}\left(\omega\left(\frac{\pi}{2^{m+1}}\right)\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant c\,V^{\frac{1}{2}}\,\|f\|_{\Lambda_\alpha}^{\frac{1}{2}}.$$

定理证毕.

$A(\mathbb{T})$的研究还包含一类所谓函数作用问题，即研究怎样的定义于 $D\subset\mathbb{C}$ 上的函数 F，使得 $\forall f\in A(\mathbb{T})$，且 $f(\mathbb{T})\subset D$，仍有 $F(f)\in A(\mathbb{T})$. 这方面最著名的结果是所谓 Wiener－Levy 定理. Wiener 定理说，若 $f\in A(\mathbb{T})$使 $f(x)\neq 0$ 处处，则 $\frac{1}{f}\in A(\mathbb{T})$. 这相当于说函数 $\frac{1}{z}$，其定义域是除去原点的复平面$\mathbb{C}$，可在处处不取零值的 $A(\mathbb{T})$函数上作用. Levy 定理把此定理推广到一般解析函数. 它说对$f\in A(\mathbb{T})$，如果 F 是在包含 f 值域的一个邻域上解析的函数，则 $F(f)\in A(\mathbb{T})$. 我们在此不讨论这些问题的细节. 关于与此有关的 Tauber 定理，建议读者参考 §2.9 中的习题 32 至习题 41.

§2.8 广义函数的Fourier 分析

我们已经指出过，用经典的观点，甚至对 $p>2$ 时的 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中的函数，都不能定义 Fourier 变换. 在这样的场合都不能应用 Fourier 分析这一有力的工具，不能不说是一遗憾，因此有必要拓广 Fourier 变换的定义范围. 历史上曾有过各种拓广的方法. 50 年代发展起来的广义函数论为 Fourier 分析提供了一个最宽广的舞台. 在本节我们就来建立广义函数的 Fourier 分析，当然只能叙述这方面的基本内容. 广义函数被定义为由性质好的函数构成的所谓检验函数空间上的有界线性泛函. 通常考虑的，且与 Fourier 分析配合得最好的检验函数空间是 Schwartz 空间 $\mathscr{S}$，有时也称它为速降函数空间.

定义(8.1) 全体 $\mathbb{R}^n$ 上满足

$$\rho_{\alpha,\beta}(\varphi)=\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|x^\alpha D^\beta\varphi(x)|<\infty \tag{1}$$

的C^∞ 函数 φ 所构成的线性空间，记为$\mathscr{S}$，其中 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，$\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$是任意多重指标，(即 $\alpha_j,\beta_j\in\mathbb{Z}_+$，$j=1,\cdots n$)，

$$x^\alpha=x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n},\ D^\beta=\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_1^{\beta_1}\cdots\partial x_n^{\beta_n}},\ |\beta|=\sum_1^n\beta_j.$$

$\rho_{\alpha,\beta}$ 可以定义 $\mathscr{S}$ 上的一个距离 $d'_{\alpha,\beta}(\varphi,\psi)=\rho_{\alpha,\beta}(\varphi-\psi)$. 这个距离等价于有界距离 $d_{\alpha,\beta}=\dfrac{d'_{\alpha,\beta}}{1+d'_{\alpha,\beta}}$. 等价的意思是说 $d_{\alpha,\beta}(\varphi_n,\varphi)\to 0$ 当且仅当 $d'_{\alpha,\beta}(\varphi_n,\varphi)\to 0$. $d_{\alpha,\beta}$ 之所以成为一个距离(主要指三角不等式)，是因为

$$\frac{t}{1+t}\leqslant\frac{t_1+t_2}{1+t_1+t_2}\leqslant\frac{t_1}{1+t_1}+\frac{t_2}{1+t_2},\ \text{当 } t\leqslant t_1+t_2.$$

把所有$\{d_{\alpha,\beta}\}$排列成$\{d_n\}$，然后令 $d=\sum\limits_{n=1}^\infty 2^{-n}d_n$，则 d 也是 $\mathscr{S}$ 上的一个距离.

引理(8.2) 赋予距离 d 的$\mathscr{S}$ 是一个完备的距离空间，且距离是平移不变的.

证明 先证 $d(\varphi_k,\varphi)\to 0$，当且仅当 $\forall n$，$d_n(\varphi_k,\varphi)\to 0$. "仅当"断言是显然的，现看"当"断言. 设 $\forall n$，$d_n(\varphi_k,\varphi)\to 0$. 任给 $\varepsilon>0$. 要证存在 k_0，使当 $k\geqslant k_0$ 时，$d(\varphi_k,\varphi)\leqslant\varepsilon$. 事实上，选 N 使 $\sum\limits_{N+1}^\infty 2^{-n}\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$. 对 $n\leqslant N$，当然存在 k_0 使当 $k\geqslant k_0$ 时，$d_n(\varphi_k,\varphi)\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$. 这个 k_0 使得当 $k\geqslant k_0$ 时，有

$$d(\varphi_k,\varphi)\leqslant\sum_1^N 2^{-n-1}\varepsilon+\frac{\varepsilon}{2}\leqslant\varepsilon.$$

断言获证这也等于说我们已证明了:

$$d(\varphi_k,\varphi)\to 0,\text{当且仅当}\ \rho_{\alpha,\beta}(\varphi_k-\varphi)\to 0,\ \forall \alpha,\beta.$$

现证 $\mathscr{S}$ 是完备的. 设$\{\varphi_k\}$对 d 是 Cauchy 列. 则 $\forall \alpha,\beta$, $\{\varphi_k\}$关于 $d'_{\alpha,\beta}$ 也是 Cauchy 列. 特别地, $\{\varphi_k\}$以及它的任意阶导数组成的序列 $\left\{\dfrac{\partial^\beta}{\partial x^\beta}\varphi_k\right\}$ 都在 $\mathbb{R}^n$ 上一致收敛, 故存在 φ 使得 φ 与 $\dfrac{\partial^\beta}{\partial x^\beta}\varphi$ 分别是这些序列的极限. 用 x^α 去乘知 $\varphi\in\mathscr{S}$, 且 $\rho_{\alpha,\beta}(\varphi_k-\varphi)\to 0$, $\forall \alpha,\beta$. 再由刚才证明的等价性, 知也有 $d(\varphi_k,\varphi)\to 0$. 这就证明了 $\mathscr{S}$ 是一完备距离空间. 此外, $\mathscr{S}$ 中按 d 收敛与按 $d'_{\alpha,\beta}$ 收敛的等价性还推出线性运算 $\varphi+\psi$ 与 $\lambda\varphi$ 关于距离 d 连续, 且关于加法这个平移运算不变. 引理证毕.

定义 (8.3) $\mathscr{S}$ 赋距离d 称为 Schwartz 空间.

下面讨论 $\mathscr{S}$ 与熟知的几个空间, 以及与熟悉的几个运算之间的关系.

引理 (8.4) $\mathscr{S}$ 连续地嵌入到 L^p, $1\leqslant p<\infty$, 与 C_0, 且稠密.

证明 关于 C_0 的断言, 以及在 L^p 中的稠密性都是显然的. 现证 $\|\varphi\|_p$ 能被某个 $\rho_{\alpha,\beta}(\varphi)$控制. 确切地说, 令 $A=\|\varphi\|_\infty$, $B=\||x|^{2n}\varphi(x)\|_\infty$, 则

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_p&\leqslant\left(a_0\int_{|x|\leqslant 1}|\varphi|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(a_0\int_{|x|>1}|x|^{-2np}|x|^{2np}|\varphi|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\&\leqslant c(A+B).\end{aligned}$$

这样, 由 $d(\varphi_n,\varphi)\to 0$ 可推出 $\|\varphi_n-\varphi\|_p\to 0$, 即 $\mathscr{S}$ 连续地嵌入到 L^p 中. 引理获证.

引理 (8.5) 设 α_0, β_0 是任意两个多重指标. 则映射 $\varphi\to x^{\alpha_0}\cdot D^{\beta_0}\varphi$ 是 $\mathscr{S}$ 上的连续算子. 此外 Fourier 变换是 $\mathscr{S}$ 到 $\mathscr{S}$ 上的拓扑同构, 最后按距离 d, 有

$$\lim_{h \to 0} \tau_h \varphi = \varphi\ ,\ \ h \in \mathbb{R}^n\ , \tag{2}$$

$$\lim_{h_i \to 0} \frac{\varphi - \tau_h \varphi}{h_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi\ , h = (0, \cdots, h_i, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

证明 充分地只需证 $\forall \alpha, \beta$, 在距离 $d'_{\alpha,\beta}$ 下上述断言成立. 由:

$$\rho_{\alpha,\beta}(x^{\alpha_0} D^{\beta_0} \varphi) \leqslant c \sum \rho_{\alpha',\beta'}(\varphi),\ |\alpha'| \leqslant |\alpha| + |\alpha_0|\ , |\beta'| \leqslant |\beta| + |\beta_0|,$$

即知 $\varphi \to x^{\alpha_0} D^{\beta_0} \varphi$ 是连续映射. 由下述关系(见 §2.1 式(29), (30))

$$x^\alpha D^\beta (\hat{\varphi}) = (-i)^\alpha (ix)^\alpha ((-ix)^\beta \varphi)^\wedge = (-i)^{\alpha+\beta} (D^\alpha (x^\beta \varphi))^\wedge\ ,$$

以及引理(8.4), 有

$$\rho_{\alpha,\beta}(\hat{\varphi}) \leqslant \|D^\alpha (x^\beta \varphi)\|_1 \leqslant c \sum \rho_{\alpha',\beta'}(\varphi),\ |\alpha'| \leqslant |\beta| + 2n\ , |\beta'| \leqslant |\alpha|,$$

这说明 $\mathscr{F}$ 是 $\mathscr{S}$ 上的连续算子. 由逆转定理(见 §2.2 定理 2.9)知 $\mathscr{F}$ 是映上的. 此外, 既然 $\mathscr{F}$ 的逆变换就是 Fourier 逆变换, 它也是连续的. Fourier 变换的唯一性定理说明 $\mathscr{F}$ 是一一映射. 此外映射是线性的. 这就证明了 $\mathscr{F}$ 是 $\mathscr{S}$ 到 $\mathscr{S}$ 上的拓扑同构. 断言(2), (3)的证明可类似地进行. 例如看(3), 任给 α, β 与 $h_i(|h_i| \leqslant 1)$, 记 $h = (0, \cdots, h_i, \cdots 0)$, 对 $\varphi \in \mathscr{S}$ 有

$$x^\alpha D^\beta \left(\frac{\varphi - \tau_h \varphi}{h_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi \right) = x^\alpha D^\beta \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(x - \theta h) - \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(x) \right).$$

当 $|x| \geqslant N$ 充分大, 它可任意小; 而当 $|x| \leqslant N$ 时, 由 φ 的各阶导数的一致连续性, 只要 h_i 充分小, 它也可任意小, 这证明了

$$\rho_{\alpha,\beta}\left(\frac{\varphi - \tau_h \varphi}{h_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi \right) \to 0\ , \quad \text{当 } h \to 0\ .$$

从而

$$d\left(\frac{\varphi-\tau_h\varphi}{h_i}-\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi\right)\to 0.$$

引理获证.

现在定义广义函数.

定义(8.6) $\mathscr{S}$ 上的所有连续线性泛函所构成的空间 $\mathscr{S}'$ 称为缓增广义函数空间. 我们在 $\mathscr{S}'$ 中赋弱 $*$ 拓扑, 即 $\{l_n\}\subset\mathscr{S}'$ 称为收敛于 $l\in\mathscr{S}'$, 如果

$$l_n(\varphi)\to l(\varphi),\quad \forall\varphi\in\mathscr{S}. \tag{4}$$

l 在 φ 上的作用, 有时也记为 $\langle\varphi,l\rangle$.

下面考虑缓增广义函数的几个例子.

例

1. 设 $1\leqslant p\leqslant\infty$, $f\in L^p$. 定义 $l=i_f$ 如下:

$$\varphi\to l(\varphi)=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\varphi(x)dx,\ \forall\varphi\in\mathscr{S}.$$

要证它定义了 $\mathscr{S}$ 上的一个连续线性泛函. 实际上只需证明当 $\varphi_k\to 0$ 于 $\mathscr{S}$ 中时, 也有 $l(\varphi_k)\to 0$. 这是显然的, 因为 $\varphi_k\to 0$ 于 $\mathscr{S}$ 中可推出 $\|\varphi_k\|_{p'}\to 0$, 其中 p' 是 p 的相伴数.

2. 设 f 是缓增的 L^p 函数, 意即存在非负整数 k 使 $f(x)(1+|x|^2)^{-k}\in L^p$. 则如上述定义的 l_f 也定义了 $\mathscr{S}$ 上的一个连续线性泛函. 这是因为

$$l_f(\varphi)=\int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|^2)^k\varphi(x)f(x)(1+|x|^2)^{-k}dx$$

是两个映射的复合, 一是 $\varphi\to(1+|x|^2)^k\varphi$, 它显然连续, 另一个是 L^p 可积函数 $f(x)(1+|x|^2)^{-k}$ 定义的积分算子, 如上面指出的, 它也是连续的. 这样 $l_f\in\mathscr{S}'$.

3. 设 $\mu\in M(\mathbb{R}^n)$, 则

$$l:\varphi\to\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)d\mu(x),\quad \forall\varphi\in\mathscr{S},$$

也定义了 $\mathscr{S}'$ 中的一个元素，这是因为 $d(\varphi_k,0)\to 0$ 推出 $\|\varphi_k\|_\infty\to 0$，故 $l(\varphi_k)\to 0$.

4. 缓增测度 μ，即存在非负整数 k 使 $(1+|x|^2)^{-k}d\mu$ 是 $M(\mathbb{R}^n)$ 中元素，也属于 $\mathscr{S}'$. 可同例 2 一样证明.

5. 设 $x_0\in\mathbb{R}^n$，β 是任意多重指标. 则

$$\varphi\to D^\beta\varphi(x_0),\quad \forall\varphi\in\mathscr{S},$$

定义了 $\mathscr{S}'$ 中的一个元素. 这是显然的. 特别地，$\varphi\to\varphi(x_0)$ 称为集中于点 x_0 的 Dirac 测度 δ_{x_0}.

下面讨论 $\mathscr{S}'$ 与通常的几个空间的关系，以及 $\mathscr{S}'$ 的其它一些基本性质.

引理 (8.7) 设 $1\leqslant p\leqslant\infty$，则 L^p 与 $M(\mathbb{R}^n)$ 均连续地嵌入到 $\mathscr{S}'$ 内.

证明 这只需证明若 $f_n\to f$ 在 L^p 中或 M 中，则一定也在 $\mathscr{S}'$ 中，即

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_n\varphi\,dx\to\int_{\mathbb{R}^n} f\varphi\,dx,\ \forall\varphi\in\mathscr{S}.$$

这是显然的. 证毕

下面的引理说明 $\mathscr{S}$ 上连续线性泛函具有某种有界性. 这是赋范空间 (甚至拟赋范空间) 上线性算子的连续性与有界性等价这一性质的类似.

引理 (8.8) $\mathscr{S}$ 上的线性泛函 l 是连续的，当且仅当存在 c 与 $k,m\in\mathbb{Z}_+$ 使

$$|l(\varphi)|\leqslant c\sum_{|\alpha|\leqslant k,\,|\beta|\leqslant m}\rho_{\alpha,\beta}(\varphi),\qquad\forall\varphi\in\mathscr{S}. \tag{5}$$

证明 只需证 l 的连续性能推出 (5). 注意 $\mathscr{S}$ 中零元的邻域基可以取为

$$\{N_{\varepsilon,k,m}\}=\{\{\varphi:\sum_{|\alpha|\leqslant k,|\beta|\leqslant m}\rho_{\alpha,\beta}(\varphi)<\varepsilon\}\}_{\varepsilon,k,m},\tag{6}$$

其中 $\varepsilon>0, k, m\in\mathbb{Z}_+$. 既然 l 在零元连续，故存在 ε, k, m 使

$$|l(\varphi)|\leqslant 1,\quad \forall\varphi\in N_{\varepsilon,k,m}.$$

令

$$\|\varphi\|=\sum_{|\alpha|\leqslant k,|\beta|\leqslant m}\rho_{\alpha,\beta}(\varphi),\qquad \forall\varphi\in\mathscr{S}.$$

取 $\delta<\varepsilon$. 则 $\forall\varphi\neq 0$,

$$\psi=\delta\|\varphi\|^{-1}\varphi\in N_{\varepsilon,k,m},$$

故

$$|\delta\|\varphi\|^{-1}l(\varphi)|=|l(\psi)|\leqslant 1,$$

即

$$|l(\varphi)|\leqslant\delta^{-1}\|\varphi\|.$$

引理证毕.

现在 $\mathscr{S}'$ 中定义常见的几种运算.

定义 (8.9) $\mathscr{S}'$ 中元素 u 与 $\mathscr{S}$ 中元素 φ 的卷积 $u*\varphi$, $\mathscr{S}'$ 中的反射~，平移 τ_h, 微商 D^β, 以及 Fourier 变换 $\mathscr{F}$ 分别定义为下述各式中 $\mathscr{S}'$ 中的元素:

$$u*\varphi(\psi)=u(\widetilde{\varphi}*\psi),\qquad\forall\psi\in\mathscr{S},\tag{7}$$

其中~是 $\mathscr{S}$ 中的反射，即 $\widetilde{\varphi}(x)=\varphi(-x)$,

$$\widetilde{u}(\psi)=u(\widetilde{\psi}),\qquad\forall\psi\in\mathscr{S},\tag{8}$$

$$\tau_h u(\psi)=u(\tau_{-h}\psi),\quad\forall\psi\in\mathscr{S},\tag{9}$$

$$D^\beta u(\psi)=(-1)^\beta u(D^\beta\psi),\quad\forall\psi\in\mathscr{S},\tag{10}$$

$$\hat{u}(\psi)=u(\hat{\psi}),\quad \forall\psi\in\mathscr{S}. \tag{11}$$

注

1. 很容易验证上述五式的右边确实定义了 $\mathscr{S}$ 上的(变元是 ψ)连续线性泛函，故上述定义的五种运算确实是 $\mathscr{S}'$ 到 $\mathscr{S}'$ 内的. 当 u 也属于 $\mathscr{S}$ 时，上述运算都是古典意义下的运算. 甚至无需 $u\in\mathscr{S}$，只需 u 是普通函数使上述运算在古典意义下有定义. 则新的定义也与古典的定义一致. 我们以 $L^p, 1\leqslant p\leqslant 2$ 中函数的Fourier变换为例说明新的定义与古典的定义一致. 设 $f\in L^p$, 找 $\{f_n\}\subset\mathscr{S}$ 使 $f_n\to f$ 在 L^p 中. 则 $\hat{f}_n$ 在 $L^{p'}$ 中收敛于某个 $(\hat{f})_c$. 这个 $(\hat{f})_c$ 满足，$\forall\psi\in\mathscr{S}$，

$$\int(\hat{f})_c\psi\,dx=\lim_{n\to\infty}\int\hat{f}_n\psi\,dx=\lim_{n\to\infty}\int f_n\hat{\psi}\,dx$$

$$=\int f\hat{\psi}\,dx=\int\hat{f}\psi\,dx,$$

其中最右边被积函数内的 $\hat{f}$ 是 f 作为 $\mathscr{S}'$ 中元素的 Fourier 变换. 既然 $(\hat{f})_c$ 与 $\hat{f}$ 作为 $\mathscr{S}'$ 中元素在 $\mathscr{S}$ 上作用一样，故它们相等. 这就证明了 $\mathscr{F}$ 的两个定义等价.

2. Fourier 变换是 $\mathscr{S}'$ 到 $\mathscr{S}'$ 上的拓扑同构. 映射显然是线性的. 现证一一性，映上性与连续性，以及逆变换的连续性. 设 $u_1,u_2\in\mathscr{S}'$ 使 $\hat{u}_1=\hat{u}_2$. 则

$$\int u_1\psi\,dx=\int\hat{u}_1\check{\psi}\,dx=\int\hat{u}_2\check{\psi}\,\mathrm{d}x=\int u_2\psi\,dx,\forall\psi\in\mathscr{S}.$$

故 $u_1=u_2$. 此外，设 $u\in\mathscr{S}'$，定义 $\vee$ 如下，

$$\int\check{u}\psi\,dx=\int u\check{\psi}\,dx,\quad\forall\psi\in\mathscr{S}.$$

这样，$\forall \psi \in \mathscr{S}$，有

$$\int u\psi dx = \int u(\hat{\psi})^{\vee} dx = \int \check{u}\hat{\psi} dx = \int (\check{u})^{\wedge} \psi dx .$$

这说明 $u = (\check{u})^{\wedge}$，即每个 $u \in \mathscr{S}'$ 是某个 $\check{u} \in \mathscr{S}'$ 的 Fourier 变换，这证明了 $\mathscr{F}$ 是映上的．设 $u_n \to u$ 在 $\mathscr{S}'$ 中，即 $u_n(\psi) \to u(\psi)$，$\forall \psi \in \mathscr{S}$．我们有

$$\int \hat{u}_n \psi dx = \int u_n \hat{\psi} dx = \int u\hat{\psi} dx = \int \hat{u}\psi dx, \quad \forall \psi \in \mathscr{S} ,$$

这说明 $\hat{u}_n \to \hat{u}$ 在 $\mathscr{S}'$ 中，即 $\mathscr{F}$ 是连续的．上面已经知道了 $\mathscr{F}$ 的逆算子就是 Fourier 逆变换，其连续性可同样证明．断言全部证毕．

由注 1, 2可见，在广义函数范围内，许多运算可自由地进行．

3. $\mathscr{S}'$ 中元素 u 与 $\mathscr{S}$ 中元素 φ 的卷积 $u * \varphi$ 还有如下解释

$$\frac{1}{a_0} u * \varphi(x) = u(\tau_x \tilde{\varphi}) . \tag{12}$$

形式上看这是显然的：

$$\frac{1}{a_0} u * \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\varphi(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\tilde{\varphi}(y-x)dy$$
$$= u(\tau_x \tilde{\varphi}) .$$

严格地看是因为 $\forall \varphi, \psi \in \mathscr{S}$，$\tilde{\varphi} * \psi$ 作为定义在 $\psi \in \mathscr{S}$ 上的映射是 $\mathscr{S}$ 中连续的，这只需用距离函数 $\rho_{\alpha,\beta}$ 来验证．这说明 (7) 中右边的确定义了 $\mathscr{S}'$ 中的一个元素，我们把它作为 $u * \varphi$ 的定义．此外用 Riemann 和可以在 $\mathscr{S}$ 中逼近

$$\tilde{\varphi} * \psi(x) = a_0 \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\varphi}(x-y)\psi(y)dy .$$

这同样只需用 $\rho_{\alpha,\beta}$ 来检验. 这样,

$$u(\widetilde{\varphi}*\psi)=a_0\int_{\mathbb{R}^n}u(\widetilde{\varphi}(x-y))\psi(y)dy=a_0\int_{\mathbb{R}^n}u(\tau_y\widetilde{\varphi})\psi(y)dy,$$

这说明

$$\frac{1}{a_0}u*\varphi(x)=u(\tau_x\widetilde{\varphi}).$$

此外, 对固定 u,φ, 作为 x 的函数, $u(\tau_x\widetilde{\varphi})$是 C^∞ 的. 例如只看一阶微商. 设 $h=(0,\cdots,h_i,\cdots,0)$, 有

$$\frac{u*\varphi(x+h)-u*\varphi(x)}{h_i}=u\left(\frac{\tau_{x+h}\widetilde{\varphi}-\tau_x\widetilde{\varphi}}{h_i}\right).$$

既然内层在 $\mathcal{S}$ 中收敛, $u\in\mathcal{S}'$, 故上式有极限, 这证明了可微性. 此外易知, 它的各阶导数都是缓增的, 即在无穷远处能被某个多项式控制.

上面我们已介绍了广义函数理论的基本内容. 作为结束, 我们给出与平移可交换的算子的广义函数刻划. 设B 是在 $\mathbb{R}^n$ 的函数空间 V 上定义的线性算子, 它在另一函数空间 W 取值. 它称为与平移可交换的, 如 V 是平移不变的, 且

$$B(\tau_h f)=\tau_h(Bf),\quad \forall f\in V,\forall h\in\mathbb{R}^n. \tag{13}$$

特别如果 $V=L^p, W=L^q$, 则这样的算子称为(p,q)乘子. 下面用广义函数来刻划(p,q)乘子, 先证一个引理.

引理(8.10) 设$f\in L^p$, 且有直到$n+1$ 阶的 L^p 导数. 则 f 几乎处处等于一连续函数 g, 且

$$|g(0)|\leqslant c\sum_{|\alpha|\leqslant n+1}\|D^\alpha f\|_p. \tag{14}$$

证明 先看$p=1$情形. 注意

$$(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}\leqslant c\sum_{|\alpha|\leqslant n+1}|x|^{|\alpha|}.$$

这样

$$\begin{aligned}|\hat{f}(x)|&\leqslant c(1+|x|^2)^{-\frac{n+1}{2}}\sum_{|\alpha|\leqslant n+1}|x|^{|\alpha|}|\hat{f}(x)|\\&\leqslant c(1+|x|^2)^{-\frac{n+1}{2}}\sum_{|\alpha|\leqslant n+1}|(D^\alpha f)\hat{}(x)|\\&\leqslant c(1+|x|^2)^{-\frac{n+1}{2}}\sum_{|\alpha|\leqslant n+1}\|D^\alpha f\|_1,\end{aligned}$$

$$\|\hat{f}\|_1\leqslant c\sum_{|\alpha|\leqslant n+1}\|D^\alpha f\|_1.$$

因此 f 几乎处处等于一连续函数 g, 且 $|g(0)|\leqslant\|\hat{f}\|_1$. 当 $p>1$ 时, 设 $\varphi\in C^\infty$, $\varphi=1$ 在球 $|x|\leqslant 1$ 上; $\varphi=0$ 在 $|x|>2$. 则由刚才证明的, φf 几乎处处等于连续函数 h, 且

$$|h(0)|\leqslant c\sum_{|\alpha|\leqslant n+1}\|D^\alpha(\varphi f)\|_1.$$

但

$$D^\alpha(\varphi f)=\sum_{\mu+\nu=\alpha}c_{\mu,\nu}D^\mu f D^\nu\varphi,$$

$$\begin{aligned}\|D^\alpha(\varphi f)\|_1&\leqslant\sum_{\mu+\nu=\alpha}c_{\mu,\nu}\sup_{|x|\leqslant 2}|D^\nu\varphi(x)|\int_{|x|\leqslant 2}|D^\mu f|dx\\&\leqslant c\sum_{|\mu|\leqslant\alpha}\left(\int_{|x|\leqslant 2}|D^\mu f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

这样在 $|x|\leqslant 1$ 上, f 几乎处处等于连续函数 h, 且

$$|h(0)| \leqslant c \sum_{|\alpha| \leqslant n+1} \|D^\alpha f\|_p .$$

既然 φ 可选得在任意大的球上为 1（这与 φ 在单位球上为 1 没有本质差别），且使得 $\|D^\nu \varphi\|_\infty$ 保持有界，只要 $|\nu| \leqslant n+1$. 这就完成了引理的证明.

定理(8.11) 设 B 是 L^p 到 L^q 内的线性有界算子，$1 \leqslant p, q \leqslant \infty$，与平移可交换. 则存在唯一缓增广义函数 u，使得 $B\varphi = u * \varphi$，$\forall \varphi \in \mathscr{S}$.

证明 对任意 $\varphi \in \mathscr{S}$，要证 $B\varphi$ 有所有阶的 L^q 导数. 事实上，设 $h = (0, \cdots, h_i, \cdots, 0)$，有

$$\frac{\tau_h \varphi - \varphi}{h_i} \to -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \text{ 在 } \mathscr{S} \text{ 中，也在 } L^p \text{ 中.}$$

故

$$\frac{\tau_h (B\varphi) - B\varphi}{h_i} = B\left(\frac{\tau_h \varphi - \varphi}{h_i} \right) \to -B\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) \text{在 } L^q \text{ 中,}$$

即 $B\varphi$ 有 L^q 中的一阶导数存在. 类似地可证任意阶 L^q 导数存在，并且

$$D^\alpha (B\varphi) = B(D^\alpha \varphi), \quad \forall \varphi \in \mathscr{S}, \quad \forall \alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n). \tag{15}$$

由引理(8.10)知 $B\varphi$ 可修改为连续函数，且

$$\begin{aligned} |B\varphi(0)| &\leqslant c \sum_{|\alpha| \leqslant n+1} \|D^\alpha (B\varphi)\|_q \\ &= c \sum_{|\alpha| \leqslant n+1} \|B(D^\alpha \varphi)\|_q \leqslant c \|B\| \sum_{|\alpha| \leqslant n+1} \|D^\alpha \varphi\|_p . \end{aligned}$$

这说明把 φ 看作变元，$B\varphi(0)$是 $\mathscr{S}$ 上的有界线性泛函. 即存在 $u_1 \in \mathscr{S}'$ 使得 $u_1(\varphi) = B\varphi(0)$. 令 $u = \tilde{u}_1$. 则 $u \in \mathscr{S}'$，且(见定义(8.9)后的注 3)

$$\begin{aligned} u*\varphi(x) &= u(\tau_x\varphi) = u((\tau_{-x}\varphi)^{\sim}) \\ &= \tilde{u}(\tau_{-x}\varphi) = u_1(\tau_{-x}\varphi) = B(\tau_{-x}\varphi)(0) \\ &= \tau_{-x}(B\varphi)(0) = B\varphi(x). \end{aligned}$$

定理获证.

注 定理中的 B 非平凡，仅当 $p\leqslant q$ 时才可能. 见下述命题.

命题(8.12) 设 B 是 L^p 到 L^q 的有界平移不变线性算子，$q<p<\infty$. 则 $B=0$.

证明 首先，当 $p<\infty$ 时，$\forall f\in L^p$，有 $\lim\limits_{h\to\infty}\|f+\tau_h f\|_p=2^{\frac{1}{p}}\|f\|_p$. 这是因为当 f 有紧支集时，只要 h 充分大，便有 $\|f+\tau_h f\|_p=2^{\frac{1}{p}}\|f\|_p$. 对一般 $f\in L^p$, 存在具有紧支集的 f_n, 使得 $f_n\to f$ 在 L^p 中，而 $f+\tau_h f=\lim\limits_n(f_n+\tau_h f_n)$ 对 h 一致. 其次

$$\|Bf+\tau_h Bf\|_q=\|B(f+\tau_h f)\|_q\leqslant\|B\|\,\|f+\tau_h f\|_p.$$

令 $h\to\infty$，得

$$\|Bf\|_q\leqslant\|B\|2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|f\|_p,\quad \forall f\in L^p.$$

根据 $\|B\|$ 的定义，知 $\|B\|\leqslant 2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|B\|$, 因此 $\|B\|=0$. 故 B 只能是零算子. 命题获证.

§2.9 进一步事实、习题与注记

1. 任何一个复形式的三角级数 $\sum\limits_{-\infty}^{\infty}c_n e^{inx}$ 可以改写为实形式的三角级数 $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，其中 $a_0=2c_0$, $a_n=c_n+c_{-n}$, $b_n=i(c_n-c_{-n})$，$n\geqslant 1$. 当 $\sum\limits_{-\infty}^{\infty}c_n e^{inx}$ 是 $f\in L^1$ 的 Fourier 级数(类似地 $F(x)$ 的 Fourier－Stieltjes 级数)时，有

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,\quad n\geqslant 0,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx\ ,\ n\geqslant 1\ .$$

当 f 是偶函数时，所有 b_n 为 0，即对应的 Fourier 级数为纯余弦级数；当 f 为奇函数时，其 Fourier 级数为纯正弦级数.

2. $\omega(f,h)$表示 f 的连续模，$\omega_p(f,h)$表示 f 的 $L^p(1\leqslant p<\infty)$ 连续模，$\omega^*(f,h)$，$\omega_p^*(f,h)$则表示用 $f(x+h)+f(x-h)-2f(x)$ 代替 $f(x+h)-f(x)$时所得的连续模. 则 f 的 Fourier 系数$\{\hat{f}(n)\}$满足

$$|\hat{f}(n)|\leqslant\frac{1}{2}\omega_1\left(f,\frac{\pi}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}\omega_p\left(f,\frac{\pi}{n}\right)\leqslant\frac{1}{2}\omega\left(f,\frac{\pi}{n}\right),\forall n,$$

$$|\hat{f}(n)|\leqslant\frac{1}{4}\omega_1^*\left(f,\frac{\pi}{n}\right)\leqslant\frac{1}{4}\omega_p^*\left(f,\frac{\pi}{n}\right)\leqslant\frac{1}{4}\omega^*\left(f,\frac{\pi}{n}\right),\forall n,$$

3. 设 $b>1,0<\alpha\leqslant 1,f_\alpha(x)=\sum\limits_1^\infty b^{-n\alpha}\sin b^n x$. 证明当 $0<\alpha<1$，$f_\alpha\in\Lambda_\alpha$，而$f_1\in\Lambda_*\setminus\Lambda_1$. K . Weierstrass 首先指出当 α 小时，f_α 是无处可微的. G. H. Hardy 进一步指出，$\forall\alpha\leqslant 1,f_\alpha$ 是无处可微的. 特别地 f_1 是 Λ_* 中无处可微的函数. 注意 Λ_1 中函数是几乎处处可微的，且导数属于 L^∞ .

4. 关于 S_n 与 $\tilde{S}_n$ 的收敛有所谓 Dini 判别法. 即若

$$\int_0^\pi\frac{|\varphi_x(t)|}{t}dt<\infty\left(\text{或}\int_0^\pi\frac{|\psi_x(t)|}{t}dt<\infty\right),$$

则 $S_n(f,x)\to f(x)$，(或$\tilde{f}(x)$存在，且 $\tilde{S}_n(f,x)\to\tilde{f}(x)$). 特别地，$f\in\Lambda_\alpha$，$\alpha>0$，或只是$f'(x)$存在有限，都是$S_n(f,x)\to f(x)$与 $\tilde{S}_n(f,x)\to\tilde{f}(x)$的充分条件. 由此还可推出 Riemann 局部化原理：若$f(x)$在x_0的某邻域为 0，则 $S_n(f,x)$在这个邻域上收敛于 0，且在这个邻域内的闭区间上收敛是一致的. 不要以为

Fourier 部分和算子对L^1空间的这个局部化性质是不证自明的，事实上，高维时这性质就没有了.

5. 设$D(x)$表示在$(0,2\pi)$上用$\frac{\pi-x}{2}$定义，在$x=0,2\pi$上为0的以2π为周期的函数. 证明$D(x)$有如下 Fourier 展开:

$$D(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}.$$

类似地有如下 Fourier 展开:

$$-\log\left|2\sin\frac{x}{2}\right|\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}.$$

6. 设x_0是f的第一类间断点，即$f(x_0+0)$与$f(x_0-0)$存在且不相等，$d=f(x_0+0)-f(x_0-0)$为其跳跃. 证明$\widetilde{S}_n(f,x_0)(\log n)^{-1}\to\frac{d}{\pi}$.(题5中的$D(x)$的一个用途便是用来消去给定的函数的某个第一类间断点. 本题中的断言可以用这个思想来处理. 注意$\widetilde{S}_n(D,0)=\sum_{1}^{n}\frac{1}{k}=\log n+O(1)$，以及$D(x)$在$x=0$有跳跃$\pi$. 因此本题要证明的结论对$f=D$成立. 现设$x_0=0$，考虑$\widetilde{S}_n\left(f-\frac{D}{\pi},0\right)$，充分地只需证它为$o(\log n)$) 本题的一个推论是如果$f$的 Fourier 级数$\sum_{-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$满足$c_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$，那末$f$不能有第一类间断点. 进一步，如果已知$f$是有界变差且$\hat{f}(n)=o\left(\frac{1}{n}\right)$，那末$f$连续.

7. 所谓 Lebesgue 常数L_n是指 $L_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(t)|dt$ ($D_n(x)$ 是 Dirichlet 核). 证明 $L_n=\frac{4}{\pi^2}\log n+O(1)$. 共轭 Lebesgue 常数 $\widetilde{L_n}$ 是指 $\widetilde{L_n}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\widetilde{D}_n(t)dt$. 证明 $\widetilde{L_n}=\frac{2}{\pi}\log n+O(1)$, L_n 趋于 ∞ 这个事实蕴含存在连续函数 f 使其 $S_n(f,x)$ 在任何给定点 x_0 不收敛. 证明这个断言.

8. $\mathbb{T}$ 上 Fourier 变换的唯一性定理有一个直接的构造性证明. 先设 f 实值连续使得 $\hat{f}(n)=0$,$\forall n$, 要证 $f\equiv 0$. 假设不然, 则存在 $I=[x_0-\delta,x_0+\delta]\subset\mathbb{T}$ 使 $f(x)\geqslant\varepsilon$ 于 I . 无妨设 $x_0=0$. 我们要构造一个三角多项式序列 $\{P_n(x)\}$, 使得 $P_n(x)\geqslant 0$ 于 I, $|P_n(x)|\leqslant c$ 于 I^c , 且对任意真包含于 I 内的闭区间 J, $P_n(x)\to\infty$ 一致于 J. (例如 $P_n(x)=(1+\cos x-\cos\delta)^n$). 这样将有 $\left|\int_{-\pi}^{\pi}P_n(x)f(x)dx\right|\geqslant\varepsilon|J|\inf_{x\in J}P_n(x)-c\to\infty$. 对一般 f 考虑 $F(x)=\int_{-\pi}^{x}f(t)dt$.

9. §2.6 引进的周期化引导到下述 Poisson 求和公式. 设 $g\in L^1(\mathbb{R})$, 则 $\sum_{-\infty}^{\infty}g(x+2k\pi)$ 对 a. e. $x\in\mathbb{T}$ 绝对收敛于一个函数 $G(x)\in L^1(\mathbb{T})$, 且

$$\hat{G}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}G(x)e^{-inx}dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{g}(n), \quad \forall n.$$

其中最左边是周期函数的 Fourier 系数，最右边是非周期函数的 Fourier 变换．假设 $\sum_{-\infty}^{\infty} \hat{G}(n) e^{inx}$ 的部分和当 $x=0$ 时收敛于 $G(0) = \sum_{-\infty}^{\infty} g(2k\pi)$，且右边级数也是收敛的．则有如下 Poisson 求和公式

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(k) = \sum_{-\infty}^{\infty} g(2k\pi).$$

其高维类似是

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{g}(k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} g(2k\pi).$$

它的一个充分条件是 f 与 $\hat{f}$ 满足 $|f(x)| + |\hat{f}(x)| \leqslant c(1+|x|)^{-n-\delta}$，$\delta > 0$. 注意，仅有 $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 是不够的．Poisson 求和公式当然不一定要在 $x=0$ 应用，对任意 x，有

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{g}(k) e^{ik \cdot x} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} g(x + 2k\pi), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

10. 纯粹正弦，余弦的三角级数，如果其中的系数是单调的，或更进一步有好的性质，例如凸性（见题 11），则此时对它们可以有很精确的渐近估计，以及判别它们是否是某一类函数的 Fourier 级数．例如我们有下述渐近估计

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{\alpha}} = \Gamma(1-\alpha) \sin \frac{\pi\alpha}{2} x^{\alpha-1} + o(x^{\alpha-1}), \ 0<\alpha<1, 0<x \leqslant \pi,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^{\alpha}} = \Gamma(1-\alpha) \cos \frac{\pi\alpha}{2} x^{\alpha-1} + o(x^{\alpha-1}), \ 0<\alpha<1, 0<x \leqslant \pi,$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos nx}{\log n}=\frac{1}{2}\pi x^{-1}\log^{-2}\frac{1}{x}+o\left(x^{-1}\log^{-2}\frac{1}{x}\right),\ 0<x\leqslant\pi,$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\log n}=x^{-1}\log^{-1}\frac{1}{x}+o\left(x^{-1}\log^{-1}\frac{1}{x}\right),\ 0<x\leqslant\pi,$$

$$\frac{\pi-x}{2}\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n},\quad -\log\left|2\sin\frac{x}{2}\right|\quad \frac{a_0}{2}+\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}.$$

这些特殊的三角级数的例子可用来说明．一个 Fourier 级数的共轭级数可以不是 Fourier 级数，如 $\sum\limits_{2}^{\infty}\frac{\cos nx}{\log n}$ 所示；一个有界变差函数的 Fourier 级数的共轭级数可以不是有界函数的 Fourier 级数．如 $\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 所示．这特别说明共轭变换不是 L^1 到 L^1 内，也不是 L^∞ 到 L^∞ 内有界的．

11．实数序列 $\{\lambda_n\}_{n\geqslant 0}$ 称为凸的，如果（令 $\Delta_n\lambda=\lambda_n-\lambda_{n+1}$）

$$\Delta_n^2\lambda=\Delta_n\lambda-\Delta_{n+1}\lambda=\lambda_n+\lambda_{n+2}-2\lambda_{n+1}\geqslant 0,\ \forall n.$$

一个凸的且有界的实数列 $\{\lambda_n\}$ 不仅使 $\Delta_n\lambda$ 非增，且自己也是非增的（证明此断言），这样 $\lambda=\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n$ 存在有限．再由 $\lambda_0-\lambda=\sum\limits_{0}^{\infty}\Delta_n\lambda$ 以及 $\Delta_n\lambda$ 的单调性，知 $n\Delta_n\lambda\to 0$，当 $n\to\infty$ 时．这样由 Abel 部分求和法则得 $\lambda_0-\lambda=\sum\limits_{0}^{\infty}(n+1)\Delta_n^2\lambda$．现考虑数值级数 $\sum\limits_{0}^{\infty}u_k$．设 S_n 与 σ_n 分别是它的部分和与 $(c,1)$ 和，且使得 σ_n 收敛于 s，而 $S_n=O\left(\frac{1}{\mu_n}\right)$，其中 $\left\{\frac{1}{\mu_n}\right\}$ 是一个凸的趋于 0 的数列．证明

$\left\{\dfrac{1}{\mu_n}\right\}$是$\sum_0^\infty u_n$的一个收敛因子，即$\sum_0^\infty \dfrac{u_n}{\mu_n}$收敛．事实上，只需对$\sum_0^n \dfrac{u_k}{\mu_k}$施行两次 Abel 部分求和法则，便得

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{\mu_k} = \sum_{k=0}^{n-2}(k+1)\sigma_k\Delta_k^2\left(\frac{1}{\mu}\right) + n\sigma_{n-1}\Delta_{n-1}\left(\frac{1}{\mu}\right) + \frac{S_n}{\mu_n} \to$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\sigma_k\Delta_k^2\left(\frac{1}{\mu}\right).$$

对Fourier 级数而言，$\mu_n=\log n$，$n\geqslant 2$，是一个很重要的凸序列．已知对一切$f\in L$，在它的所有 Lebesgue 点处，

$$|S_n(f,x)|+|\tilde{S}_n(f,x)| = o(\log n)\text{（请证明这个断言），}$$

以及$\sigma_n(f,x)\to f(x)$，a.e.与$\tilde{\sigma}_n(f,x)\to\tilde{f}(x)$，a.e．由刚的断言知对任意 Fourier 级数$\dfrac{a_0}{2}+\sum_1^\infty(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，

$$\sum_{k=2}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\log k^{-1} \text{ 与 } \sum_{k=2}^{\infty}(a_k\sin kx-b_k\cos kx)\log k^{-1}$$

都是 a.e.收敛的．此外用k^α，$\alpha>0$，代替$\log k$，结论也成立．

12. Hilbert 变换（或同样地共轭函数变换）定义中被积函数的形式是足够巧妙地设计的．事实上，如果考虑形式上相似的主值积分

$$\int_0^\pi \frac{f(x+t)-f(x)}{t}dt \quad \text{或} \int_0^\pi \frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t}dt,$$

则甚至对连续函数，它们都是可以不存在的．见 A.Zygmund [Zy]．

13. 证明：$\sigma_n(f,x)-f(x)=O\left(\dfrac{1}{n}\right)$当且仅当$\tilde{f}\in\Lambda_1$．特别，

对幂级数型的 f，即其复形式 Fourier 展开中负幂系数全为 0，$\sigma_n(f,x)-f(x)=O\left(\frac{1}{n}\right)$当且仅当$f\in\Lambda_1$.（因此时$\widetilde{f}=-i(f-c_0)$.）.

提示：设 $f-\sigma_n(f)=O\left(\frac{1}{n}\right)$，则特别有$f\in\Lambda_\alpha,0<\alpha<1$，故$\widetilde{f}$

存在，且 $\widetilde{\sigma}_n(f,x)\to\widetilde{f}(x)$，a.e．现记

$$\Delta_n=f-\sigma_n(f)=\sum_{|k|\leqslant n}\frac{|k|}{n+1}c_ke^{ikx}+\sum_{|k|\geqslant n+1}c_ke^{ikx},$$

并对$N\leqslant n$ 作用 σ_N 即得 $\sigma_N(\Delta_n)=O\left(\frac{1}{n}\right)$，且

$$\sigma_N(\Delta_n,x)=\sum_{-N}^{N}\left(1-\frac{|k|}{N+1}\right)\frac{|k|}{n+1}c_ke^{ikx}=\frac{i}{n+1}(\widetilde{\sigma}_N(f))'(x).$$

这说明 $\widetilde{\sigma}_N(f)'=O(1)$，故

$$\widetilde{\sigma}_N(f,x+h)-\widetilde{\sigma}_N(f,x)=O(|h|)，对\ x\ 一致.$$

令 $N\to\infty$，便有$\widetilde{f}\in\Lambda_1$．反之，既然$f$ 与$\widetilde{\widetilde{f}}$只相差常数，充分地只需证 $f\in\Lambda_1$ 推出 $\widetilde{\sigma}_n(f,x)-\widetilde{f}(x)=O(1)$．事实上，

$$\widetilde{\sigma}_n(f,x)-\widetilde{f}(x)=\frac{1}{\pi(n+1)}\int_1^\pi(f(x+t)-f(x-t))\frac{\sin nt dt}{\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^2}$$

$$=\int_0^{\frac{1}{n}}+\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}.$$

第一部分的估计是平凡的．对第二部分要应用

$$\left|\int_t^\pi \frac{\sin(n+1)u}{\left(2\sin\frac{u}{2}\right)^2}\,du\right| \leqslant \frac{c}{nt^2}$$

的事实（它由第二中值定理以及 $\int_\alpha^\beta \sin(n+1)u\,du = O\left(\frac{1}{n}\right)$ 得到），然后分部积分即得．注意由 $f\in\Lambda_1$ 推不出 $\sigma_n(f,x)-f(x) = O\left(\frac{1}{n}\right)$，差别是那里的核是 $K(x)=\frac{2}{\pi+1}\left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}\right)^2$，对第二部分的估计已经没有 $\int_\alpha^\beta\left(\sin\frac{n+1}{2}u\right)^2du = O\left(\frac{1}{n}\right)$ 这样的事实了．

14．设 $0<\alpha<1$，$f\in\Lambda_\alpha$，则 $\tilde{f}\in\Lambda_\alpha$．

15．共轭函数算子 ~ 在端点空间 L^1，L^∞，与 C 上的表现如下：

$$|\{|\tilde{f}|>\lambda\}| \leqslant \frac{c}{\lambda}\|f\|_1,\quad \forall f\in L^1,\ \lambda>0,$$

$$\left(\int_{-\pi}^\pi |\tilde{f}|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant c\|f\|_1,\ \forall f\in L^1,\ 0<p<1,$$

$$\int_{-\pi}^\pi |\tilde{f}|dx \leqslant A\int_{-\pi}^\pi |f|\log^+|f|dx + B,\ \forall f\in L\log^+ L,$$

$$\int_{-\pi}^\pi e^{\lambda|\tilde{f}|}dx \leqslant c_\lambda,\ 0<\lambda<\frac{\pi}{2},\quad \forall f\in L^\infty,\ \|f\|_\infty\leqslant 1,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{\lambda|\tilde{f}|}dx < \infty, \ \forall f \in C(\mathbb{T}), \quad \lambda > 0,$$

这里 $L\log^+ L = \{f : f\log^+|f| \in L^1\}$.

16. 线性求和的一般形式是所谓矩阵求和. 设 $A = (a_{n,k})_{n,k\geq 0}$ 是一无穷矩阵, $\{s_k\}$是一复数序列. 如果 $\sigma_n = \sum_{k\geq 0} a_{n,k}s_k$ 存在且 $\lim_{n\to\infty}\sigma_n = s$, 则称 $\{s_k\}$ 可 A 求和于 s, 记为 $A-\lim s_k = s$ 或 $s_k \xrightarrow{A} s$. A 求和称为正规的, 如果

$$\lim_{n\to\infty} a_{n,k} = 0, \ N_n = \sum_{k\geq 0} |a_{n,k}| \leq c, \ \lim_{n\to\infty} \sum_{k\geq 0} a_{n,k} = 1.$$

证明: 正规求和是普通收敛的推广, 即若 $s_k \to s$, 则 $s_k \xrightarrow{A} s$. 此外, 证明: 如果 A 是正规的, 且是非负的, 则

$$\underline{\lim} s_k \leq \underline{\lim}\, \sigma_n \leq \overline{\lim}\, \sigma_n \leq \overline{\lim}\, s_k.$$

17. 设$\{s_n\}_{n\geq 0}$是任意复数序列. 对$k = 0, 1, \cdots$, 令

$$s_n^{(0)} = s_n, \ n \geq 0, \ s_n^{(k)} = s_0^{(k-1)} + s_1^{(k-1)} + \cdots + s_n^{(k-1)}, \ k \geq 1, n \geq 0.$$

与恒为 1 的复数列$\{s_n\}_{n\geq 0}$对应的 $s_n^{(k)}$ 记为$A_n^{(k)}$, 称为 k 阶 Cesàro 数.序列$\{s_n\}_{n\geq 0}$称为k次 Cesàro 可和于 s, 简称为 (c,k)可和于 s, 如果

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_n^{(k)}}{A_n^{(k)}} = s.$$

注意 $A_n^{(k)} = C_{n+k}^n = \dfrac{(n+k)\cdots(n+1)}{k!}$. $A_n^{(k)}$ 还有一种解释是, 它是 $(1-x)^{-k-1}$ 的幂级数展开的系数.

$$(1-x)^{-k-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(k)} x^n.$$

类似地也有展开式

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n^{(k)} x^n = (1-x)^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} s_n^{(0)} x^n ,$$

利用这两个展开式可对非整数 $\alpha > -1$ 定义 $s_n^{(\alpha)}$ 与 $A_n^{(\alpha)}$，从而定义 (c,α)求和. 证明 (c,α)可和推出$(c,\alpha+\varepsilon)$可和，$\alpha > -1, \varepsilon \geqslant 0$. 证明如果级数$\sum_0^{\infty} u_k (c,\alpha)$可求和，$\alpha > -1$，(所谓级数$\sum_0^{\infty} u_k (c,\alpha)$可和，是指其部分和序列$s_n = \sum_0^{n} u_k (c,\alpha)$可求和)，那末$\sum_0^{\infty} u_k$ Abel 可求和. 所谓$\sum_0^{\infty} u_k$ Abel 可和于 s 是指

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \sum_0^{\infty} u_k x^k = s .$$

18. 设$f \in L^1(\mathbb{R}^n)$，记(对 $x \in \mathbb{R}^n$，记 x'为 x 方向的单位向量)

$$f_x(t) = \frac{1}{|S_{n-1}|} \int_{S_{n-1}} f(x + tx')d\sigma(x')$$

$$= \frac{1}{|S_{n-1}| t^{n-1}} \int_{|\xi|=t} f(x+\xi)d\sigma(\xi), \quad 0 < t < \infty ,$$

$$S_R^{\alpha}(f,x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{|\xi| \leqslant R} \left(1 - \frac{|\xi|^2}{R^2}\right)^{\alpha} \hat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi} d\xi$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{R^n} BR_R^{\alpha}(y) f(x-y) dy ,$$

其 中 $\alpha \in \mathbb{C}$， $\mathrm{Re}\alpha > -1$，

$$BR_R^\alpha(y)=c(R|y|)^{-\frac{n}{2}-\alpha}J_{\frac{n}{2}+\alpha}(R|y|)\ (J\ \text{是 Bessel 函数})$$

是Bochner－Riesz 核．$\alpha=\dfrac{n-1}{2}=\alpha$ 称为临界指标．关于临界指标的 $B-R$ 求和在给定点的收敛有如下结果．设

$$\int_0^t u^{n-1}(f_x(u)-f(x))du=o(t^n),\quad t\to 0,$$

$$\int_t^\eta \frac{|f_x(u+t)-f_x(u)|}{u}du=o(1),\quad t\to 0,\eta>0\text{ 固定},$$

则 $\lim\limits_{R\to\infty} S_R^{\alpha_0}(f,x)=f(x)$．而函数 $f_x(t)$ 作为 t 的函数在 $[0,\eta]$ 上有界变差(某个 $\eta>0$ 固定)是上述第二个条件的充分条件．进一步，$f_x(t)$ 有界变差可以改进为调和有界变差．所谓调和有界变差见第四章有关的 HBV 概念．这些结果属于陆善镇．见陆善镇，王昆阳[LW]．

19．设 $F(x)$ 是 $\mathbb{T}$ 上有界变差函数，$dF\sim\sum\limits_{-\infty}^{\infty}c_n e^{inx}$．证明

$$\frac{1}{n}\sum_{-n}^{n}c_k e^{ikx_0}\to\frac{1}{\pi}(F(x_0+0)-F(x_0-0)).$$

只需减去题 5 中函数 $D(x)$ 的适当倍数便可将问题化为 F 在 x_0 连续的情形．不妨设 $x_0=0$．此时问题化为证明

$$\sum_{-n}^{n}c_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_n(t)dF(t)=o(n).$$

设 F 如上，E 是其至多可列个间断点的集合，$\{d_k\}$ 是对应的跳跃的集合．则当 $x\notin\{x_k-x_j:x_k,x_j\in E\}$ 时，积分

$$F^*(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x+t)dF(t)$$

是按 Riemann – Stieltjes 积分确切地有定义的，且 $F^*(x)$除这个至多可列点集外是有界变差的．故在这个集上可自然地补充定义．我们对 $F^*(x)$在这个集合上的取值是不关心的．我们只需要知道 $F^*(x)$在 $x=0$ 的跳跃值为 $F^*(+0)-F^*(-0)=\frac{1}{2\pi}\sum|d_k|^2$, 同时 dF^* 的 Fourier – Stieltjes 展开式为（见A. Zygmund [Zy]）

$$dF^*\sim\sum_{-\infty}^{\infty}|c_n|^2e^{inx}.$$

应用刚才得到的事实于这个 F^* 即得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\sum_{-n}^{n}|c_k|^2=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\sum_{-\infty}^{\infty}|d_k|^2.$$

这特别说明有界变差函数 F 连续当且仅当 $\frac{1}{n}\sum_{-n}^{n}|c_k|^2\to 0$.

20. 设 $\sum_{-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$ 为任意一个三角级数，如果它是某个 $f\in L^p\ (1\leqslant p\leqslant\infty)$ 或 $f\in C$ 的 Fourier 级数，或某个有界变差函数 F 的 Fourier – Stieltjes 级数，则分别记

$$\sum_{-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}\in L^p,\in C,\in S.$$

证明，$\sum_{-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}\in C$, 当且仅当 σ_n 一致收敛；$\sum_{-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}\in L^\infty$, 当且仅当 σ_n 一致有界；$\sum_{-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}\in S$（或 S_+），当且仅当 $\|\sigma_n\|_1\leqslant c$,（或 σ_n

$\geqslant 0$); $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \in L^p$, $1<p<\infty$，当且仅当 $\|\sigma_n\|_p \leqslant c$; $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \in L^1$，当且仅当 $F_n(x)=\int_0^x \sigma_n(t)dt$ 一致绝对连续（或者当且仅当 $\|\sigma_n - f\|_1 \to 0$）.

21. 设 A,B 表示三角级数的两个类（例如题 20 中定义的一些类），$\{\lambda_n\}$是任意一个复数序列. 说$\{\lambda_n\}$是型(A,B)的乘子，如果

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_n c_n e^{inx} \in B, \ \forall \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \in A .$$

证明$\{\lambda_n\}$是型(L^∞, L^∞)，(L^1, L^1)，(C,C)，以及(S,S)型的乘子，当且仅当 $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda_n e^{inx} \in S$.

22. 除了dela Vallée－Poussin 核以外，下述 Jackson 核也能实现三角逼近的最佳逼近阶. 对 $n\in \mathbb{Z}_+$，定义

$$J_n(t)=\lambda_n^{-1}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^4, \ \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t)dt=1 .$$

则 $J_n(t)$是偶的非负 $2n-2$ 次三角多项式. 这个断言可由如下两个初等三角等式证得:

$$\frac{1}{2}+\cos t+\cdots+\cos nt=\frac{\sin(2n+1)t}{2\sin\frac{t}{2}},$$

$$\sin\frac{t}{2}+\cdots+\sin\frac{(2n-1)t}{2}=\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$$

注意

$$\lambda_n \approx \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin nt}{t} \right)^4 dt \approx n^3 \int_0^{n\pi} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^4 dt \approx n^3 .$$

完全类似地，对 $k=0,1,2$,有

$$\int_0^{\pi} (nt)^k J_n(t)dt \approx \frac{1}{\lambda_n} \int_0^{\pi} (nt)^k \left(\frac{\sin nt}{t} \right)^4 dt$$

$$\approx \frac{n^3}{\lambda_n} \int_0^{n\pi} \frac{\sin t^4}{t^4} dt \approx 1 .$$

定义 Jackson 算子

$$J_n(f,x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)J_n(t)dt ,$$

我们断言

$$\|f - J_n(f)\|_\infty \leqslant c\omega^*(f, \frac{1}{n}), \quad \forall n .$$

其中 $\omega^*(f,h) = \sup\limits_{0<\delta\leqslant h} \|f(x+\delta)+f(x-\delta)-2f(x)\|_\infty$. 事实上，这因

$$|J_n(f,x)-f(x)| = \left| \int_0^{\pi} (f(x+t)+f(x-t)-2f(x))J_n(t)dt \right|$$

$$\leqslant \int_0^{\pi} \omega^*(f,t)J_n(t)dt \leqslant \int_0^{\pi} (nt+1)^2 \omega^*(f, \frac{1}{n})J_n(t)dt$$

$$\leqslant c\omega^*(f, \frac{1}{n}), \quad \forall n .$$

这里用到(修改的)连续模的性质：$\omega^*(f,\lambda\delta)\leqslant(\lambda+1)^2\omega^*(f,\delta)$，$\lambda$ 为正实数.

23. 关于逼近的饱和类. 考虑 $C(\mathbb{T})$ 中函数用线性算子序列 $\{l_n\}$ 的最佳逼近. 设 $\{\varepsilon_n\}$ 是一趋于 0 的正数序列. 假设存在非常数函数 $f\in C$ 使 $\|f-l_n(f)\|_\infty=O(\varepsilon_n)$，同时 $\lim \dfrac{\|f-l_n(f)\|}{\varepsilon_n}=0$ 只对常数函数成立，则称线性算子序列 $\{l_n\}$ 对空间 C 是饱和的，称 $\{\varepsilon_n\}$ 是 $\{l_n\}$ 的最佳逼近阶，并称使得 $\|f-l_n(f)\|_\infty=O(\varepsilon_n)$ 的所有函数 f 组成的 C 的子集为 $\{l_n\}$ 关于 $\{\varepsilon_n\}$ 的饱和类. 现考虑 $l_n=\sigma_n$ 的情形. 证明 $\{\sigma_n\}$ 对空间 C 是饱和的，$\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ 是其最佳逼近阶.（我们已在 §2.3 指出 $\|f-\sigma_n(f)\|_\infty=o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 蕴含了 f 是常数函数. 因此只需说明存在 $f\not\equiv c$ 使得 $\|f-\sigma_n(f)\|_\infty=O\left(\dfrac{1}{n}\right)$. 试求出对应的饱和类(在本节习题中找出答案.)）

24. 关于宽度. 设 B 是 Banach 空间，A 与 A_1 是 B 的两个子集. 则 A 离 A_1 的偏差定义为

$$E_{A_1}(A)=\sup_{f\in A}\inf_{g\in A_1}\|f-g\|.$$

特别地考虑 A_1 是 B 中由有限个元素张成的 n 维线性子空间 B_n，则 $E_{B_n}(A)$ 为用 B_n 逼近 A 的逼近阶. 令 B_n 跑遍 B 的所有 n 维子空间及其所有平移，取下确界，即

$$d_n(A)=\inf_{B_n}E_{B_n}(f),$$

它称为 A 在 B 中的第 n 宽度. 使 $d_n(A)$ 达到的某个 B_n（它是 n

维子空间或者它的适当平移)便称为对应的极子空间. 证明有关 $d_n(A)$ 的如下简单性质: $d_n(A)$随 A 增大而增大, 随 n 增大而减小, 此外当 A 紧时, $d_n(A)\to 0$.

25. 证明 $\mathbb{Z}$ 上正定序列的刻划定理(G. Herglotz): $\{a_n\}_{-\infty}^{\infty}$ 是正定序列, 当且仅当存在 $\mu\in M_+(\mathbb{T})$使 $\hat{\mu}(n)=a_n$, $\forall n$,

26. 设 $\{f_n\}\subset A(\mathbb{T})$, $\|f_n\|_{A(\mathbb{T})}\leqslant 1$, 且 $f_n\to f$ 一致成立. 证明 $f\in A(\mathbb{T})$, 且 $\|f\|_{A(\mathbb{T})}\leqslant 1$. 但一般推不出 $\|f-f_n\|_{A(\mathbb{T})}\to 0$. 若此外还有 $\|f_n\|_{A(\mathbb{T})}\to\|f\|_{A(\mathbb{T})}$, 则 $\|f_n-f\|_{A(\mathbb{T})}\to 0$.

27. Fourier 分析中, $\mathbb{R}$ 上某些事实可以由 $\mathbb{T}$ 上对应的事实来得到, 下面是这样的一个例子. 设我们要证明关于 Hilbert 变换 $f\to Hf$ 关于 L^p 有界性的 M. Riesz 定理, 假设 $\mathbb{T}$ 上的对应事实是知道的. 设$f\in L^p(\mathbb{R})$, 定义

$$g_n(x)=\frac{1}{2n\pi}\int_{-n\pi}^{n\pi}f(t)\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x-t}{2n}}dt,\ |x|<n\pi.$$

则 $g_n(nx)$ 是 $f(nx)$的共轭函数, $\{x\}<\pi$. 考虑 $Hf(x)$与 $g_n(x)$ 的误差 $\delta_n(x)=Hf(x)-g_n(x)$. 有

$$\delta_n(x)=\frac{1}{2\pi n}\int_{-n\pi}^{n\pi}f(t)\left(\frac{2n}{x-t}-\operatorname{ctg}\frac{x-t}{2n}\right)dt$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{|t|>n\pi}\frac{f(t)}{x-t}dt=\alpha_n+o(1).$$

对任意取定的 x, 只要 n 充分大, 便有

$$\left|\frac{2n}{x-t}-\operatorname{ctg}\frac{x-t}{2n}\right|\leqslant c,\ \forall t\in(-n\pi,n\pi),$$

其中 c 依赖于 x, 因此 $\alpha_n=o(1)$(不必对 x 一致). 由 $\mathbb{T}$ 上的结果我们有

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi}|g_n(nx)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant c_p\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(nx)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\left(\int_{-n\pi}^{n\pi}|g_n(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant c_p\left(\int_{-n\pi}^{n\pi}|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant c_p\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

先将左边积分限换为 $n_0\leqslant n$，令 $n\to\infty$，再令 $n_0\to\infty$，便得

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}|Hf(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant c_p\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

且不增大$\mathbb{T}$时的范数c_p. 这个思想在其他一些类似的问题上有用.

28. 证明$\{e^{ix\cdot\xi}\}_{\xi\in\mathbb{R}^n}$族中任意有限个函数的正系数线性组合是正定函数.

29. 设$f\in L^1(\mathbb{R}^n)$且是正定函数，则$\hat{f}\geqslant 0$，且$\hat{f}\in L^1(\mathbb{R}^n)$，从而点态意义下的逆转公式

$$f(x)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{n}}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi$$

成立.

30. 设F是$\mathbb{R}^n$中有界闭集，G是$\mathbb{R}^n$中开集，且$F\subset G$. 证明存在$f\in L^1\cap L^2$使$\hat{f}\in C_{00}(\mathbb{R}^n)$且

$$\chi_F\leqslant\hat{f}\leqslant\chi_G.$$

31. 设$f\in L^2(\mathbb{R}^n)$. 说f平移生成L^2，如果f的平移的有限线性组合可以逼近L^2中的任意元素. 证明f平移生成L^2，等价于$\{e^{i\xi\cdot x}\hat{f}(\xi)\}_{x\in\mathbb{R}^n}$线性张成$L^2$，这是 Plancherel 定理的结果. 而$\{e^{i\xi\cdot x}\hat{f}(\xi)\}_{x\in\mathbb{R}^n}$不能张成$L^2$，等价于存在非零$g\in L^2$，使

$$\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(\xi)g(\xi)e^{i\xi\cdot x}d\xi=0,\ \forall x\in\mathbb{R}^n.$$

由 Fourier 变换的唯一性，这等价于 $\hat{f}(\xi)g(\xi)=0$, a.e.，即 $\hat{f}(\xi)$ 在某个正测度集合上 a.e. 为 0. 因此得到断言：$f\in L^2(\mathbb{R}^n)$ 平移生成 L^2，当且仅当 $\hat{f}(\xi)\neq 0$，a.e.

32. 考虑 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ 是否平移生成 L^1 的问题．此时结论是类似的，即 f 平移生成 L^1，当且仅当 $\hat{f}(\xi)\neq 0$ 处处．但问题要深刻得多．它与很多问题有联系，例如它是刻划代数的理想的所谓谱综合这类问题的一部分．此外，它也与古典的 Tauber 定理密切相关．我们下面通过 Wiener 的一般 Tauber 定理的介绍来揭示这些联系．

33. 我们已指出过 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 是一个交换 Banach 代数．设 I 是 L^1 的一个子代数，它称为一个理想，如果 $f*g\in I$，$\forall f,g$，只要其中至少一个属于 I. 证明 L^1 的闭理想确切地是那些平移不变的闭子空间．所谓子空间 B 称为平移不变的，如果 $f\in B$，$x\in\mathbb{R}^n$，则 $\tau_x f\in B$. 这样，对 L^1 的闭理想的研究便化为 L^1 的闭平移不变子空间的研究．

34. 所谓 Tauber 定理是指这样一类定理，它断言由级数 $\sum_0^\infty u_k$ 的某个线性可求和性，加上某些 Tauber 条件，便可推出 $\sum_0^\infty u_k$ 的其他许多正规线性可求和性，甚至 $\sum_0^\infty u_k$ 自己的收敛性．N. Wiener 把问题化为如下问题：假设 $\varphi\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$，$f\in L^1(\mathbb{R}^n)$，使得

$$\lim_{x\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}f(x-y)\varphi(y)dy=a\int_{\mathbb{R}^n}f(x)dx,$$

问题是在什么样的条件下，可以推出 $\forall g\in L^1$，也有

$$\lim_{x\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)\varphi(y)dy = a\int_{\mathbb{R}^n} g(x)dx.$$

之所以说这是一种类型的Tauber定理，是因为$\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\varphi(y)dy$ 本质上是 φ 的一种平均，特别当 $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx=1$ 时可以看得更清楚. Wiener 的一般的Tauber 定理说只要 $\hat{f}(\xi)\neq 0$ 处处，便能由 φ 的 f 平均的收敛（是一种求和）推出任意另外的 g 平均的收敛；而且只要在 φ 上加上一些轻微条件，还能推出 φ 自己的收敛. Wiener 的一般的 Tauber 定理与 L^1 的闭平移不变子空间的研究的关系来自如下事实：如果 g 属于由 f 平移生成的闭子空间内，则由

$$\lim_{x\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\varphi(y)dy = a\int_{\mathbb{R}^n} f(y)dy,$$

立刻推出上式对用 g 代替 f 也成立. 这样，问题便化为 f 生成的平移不变子空间是否就是 L^1 的问题了.

35. 对 $L^1(\mathbb{R}^n)$的闭理想 I 的研究，一个有趣的问题是所谓谱综合. 设 I 是 $L^1(\mathbb{R}^n)$的一个闭理想，记

$$Z(I)=\{\xi\in\mathbb{R}^n:\hat{f}(\xi)=0,\ \forall f\in I\}=\bigcap_{f\in I} Z(f),$$

其中 $Z(f)=\{\xi:\hat{f}(\xi)=0\}$. 它是$\mathbb{R}^n$的一个闭子集. 反过来，设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 的任一闭子集，定义

$$I(E)=\{f\in L^1(\mathbb{R}^n):\hat{f}(\xi)=0, 对\xi\in E\},$$

则 $I(E)$是 $L^1(\mathbb{R}^n)$的一个闭理想. 证明断言

$$E=Z(I(E)),\quad \forall\,\mathbb{R}^n \text{ 的闭子集 } E.$$

注意，有些闭集不是唯一一个闭理想的 Fourier 变换的零点集. 假设某个闭集 E 是唯一一个闭理想的Fourier 变换的零点集,则这样的闭理想便由它的 Fourier 变换的零点集唯一决定. 按习惯称呼，闭理想 I 的 $Z(I)$称为 I 的谱点集，I 被 $Z(I)$决定意味着 I 被它的谱点集综合出来. 那些是唯一闭理想的零点集的闭集便称为谱综合集. 谱综合问题的任务便是对 $\mathbb{R}^n$ 的所有闭子集进行是否是谱综合集的分类. 对其他的代数可以类似地进行谱综合的研究.

36. Wiener 的一般 Tauber 定理用谱综合的语言来叙述就是，“空集是谱综合集，即它是 L^1 这个唯一闭理想的零点集”. 现在来给出这个定理的证明思想. 直观的想法是：希望任何的 $g\in L^1$ 可以表成 $h*f$，这样由 $f*\varphi\to a\int_{\mathbb{R}^n}f(x)dx$ 便推出 $g*\varphi\to a\int_{\mathbb{R}^n}g(x)dx$. 如何解方程 $g=h*f$ 呢? 用 Fourier 变换看，待求的解满足 $\hat{h}=\hat{f}^{-1}\hat{g}$. 可见，如果 $\hat{f}^{-1}$ 也是某个 L^1 中函数的 Fourier 变换，即 $\hat{f}^{-1}\in A(\mathbb{R}^n)$,(由此看出这个问题与关于 $A(\mathbb{T})$的 Lévy – Wiener 定理密切相关)则 h 很容易求出来. 有关问题参见 Rudin 的书 [Ru3].

37. 古典的 Tauber 定理是由级数 $\sum_0^\infty u_k$ 的某种可求和性推出级数自己的收敛. Pitt 指出只需在 Wiener 的一般 Tauber 定理中对 $\varphi(x)$加一点附加条件,则可推出古典的Tauber定理. 说 $\varphi(x)$ 在无穷远处是缓慢振动的，如果对任意$\varepsilon>0$, 存在 N 与 δ 使当 x,y 满足 $|x|,|y|\geq N$, $|x-y|\leq\delta$ 时，$|\varphi(x)-\varphi(y)|\leq\varepsilon$. 则

$$\int_{\mathbb{R}^n}f(x-y)\varphi(y)dy\to a\int_{\mathbb{R}^n}f(x)dx,\ f\in L^1,\hat{f}(\xi)\neq0,\text{处处},\ \varphi\in L^\infty.$$

可推出 $\varphi(y)\to a$, 当 $y\to\infty$ 时. 这只需取 $g=\frac{1}{2\delta}\chi_{[-\delta,\delta]}$，则由

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)\varphi(y)dy \to a\int_{\mathbb{R}^n} g(x)dx = a$$

便得

$$|\varphi(x)-g*\varphi(x)| = \left|\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta}(\varphi(x-y)-\varphi(x))dy\right| \leqslant \varepsilon,$$

$$\forall x,\ |x| \geqslant N+\delta,$$

$$|\varphi(x)-a| \leqslant |\varphi(x)-g*\varphi(x)| + |g*\varphi(x)-a| \leqslant 2\varepsilon,\ |x|\ 充分大.$$

这完成了证明.

38. 为了将 Wiener 的 Tauber 定理应用于处理级数收敛问题，常常需要将卷积形式的一般 Tauber 定理改变为如下形式. 考虑 $\mathbb{R}$ 情形. 设 $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$，$K_0 \in L^1(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t})$，且满足

$$\int_0^\infty K_0(t)t^{ix}\frac{dt}{t} \neq 0,\ x \in \mathbb{R},$$

以及

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^\infty K_0\left(\frac{x}{t}\right)\varphi(t)\frac{dt}{t} = 0.$$

证明上式中 K_0 可以换为任何 $K \in L^1(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t})$. 此外，$\varphi(t)$称为在无穷远处缓慢振动的. 如果 $\forall \varepsilon>0$, 存在 N 与 δ, 使得当 x, $y \geqslant N$, $\frac{1}{1+\delta} \leqslant \frac{x}{y} \leqslant 1+\delta$, 有 $|\varphi(x)-\varphi(y)| \leqslant \varepsilon$. 由此还可证明，当 $\varphi \in L^\infty$ 且无穷远处缓慢振动时，由

$$\int_0^\infty K_0\left(\frac{x}{t}\right)\varphi(t)\frac{dt}{t} \to 0\ 可推出\ \lim_{t\to\infty}\varphi(t) = 0.$$

注意，通常 $K_0 \to \int_0^\infty K_0(t)t^{-ix}\frac{dt}{t}$ 称为 Mellin 变换．它是 Fourier 变换在半直线的推广．

39. 试用上题中给出的 Tauber 定理证明古典情形的 Littlewood 定理：即若 $\lim\limits_{r\to 1}f(r)=\lim\limits_{r\to 1}\sum\limits_0^\infty u_k r^k=0$，$u_k=O\left(\frac{1}{k}\right)$，则 $\lim\limits_{k\to\infty}u_k=0$．

提示：记 S_n 为 $\sum\limits_0^n u_k$．比较 S_n 与 $f\left(1-\frac{1}{n}\right)$ 知 $\{S_n\}$是有界序列．令 $\varphi(s)=\sum\limits_0^\infty S_n\chi_{[n,n+1)}(s)$．则 $\varphi(s)$是 $\mathbb{R}_+$ 上有界函数，且是上题中意义下在无穷远处缓慢振动的．条件 $\lim\limits_{r\to 1}f(r)=0$ 变为

$$\int_0^\infty \frac{t}{x}e^{-\frac{t}{x}}\varphi(t)\frac{dt}{t}=\frac{1}{x(e^{\frac{1}{x}}-1)}f(e^{-\frac{1}{x}})\to 0,\ x\to\infty.$$

令 $K_0(u)=\frac{1}{u}e^{-\frac{1}{u}}$，则上式变为

$$\int_0^\infty K_0\left(\frac{x}{u}\right)\varphi(u)\frac{du}{u}\to 0,\ x\to\infty.$$

而 K_0 满足条件

$$\int_0^\infty K_0(u)u^{-ix}\frac{du}{u}=\Gamma(1+ix)\neq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

40. 设 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$使 $\hat{f}(\xi)$至少有一个零点．无妨设 $\xi=0$ 是其零点．证明存在 $\varphi\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$，使 $f*\varphi\equiv 0$．这样对任意 a，条件

$$\lim_{x\to\infty} f*\varphi(x)=0=a_0^{-1}a\hat{f}(0)=a\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx$$

成立．显然不可能有 $\int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)\varphi(y)dy\to a\int_{\mathbb{R}^n} g(x)dx, \forall a,g$．这说明对 Wiener 的一般 Tauber 定理，$\hat{f}(\xi)\neq 0$ 处处，是必要的．

41．证明如下形式的 Tauber 定理．设 $\sum_0^\infty u_k$ 是 Abel 可和于 s，且 $u_k=o\left(\frac{1}{k}\right)$，则

$$\sum_0^N u_k-f(r)\to 0,\ \text{其中 } N=\left[\frac{1}{1-r}\right], f(r)=\sum_0^\infty u_k r^k.$$

类似地，若 $\sum_0^\infty u_k\ (c,1)$ 可和于 s 且 $u_k=o\left(\frac{1}{k}\right)$，则 $\sum_0^\infty u_k$ 也收敛于 s．上述两命题中条件 $o\left(\frac{1}{k}\right)$ 改 $O\left(\frac{1}{k}\right)$ 结论亦然，前者属于 J.E. Littlewood，后者属于 G. H. Hardy，两者的证明要比 $o\left(\frac{1}{k}\right)$ 情形深刻．

42．除广义函数 $\mathscr{S}'$ 外，另一类常用的广义函数是 $\mathscr{D}'$．这里 $\mathscr{D}$ 是我们在 §1.6 引进的线性空间 $\{f\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$: f 有紧支集$\}$，但那里我们未曾赋给它拓扑结构．对每个 $N\in\mathbb{Z}_+$ 定义范数

$$\|\varphi\|_N=\sum_{|\alpha|\leqslant N}\|D^\alpha\varphi\|_\infty,\ \varphi\in\mathscr{D}.$$

应用这可列个范数族当然可以使 $\mathscr{D}$ 成为一个可距离化的局部凸

向量空间，如同我们对 $\mathscr{S}$ 所作的那样．但不幸的是，$\mathscr{D}$ 的这个拓扑却不能使 $\mathscr{D}$ 是完备的距离空间，因 $\mathscr{D}$ 中函数列在此拓扑下的极限不必再是紧支集的．因此这个拓扑不能用．但我们却可利用 $\{\|\cdot\|_N\}_{N\in\mathbb{Z}_+}$ 定义 $\mathscr{D}$ 的对偶空间 $\mathscr{D}'$．

定义 $\mathscr{D}$ 上的一个线性泛函 f 称为一个广义函数（或分布），如果对每个紧集 K，存在常数 c 与 $N\in\mathbb{Z}_+$ 使得

$$|\langle\varphi,f\rangle|\leqslant c\|\varphi\|_N,\ \forall\varphi\in\mathscr{D}(K)=\{f\in\mathscr{D}:\operatorname{supp}f\subset K\}.$$

如果 N 可以选得不依赖于 K，则最小的 N 称为 f 的阶．

43. 设 $d\mu$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上正规 Borel 测度（不必有界，特别地可以是 $f\,dx,f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$）定义

$$\langle\varphi,d\mu\rangle=\int_{\mathbb{R}^n}\varphi d\mu(x),\quad\forall\varphi\in\mathscr{D}.$$

则 $d\mu$ 是零阶广义函数．可证所有零阶广义函数都由这种方式产生．

广义函数 f 称为正的，如果 $\langle\varphi,f\rangle\geqslant0,\forall\varphi\in\mathscr{D},\varphi\geqslant0$．证明正的广义函数都是零阶广义函数，从而是正的正规 Borel测度．

提示：正性推出单调性．任给紧集 K，设 $\psi\in\mathscr{D}_+$，$\psi|_K=1$，则 $\forall\varphi\in\mathscr{D}(K)$，$-\|\varphi\|_\infty\psi\leqslant\varphi\psi\leqslant\|\varphi\|_\infty\psi,|\langle\varphi,f\rangle|\leqslant\langle\psi,f\rangle\|\varphi\|_\infty$．

44. 现在 $\mathscr{D}$ 与 $\mathscr{D}'$ 中赋以拓扑，使之成为局部紧拓扑向量空间．$\mathscr{D}$ 中拓扑是使所有 $f\in\mathscr{D}'$ 连续的最弱拓扑；$\mathscr{D}'$ 中拓扑是使所有 $\varphi\in\mathscr{D}$ 连续的最弱拓扑．

$\mathscr{D}$ 中拓扑不是可距离化的，但却使 $\mathscr{D}$ 是完备的，且连续地嵌入到 $\mathscr{S}$ 且稠密．$\mathscr{D}$ 中拓扑的更具体描述如下．

$\{\varphi_k\}\to0$ 在 $\mathscr{D}$ 中，当且仅当，(a)．存在紧集 K，使 $\operatorname{supp}\varphi_k\subset K$，$\forall k$；($b$)．$\forall N$，$\|\varphi_k\|_N\to0$．

提示：反证法．假设不然，分别构造零阶广义函数f，使$|\langle\varphi_k,f\rangle|\geqslant\delta>0,\forall k$，从而与$\{\varphi_k\}\to 0$矛盾．

45．最后定义广义函数支集的概念．对连续函数φ，$\mathrm{supp}\varphi\subset\{x:\varphi(x)\neq 0\}^-$．$f\in\mathscr{D}'$的支集定义如下．设$f\in\mathscr{D}'$，则

$$\mathrm{supp}f=\{x:\text{对}\ x\ \text{的每个邻域}\ U,\text{存在}\ \varphi\in\mathscr{D}(U),\ \text{使}\ \langle\varphi,f\rangle\neq 0\},$$

等价地，

$$(\mathrm{supp}f)^c=\{x:\text{存在}\ x\ \text{的邻域}\ U,\text{使}\langle\varphi,f\rangle=0,\forall\varphi\in\mathscr{D}(U)\}.$$

易知 $\mathrm{supp}f$ 是闭的（因$(\mathrm{supp}f)^c$是开的）且当f就是连续函数时，支集的两种概念是一致的．

$\mathscr{D}'$ 中各种运算类似于$\mathscr{S}'$中一样定义．

所有这些以及其他进一步有关事实见 W.F.Donoghue [Do]．

注　记

本章的内容主要参考以下专著，Zygmund[Zy]，Stein[St2]，Stein－Weiss[SW2]与 Katznelson[K]．例如§2.1，2.2，2.3，2.7 均取自［Zy］．关于高维三角逼近，程民德，陈永和([CC1—2])于五十年代首先取得重要进展，他们获得了临界指标以上的 Bochner－Riesz 平均的逼近的理想的阶，从而促进了高维三角逼近的发展．§2.4 中的 Paley－Wiener 理论（定义 4.2 至定理 4.8），主要取材于［SW2］．§2.5 关于$\mathbb{R}^n$上正定函数的处理（引理 6.6，定理 6.7）取材于［K］．§2.8 关于$\mathscr{S}$与$\mathscr{S}'$的讨论取材于［SW2］．

第三章 常用实方法

在研究高维 $\mathbb{R}^n$ 上的分析问题时，复方法往往有很大的局限性，需要建立与发展实方法. 50年代以来，以 Calderón – Zygmund 分解为里程碑，开始逐渐形成了一套强有力的实方法. 它们不仅成了近代实分析的核心，而且在其它许多领域也起了很大的作用. 本章叙述这套实方法中最基本最常用的那一些. 可以说，本书以后各章所用的方法以及许多更近代的实方法，都是在此基础上发展起来的. 这些常用的实方法，大致包括两个方面. 一方面是关于 $\mathbb{R}^n$ 上可测集的几何与测度方面的分析，如对分布函数的分解与估计，覆盖引理，以及方体 (或 $\mathbb{R}^n$)的 Calderón – Zygmund 分解等. 这是本章 §3.2 与 §3.3 的内容. 另方面是应用上面的结果，研究一些最基本最常用的算子，包括 Hardy – Littlewood 极大算子，Fefferman – Stein 的 $\#$ 函数算子，经典奇异积分算子 (以 Riesz 变换为代表)，Littlewood – Paley 的 g 函数算子等. 这些算子在实分析中之所以是基本的，是因为对许多空间的刻划与对许多其它算子的估计，都是通过它们或它们的变形实现的. 对这些算子的研究，构成了本章 §3.4 至 §3.7 的主要内容. §3.7 讲述的在偏微分方程中有重要作用的 Mihlin – Hörmander 乘子定理，可以看作这种常用实方法的第一个应用. 另外，为了完备起见，我们把最常用的泛函分析中的几个最基本的定理，在 §3.1 中作了简述，作为整个实方法的预备知识.

§3.1 泛函分析中的几个基本定理

实变理论中经常应用来自泛函分析的一些基本事实，特别是

其中最为基本的所谓三定理，即一致有界定理，开映射定理以及 Hahn – Banach 扩张定理. 除此之外还有一个更为基本的 Baire 纲定理，它不仅有独立意义，还在一致有界定理与开映射定理的建立中起关键作用. 本节便致力于这些基本定理的介绍. 本节的对象是 Banach 空间，赋范空间或更一般的距离空间.

首先介绍 Baire 纲定理.

定义(1.1) 拓扑空间 X 中集合 A 称为稠的，如果 $\overline{A}=X$，这里 $^{-}$ 表示闭包运算；称为无处稠的(或稀疏的)是指 $\overline{A}$ 的补集在 X 中稠(或等价地，任一开集中均含一个子开集与 A 的交是空的)；称为第一纲的，是指 A 可表示为可列个稀疏集的并；称为第二纲的，是指它不是第一纲的.

下面是最常见的 Baire 纲定理.

定理(1.2) 完备距离空间是第二纲的.

证明 设 X 是完备距离空间. 假设它是第一纲的. 即 $X=\bigcup\limits_{1}^{\infty}A_n$，其中每个 A_n 都是稀疏的. 则存在半径为 $\rho_1<1$ 的球 S_1，使得 $S_1\cap A_1=\phi$. 又因 A_2 是稀疏的，故在 S_1 内存在半径 $\rho_2<\dfrac{1}{2}$ 的球 S_2，使得 $S_2\cap A_2=\phi$. 一般在 S_{n-1} 内存在半径 $\rho_n<\dfrac{1}{n}$ 的球 S_n，使得 $S_n\cap A_n=\phi$. 设 S_n 的球心为 x_n，则$\{x_n\}$是 Cauchy 列. 由完备性知 $\lim\limits_{n}x_n=x_0$，$x_0\in\bigcap\limits_{1}^{\infty}S_n$，但 $x_0\notin\bigcup\limits_{1}^{\infty}A_n$. 这与 $X=\bigcup\limits_{1}^{\infty}A_n$ 矛盾. 定理证毕.

现在建立一致有界定理. 所谓一致有界定理是指下面的定理，也称 Banach – Steinhaus 定理.

定理(1.3) (Banach – Steinhaus) 设 B 是 Banach 空间，N 是赋范线性空间，$\{T_i\}$是 B 到 N 内的有界线性算子的集合，满足

$$\sup_i\|T_i(x)\|<\infty,\quad\forall x\in B. \tag{1}$$

则$\{T_i\}$是 B 到N 内的一致有界的算子族.

证明 对每个 $n\in\mathbb{Z}_+$,记

$$F_n=\{x:x\in B,\ \|T_i(x)\|\leqslant n,\ \forall i\}.$$

则每个 F_n 是 B 的闭子集, 且由(1)知 $B=\bigcup\limits_{1}^{\infty}F_n$. 根据定理(1.2), 至少有一个 F_n 不是稀疏集, 设为 F_{n_0}, 这是因为 B 不是第一纲的. 既然 F_{n_0} 是闭的, 则 F_{n_0} 必含内点 x_0. 否则与闭 F_{n_0} 不是稀疏集矛盾. 这样可设以 x_0 为心, 以 r_0 为半径的球 $S_0=S(x_0,r_0)\subset F_{n_0}$. 故 $\|T_i(x)\|\leqslant n_0$, $\forall x\in S_0$. 我们简记这事实为 $\|T_i(S_0)\|\leqslant n_0$. 记以原点为心的单位球为 S, 则 $S=\dfrac{S_0-x_0}{r_0}$. 因此

$$\|T_i(S)\|\leqslant \frac{1}{r_0}(\|T_i(S_0)\|+\|T_i(x_0)\|)\leqslant \frac{2n_0}{r_0}.$$

故

$$\|T_i\|=\sup_{x\in S}\|T_i(x)\|\leqslant\frac{2n_0}{r_0}.$$

这就证明了定理.

一致有界定理的应用很多. 本书中将多次遇到. 我们在第一章中就已经遇到了. 下述推论常被用于判别赋范线性空间的子集的有界性.

推论(1.4) 设 A 是赋范线性空间 N 内的一个非空子集. 则 A 是有界的, 当且仅当 $f(A)$是 $\mathbb{C}$ 内的有界集, $\forall f\in N^*$, 其中 N^* 是 N 的对偶空间.

证明 条件的必要性是显然的, 这因

$$|f(x)|\leqslant\|f\|\,\|x\|,\ \forall x\in A,\ \forall f\in N^*.$$

现证条件的充分性. 将 N 保范地嵌入到 N^{**} 内(即 N^* 的对偶空间). 将 A 看成 Banach 空间 N^* 上的有界线性泛函的集合, 对每个 $f\in N^*$, 有

$$\sup_x|x(f)|=\sup_x|f(x)|<\infty.$$

这样由一致有界定理知 $\|x\|_N=\|x\|_{N^{**}}\leqslant C$，$\forall x\in A$. 证毕.

下面讨论开映射定理. 我们把开映射定理证明中的主要部分收在下述引理中.

引理(1.5) 设 T 是映 Banach 空间 B 到 Banach 空间 B' 上的连续线性算子. 则每个以 B 中原点为心的球的象包含 B' 中某个以原点为心的球.

证明 设 S_r, S_r' 分别是 B, B' 中以原点为心，半径为 r 的球. 既然 $T(S_r)=T(rS_1)=rT(S_1)$，故充分地只需证明 $T(S_1)$ 包含某个 S_r'. 我们先证 $\overline{T(S_1)}$ 包含某个 S_r'. 由于 T 是映上的，知

$$B'=\bigcup_{n=1}^{\infty}T(S_n)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\overline{T(S_n)}.$$

注意到 B' 是第二纲的，因此存在某个闭集 $\overline{T(S_n)}$，设为 $\overline{T(S_{n_0})}$，包含某个内点 y_0. 既然以此点为心的任意球，特别那个完全包含在 $\overline{T(S_{n_0})}$ 内部的球，都含 $T(S_{n_0})$ 的点，那么以此点为心，一个半径小一点的球将完全包含在 $\overline{T(S_{n_0})}$ 内. 注意这个球的球心已在 $T(S_{n_0})$ 了，不妨设 y_0 就是这样的点. 现在的情况是 $y_0\in T(S_{n_0})$，且 $\overline{T(S_{n_0})}-y_0$ 以原点为内点. 这样

$$\overline{T(S_{n_0})}-y_0=\overline{T(S_{n_0})-y_0}\subset\overline{T(S_{2n_0})}\ ,$$

所以原点是 $\overline{T(S_{2n_0})}$ 的内点. 但 $\overline{T(S_{2n_0})}=2n_0\overline{T(S_1)}$. 这证明了 $\overline{T(S_1)}$ 亦以 B' 中原点为内点. 故存在 $\varepsilon>0$ 使 $S_\varepsilon'\subset\overline{T(S_1)}$.

现在我们要证 $S_\varepsilon'\subset T(S_3)$，由此便可推出我们要证的 $S_{\frac{\varepsilon}{3}}'\subset T(S_1)$. 设 $y\in S_\varepsilon'$. 则存在 $x\in S_1$ 使 $T(x)$ 与 y 任意靠近，设 $t_1\in S_1$ 使 $y_1=T(t_1)$ 满足 $\|y-y_1\|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 由于 $S_\varepsilon'\subset\overline{T(S_1)}$ 等价于 $S_{\frac{\varepsilon}{2^n}}'\subset\overline{T(S_{\frac{1}{2^n}})}$，故对此 $y-y_1\in S_{\frac{\varepsilon}{2}}'$，可以找到 $t_2\in S_{\frac{1}{2}}$，使得 $y_2=T(t_2)$ 满足 $\|y-y_1-y_2\|<\dfrac{\varepsilon}{4}$. 一般地，可以找到 $t_n\in S_{\frac{1}{2^{n-1}}}$，使得 $y_n=T(t_n)$ 满足

$$\|y-(y_1+\cdots+y_n)\|<\frac{\varepsilon}{2^n}\ ,\quad\forall n>1.$$

这样 $x_n=t_1+\cdots+t_n$ 满足 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列，并且 $\|x_n\|\leqslant\sum_1^n\|t_k\|<2$，以及 $\|y-T(x_n)\|\leqslant\frac{\varepsilon}{2^n}\to 0$. 因此 $x=\lim_{n\to\infty}x_n$ 便满足

$$y=\lim_{n\to\infty}T(x_n)=T(\lim_{n\to\infty}x_n)=T(x),\ \|x\|\leqslant 2<3.$$

这证明了 $S_r'\subset T(S_3)$. 引理证毕.

现在我们可以容易地推出下面的开映射定理.

定理(1.6) 设 T 是映 Banach 空间 B 到 Banach 空间 B' 上的连续线性算子，则 T 是开映射.

证明 设 G 是 B 中开集，要证 $T(G)$ 是 B' 中开集. 设 $y\in T(G)$，$x\in G$ 使得 $y=T(x)$. 既然 G 是开的，存在以 x 为心，r 为半径的球 $x+S_r$ (S_r 为以原点为心、r 为半径的球)完全包含在 G 中. 引理(1.5)告诉我们 $T(S_r)$ 包含某个球 S_r'. 这样 $y+S_r'$ 便是以 y 为心的球，并且完全包含在 $T(G)$ 内，这因为

$$y+S_r'\subset y+T(S_r)=T(x)+T(S_r)=T(x+S_r)\subset T(G).$$

这就证明了定理.

逆算子定理与闭图象定理都是开映射定理的直接推论.

定理(1.7) Banach 空间 B 到 B' 上的一一连续线性映射 T 必同胚.

证明 逆映射的连续性即原映射的开性. 事实上，连续性的等价定义之一是开集的原象是开集. 这样，T^{-1} 的连续性就是说，$\forall$ 开集 $G\subset B$, G 在 T^{-1} 下的原象，即 $T(G)$，是 B' 中开集，这等于说 T 是开映射. 而 T 的开性是定理(1.6)的结果. 定理证毕.

推论(1.8) 设线性空间 B 可在范数 $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ 下成为 Banach 空间，且 $\|x\|_1\leqslant c\|x\|_2$, $\forall x\in B$. 则此两范数是等价的.

证明 记 B_1, B_2 分别为 B 中赋范 $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ 所得到的 Banach 空间. 考虑由 B_2 到 B_1 的恒等算子，则它是一一映上且连续的，由定理(1.7)知此算子是一个同胚映射，故亦有 $\|x\|_2\leqslant c\|x\|_1$. 证毕.

定义(1.9) 设 T 是 Banach 空间 B 到 B' 内的线性映射. 说 T 是闭的, 如果它的图象 $(x, T(x))$ 是积 Banach 空间 $B\times B'$ (赋范 $\|(x,y)\|=\|x\|+\|y\|$) 内的闭子集.

开映射定理的另一个重要推论是下述闭图象定理.

定理(1.10) 设 T 是 Banach 空间 B 到 B' 内的线性映射. 则 T 是连续的, 当且仅当 T 是闭的.

证明 设 T 连续, $(x_n, T(x_n))$ 是 T 的图象上的收敛点列. 则 $x_n\to x$, $T(x_n)\to y$. 既然 T 是连续的, 则 $T(x_n)\to T(x)$, 故 $y=T(x)$, 即 $(x, T(x))$ 在图象上, T 是闭的获证. 反之, 在 B 中改赋范数 $\|x\|_1=\|x\|+\|T(x)\|$, 要证它是完备的, 因而是 Banach 空间 B_1. 一旦获证, 根据 $\|x\|\leqslant\|x\|_1$, 则由推论(1.8)知也有 $\|x\|_1\leqslant c\|x\|$, 从而 $\|T(x)\|\leqslant\|x\|_1\leqslant c\|x\|$. 这将完成证明. 现补证 B_1 是完备的. 设 $\{x_n\}$ 是 $\|\cdot\|_1$ 下 Cauchy 序列, 当然 $\{x_n\}$ 是 B 中、$\{T(x_n)\}$ 是 B' 中 Cauchy 序列, 故存在 $x\in B$ 与 $y\in B'$ 使得 $x_n\to x$ 在 B 中, $T(x_n)\to y$ 在 B' 中. 由 T 的闭性, 有 $y=T(x)$. 这个 x 便是 $\{x_n\}$ 在 B_1 中的极限, 这因

$$\begin{aligned}\|x_n-x\|_1&=\|x_n-x\|+\|T(x_n)-T(x)\|\\&=\|x_n-x\|+\|T(x_n)-y\|\to 0.\end{aligned}$$

这证明了 B_1 是完备的. 定理获证.

最后讨论 Hahn－Banach 扩张定理. 考虑赋范线性空间 N 到它的纯量(实数或复数)空间内的线性映射的方法是代数内常用的所谓表示论的方法. 因此赋范线性空间上是否有足够多的连续线性泛函存在, 便成了研究由连续线性泛函构成的共轭空间 N^* 这一类问题的基础. 正是 Hahn－Banach 定理对此作了肯定的回答. 但因这个定理证明比较麻烦, 我们建议读者去参考一般的泛函分析书籍, 而我们则只局限于给出这个定理的两个很有用的推论. 当然为了查阅方便, 我们仍给出 Hahn－Banach 定理的叙述.

定理(1.11) (Hahn－Banach) 设 N 是赋范线性空间, M 是 N 的线性子空间, f 是定义于 M 上取值于纯量空间(实或复)内

的线性泛函．则 f 有到整个空间N 上的延拓 F，它满足：(i)当 $x\in M$ 时 $F(x)=f(x)$；(ii) $\|f\|_M=\|F\|$.

作为它的一个推论我们有

定理(1.12) 设 N 是赋范线性空间，x_0 是 N 的非零向量．则存在 N^* 中元素 f 使 $f(x_0)=\|x_0\|$，且 $\|f\|=1$.

证明 考虑由 x_0 生成的线性子空间 $M=\{\lambda x_0\}$．定义 f，$f(\lambda x_0)=\lambda\|x_0\|$．则 $f(x_0)=\|x_0\|$，$\|f\|=1$．由定理(1.11)知存在 f 到 N 上的延拓，且保持 $\|f\|=1$ 不变．这样得到的 N^* 中的元素便满足定理的要求．证毕．

注 这特别推出 N^* 可分辨 N，即 $\forall x, y\in N$，$x\neq y$，存在 $f\in N^*$ 使 $f(x)\neq f(y)$．这只需如定理(1.12)证明中那样找到 f 使 $f(x-y)=\|x-y\|\neq 0$ 便可．

Hahn－Banach 扩张定理还有如下推论．

定理(1.13) 设 N 是赋范线性空间，M 是它的闭线性子空间，$x_0\notin M$．则存在 $f\in N^*$ 使 $f(M)=0$，$f(x_0)\neq 0$.

证明 N 到商空间 N/M 上的典范映射 π 是一个连续线性映射，使得 $\pi(M)=$ 商空间的零元，$\pi(x_0)=x_0+M$ 不是零元．由定理(1.12)知存在 $\varphi\in(N/M)^*$ 使 $\varphi(x_0+M)\neq 0$．现定义 $f=\varphi\circ\pi$．则它是 N^* 中元素，满足 $f(M)=\varphi\circ\pi(M)=0$，$f(x_0)=\varphi\circ\pi(x_0)=\varphi(x_0+M)\neq 0$．这就证明了定理．

注 这特别推出 N^* 可分辨 N 的任意闭子空间与不在此空间内的任意向量．

§3.2 可测函数的分布函数与非增重排函数

一般测度空间上，函数的可积性只取决于函数取“大”值的集合究竟有多大，而与这些“大”值究竟在哪里取到是没有关系的．刻划这种“大小”性质的一个恰当而又方便的概念便是所谓分布函数．对函数的分布函数的估计可以说是实分析方法区别于其他方

法的特点之一，由此可见这个概念在实分析中的地位．与这个概念密切相关的另一个概念是函数的重排，粗略地说，重排的意思是把一个定义在某个测度空间上的可测函数，用定义在另一个测度空间(如区间 $[0,\infty)$ 带 Lebesgue 测度)上有相同取值情况的可测函数(称为原来函数的重排函数)来代替．正是这种重排的概念给许多问题带来了方便，例如我们将在第七章 Lorentz 空间与 §3.5 及第七章内插理论的讨论中所见到的那样．本节将讨论这两个概念的基本性质．

定义(2.1) 设 f 是一般测度空间 $(X,\mathscr{S},\mu)$ 上的可测函数．如下定义的函数

$$\sigma(\lambda)=\sigma_f(\lambda)=|\{|f|>\lambda\}|,\quad \forall\lambda>0, \tag{1}$$

称为 f 的分布函数．如下定义的函数

$$f^*(t)=\inf\{\lambda:\sigma(\lambda)\leqslant t\},\quad \forall t>0, \tag{2}$$

称为 f 的非增重排函数．

下面的命题给出了这两个函数的最基本性质．

命题(2.2) $\sigma(\lambda)$ 与 $f^*(t)$ 都是右连续的非增函数．它们满足

$$\sigma(f^*(t))\leqslant t,\ \forall t>0, \tag{3}$$

$$f^*(\sigma(\lambda))\leqslant\lambda,\ \forall\lambda>0. \tag{4}$$

此外，有如下集合等式

$$\{t:f^*(t)>\lambda\}=\{t:t<\sigma(\lambda)\},\quad \forall\lambda>0. \tag{5}$$

最后，它们满足如下对两个变元同时的次可加性

$$\sigma_{f+g}(\lambda_1+\lambda_2)\leqslant\sigma_f(\lambda_1)+\sigma_g(\lambda_2),\forall f,g,\ \forall\lambda_1,\lambda_2>0, \tag{6}$$

$$(f+g)^*(t_1+t_2)\leqslant f^*(t_1)+g^*(t_2),\ \forall f,g,\forall t_1,t_2>0. \tag{7}$$

证明 $\sigma(\lambda)$ 右连续是因为等式 $\{|f|>\lambda\}=\bigcup\limits_n\left\{|f|>\lambda+\dfrac{1}{n}\right\}$，以及测度的单调性与(从上)连续性．现证式(3)与(4)．如果 $f^*(t)=\infty$，则依定义有 $\sigma(\infty)=0$[①]，故式(3)自然成立．当

① 注意 $\sigma(\lambda)$ 在 ∞ 远可以有跳跃，即 $\sigma(\infty)=0$，但 $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\sigma(\lambda)>0$.

$f^*(t)<\infty$ 时，由 $f^*(t)$的定义，有

$$\sigma(f^*(t)+\varepsilon)\leqslant t,\ \forall\varepsilon>0.$$

这样，由 $\sigma(\lambda)$的右连续性得 $\sigma(f^*(t))\leqslant t$. 式(3)获证. 现证式(4). 如果 $\sigma(\lambda_0)=\infty$，同样有 $f^*(\infty)=0$，故不必证. 设 $\sigma(\lambda_0)<\infty$. 则 $\lambda_0\in\{\lambda:\sigma(\lambda)\leqslant\sigma(\lambda_0)\}$，故

$$f^*(\sigma(\lambda_0))=\inf\{\lambda:\sigma(\lambda)\leqslant\sigma(\lambda_0)\}\leqslant\lambda_0.$$

这样，式(4)也获证. 现证 $f^*(t)$的右连续性. 如果 $f^*(t+0)<f^*(t)$，则存在 a, $0<a<\infty$ 使 $f^*(t+\varepsilon)<a<f^*(t)$, $\forall\varepsilon>0$. 这样由式(3)得

$$\sigma(a)\leqslant\sigma(f^*(t+\varepsilon))\leqslant t+\varepsilon,\ \forall\varepsilon>0.$$

令 $\varepsilon\to 0$ 即得 $\sigma(a)\leqslant t$. 再由式(4)即得矛盾:$f^*(t)\leqslant a$. 这样，$\forall t$ 都有 $f^*(t+0)=f^*(t)$. 这证明了 f^* 的右连续性. 现证等式(5)，它也是式(3)与(4)的结果. 事实上，$\forall t,\lambda>0$, 我们有

$$\sigma(\lambda)\leqslant t\Rightarrow f^*(t)\leqslant f^*(\sigma(\lambda))\leqslant\lambda,$$
$$f^*(t)\leqslant\lambda\Rightarrow\sigma(\lambda)\leqslant\sigma(f^*(t))\leqslant t,$$

这说明 $\{t:\sigma(\lambda)\leqslant t\}=\{t:f^*(t)\leqslant\lambda\}$，此即式(5). 现剩下证明式(6)与(7). 我们有

$$\{|f+g|>\lambda_1+\lambda_2\}\subset\{|f|>\lambda_1\}\cup\{|g|>\lambda_2\},$$
$$\sigma_{f+g}(\lambda_1+\lambda_2)\leqslant\sigma_f(\lambda_1)+\sigma_g(\lambda_2).$$

式(6)获证. 再由于(不妨设 $f^*(t_1)$与$g^*(t_2)$都 $<\infty$，否则(7)显然)

$$\sigma_{f+g}(f^*(t_1)+g^*(t_2))\leqslant\sigma_f(f^*(t_1))+\sigma_g(g^*(t_2))\leqslant t_1+t_2,$$

故 $(f+g)^*(t_1+t_2)\leqslant f^*(t_1)+g^*(t_2)$. (7)获证. 命题证毕.

式(5)说明 f 与 f^* 有相同的分布函数

$$|\{f^*(t)>\lambda\}|\leqslant|\{t:t<\sigma(\lambda)\}|=\sigma(\lambda)=|\{|f|>\lambda\}|.$$

这就是 f^* 是 f 的重排函数的意义.

下面的定理揭示了这两个概念完全反映了函数本身的可积性质.

定理(2.3) 设 $\Phi(u)$是 $\mathbb{R}_+$ 到 $\mathbb{R}_+$ 的连续增(不减)函数，满

足 $\Phi(0)=0$. 则对一般测度空间 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ 上的任意可测函数 f 与 $\lambda>0$ 有

$$\int_{\{|f|\leqslant\lambda\}} \Phi(|f|)\,d\mu=\int_{\sigma(\lambda)}^{\infty} \Phi(f^*(t))\,dt$$

$$=\int_0^{\lambda}(\sigma(s)-\sigma(\lambda))\,d\Phi(s), \quad (8)$$

$$\int_{\{|f|>\lambda\}} \Phi(|f|)\,d\mu=\int_0^{\sigma(\lambda)} \Phi(f^*(t))\,dt$$

$$=\int_0^{\infty}\sigma(s)\wedge\sigma(\lambda)\,d\Phi(s).\text{[1]} \quad (9)$$

证明 在 $[0,\infty)\times X$ 上考虑集合

$$E=\{|f(x)|>t\},$$

它显然是二元可测的. 记 $E_x=\{t\in[0,\infty):(t,x)\in E\}$, 以及 $E_t=\{x:(t,x)\in E\}$. 显然有

$$t\in E_x \Leftrightarrow (t,x)\in E \Leftrightarrow x\in E_t.$$

这就是说下面的三个特征函数 χ 相等:

$$\chi_{E_x}(t)=\chi_E(t,x)=\chi_{E_t}(x).$$

因此

$$\int_{\{|f|\leqslant\lambda\}} \Phi(|f|)\,d\mu(x)=\int_{\{|f|\leqslant\lambda\}}\int_0^{|f|(x)} d\Phi(t)\,d\mu(x)$$

$$=\int_X \chi_{\{|f|\leqslant\lambda\}}(x)\int_0^{\infty}\chi_{E_x}(t)\,d\Phi(t)\,d\mu(x)$$

---

[1] 注 $a\wedge b=\min(a,b)$, 类似地 $a\vee b=\max(a,b)$.

$$=\int_X\int_0^{\infty}\chi_{\{|f|\leqslant\lambda\}}(x)\chi_E(t,x)d\Phi(t)d\mu(x)$$

$$=\int_0^{\infty}\int_X\chi_{\{|f|\leqslant\lambda\}}(x)\chi_{E_t}(x)d\mu(x)d\Phi(t)$$

$$=\int_0^{\infty}\int_X\chi_{\{t<|f|\leqslant\lambda\}}(x)d\mu(x)d\Phi(t)$$

$$=\int_0^{\lambda}(\sigma(t)-\sigma(\lambda))d\Phi(t).$$

此外，我们也有(类似地记 $E=\{f^*(t)>s\}$，$E_t=\{s:f^*(t)>s\}$，$E_s=\{t:f^*(t)>s\}$. 注意 $E_s=\{t:t<\sigma(s)\}$.)

$$\int_{\sigma(\lambda)}^{\infty}\Phi(f^*(t))dt=\int_{\sigma(\lambda)}^{\infty}\int_0^{f^*(t)}d\Phi(s)dt$$

$$=\int_0^{\infty}\chi_{\{t\geqslant\sigma(\lambda)\}}(t)\int_0^{\infty}\chi_{E_t}(s)d\Phi(s)dt$$

$$=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\chi_{\{t\geqslant\sigma(\lambda)\}}(t)\chi_{\{t<\sigma(s)\}}(t)dtd\Phi(s)$$

$$=\int_0^{\lambda}(\sigma(s)-\sigma(\lambda))d\Phi(s).$$

这就证明了式(8). 式(9)的证明是类似的. 定理证毕.

如在式(8)中令 $\lambda=\infty$ (注意 $\sigma(\infty)=0$, 虽然, $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\sigma(\lambda)$ 不必为0)或在式(9)中令 $\lambda=0$, 即得

$$\int_X \Phi(|f|)d\mu=\int_0^\infty \Phi(f^*(t))dt=\int_0^\infty \sigma(\lambda)d\Phi(\lambda). \quad (10)$$

为了以后(第七章)讨论 Lorentz 空间的需要，我们再给出一个存在于分布函数与重排函数表达的积分之间的等式.

定理(2.4) 设 $\alpha>-1$，$\Phi(u)$如定理(2.3)中所述. 则

$$\int_0^\infty t^\alpha \Phi(f^*(t))dt=\frac{1}{\alpha+1}\int_0^\infty \sigma(\lambda)^{\alpha+1}d\Phi(\lambda). \quad (11)$$

证明是类似的.

为了记忆，式(8)与(9)中的第二个等式，以及式(10)中的等式可形式地认为是经过变量代换与分部积分所得. 但注意，这是不严格的. 因为 $\sigma(\lambda)$与$f^*(t)$并不是严格意义下的互逆函数，且分部积分出来的被积出项也不容易证明为0(事实上也不必为0).

分布函数与重排函数这两个概念是比较好处理的对象，因此它们在积分估计中很有用处. 为此，有必要再讨论它们的一些性质. 首先看，在函数序列的常见收敛下，其分布函数与重排函数有怎样的极限表现.

定理(2.5) 设非负函数序列$\{f_n\}$单调增地几乎处处收敛于f，则 $\sigma_{f_n}(\lambda)$与$f_n^*(t)$分别处处收敛于$\sigma_f(\lambda)$与$f^*(t)$.

证明 由

$$\{f>\lambda\}=\bigcup_n \{f_n>\lambda\},$$

知$\sigma_f(\lambda)=\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{f_n}(\lambda)$，$\forall\lambda>0$. 此外注意若$|f|\leqslant|g|$，则$f^*(t)\leqslant g^*(t)$，这样$\{f_n^*(t)\}$单调增地收敛. 设在$t>0$处，$f_n^*(t)=\lambda_n\nearrow\widetilde{\lambda}_0<\lambda_0=f^*(t)$. 则

$$\sigma_{f_n}(\widetilde{\lambda}_0)\leqslant\sigma_{f_n}(\lambda_n)=\sigma_{f_n}(f_n^*(t))\leqslant t,$$

由刚证明的事实有$\sigma_f(\widetilde{\lambda}_0)\leqslant t$. 故$f^*(t)\leqslant\widetilde{\lambda}_0$. 这与$\lambda_0>\widetilde{\lambda}_0$矛盾.

这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n^*(t)=f^*(t)$, $\forall t>0$. 定理证毕.

定理(2.6) 设 f 是可测函数, $\{f_n\}$是可测函数列. 则如下三个断言等价:

(a) $\{f_n\}$依测度收敛于 f,

(b) $\sigma_{f_n-f}(\lambda)\to 0$, $\forall \lambda\in[\lambda_0,\infty)$一致, $\lambda_0>0$ 任意,

(c) $(f_n-f)^*(t)\to 0$, $\forall t\in[t_0,\infty)$一致, $t_0>0$ 任意.

此外, (a), (b), (c)之一推出在 $\sigma_f(\lambda)$与 $f^*(t)$的连续点处有

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_{f_n}(\lambda)=\sigma_f(\lambda),\quad \lim_{n\to\infty} f_n^*(t)=f^*(t).$$

证明 设(a)成立, 则对任意 $\varepsilon>0$, $\delta>0$, 有

$$\left|\{x:|f_n-f|>\varepsilon\}\right|\leqslant\delta,\ 只要\ n\geqslant n_0,$$

此即 $\sigma_{f_n-f}(\varepsilon)\leqslant\delta$. 因此 $\forall t\in[\varepsilon,\infty)$, 有

$$\sigma_{f_n-f}(t)\leqslant\delta,\ \forall t\in[\varepsilon,\infty),\ 只要\ n\geqslant n_0.$$

从而(b)获证. 现设(b)成立. 则 $\forall\varepsilon>0$, $\delta>0$, $\exists n_0$ 使

$$\sigma_{f_n-f}(\varepsilon)\leqslant\delta,\quad n\geqslant n_0.$$

因此 $(f_n-f)^*(\delta)\leqslant\varepsilon$. 故 $\forall t\in[\delta,\infty)$, 只要 $n\geqslant n_0$, 便有

$$(f-f_n)^*(t)\leqslant\varepsilon.$$

从而(c)获证. 现设(c)成立. 则 $\forall\varepsilon>0$, $\delta>0$, $\exists n\geqslant n_0$, 使

$$(f-f_n)^*(\delta)\leqslant\varepsilon.$$

从而 $\sigma_{f-f_n}(\varepsilon)\leqslant\delta$, 只要 $n\geqslant n_0$. 此即$\{f_n\}$依测度收敛于 f.

现设(a), (b), (c)之一成立. λ 是 $\sigma_f(\lambda)$的连续点, 则

$$\sigma_f(\lambda+\varepsilon)\leqslant\sigma_{f-f_n}(\varepsilon)+\sigma_{f_n}(\lambda),$$
$$\sigma_{f_n}(\lambda)\leqslant\sigma_{f-f_n}(\varepsilon)+\sigma_f(\lambda-\varepsilon).$$

令 $n\to\infty$ 即得

$$\sigma_f(\lambda+\varepsilon)\leqslant\underline{\lim}\,\sigma_{f_n}(\lambda)=\overline{\lim}\,\sigma_{f_n}(\lambda)\leqslant\sigma_f(\lambda-\varepsilon).$$

令 $\varepsilon\to 0$, 由 $\sigma_f(\lambda+0)=\sigma_f(\lambda-0)$, 即得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{f_n}(\lambda)$存在, 且为 $\sigma_f(\lambda)$. 类似地可证关于 $f_n^*(t)$在 $f^*(t)$的连续点收敛于 $f^*(t)$的断言. 定理获证.

注 由于 $\sigma(\lambda)$ 与 $f^*(t)$ 是单调函数，故当 $\{f_n\}$ 依测度收敛于 f 时，至多除可列个点外，有 $\sigma_{f_n}(\lambda)\to\sigma_f(\lambda)$，$f_n^*(t)\to f^*(t)$.

粗略地说，收敛的函数序列的分布函数（或重排函数）的序列也基本上是收敛的，这一事实使得我们可以用简单函数过渡到一般．而对简单函数 f，它的 $\sigma_f(\lambda)$ 与 $f^*(t)$ 都是很好求的．如设 $f=\sum_1^n c_j\chi_{E_j}$，其中 $c_1>c_2>\cdots>c_n>c_{n+1}=0$．记 $d_j=|E_1|+\cdots+|E_j|$，$1\leqslant j\leqslant n$，$d_0=0$．则

$$\sigma_f(\lambda)=\begin{cases} d_j, & c_{j+1}\leqslant\lambda<c_j,\ 1\leqslant j\leqslant n,\\ 0, & c_1\leqslant\lambda;\end{cases}$$

$$f^*(t)=\begin{cases} c_j, & d_{j-1}\leqslant t<d_j,\ 1\leqslant j\leqslant n,\\ 0, & d_n\leqslant t.\end{cases}$$

此外，我们还可把简单函数的重排函数的一个有用性质叙述为下面的命题．

命题(2.7) 设 f 是非负简单函数．则存在分解 $f=\sum_1^n f_k$，其中 $f_k=b_k\chi_{F_k}$，$b_k>0$，且使得 $f^*(t)=\sum_1^n f_k^*(t)$.

证明 设 $f=\sum_1^n c_j\chi_{E_j}$，$c_1>c_2>\cdots>c_n>c_{n+1}=0$．令 $F_k=\bigcup_1^k E_j$，$b_k=c_k-c_{k+1}$，$k=1,\cdots,n$，$f_k=b_k\chi_{F_k}$．则 $\{f_k\}$ 即为所求．事实上

$$\begin{aligned}\sum_1^n f_k(x)&=\sum_{k=1}^n b_k\sum_{j=1}^k\chi_{E_j}(x)\\ &=\sum_{j=1}^n\sum_{k=j}^n b_k\chi_{E_j}(x)=\sum_{j=1}^n c_j\chi_{E_j}(x).\end{aligned}$$

此外因为 $f_k^*(t)=b_k\chi_{[0,d_k)}(t)$，所以在区间 $[d_{j-1},d_j)$ 上，有

$$\sum_{1}^{n} f_k^*(t)=\sum_{k=1}^{n} b_k = c_j .$$

命题获证.

由于式(7)中给出的重排函数的那种次可加性不能令人满意，故我们需要找出重排函数的适当代替，即下面将要定义的$f^{**}(t)$.

定义(2.8) 设f是$(X,\mathscr{F},\mu)$上任意可测函数，定义

$$f^{**}(t)=\begin{cases}\sup\limits_{|E|\geqslant t}\dfrac{1}{|E|}\displaystyle\int_E |f(x)|dx, & 0<t<|X|,\\[2ex] \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_X |f(x)|dx, & |X|\leqslant t<\infty \ (\text{当}\ |X|<\infty).\end{cases} \tag{12}$$

命题(2.9) 对任意可测函数f，我们有

$$f^*(t)\leqslant f^{**}(t)\leqslant \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds, \forall t . \tag{13}$$

证明 先证$f^{**}(t)\leqslant \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t f^*(s)ds$. 当$|E|\geqslant t$时总有

$$\frac{1}{|E|}\int_E |f(x)|d\mu\leqslant \frac{1}{|E|}\int_0^{|E|} f^*(s)ds\leqslant \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds. \tag{14}$$

这里第一个不等式是因为

$$(f\chi_E)^*(t)\leqslant f^*(t)\chi_{[0,|E|)}(t),$$

并应用式(9)($\Phi(u)=u$). 第二个不等式是因为$f^*(s)$的非增性.

现证$f^*(t)\leqslant f^{**}(t)$. 如果存在$\lambda$使$\sigma(\lambda)=|\{|f|>\lambda\}|=t$,则

$$f^{**}(t)=\sup_{|E|\geqslant t}\frac{1}{|E|}\int_E |f(x)|d\mu$$

$$=\frac{1}{t}\int_{\{|f|>\lambda\}}|f(x)|d\mu$$

$$= \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds \geqslant f^*(t).$$

如果 t 不是 $\sigma(\lambda)$ 的取值，即 t 位于 $(\sigma(\lambda_0),\ \sigma(\lambda_0-0))$ 之间，记 $t_0=\sigma(\lambda_0-0)$．由 $t_0>t$，并且注意 $f^*(t)=f^*(t_0)$，则有

$$f^{**}(t)\geqslant \frac{1}{t_0}\int_0^{t_0} f^*(s)ds \geqslant \frac{1}{t_0}(f^*(t)t+f^*(t)(t_0-t))=f^*(t).$$

这完成了命题的证明．

式(13)对下面的应用已经足够了．不过我们附带指出，如果测度空间 $(X,\mathscr{S},\mu)$ 是无原子的，则式(13)中第二个不等式将成为等式，从而 f^{**} 如同 f^* 一样也是非增函数．这是因为无原子测度空间中的任意正测度集是无穷可分的，由此可以推出对任意正测度集 B 与数 $\alpha\in(0,|B|)$，存在 B 的子集 C 满足 $|C|=\alpha$（即测度取值的范围充满整个 $\mathbb{R}_+$ 或它的一个区间 $[0,a]$）．这个事实的证明我们也简单给出如下．令 $\mathscr{S}_1=\{C\subset B:|C|\leqslant\alpha\}$，选 $C_1\in\mathscr{S}_1$ 使

$$|C_1|\geqslant \sup\{|C|:C\in\mathscr{S}_1\}-1.$$

设 $\mathscr{S}_{n-1}$ 与 $C_{n-1}\in\mathscr{S}_{n-1}$ 已选好，令

$$\mathscr{S}_n=\{C\subset B-\bigcup_1^{n-1}C_j:|C|\leqslant\alpha-\sum_1^{n-1}|C_j|\},$$

并选 $C_n\in\mathscr{S}_n$ 满足

$$|C_n|\geqslant \sup\{|C|:C\in\mathscr{S}_n\}-\frac{1}{n}.$$

如此继续，令 $C=\bigcup_1^{\infty}C_j$．则 C 便为所求．事实上，如果 $|C|<\alpha$，则在 $B-C$ 中再找 C_0 满足 $0<|C_0|<\alpha-|C|$．则 C_0 与 $C_n\bigcup C$ 便是 $\mathscr{S}_n$ 中的集合，但同时只要 $|C_0|>\frac{1}{n}$，便有 $|C_n\bigcup C_0|>$

$\sup\{|C|:C\in\mathscr{A}_n\}$. 这是不可能的. 利用无原子测度空间的这一性质, 我们可以证明的确存在 E 使 $f^{**}(t)$定义中的"sup"可以达到. 事实上对任给的 $t>0$, 令 $\lambda=f^*(t)$, 则 $\sigma(\lambda)\leqslant t$. 记 $t^-=\sigma(\lambda)$. 这时存在 $E\subset\{|f|=\lambda\}$使 $|E|=t-t^-$. 故

$$\int_{\{|f|>\lambda\}\cup E}|f|\,d\mu=\int_0^{t^-}f^*(s)ds+(t-t^-)\lambda=\int_0^t f^*(s)ds,$$

$$f^{**}(t)=\sup_{|E|\geqslant t}\frac{1}{|E|}\int_E|f|\,d\mu\geqslant\frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds.$$

这完成了我们的断言的证明.

命题(2.10) 式(12)定义的算子对 t 固定, 关于 f 是次可加的.

证明 这是函数的绝对值的积分的次可加性的直接结果.

通过对分布函数的估计得到函数间的积分不等式, 一种方法是用所谓好 λ 不等式. 设 f,g 是一般测度空间 $(X,\mathscr{S},\mu)$上两个非负可测函数, 我们希望由 g 的某种可积性能推出 f 的同样可积性. 如果 $f\leqslant cg$, 或 $\sigma_f(\lambda)\leqslant c\sigma_g(\lambda)$, 则当然能如愿以偿. 但这样的条件实在是太强了, 难以满足. 好 λ 不等式方法验证的却是弱得多的估计.

定义(2.11) 设(f,g)是$(X,\mathscr{S},\mu)$上的非负可测函数的配对. 说(f,g)满足好 λ 不等式, 如果存在 $\alpha>1$ 与 $\beta>0$ 的一个趋于0的序列, 以及对应的常数 $\varepsilon_{\alpha,\beta}$, 使得对固定 $\alpha>1$, 有 $\lim\limits_{\beta\to0}\varepsilon_{\alpha,\beta}=0$, 并且

$$|\{f>\alpha\lambda,g\leqslant\beta\lambda\}|\leqslant\varepsilon_{\alpha,\beta}|\{f>\lambda\}|,\ \forall\lambda>0. \tag{15}$$

(f,g)满足好 λ 不等式的直观意义是, 相对于水平 $\lambda>0$ 而言, 当 g 小而 f 大的点集的测度相对于点集$\{f>\lambda\}$的测度而言只占一个小的份量. 此外, 好 λ 不等式有时也指比(15)稍微一般但本质上一样的下式

$$|\{f>\alpha\lambda\}|\leqslant\varepsilon_{\alpha,\beta}|\{f>\lambda\}|+\delta_{\alpha,\beta}|\{g>\beta\lambda\}|,\ \forall\lambda>0,\tag{16}$$

其中 $\delta_{\alpha,\beta}\leqslant C$．式(15)就是 $\delta_{\alpha,\beta}=1$ 时的式(16)．我们在本书中就能看到满足好 λ 不等式的配对是大量存在的．

好 λ 不等式的功能在于它几乎可推出很一般的 Φ 不等式．"几乎"的意思是指，如果测度空间是有限的，则好 λ 不等式便可推出很一般的 Φ 不等式，而当测度空间不是有限的，则为了得到 Φ 不等式，除了好 λ 不等式以外，还得加点别的自然的条件．我们考虑的 $\Phi(u)$ 是 $\mathbb{R}_+$ 到 $\mathbb{R}_+$ 的连续增函数，满足限制增长性，即 $\Phi(2u)\leqslant C\Phi(u)$，$\forall u>0$，以及 $\Phi(0)=0$．

命题(2.12) 设 $\Phi(u)$ 如上，(f,g) 是有限测度空间 $(X,\mathscr{F},\mu)$ 上的非负可测函数的配对，满足好 λ 不等式，则存在 $C=C_{\alpha,\beta,\varepsilon,\delta}$，使得

$$\int_X\Phi(f)d\mu\leqslant C\int_X\Phi(g)d\mu.\tag{17}$$

而当测度空间 σ 有限时，在条件 $\int_X\Phi(f)d\mu<\infty$ 下结论也成立．

证明 先看有限测度空间情形．设 (f,g) 满足(16)，则 $\forall N>0$，$(f\wedge N,g)$ 也满足(16)．这是因为当 $N>\alpha\lambda$ 时，

$$\{f\wedge N>\alpha\lambda\}=\{f>\alpha\lambda\},\ \{f\wedge N>\lambda\}=\{f>\lambda\};$$

而当 $N\leqslant\alpha\lambda$ 时，$|\{f\wedge N>\alpha\lambda\}|=0$．这样由定理(2.3)得

$$\int_X\Phi\left(\frac{f\wedge N}{\alpha}\right)d\mu=\int_0^\infty|\{f\wedge N>\alpha\lambda\}|d\Phi(\lambda)$$

$$\leqslant\varepsilon_{\alpha,\beta}\int_0^\infty|\{f\wedge N>\lambda\}|d\Phi(\lambda)+\delta_{\alpha,\beta}\int_0^\infty|\{g>\beta\lambda\}|d\Phi(\lambda)$$

$$=\varepsilon_{\alpha,\beta}\int_X\Phi(f\wedge N)d\mu+\delta_{\alpha,\beta}\int_X\Phi\left(\frac{g}{\beta}\right)d\mu.$$

既然 $\int_X \Phi(f\wedge N)d\mu<\infty$，而 $\Phi(\alpha u)\leqslant C_\alpha\Phi(u)$，$\Phi\left(\frac{u}{\beta}\right)\leqslant C_{\beta^{-1}}\Phi(u)$，故

$$\int_X \Phi(f\wedge N)d\mu\leqslant(1-C_\alpha\varepsilon_{\alpha,\beta})^{-1}C_\alpha C_{\beta^{-1}}\delta_{\alpha,\beta}\int_X\Phi(g)d\mu .$$

既然存在 $\beta>0$ 使 $C_\alpha\varepsilon_{\alpha,\beta}<1$，这样得

$$\int_X \Phi(f\wedge N)d\mu\leqslant C\int_X\Phi(g)d\mu .$$

令 $N\to\infty$ 即得所要的结论．当测度空间不有限时，无需用 $f\wedge N$ 代替 f．既然 $\int_X\Phi(f)d\mu<\infty$ 是附加的假定，上述推导中两边减去 $C_\alpha\varepsilon_{\alpha,\beta}\int_X\Phi(f)d\mu$ 是合法的．定理证毕．

注意，当 $(X,\mathscr{F},\mu)$ 不有限时，好 λ 不等式推不出任何积分不等式．例如 $f\equiv\infty$，$g\equiv 0$．则好 λ 不等式成立，因 $|\{f>\alpha\lambda\}|=\infty=|\{f>\lambda\}|$，$\forall\lambda>0$，但不可能有积分不等式．

与用分布函数来描述的好 λ 不等式平行，我们也可用重排函数的语言给出好 λ 不等式的一类变形．

定义(2.13)　设 (f,g) 是 σ 有限测度空间上的非负可测函数配对．我们说 (f,g) 满足重排意义下的好 λ 不等式，如果存在 $\alpha>1$ 与 $\beta<1$，以及常数 C，使得

$$f^*(t)\leqslant Cg^*(\beta t)+f^*(\alpha t),\ \forall t>0. \tag{18}$$

注　通常情形是取 $\alpha=2$，$\beta=\frac{1}{2}$．

为了由这类不等式推出 f,g 间某种可积性的比较，我们给出下述引理，它断言，从(18)可推出 f^* 被 g^* 的 Hardy 平均所控制．

引理(2.14) 设(f,g)满足(18). 则存在常数C使下式成立(记$f_{\infty}^{*}=\lim\limits_{t\to\infty}f^{*}(t)$)

$$f^{*}(t)\leqslant Cg^{*}(\beta t)+\frac{C}{\log\alpha}\int_{\beta t}^{\infty}\frac{g^{*}(s)}{s}\,ds+f_{\infty}^{*},\ \forall t>0. \tag{19}$$

证明 这只需重复使用(18). 事实上有

$$\begin{aligned}f^{*}(t)&\leqslant Cg^{*}(\beta t)+f^{*}(\alpha t)\leqslant Cg^{*}(\beta t)+Cg^{*}(\beta\alpha t)+f^{*}(\alpha^{2}t)\\&\leqslant C\sum_{k=0}^{\infty}g^{*}(\beta\alpha^{k}t)+\lim_{k\to\infty}f^{*}(\alpha^{k}t)\\&\leqslant Cg^{*}(\beta t)+\frac{C}{\log\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{\beta\alpha^{k}t}^{\beta\alpha^{k+1}t}\frac{g^{*}(s)}{s}\,ds+f_{\infty}^{*}\\&=Cg^{*}(\beta t)+\frac{C}{\log\alpha}\int_{\beta t}^{\infty}\frac{g^{*}(s)}{s}\,ds+f_{\infty}^{*}.\end{aligned}$$

引理获证.

式(19)右边出现的积分定义了作用在$\mathbb{R}_{+}$上函数的一个算子,称为Hardy平均算子. 为了由重排的好λ不等式得到f,g之间的Φ不等式, 我们需要相应的Hardy平均算子的Φ不等式. 此外Hardy算子在内插理论中也有应用. 所谓Hardy平均算子有互相对偶的两个, 即

$$f\to T(f)=Tf,\ Tf(x)=\frac{1}{x}\int_{0}^{x}f(t)dt,\ x>0, \tag{20}$$

$$f\to T^{*}(f)=T^{*}f,\ T^{*}f(x)=\int_{x}^{\infty}\frac{f(t)}{t}\,dt,\ x>0. \tag{21}$$

我们下面给出稍微推广的Hardy平均算子的幂权不等式.

引理(2.14) (Hardy不等式)设$\alpha,\beta>0$，γ是实数，f是$\mathbb{R}_+$上非负可测函数．当$\alpha<1$时还要求f是单调的(增或减均可)．则存在$C=C_{\alpha,\beta,\gamma}$使

$$\int_0^\infty\left(\int_0^t\tau^\gamma f(\tau)d\tau\right)^\alpha t^{-\beta-1}dt\leqslant C\int_0^\infty(f(t))^\alpha t^{(\gamma+1)\alpha-\beta-1}dt, \tag{22}$$

$$\int_0^\infty\left(\int_t^\infty\tau^\gamma f(\tau)d\tau\right)^\alpha t^{\beta-1}dt\leqslant C\int_0^\infty(f(t))^\alpha t^{(\gamma+1)\alpha+\beta-1}dt. \tag{23}$$

证明 先看$\alpha\geqslant1$的情形．此时τ^γ的出现不起作用，也不影响证明，故可设$\gamma=0$．先设f非负有界，且在0的与∞的邻域为0，令$F(t)=\int_0^t f(\tau)d\tau$．则

$$A=\int^\infty(F(t))^\alpha t^{-\beta-1}dt<\infty.$$

记α'为α的相伴数，则

$$A=-\frac{1}{\beta}t^{-\beta}(F(t))^\alpha\Big|_0^\infty+\frac{\alpha}{\beta}\int_0^\infty(F(t))^{\alpha-1}f(t)t^{-\beta}dt$$

$$\leqslant\frac{\alpha}{\beta}\left(\int_0^\infty(F(t))^{(\alpha-1)\alpha'}t^{-\beta-1}dt\right)^{\frac{1}{\alpha'}}\left(\int_0^\infty(tf(t))^\alpha t^{-\beta-1}dt\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$=\frac{\alpha}{\beta}A^{\frac{1}{\alpha'}}\left(\int_0^\infty(f(t))^\alpha t^{\alpha-\beta-1}dt\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

$$A\leqslant\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\alpha\int_0^\infty(f(t))^\alpha t^{\alpha-\beta-1}dt.$$

对一般$f\geqslant 0$，用这样的函数序列逼近f，取极限也得到(22)．应用(22)于函数$g(x)=\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)$便可得(23)．事实上，

$$\int_0^\infty\left(\int_t^\infty f(\tau)d\tau\right)^\alpha t^{\beta-1}dt=\int_0^\infty\left(\int_0^t f\left(\frac{1}{\tau}\right)\frac{d\tau}{\tau^2}\right)^\alpha t^{1-\beta-2}dt$$

$$=\int_0^\infty\left(\int_0^t g(\tau)d\tau\right)^\alpha t^{-\beta-1}dt\leqslant C\int_0^\infty (g(t))^\alpha t^{\alpha-\beta-1}dt$$

$$=C\int_0^\infty (f(t))^\alpha t^{\alpha+\beta-1}dt.$$

现看$\alpha<1$的情形．不妨设f单调增．这时有

$$\int_0^\infty\left(\int_0^t \tau^\gamma f(\tau)d\tau\right)^\alpha t^{-\beta-1}dt$$

$$=\int_0^\infty\left(\sum_{k\geqslant 0}\int_{2^{-(k+1)}t}^{2^{-k}t}\tau^\gamma f(\tau)d\tau\right)^\alpha t^{-\beta-1}dt$$

$$\leqslant\sum_{k\geqslant 0}\int_0^\infty (f(2^{-k}t))^\alpha\left(\int_{2^{-(k+1)}t}^{2^{-k}t}\tau^\gamma d\tau\right)^\alpha t^{-\beta}\frac{dt}{t}$$

$$\leqslant C\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{2^{k\beta}}\int_0^\infty (f(2^{-k}t))^\alpha(2^{-k}t)^{(\gamma+1)\alpha-\beta}\frac{dt}{t}$$

$$=C\int_0^\infty (f(t))^\alpha t^{(\gamma+1)\alpha-\beta-1}dt.$$

第二式证明类似. 不妨设 f 单调降, 这时有

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\infty}\left(\int_t^{\infty}\tau^{\gamma}f(\tau)d\tau\right)^{\alpha}t^{\beta-1}dt\\
&=\int_0^{\infty}\left(\sum_{k\geqslant 0}\int_{2^k t}^{2^{k+1}t}\tau^{\gamma}f(\tau)d\tau\right)^{\alpha}t^{\beta-1}dt\\
&\leqslant\sum_{k\geqslant 0}\int_0^{\infty}(f(2^kt))^{\alpha}\left(\int_{2^kt}^{2^{k+1}t}\tau^{\gamma}d\tau\right)^{\alpha}t^{\beta-1}dt\\
&\leqslant C\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{2^{k\beta}}\int_0^{\infty}(f(2^kt))^{\alpha}(2^kt)^{(\gamma+1)\alpha+\beta}\frac{dt}{t}\\
&=C\int_0^{\infty}(f(t))^{\alpha}t^{(\gamma+1)\alpha+\beta-1}dt.
\end{aligned}
$$

引理证毕.

特别地, 在 (22) 中取 $\gamma=0$, $\alpha=p>1$, $\beta=p-1>0$, 则得 T 的 L^p 有界性; 在 (23) 中取 $\gamma=-1$, $\alpha=p$, $\beta=1$, 即得 T^* 的 L^p 有界性. 可以证明 (见本章习题 11, 12, 13, 14) 下述的 T, T^* 的 L^{Φ} 有界性: 设 Φ 是 $\mathbb{R}_+$ 到 $\mathbb{R}_+$ 增加凸函数, 则

$$\|Tf\|_{\Phi}\leqslant q_{\Phi}'\|f\|_{\Phi},\ \forall f\in L_{\rm loc}(\mathbb{R}_+), \tag{24}$$

$$\|T^*g\|_{\Phi}\leqslant p_{\Phi}\|g\|_{\Phi},\ \forall g\in L^1\left(\varepsilon,\infty,\frac{dt}{t}\right), \tag{25}$$

其中 p_{Φ}, q_{Φ} 是反映 Φ 的增长性的两个指标

$$p_{\Phi}=\sup_{u>0}\frac{u\Phi'(u)}{\Phi(u)},\quad q_{\Phi}=\inf_{u>0}\frac{u\Phi'(u)}{\Phi(u)}, \tag{26}$$

q_{Φ}' 是 q_{Φ} 的相伴数. $p_{\Phi}<\infty$ 等价于 Φ 是限制增长的, $q_{\Phi}>1$ 等价

于Φ的 Young 凸函数是限制增长的.

应用重排的好 λ 不等式，我们所能得到的积分不等式如下.

命题(2.15) 设(f,g)是σ有限测度空间$(X,\mathscr{F},\mu)$上的非负可测函数配对，满足(18)，且$f_\infty^*=0$. 则对 $\mathbb{R}_+$ 到 $\mathbb{R}_+$ 的增加凸函数 Φ, 使$p_\Phi<\infty$，有

$$\|f\|_\Phi \leqslant Cp_\Phi \|g\|_\Phi, \ \forall g. \tag{27}$$

证明 结合(19)，(25)即得断言.

由于本书将只用好 λ 不等式，而不用重排的好 λ 不等式，故(24)—(26)的证明，就不在这里叙述了. 值得指出的是好 λ 不等式与重排好 λ 不等式不能互推，只是形式上的类比. 实际运用时，为证明(f,g)满足好 λ 不等式，或重排好 λ 不等式，往往使用相同的步骤. 命题(2.12)与命题(2.15)说明它们在获得f,g之间的积分不等式方面的优劣. 好 λ 不等式能对只是连续增加、限制增长的$\Phi(u)$得到Φ模不等式，但系数不清楚；而重排的好 λ 不等式只能对限制增长的凸$\Phi(u)$得到Φ模不等式. 作为补偿，它能得到系数被Cp_Φ控制，这常常是最好的阶.

§ 3.3 覆盖引理与Calderón－Zygmund 分解

本节的舞台是$\mathbb{R}^n$. 覆盖引理研究的是，对于$\mathbb{R}^n$中一个集合的由方体或球构成的任意覆盖，是否可以挑出满足某种特殊需要的子覆盖. 一个密切相关的问题是，开集是否能表为满足某种要求的方体的并(本书中方体一般都指其边与座标轴平行的方体，通常用记号I,J,Q等表示). 我们约定对方体I或球B，以及常数c，cI或cB总表示同中心、直径扩大至c倍的方体或球. 所谓方体的不交是指内部不交. 对方体通常不区分它究竟是开的、闭的、还是半开半闭的. 类似地对球也一样. 最简单的覆盖引理是 Vitali 型覆盖引理.

定理(3.1) (Vitali 型覆盖引理) 设 E 是$\mathbb{R}^n$中任意集合，

$\{B_\alpha\}$是覆盖 E 的任意一个半径有界的球族. 则存在至多可列的不交子族 $\{B_j\}$, 使得

$$|E| \leqslant c \sum_{1}^{\infty} |B_j|, \tag{1}$$

其中 c 仅依赖于维数, 譬如可取 $c = 5^n$.

证明 在如下意义下尽量选半径大的球作为 $\{B_j\}$. 例如, 可取 B_1 满足

$$d(B_1) > \frac{1}{2} \sup\{d(B_\alpha)\},$$

其中 $d(\cdot)$表直径. 假设 $B_1, \cdots, B_k$ 是已经选好的不交球列. 在集合 $\{B_\alpha : B_\alpha \cap (\bigcup_1^k B_j) = \phi\}$中挑选$B_{k+1}$ 满足

$$d(B_{k+1}) > \frac{1}{2} \sup\{d(B_\alpha) : B_\alpha \cap (\bigcup_1^k B_j) = \phi\}.$$

现证这样选取的$\{B_j\}$的确满足式(1). 事实上, 如果 $\sum_j |B_j| = \infty$, 则式(1)自然成立. 当 $\sum_j |B_j| < \infty$ 时, $d(B_j) \to 0$. 对任取的 B_α, 设 k 是第一个指标使 $d(B_{k+1}) \leqslant \frac{1}{2} d(B_\alpha)$. 则 $B_\alpha \cap (\bigcup_1^k B_j) \neq \phi$. 因为否则的话, B_{k+1} 将没有资格作为第 $k+1$ 个球被挑出. (注意, 这个讨论对$\{B_j\}$只由有限 N 个元素组成时也是适用的. 也就是说可以设想 $B_{N+1} = \cdots = \phi$, 这样若设N 是第一个指标使得 $d(B_{N+1}) \leqslant \frac{1}{2} d(B_\alpha)$, 则可以推出 $B_\alpha \cap (\bigcup_1^N B_j) \neq \phi$, 否则的话, 应该有某个非空$B_{N+1}$ 被挑出来.) 现设 $j_0 \in [1, k]$ 是使 $B_\alpha \cap B_{j_0} \neq$ 的第一个指标. 则由$d(B_{j_0}) > \frac{1}{2} d(B_\alpha)$, 知 $5B_{j_0} \supset B_\alpha$. 故 $\bigcup_1^\infty 5B_j \supset E$. 式(1)获证. 定理证毕.

如果想将上述定理的结论改进为$\bigcup\limits_{1}^{\infty} cB_j \supset E$，其中$\{B_j\}$是$\{B_\alpha\}$的不交子族，则稍微修改条件便可.

定理(3.2) 设E是$\mathbb{R}^n$中有界集，$\{B_\alpha\}$是E的任意一个覆盖球族，则存在子族$\{B_j\}$与常数c(如$c=5^n$)使$\{cB_j\}$构成了E的覆盖.

证明 从上面的证明中我们已经看到，如果能够保证被挑出的不交子族$\{B_j\}$满足$d(B_j)\to 0$，则$\{cB_j\}$就构成E的覆盖. 现在断言，当E有界时，便是这种情况. 事实上，当$\{d(B_j)\}$无界时，只需在覆盖族中挑出一个直径充分大的(例如大于E的直径)且与E相交的球就够了，它的2倍就可覆盖E. 因此只需考虑$\{d(B_j)\}$有界情况. 此时被挑出的$\{B_j\}$是一个与E有交的(因为不交的可以去除)、直径有界的、且自身不交的球族，它只能是有限个或可列无穷个且$d(B_j)\to 0$(因为$\bigcup B_j$能包含在一个有界集内). 定理获证.

Vitali型覆盖引理还有一个更细致的说法是关于可测集的. 我们只给出它的叙述而略去证明.

定理(3.3) 设E是$\mathbb{R}^n$中可测集. 设对每个$x\in E$，对应着球列$\{S_{r_k(x)}(x)\}$，$r_k(x)\to 0$. 则从覆盖$\{S_{r_k(x)}(x)\}_{x\in E}$中可挑出不交子族$\{S_j\}$，使$|E-\bigcup\limits_{1}^{\infty} S_j|=0$.

更细致一些的覆盖引理有所谓Whitney型覆盖引理. 它讨论的问题是如何将开集表为合适的内部不交方体族的并.

定理(3.4) (Whitney型覆盖引理) 设U是$\mathbb{R}^n$中开集，$F=\mathbb{R}^n-U$不空. 则存在内部不交的方体族$\{Q_k\}$使

(a). $U=\bigcup\limits_{1}^{\infty} Q_k$(模二进面意义下)[1]

---

[1] 所谓二进面是指垂直于一个坐标轴并且通过该坐标轴的一个二进分点的超平面.

(b) $\frac{1}{3}$ $\operatorname{dist}(Q_k, F) \leqslant d(Q_k) \leqslant \operatorname{dist}(Q_k, F), \forall k.$

证明 从坐标原点出发，将 $\mathbb{R}^n$ 分为边长 $2^k(k\in\mathbb{Z})$的二进方体的网. 设 $x\in U$，但不在二进面上. 在所有包含 x 的二进方体中挑出满足如下条件的最大方体，记为 Q_x，

$$d(Q_x) \leqslant \operatorname{dist}(Q_x, F). \tag{2}$$

这样的 Q_x 是存在的，因为它是一个直径有上界的二进方体族中的极大；它是唯一的，因为 x 不在二进面上；并且它包含在 U 中，因 $\operatorname{dist}(Q_x, F)>0$. 我们断言

$$d(Q_x) \geqslant \frac{1}{3} \operatorname{dist}(Q_x, F). \tag{3}$$

事实上，如果(3)不成立，则对 Q_x 的母二进方体 $\widetilde{Q}_x$（即 Q_x 由 2^n 等分 $\widetilde{Q}_x$ 而得），将有

$$\begin{aligned} d(\widetilde{Q}_x) = 2d(Q_x) &< \frac{2}{3} \operatorname{dist}(Q_x, F) \\ &\leqslant \frac{2}{3}(\operatorname{dist}(\widetilde{Q}_x, F) + d(Q_x)), \end{aligned}$$

$$\frac{2}{3} d(\widetilde{Q}_x) \leqslant \frac{2}{3} \operatorname{dist}(\widetilde{Q}_x, F).$$

这说明 $\widetilde{Q}_x$ 也满足(2)，这与 Q_x 的极大性矛盾. 这样，我们得到了 U 的一个覆盖方体族 $\{Q_x\}_{x\in U}$，它满足 $U=\bigcup\limits_{1}^{\infty} Q_k$，并且满足式(2)与(3). 它唯一不满足定理要求的是它们可能是相交的，即对某些 x, y，它们有同一个 Q_x. 现将重复的除去，则得到一个不交的，且满足(a)与(b)中性质的方体族 $\{Q_k\}$. 定理证毕.

注 不等式 $\operatorname{dist}(I,F) \leqslant \operatorname{dist}(J,F)+d(I)$，$\forall$二进方体 I, J，$I\subset J$，$l(J)=2l(I)$（$l(J)$表示 J 的边长）成立. 这一事实的证明是初等的. 设 $x\in$(闭)J 与 $y\in F$ 使 $\operatorname{dist}(x, y)=\operatorname{dist}(J,F)$. 设 $z\in$(闭)I 使 $\operatorname{dist}(z, x)\leqslant d(I)$. 则

$$\operatorname{dist}(z,y)\leqslant\operatorname{dist}(J,F)+d(I).$$

故

$$\operatorname{dist}(I,F)\leqslant\operatorname{dist}(J,F)+d(I).$$

如果改方体为球，则 Whitney 型覆盖引理在叙述上有下述变形.

定理(3.5) 设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 中有界开集，$c\geqslant 1$ 任给. 则存在球序列$\{S_j\}$，满足

(a) $U=\bigcup\limits_j S_j$；

(b) 存在常数 M_c，使 U 中每个点至多属于 M_c 个球 cS_j；

(c) 存在常数 $N\geqslant 1$，使 $NS_j\bigcap U^c\neq\varPhi$，$\forall j$.

证明 对每个 $x\in U$，令 $r(x)=\dfrac{1}{6c}\operatorname{dist}(x,U^c)$. 由 Vitali 型覆盖引理(3.2)，知存在不交球族 $\{S_{r(x_j)}(x_j)\}$，使$\{S_j\}$，其中 $S_j=S_{5r(x_j)}(x_j)$，满足$\bigcup S_j\supset U$. 同时因为

$$5r(x_j)=\frac{5}{6c}\operatorname{dist}(x_j,U^c)<\operatorname{dist}(x_j,U^c),$$

这说明 $S_j\subset U$，故$\bigcup S_j=U$. 此外还有 $U=\bigcup cS_j$，这因

$$|y-x_j|\leqslant 5cr(x_j)=\frac{5}{6}\operatorname{dist}(x_j,U^c),\quad\forall y\in cS_j.$$

现证明(b). 设 $x\in U$ 任取. 如果 $x\in cS_j$，则 $r=\operatorname{dist}(x,U^c)>0$. 这样我们有

$$\begin{aligned}6cr(x_j)&=\operatorname{dist}(x_j,U^c)\leqslant|x_j-x|+\operatorname{dist}(x,U^c)\\&\leqslant 5cr(x_j)+r,\end{aligned}$$

$$cr(x_j)\leqslant r,\quad cS_j\subset S_{10r}(x).$$

但同时也有

$$r=\operatorname{dist}(x,U^c)\leqslant|x-x_j|+\operatorname{dist}(x_j,U^c)\leqslant 11cr(x_j).$$

如果 $x\in cS_i\bigcap cS_j$，则 $S_{r(x_i)}(x_i)$与$S_{r(x_j)}(x_j)$是 $S_{10r}(x)$中的不交球，并

$$|x_i-x_j|\geqslant\min(r(x_i),\ r(x_j))\geqslant\frac{r}{11c}\ .$$

这说明 x 至多属于有限个，如设为 M_c 个，cS_j．现剩下证明 (c)．设 $N>\dfrac{6c}{5}$，则因

$$5Nr(x_j)>6cr(x_j)=\mathrm{dist}\,(x_j,U^c),$$

知 NS_j 中必含 U^c 中的点．定理获证．

上述定理(3.4)还有下面一种变形，它讨论开集 U 的不交方体族的适当覆盖．

定理(3.6) 设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 中开集，$F=U^c\neq\phi$．则存在不交方体族$\{Q_k\}_1^\infty$ 使

(a) $|U\bigcap Q_k|\leqslant\dfrac{1}{2}|Q_k|\leqslant|F\bigcap Q_k|,\forall k,$

(b) $U\subset\bigcup\limits_1^\infty Q_k$（模二进面意义下）

(c) $|U|=\sum\limits_1^\infty|Q_k|\leqslant 2^{n+1}|U|.$

证明 仍如定理(3.4)中那样作二进方体网．对每个 $x\in U$，设 Q_x 是包含 x 的满足如下性质的最小二进方体

$$|Q_x\bigcap U|\leqslant\frac{1}{2}|Q_x|\leqslant|Q_x\bigcap F|. \tag{4}$$

由于 $\mathrm{dist}\,(x,F)>0$，知这个 Q_x 是存在的．在族$\{Q_x\}_{x\in U}$ 中去除重叠的，则得不交族$\{Q_k\}$．它满足 (a)，(b)是显然的．现证它也满足 (c)．每个 Q_k 都是某个 $x\in U$ 对应的 Q_x．记 $\widetilde{Q}_x$ 为包含 x 的边长为Q_x 的边长的一半的二进方体．则由 Q_x 的极小性，知$|\widetilde{Q}_x\bigcap U|>\dfrac{1}{2}|\widetilde{Q}_x|$．这样，

$$|\widetilde{Q}_k\bigcap U|>\frac{1}{2}|\widetilde{Q}_k|,\ \forall k\,.$$

注意$\{\widetilde{Q}_k\}$不交，故

$$|U|\geqslant\sum_k|\widetilde{Q}_k\cap U|\geqslant\frac{1}{2}\sum_k|\widetilde{Q}_k|=2^{-n-1}\sum_k|Q_k|.$$

这证明了(c). 定理证毕.

如果不是在$\mathbb{R}^n$上考虑而是在$\mathbb{R}^n$的有限方体Q上考虑，定理(3.4)与(3.5)也成立(此时得到的方体族$\{Q_k\}$由Q的子二进方体构成)，只需在定理(3.5)中附加一个自然条件: $|U|\leqslant\frac{1}{2}|Q|$.

最后我们讨论著名的Calderón－Zygmund分解. 它讨论的是与一个局部可积函数f相联系的开集的分解.

定理(3.7) (Calderón－Zygmund分解) 设Q是$\mathbb{R}^n$中有限(闭)方体或者$\mathbb{R}^n$自己，$f\in L^1_{\mathrm{loc}}(Q)$，当$Q=\mathbb{R}^n$时还要求$\lim\limits_{|I|\to\infty}\frac{1}{|I|}\int_I|f|\,dx=0$. 则当$Q=\mathbb{R}^n$时$\forall\lambda>0$，当$Q$有限时，$\forall\lambda\geqslant\frac{1}{|Q|}\int_Q|f|dx$，存在$Q$中不交(开)方体族$\{Q_k\}$，使得开集$U=\bigcup\limits_k Q_k$与闭集$F=Q-U$满足

(a) $|f|\leqslant\lambda$, a.e. 于F.

(b) $\lambda<\dfrac{1}{|Q_k|}\displaystyle\int_{Q_k}|f|dx\leqslant 2^n\lambda,\ \forall k$,

(c) $\displaystyle\sum_k|Q_k|\leqslant\frac{1}{\lambda}\int_Q|f|dx.$

此外，当$\lambda<\mu$时，所得到的$U_\lambda=\bigcup Q_k(\lambda)$与$U_\mu=\bigcup I_j(\mu)$还满足：每个$I_j(\mu)$必包含在某个$Q_k(\lambda)$中.

证明 我们首先把$\mathbb{R}^n$化到有限Q情况. 从原点出发，将$\mathbb{R}^n$分为边长$2^k(k\in\mathbb{Z})$的二进方体的网. 设$\lambda>0$任给. 则由条件

$\lim\limits_{|I|\to\infty}\frac{1}{|I|}\int_I|f|dx=0$，知只要 $|I|$ 充分大，例如 $l(I)\geqslant a$（$l(I)$ 表 I 的边长），便有

$$\frac{1}{|I|}\int_I|f|dx\leqslant\lambda. \tag{5}$$

设 Q_0 是 $\mathbb{R}^n$ 的第一象限中以原点为一个顶点的满足 $l(Q_0)\geqslant a$ 的二进方体，则我们得到 $\mathbb{R}^n$ 的由 Q_0 以及它的平移构成的一个剖分．注意这个剖分中的每个方体都满足式(5)．如果定理对有限方体的情形得到证明，自然便可推广到 $\mathbb{R}^n$ 的情形去．因此我们只需对有限的 Q_0 与 λ 作分解即可．

现设 Q_0 与 λ 满足式(5)．考察 Q_0 的 2^n 个子二进方体中的每一个是否满足式(5)．将不满足的挑出来作为未来的开集 U 的部分，将满足的留下来继续考察其子二进方体．如此继续，以至无穷．这样，我们得到了一个由二进方体构成的族 $\{Q_k\}$，它们是从逐步考察 Q_0 的子二进方体的过程中挑出来的，显然满足(*b*)中左边不等式，从而也满足(*c*)中不等式．它满足(*b*)中右边不等式是根据它的"第一次性"：设 $\widetilde{Q}_k$ 是包含 Q_k 的母二进方体，则 $\widetilde{Q}_k$ 不是被挑出来的，从而

$$\frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k}|f|dx\leqslant\frac{|\widetilde{Q}_k|}{|Q_k|}\frac{1}{|\widetilde{Q}_k|}\int_{\widetilde{Q}_k}|f|dx\leqslant 2^n\lambda,\ \forall k.$$

至于(*a*)是因为 $F=Q-\bigcup\limits_k Q_k$ 中的每个点 x 都包含在半径趋于 0 的一个二进方体族中，而这个族中的每个二进方体 J 满足 $\frac{1}{|J|}\int_J|f|dx\leqslant\lambda$．由即将在下节得到的 Lebesgue 的积分的微分定理（§3.4，推论 4.3），知 $|f|\leqslant\lambda$，a.e. 于 F．这样(*a*)，(*b*)，(*c*)获证．

最后设 $\lambda<\mu$．我们由上述分解可得到由 Q 的二进方体构成的两个开集 $U_\lambda=\bigcup_k Q_k(\lambda)$ 与 $U_\mu=\bigcup_j I_j(\mu)$．由

$$\frac{1}{|I_j(\mu)|}\int_{I_j(\mu)}|f|\,dx>\mu>\lambda,\ \forall j,$$

知 $I_j(\mu)$ 中的每个点在关于水平 λ 所作的分解中，一定位于被挑出来的部分，即 $I_j(\mu)\subset U_\lambda,\forall j$．这样由二进方体的特性知存在 k，使得 $I_j(\mu)\subset Q_k(\lambda)$．定理证毕．

注

1．当 $Q=\mathbb{R}^n$ 时，如果 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$，$1\leqslant p<\infty$，则必有 $\lim\limits_{|I|\to\infty}\frac{1}{|I|}\int_I|f|\,dx=0$．从而 $\forall\lambda>0$，可作 C－Z 分解．

2．分解中所得到的开集 U 与开集 $\{Mf>\lambda\}$ 密切相关，其中 $Mf(x)$ 是下节中将要定义的极大函数，其关系为

$$U\subset\{Mf>\lambda\},\ \{Mf>\alpha\lambda\}\subset 2U=\bigcup_k 2Q_k,\tag{6}$$

其中 $\alpha\geqslant 1$ 为仅与维数有关的常数（见本章习题 18）．

3．由这里给出的与函数 f 联系的集合的 Calderón－Zygmund 分解还可以推出函数 f 自己的 Calderón－Zygmund 分解，我们将在以后给出．

§3.4 Hardy－Littlewood 极大函数与 # 函数算子 (Sharp function operator)

本节要讨论 $\mathbb{R}^n$ 上 Hardy－Littlewood 极大函数及 # 函数这两个既简单又非常有用的算子的基本性质及某些应用．先讨论极大函数．

定义(4.1) 设 $f\in L^1_{\text{loc}}$ 或 L^r_{loc}，$0<r<\infty$．定义

$$Mf(x)=\sup_{x\in I}\frac{1}{|I|}\int_I|f(y)|dy, \tag{1}$$

$$M_rf(x)=M^{\frac{1}{r}}(|f|^r)(x). \tag{2}$$

称 Mf（有时也称 M_rf）为 Hardy－Littlewood 极大函数.

注意 Mf 的定义可以有各种小的区别．例如，可以限制定义中出现的 I 是以 x 为心的方体，或将 I 换为球 B，并且球 B 也可以 x 为中心，也可只是包含 x．由于包含原点的方体（或球），一定包含在以原点为心的直径扩大适当倍的方体或球内，因此，用不同方法定义出来的 Mf，任意两个都是可以互相控制的，因而本质上是相同的．下面我们主要采用式（1）中的定义，偶尔也用到其他的定义.

另外，我们下面很快就会看到，极大函数控制了函数本身，即

$$|f(x)|\leqslant Mf(x),\quad \text{a.e.};$$

同时也会看到，极大函数并不比函数本身大得太多（譬如用 L^p 空间的范数来衡量，它们是等价的）．这样，为了求得对函数本身大小的估计，不妨代之以估计极大函数．由于极大函数比函数本身性质更好（譬如，不管函数 f 如何，Mf 总是下半连续函数，即 $\{Mf>\lambda\}$ 总是开集，$\forall\lambda>0$），这种替代往往是十分有效的．这就是极大函数理论为什么重要的最直观的解释.

极大函数算子的最基本性质是所谓弱（1,1）型．而这不过是 Vitali 型覆盖引理的简单推论.

定理（4.2） 极大函数算子 M 是弱（1,1）型的，即

$$|\{Mf>\lambda\}|\leqslant\frac{c}{\lambda}\|f\|_1,\ \forall\lambda>0,\ \forall f\in L^1. \tag{3}$$

证明 设 $x\in E_\lambda=\{Mf>\lambda\}$，则存在方体 $I_x\ni x$，使得

$$\frac{1}{|I_x|}\int_{I_x}|f|dt>\lambda.$$

这样，$\{I_x\}_{x\in E_\lambda}$ 覆盖了 E_λ．由 Vitali 型覆盖引理（显然，引

理结论不依赖是方体覆盖还是球覆盖)，知存在不交方体族 $\{I_{x_j}\}$，使得

$$|E_\lambda| \leq C\sum_j |I_{x_j}| \leq \frac{c}{\lambda}\sum_j \int_{I_{x_j}} |f(t)|\,dt$$

$$= \frac{c}{\lambda}\int_{\bigcup I_{x_j}} |f(t)|\,dt. \tag{4}$$

这就推出式(3)．定理证毕．

显然，由式(4)可以推出(注意 $\bigcup I_x \subset \{Mf > \lambda\}$)

$$|\{Mf > \lambda\}| \leq \frac{c}{\lambda}\int_{\{Mf > \lambda\}} |f(x)|\,dx. \tag{5}$$

这不等式往往比式(3)更有用．此外，式(3)还可以推出

$$|\{Mf > \lambda\}| \leq \frac{c}{\lambda}\int_{\{|f| > \frac{\lambda}{2}\}} |f|\,dx. \tag{6}$$

事实上，只需对 $\lambda > 0$ 作分解

$$f = f\chi_{\{|f| \leq \frac{\lambda}{2}\}} + f\chi_{\{|f| > \frac{\lambda}{2}\}} = f_1 + f_2.$$

既然 $Mf_1 \leq \frac{\lambda}{2}$，故 $\{Mf > \lambda\} \subset \{Mf_2 > \frac{\lambda}{2}\}$，从而

$$|\{Mf > \lambda\}| \leq |\{Mf_2 > \frac{\lambda}{2}\}| \leq \frac{c}{\lambda}\int |f_2|\,dx$$

$$= \frac{c}{\lambda}\int_{\{|f| > \frac{\lambda}{2}\}} |f|\,dx.$$

式(6)获证．

Lebesgue 关于积分的可微性定理的高维推广是下述推论．

推论(4.3) 设 $f \in L^1_{\text{loc}}$．则

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{|B(x,\rho)|}\int_{B(x,\rho)} f(y)dy = f(x), \quad \text{a.e.}, \qquad (7)$$

这里 $B(x,\rho)$是 R^n 中以 x 为心，ρ 为半径的球(也可以是以 x 为心的方体).

证明 充分地只需证明在任意有限球 B 上，收敛是几乎处处的. 这样，可设 $f\in L^1$(无妨设 f 是实值的)，$f|_{B^c}=0$. 下面的证明已出现在§1.6 定理 6.4 中. 记

$$\theta_f(x)=|\overline{\lim_{\rho\to 0}} f_\rho(x)-\underline{\lim_{\rho\to 0}} f_\rho(x)|,$$

其中

$$f_\rho(x)=\frac{1}{|B(x,\rho)|}\int_{B(x,\rho)} f(y)dy.$$

对任意 $\delta>0$，令 $f=g+h$，g 连续，$g|_{B^c}=0$，$\|h\|_1\leqslant\delta$. 对 h 使用弱(1,1)型估计，并注意(下面用极大算子的球定义)

$$\theta_f(x)\leqslant\theta_h(x)\leqslant 2Mh(x).$$

则

$$|\{\theta_h(x)>\varepsilon\}|\leqslant|\{Mh(x)>\frac{\varepsilon}{2}\}|\leqslant\frac{c}{\varepsilon}\|h\|_1\leqslant\frac{c\delta}{\varepsilon}.$$

由 ε，δ 任意，知 $\theta_h(x)=0$，a.e.从而 $\theta_f(x)=0$，a.e.. 这证明了 $\lim\limits_{\rho\to 0}f_\rho(x)$a.e.存在，同样的方法可进一步证明这个极限就是$f(x)$. 定理证毕.

利用极大算子 M 是弱(1,1)型的，又显然是(∞,∞)型的，则由后面 Marcinkiewicz 内插定理，知它也是(p,p)型的，对 $1<p<\infty$. 但这个事实现在可直接证明.

定理(4.4) 极大算子 M 是 L^p有界的，或者说是(p,p)型的，$1<p\leqslant\infty$. 更确切些有

$$\|Mf\|_p\leqslant c(p')^{\frac{1}{p}}\|f\|_p,\ \forall f. \qquad (8)$$

证明 对 $f\in L^p$ 应用式(6)，有

$$\begin{aligned}\|Mf\|_p^p&=p\int_0^\infty\lambda^{p-1}|\{Mf>\lambda\}|\,d\lambda\\&\leqslant cp\int_0^\infty\lambda^{p-2}\int_{\{|f|>\frac{\lambda}{2}\}}|f|\,dxd\lambda\\&=cp\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^{2|f|}\lambda^{p-2}\,d\lambda\,|f|\,dx\\&\leqslant cp'\int_{\mathbb{R}^n}|f|^pdx=cp'\|f\|_p^p.\end{aligned}$$

定理证毕.

对于(2)给出的 Hardy－Littlewood 极大函数的变形 $M_r(f)(x)=M(|f|^r)^{\frac{1}{r}}(x)$，根据定理(4.4)，很容易证明，$M_r$ 是 L^p 有界的，只要 $0<r<p\leqslant\infty$. 以后我们会遇到 M_r 的应用.

现在我们讨论 M 在接近于 L^1 的空间上的作用. 首先探讨 $Mf(x)$ 的非增重排函数 $(Mf)^*(t)$ 的精确估计，然后作为推论得到 M 在接近于 L^1 的空间上的作用的几个事实.

定理(4.5) 设 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$，则

$$c_1(Mf)^*(t)\leqslant f^{**}(t)\leqslant c_2(Mf)^*(t),\forall t>0. \tag{9}$$

证明 任取 $t>0$，设 $(Mf)^*(t)<\infty$. 令

$$U=\{x\in\mathbb{R}^n:Mf>(Mf)^*(t)\}.$$

由 $Mf(x)$ 是下半连续函数，知 U 是开集. 而 $|U|\leqslant t$，因此 $U^c=F$ 非空. 故由定理(3.6)知存在不交方体族 $\{Q_k\}$，使得 $U\subset\bigcup\limits_1^\infty Q_k$，同时 $Q_k\cap F\neq\phi,\forall k$，以及 $\sum\limits_1^\infty|Q_k|\leqslant c|U|$. 令

$$g=\sum_1^\infty f\chi_{Q_k}\quad h=f\chi_F,$$

则$f=g+h$. 根据命题(2.9)(注意此时$g^{**}(t)=\dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t g^*(s)ds$),

有

$$f^{**}(t)\leqslant g^{**}(t)+h^{**}(t)\leqslant \frac{1}{t}\int_0^t g^*(s)ds+\|h\|_\infty$$

$$\leqslant \frac{1}{t}\|g\|_1+\|h\|_\infty .$$

由推论 4.3 知$|f|\leqslant Mf$, 故$\|h\|_\infty=\|f\chi_F\|_\infty\leqslant(Mf)^*(t)$. 剩下是估计$\|g\|_1$. 由$Q_k\cap F\neq\phi$, $\forall k$, 知

$$\frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k}|f|dx\leqslant(Mf)^*(t),$$

故由$\{Q_k\}$的不交性得

$$\|g\|_1=\sum_k\int_{Q_k}|f|dx\leqslant\sum|Q_k|(Mf)^*(t)$$

$$\leqslant c|U|(Mf)^*(t)\leqslant ct(Mf)^*(t).$$

这证明了式(9)的右边不等式.

现设$f^{**}(t)<\infty$. 同样由$f^*(t)\leqslant f^{**}(t)$知$f^*(t)<\infty$ 因此可令

$$E=\{|f|>f^*(t)\},$$
$$g(x)=f(x)(1-f^*(t)|f(x)|^{-1})\chi_E,$$
$$h=f-g=f^*(t)\operatorname{sgn}\overline{f}(x)\chi_E+f(x)\chi_{E^c}.$$

这样$\|h\|_\infty\leqslant f^*(t)$, 并且(注意$|E|\leqslant t$)

$$\|g\|_1=\int_E(|f(x)|-f^*(t))dx=\int_0^{|E|}(f^*(s)-f^*(t))ds$$

$$\leqslant\int_0^t(f^*(s)-f^*(t))dt=t(f^{**}(t)-f^*(t)).$$

故（不妨设下面出现的常数 $c\geqslant 1$），

$$\begin{aligned}(Mf)^*(t)&\leqslant(Mg+Mh)^*(t)\leqslant(Mg)^*(t)+\|Mh\|_\infty\\&\leqslant\frac{c}{t}\|g\|_1+\|h\|_\infty\leqslant c(f^{**}(t)-f^*(t))+f^*(t)\\&\leqslant cf^{**}(t).\end{aligned}$$

定理证毕.

为由这个定理推出 M 在 $L\log^+L$ 上的作用，先证一个初等引理.

引理（4.6） 设 $f(t)$ 是 $(0,1]$ 上非负降函数. 则

$$\int_0^1 f(t)\log\frac{1}{t}\,dt<\infty\iff\int_0^1 f(t)\log^+f(t)dt<\infty.$$

证明 设 $\int_0^1 f(t)\log^+f(t)dt<\infty$. 令 $E=\{t:f(t)\leqslant t^{-\frac{1}{2}}\}$. 则

$$\int_0^1 f(t)\log\frac{1}{t}\,dt=\int_E+\int_{E^c}$$

$$\leqslant\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}\log\frac{1}{t}\,dt+2\int_0^1 f\log^+f\,dt<\infty.$$

现设 $\int_0^1 f(t)\log\frac{1}{t}\,dt<\infty$. 这时在 $t=0$ 邻域，有 $f(t)=0(t^{-\alpha})$，$\alpha>0$. 因此

$$\int_0^1 f(t)\log^+f(t)dt\leqslant c\int_0^1 f(t)\log\frac{1}{t}\,dt<\infty.$$

引理获证.

推论(4.7) 设$f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. 则如下两断言等价:

(*a*) $\exists\lambda>0$, 使$\displaystyle\int_{\{Mf>\lambda\}} Mf\,dx<\infty$,

(*b*) $\exists\mu>0$, 使$\displaystyle\int_{\{|f|>\mu\}} |f|\log^+|f|\,dx<\infty$.

证明 由定理(2.3)知: 断言(*a*)等价于$\exists a>0$使

$\displaystyle\int_0^a (Mf)^*(t)dt<\infty$. 由定理(4.5)知, 这等价于

$$\int_0^a f^{**}(t)dt=\int_0^a \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds\,dt$$

$$=\int_0^a f^*(t)\log\frac{a}{t}\,dt<\infty.$$

由引理(4.6)知, 这又等价于

$$\int_0^a f^*(t)\log^+ f^*(t)dt<\infty.$$

根据定理(2.3)知, 这正等价于断言(*b*). 推论获证.

由这个推论容易推出, 如果$\exists\lambda_0$使$|\{Mf>\lambda_0\}|<\infty$, 则

$$\int_E Mf\,dx<\infty,\ \forall\text{有限测度集 }E\Longleftrightarrow\int_F |f|\log^+|f|\,dx<\infty,$$

$\forall$有限测度集 F.

推论(4.8) 设$f\in L^1_{\mathrm{loc}}$, $f\not\equiv 0$, Φ是$\mathbb{R}_+$上非负连续增函数,

$\Phi(0)=0$, 使 $\int_1^{+\infty}\Phi\left(\frac{1}{t}\right)dt=\infty$. 则

$$\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(Mf)dx=\infty.$$

证明 由 $f\not\equiv 0$, 知 $f^*(t)\not\equiv 0$. 故存在 $a,b>0$, 使

$$f^*(t)\geqslant b,\ \forall t\leqslant a.$$

这样, 由式(9)知

$$(Mf)^*(t)\geqslant cf^{**}(t)\geqslant\frac{c}{t}\int_0^a f^*(s)ds\geqslant\frac{cab}{t},\ \forall t\geqslant a.$$

因此

$$\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(Mf)dx=\int_0^\infty\Phi((Mf)^*)dt\geqslant\int_a^\infty\Phi\left(\frac{cab}{t}\right)dt=\infty.$$

推论获证.

本推论告诉我们, 如果 $f\in L^1_{loc}$ 并且存在满足 $\int_1^\infty\Phi\left(\frac{1}{t}\right)dt=\infty$ 的 $\Phi(u)$, 使得 $\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(Mf)dx<\infty$, 则必有 $f\equiv 0$. 取 $\Phi(u)=u$ 是最常用的, 它说明非零 f 的 Mf 不可能属于 $L^1(\mathbb{R}^n)$.

现在讨论极大函数算子的主要应用, 即它控制了一些常见的算子.

定理(4.9) 设 $\varphi\in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\varphi_\varepsilon=\varepsilon^{-n}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, $\varepsilon>0$. 设 φ 的最小径向递减控制函数 $\psi(x)=\sup\limits_{|y|\geqslant|x|}|\varphi(y)|\in L^1$, $A=\|\psi\|_1$. 则

$$\sup_{\varepsilon>0} |f * \varphi_\varepsilon(x)| \leqslant AMf(x), \quad \forall f \in L^1_{loc}. \tag{10}$$

证明 首先指出，我们只需对 ε 与 x 的一对特殊值，即 $\varepsilon=1$，$x=0$，与任意的 f，证明

$$|f * \varphi_1(0)| \leqslant AMf(0), \tag{11}$$

就够了．这是因为对任意的 $\varepsilon>0$，若记 $T_\varepsilon f = f * \varphi_\varepsilon$，则

$$T_\varepsilon f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon^{-n} \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) f(y) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon} - z\right) f(\varepsilon z) dz = T_1(d_\varepsilon f)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

其中 $d_\varepsilon f(x) = f(\varepsilon x)$；以及（极大函数用“中心”球定义）

$$Mf(x) = \sup_B \frac{1}{|B|} \int_B |f(x+y)| dy = \sup_B \frac{1}{|B|} \int_{\widetilde{B}} |f(x+\varepsilon z)| \varepsilon^n dz$$

$$= \sup_{\widetilde{B}} \frac{1}{|\widetilde{B}|} \int_{\widetilde{B}} \left| f\left(\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon} + z\right)\right)\right| dz = M(d_\varepsilon f)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

（其中 B 遍历以 0 为心，以 r 为半径的球，$\widetilde{B}$ 遍历以 0 为心，以 $\frac{r}{\varepsilon}$ 为半径的球．既然遍历的集合一样，故“sup”也一样）．至于对一般的 x，只要经过平移便可化为 $x=0$ 的情形．为证 (11)，充分的只需对非负 f 证明

$$f * \psi(0) \leqslant AMf(0). \tag{12}$$

简记 $\psi(x)$ 为 $\psi(r)$，当 $|x|=r$ 时．令

$$\Lambda(r) = \int_{|x|\leqslant r} f(x) dx = \int_0^r t^{n-1} \int_{x \in S_{n-1}} f(tx) d\sigma(x) dt$$

$$= \int_0^r t^{n-1}\lambda(t)dt.$$

注意

$$\Lambda(r) \leqslant |B(0,r)| Mf(0) = cr^n Mf(0),$$

以及 $\psi(r) = o(r^n)$，当 $r \to 0$ 与 $r \to \infty$ 时. 这后一事实是因为

$$\psi(r)\int_{\frac{r}{2} \leqslant |x| \leqslant r} dx \leqslant \int_{\frac{r}{2} \leqslant |x| \leqslant r} \psi(x)dx.$$

这样我们可得

$$\psi * f(0) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\psi(-x)dx = \int_0^\infty \lambda(r)\psi(r)r^{n-1}dr$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0, N \to \infty} \int_\varepsilon^N \lambda(r)\psi(r)r^{n-1}dr$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0, N \to \infty} \left(-\int_\varepsilon^N \Lambda(r)d\psi(r) \right)$$

$$\leqslant cMf(0)\int_0^\infty r^n d(-\psi(r))$$

$$= \|\psi\|_1 Mf(0) = AMf(0).$$

定理至此证毕.

推论(4.10) 设 $\delta > 0$. 则

$$\sup_{\varepsilon > 0}\left| \int_{|z-x| \geqslant \varepsilon} \frac{\varepsilon^\delta}{|z-x|^{n+\delta}} f(z)dz \right| \leqslant cMf(x). \qquad (13)$$

证明 设 $B = B(0, 1)$. 令

$$\varphi(z)=\frac{1}{|z|^{n+\delta}}\chi_{B^c}(z).$$

则 φ 的最小径向递降控制函数

$$\psi(z)=\chi_B(z)+\frac{1}{|z|^{n+\delta}}\chi_{B^c}(z)\in L^1.$$

同时，$\varphi_\varepsilon(z)=\dfrac{\varepsilon^\delta}{|z|^{n+\delta}}\chi_{(\varepsilon B)^c}(z)$. 故

$$f*\varphi_\varepsilon(z)=\int_{|z-x|\geqslant\varepsilon}\frac{\varepsilon^\delta}{|z-x|^{n+\delta}}f(z)dz.$$

这样，式(13)是式(10)的结果．推论获证．

如果定理(4.9)中的 $\psi(x)$ 还满足一个附加假定

$$\sup_{|z|\leqslant 1}\psi(x-z)\leqslant c\psi(x),\quad\forall x\in\mathbb{R}^n, \tag{14}$$

则式(10)左边可以加强为非切向极大函数．

定理(4.11) 设 φ 如定理(4.9)，并且它的最小径向递降控制函数 ψ 满足式(14)．则(回忆 $\Gamma(x_0)=\{(x,t):|x-x_0|<t\}$)

$$\sup_{(x,t)\in\Gamma(x_0)}|f*\varphi_t(x)|\leqslant cMf(x_0),\quad\forall f\in L^1_{\text{loc}},\quad\forall x_0\in\mathbb{R}^n. \tag{15}$$

证明 我们有

$$\begin{aligned}|f*\varphi_t(x)|&\leqslant\int_{\mathbb{R}^n}t^{-n}\psi\left(\frac{x-y}{t}\right)|f(y)|dy\\&=\int_{\mathbb{R}^n}t^{-n}\psi\left(\frac{x_0-y+x-x_0}{t}\right)|f(y)|dy\\&\leqslant c\int_{\mathbb{R}^n}t^{-n}\psi\left(\frac{x_0-y}{t}\right)|f(y)|dy\\&\leqslant cMf(x_0).\end{aligned}$$

由此，式(15)获证．定理证毕．

值得指出的是，设 $\varphi(x)=(1+|x|)^{-\frac{n+1}{2}}$，则 $\varphi_t(x)=t(|x|^2+t^2)^{-\frac{n+1}{2}}=cP_t(x)$. 注意此时 $\psi=\varphi$ 的确满足式(14)：当 $|z|\leqslant 1$ 时

$$\varphi(x+z)\leqslant c\leqslant c\varphi(x),\ |x|\leqslant 2;$$

$$\varphi(x+z)\leqslant\left(1+\left(\frac{|x|}{2}\right)^2\right)^{-\frac{n+1}{2}}\leqslant c\varphi(x),\quad |x|>2.$$

这样，我们得知 f 的Poisson 积分的非切向极大函数满足

$$\sup_{(x,t)\in\Gamma(x_0)}|f*P_t(x)|\leqslant cMf(x_0).$$

且显然 $\Gamma(x_0)$ 可换为 $\Gamma_\alpha(x_0)$，对任意 $\alpha>0$.

用 Hardy－Littlewood 极大函数 $M(f)$ 作估计，有时候得不到理想的结果. 现在讨论 $M(f)$ 的一种修正，即#函数算子，它最早是由 C. Fefferman－E. Stein 引进的. #函数是比 $M(f)$ 点态地更小的函数，但它们的可积性却基本上差不多. 这样，为了估计某个函数自己(或者它的极大函数)的某种可积性，充分地只需估计这个函数的#函数有这种可积性就够了. 既然它点态地比较小，这往往更容易达到. 我们将在以后各章看到这种应用的例子.

定义(4.12) 设 $0<r<\infty$，$f\in L^1_{loc}$. 定义

$$f_r^{\#}(x)=\sup_{I\ni x}\inf_{c\in\mathbb{C}}\left(\frac{1}{|I|}\int_I|f-c|^r dx\right)^{\frac{1}{r}}. \tag{16}$$

它称为 f 的#函数(sharp function). 通常 $f_1^{\#}$ 简记为 $f^{\#}$.

当 $1\leqslant r<\infty$ 时，$f_r^{\#}$ 也可以定义为(仍用相同记号)

$$f_r^{\#}(x)=\sup_{I\ni x}\left(\frac{1}{|I|}\int_I|f-f_I|^r dx\right)^{\frac{1}{r}}, \tag{17}$$

其中$f_I=\frac{1}{|I|}\int_I f(x)dx$. 注意，用这两种定义出来的函数是互相控制的，因而认为这两种定义是等价的. 当$r<1$时只能有式(16)中的定义. 式(16)或(17)中的定义是极大函数与 BMO 函数(见第四章)的定义的结合. 以后对 BMO 熟悉了，就会对 # 函数理解得更加深入.

函数与 Hardy - Littlewood 极大函数有差不多相同的可积性，来源于它们满足"好 λ 不等式". 我们主要讨论用二进方体来定义的极大函数与 # 函数. 设$0<r<\infty$, $f\in L^r_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. 对每个二进方体 J，记 f_J 为使积分 $\int_J |f-f_J|^r dy$ 达到极小的复数$\left(\text{当 } r\geqslant 1 \text{ 时也可按记号 } f_J \text{ 的通常意义来理解，即 } f_J=\frac{1}{|J|}\int_J f dy\right)$.

设 I 为任意二进方体，定义

$$M_I(|f-f_I|^r)=\sup_{I\supset\text{二进}J\ni x}\frac{1}{|J|}\int_J|f-f_I|^r dy,$$

$$f^{\#}_{r,I}=\sup_{I\supset\text{二进}J\ni x}\inf_{c\in\mathbb{C}}\frac{1}{|J|}\int_J|f-c|^r dy=\sup_{I\supset J\ni x}\frac{1}{|J|}\int_J|f-f_J|^r dy.$$

定理(4.13) 设$0<r<\infty$, $f\in L^r_{\text{loc}}$. 则$\forall$二进方体 I，函数对$(M_I(|f-f_I|^r), f^{\#}_{r,I})$与$(f^{\#}_{r,I}, M_I(|f-f_I|^r))$一致在 I 上满足"好 λ 不等式".

定理中的"一致"，其含意是指，好 λ 不等式中出现的常数均与 I 无关.

证明 $(f^{\#}_{r,I}, M_I(|f-f_I|^r))$显然在 I 上满足"好 λ 不等式"，因

为

$$f^{\#}_{r,I}(x)\leqslant M_I(|f-f_I|^r)(x),\quad \forall x\in I.$$

现证存在 $\alpha>1$, $c>0$, 使 $\forall\beta>0$, 有

$$\begin{aligned}&|I\cap\{M_I(|f-f_I|^r)>\alpha\lambda\}\cap\{f^{\#}_{r,I}\leqslant\beta\lambda\}|\\&\leqslant c\beta|I\cap\{M_I(|f-f_I|^r)>\lambda\}|,\forall\lambda>0.\end{aligned}\tag{18}$$

充分地只需考虑 $r\geqslant 1$ 情形. 因为当 $r<1$ 时, 由于

$$\begin{aligned}&\frac{1}{|J|}\int_J||f-f_J|^r-|f_J-f_I|^r|dy\\&\leqslant\frac{1}{|J|}\int_J|f-f_J|^r dy,\ \forall J\subset I,\end{aligned}$$

$$(|f-f_I|^r)^{\#}_I(x)\leqslant f^{\#}_{r,I}(x),\ \forall x\in I,$$

故由指标为 1 的情形的结论, 即得

$$\begin{aligned}&|I\cap\{M_I(|f-f_I|^r)>\alpha\lambda\}\cap\{f^{\#}_{r,I}\leqslant\beta\lambda\}|\\&\leqslant|I\cap\{M_I(|f-f_I|^r)>\alpha\lambda\}\cap\{(|f-f_I|^r)^{\#}_I\leqslant\beta\lambda\}|\\&\leqslant c\beta|I\cap\{M_I(|f-f_I|^r)>\lambda\}|.\end{aligned}$$

现设 $r\geqslant 1$. 注意我们考虑的是二进情况, 因此 C－Z 分解能将 $\{M_I f>\lambda\}$ 确切地表为二进方体的并. 设二进方体 I 与 $\lambda>0$ 任意给定. 对函数 $|f-f_I|^r$ 与水平 λ 在 I 上作 C－Z 分解得到

$$I\cap\{M_I(|f-f_I|^r>\lambda\}=U=\bigcup_k Q_k.\tag{19}$$

当然有一种可能是 C－Z 分解不能进行, 即 $\{Q_k\}$ 只有一个元素 I. 此时式(18)是自然成立的. 因为如果 $I\cap\{f^{\#}_{r,I}\leqslant\beta\lambda\}=\phi$, 则式(18)左边为0; 而一旦存在 $x\in I$ 使 $f^{\#}_{r,I}(x)\leqslant\beta\lambda$, 则 $\frac{1}{|I|}\int_I|f-f_I|^r dr\leqslant c\beta\lambda$. 故

$$|\{x\in I:M_I(|f-f_I|^r)>\lambda\}|$$

$$\leqslant \frac{c|I|}{\lambda}\frac{1}{|I|}\int_I |f-f_I|^r dx \leqslant c\beta|I|.$$

这正是式(18)右边所需要的. 这说明 C－Z 分解不能进行时不用考虑. 再对 $|f-f_I|^r$ 与水平 $2^{n+1}2^{r-1}\lambda=\alpha\lambda$ 在 I 上作 C－Z 分解，得到

$$I\bigcap\{M_I(|f-f_I|^r)>\alpha\lambda\}=\bigcup_k\bigcup_j I_{k,j},\ \bigcup_j I_{k,j}\subset Q_k,\ \forall k.$$

注意我们有

$$\frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k}|f-f_I|^r dx\leqslant 2^n\lambda,\ \forall k,\tag{20}$$

$$\frac{1}{|I_{k,j}|}\int_{I_{k,j}}|f-f_I|^r dx>2^{n+1}2^{r-1}\lambda,\ \forall k,\ \forall j.\tag{21}$$

由此推出

$$|f_{Q_k}-f_I|^r\leqslant\frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k}|f-f_I|^r dx\leqslant 2^n\lambda,\ \forall k,$$

$$\frac{1}{|I_{k,j}|}\int_{I_{k,j}}|f-f_{Q_k}|^r dx>2^n\lambda,\ \forall k,\ \forall j.\tag{22}$$

这样

$$\begin{aligned}&I\bigcap\{M_I(|f-f_I|^r)>\alpha\lambda\}\bigcap\{f^{\#}_{r,I}\leqslant\beta\lambda\}\\&=\bigcup_k\bigcup_j I_{k,j}\bigcap\{f^{\#}_{r,I}\leqslant\beta\lambda\}=\bigcup_k{}'\bigcup_j I_{k,j},\end{aligned}$$

其中 $\bigcup\limits_k{}'$ 表示仅对那些 k 求和: $\exists x\in Q_k\bigcap\{f^{\#}_{r,I}\leqslant\beta\lambda\}$. 这样,

$$\begin{aligned}&|I\bigcap\{M_I(|f-f_I|^r)>\alpha\lambda\}\bigcap\{f^{\#}_{r,I}\leqslant\beta\lambda\}|\\&\leqslant\sum_k{}'\sum_j|I_{k,j}|\leqslant\frac{1}{2^n\lambda}\sum_k{}'\sum_j\int_{I_{k,j}}|f-f_{Q_k}|^r dx\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{c}{\lambda}\sum_k \int_{Q_k} |f-f_k|^r dx \leqslant c\beta \sum_k |Q_k|$$

$$= c\beta\, |I \cap \{M_I(|f-f_I|^r) > \lambda\}|.$$

式(18)获证. 定理证毕.

注 如果不考虑二进的极大算子与 # 算子, 则因为$\{x\in I: M(|f-f_I|^r)>\lambda\}$已不再严格地是二进方体的并, 故为了得到类似于(18)的不等式, 需要适当修改论证. 结论的确是成立的, 并且 $\mathbb{R}^n$ 的方体结构也不是必需的. §3.8 习题 24 中将指出我们可以在只有距离与测度结构的所谓齐型空间上建立有关算子 M 与 # 的类似结论.

利用定理(4.13)我们可以得到对适当的 $\Phi(u)$, 总有

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(M(|f-c_f|^r))dx \leqslant c\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(f_r^{\#\,r})dx. \qquad (23)$$

定理(4.14) 设 $\Phi(u)$是 $\mathbb{R}_+$ 上限制增长的连续增函数, 满足 $\Phi(0)=0$. 设 $f\in L^r_{\text{loc}}$, 使 $\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(f_r^{\#\,r})dx<\infty$. 则存在 $c_f\in\mathbb{C}$ 与仅依赖于维数及 Φ 的常数 c, 使得式(23)成立.

证明 由定理(4.13)与命题(2.12)知对二进的 M 与 # 函数, 有

$$\int_I \Phi(M_I(|f-f_I|^r))dx \leqslant c\int_I \Phi(f_{r,I}^{\#\,r})dx,\ \forall \text{二进 } I, \qquad (24)$$

既然 $|f-f_I|^r\leqslant M_I(|f-f_I|^r)$, $f_{r,I}^{\#\,r}\leqslant f_r^{\#\,r}$, a.e. 于 I 上, 这当然推出

$$\int_I \Phi(|f-f_I|^r)dx \leqslant c\int_I \Phi(f_r^{\#\,r})dx,\ \forall \text{ 二进 } I. \qquad (25)$$

现选取单调增加到 $\mathbb{R}^n$ 的二进方体族 $\{I_n\}$, 并设 $m\geqslant n$. 则

$$\Phi(|f_{I_n}-f_{I_m}|^r)\leqslant c\{\Phi(|f(x)-f_{I_n}|^r)+\Phi(|f(x)-f_{I_m}|^r)\},$$
$$\text{a.e. } x\in I_n,$$

$$\Phi(|f_{I_n}-f_{I_m}|^r)\leqslant \frac{c}{|I_n|}\int_{I_n}\Phi(|f(x)-f_{I_n}|^r)dx$$
$$+\frac{c}{|I_n|}\int_{I_n}\Phi(|f(x)-f_{I_m}|^r)dx$$
$$\leqslant \frac{c}{|I_n|}\left(\int_{I_n}\Phi(f_r^{\#r})dx+\int_{I_m}\Phi(f_r^{\#r})dx\right)$$
$$\leqslant \frac{c\|\Phi(f_r^{\#r})\|_1}{|I_n|}.$$

这说明 $c_f=\lim\limits_{n\to\infty}f_{I_n}$ 存在，且

$$\Phi(|f_{I_n}-c_f|^r)\leqslant \frac{c\|\Phi(f_r^{\#r})\|_1}{|I_n|}. \tag{26}$$

因此，结合(24)与(26)，$\forall n$ 有

$$\int_{I_n}\Phi(M_{I_n}(|f-c_f|^r)dx$$
$$\leqslant c\int_{I_n}\Phi(M_{I_n}(|f-f_{I_n}|^r)dx+c|I_n|\Phi(|f_{I_n}-c_f|^r)$$
$$\leqslant c\|\Phi(f_r^{\#r})\|_1.$$

令$n\to\infty$ 即得 (23)。定理证毕.

推论(4.15) 若$f\in L^p$, $1<p<\infty$，则
$$\|f\|_p\leqslant c\|f^{\#}\|_p,$$
其中c与f 无关.

证明 只需对 $\Phi(t)=t^p$ 用定理(4.14)，并注意到此时

$$c_f = \lim_{n\to\infty} f_{I_n} = 0.$$

§3.5 两个算子内插定理

我们将在第七章比较系统地介绍算子内插与空间内插的理论. 但因内插的概念已成了实变理论中很基本的方法之一, 况且它甚至在本书的开始部分(如第二章)就已经被用到了, 以后还会陆续不断地被用到, 因此有必要将这个理论中最基本的部分, 即 Riesz–Thorin 定理与 Marcinkiewicz 内插定理, 提前到这里介绍. 如同§2一样, 本节的舞台是一般测度空间.

首先讨论 Riesz–Thorin 定理. 我们考虑的对象是定义在 σ 有限非负测度空间 $(X,\mathscr{F},\mu)$上的简单函数空间S_X到另一 σ 有限非负测度空间 $(Y,\mathscr{F},\nu)$上的可测函数空间 $\mathscr{M}_Y$ 内的线性算子 T. 设 $1\leqslant p, q\leqslant\infty$. 我们要讨论在什么样的条件下可以保证 T 是 $(L^p(X), L^q(Y))$有界的, 或称是(p,q)型的, 意即

$$\|Tf\|_q \leqslant c\|f\|_p, \quad \forall f\in S_X. \tag{1}$$

M. Riesz 在 30 年代发现, 如果(1)对两个比较特殊的指标对 (p_i, q_i), $i=1,2$, 成立, 则对所有那些(p,q), 其中 $\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right)$ 是以 $\left(\frac{1}{p_i}, \frac{1}{q_i}\right)$为端点的 $\mathbb{R}^2$ 中的单位正方形内的线段上的中间点, (1)也成立. 这个定理称为 Riesz–Thorin 凸性定理, 因为它揭示出使(1)成立的点 $\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right)$的集合是 $\mathbb{R}^2$ 的单位正方形内的凸集, 且算子范数作为点 $\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right)$ 的函数是对数凸的. 这个定理的证明是用复分析, 主要用到带形区域的 Phragmen–Lindelof 定理(我们已经在§2.4用到了角形域的同类定理).

引理(5.1) (Phragmen - Lindelof) 设 $f(z)$ 是闭带形 $\{z:\alpha\leqslant \mathrm{Re}\, z\leqslant\beta\}$上连续有界，在开带形内解析的函数，且满足

$$|f(\alpha+iy)|\leqslant M_1,\ |f(\beta+iy)|\leqslant M_2, \tag{2}$$

则对带形内的任意点 $z_0=x_0+iy_0$，有

$$|f(x_0+iy_0)|\leqslant M_1^{l(x_0)}M_2^{1-l(x_0)}, \tag{3}$$

其中 $l(t)=\dfrac{t}{\alpha-\beta}-\dfrac{\beta}{\alpha-\beta}$，是一个在 $t=\alpha$ 取值 1，在 $t=\beta$ 取值 0 的线性函数.

证明 不妨设 $M_i>0$. 考虑 $g(z)=f(z)M_1^{-l(z)}M_2^{l(z)-1}$. 则 g 在闭带形上连续有界，在开带形内解析，且满足(2)，但对应的 M_1,M_2 为 1. 因此我们可以先对 $M_1=M_2=1$ 情形证明引理. 设 $\gamma>\max(\alpha^2,\beta^2)$，考虑

$$G_n(z)=g(z)e^{\frac{1}{n}(z^2-\gamma)},\ n=1,2,\cdots.$$

由于对 $z=x+iy,\alpha\leqslant x\leqslant\beta$，有

$$|e^{\frac{1}{n}(z^2-\gamma)}|=e^{\frac{1}{n}(\mathrm{Re}\, z^2-\gamma)}=e^{-\frac{y^2}{n}}e^{\frac{x^2-\gamma}{n}}\leqslant e^{-\frac{y^2}{n}},$$

知 $G_n(z)$满足同 $g(z)$一样的条件，且 $\lim\limits_{y\to\pm\infty}|G_n(z)|=0$ 对 x 一致. 这样对闭带形被 $y=\pm N$ (N 充分大)所截得的闭区域应用普通极大模原理，有

$$|G_n(z)|\leqslant 1,\ \forall n,\ |g(z)|\leqslant 1,\ \forall z=x+iy,\ \alpha\leqslant x\leqslant\beta.$$

因此(令 $n\to\infty$)

$$|f(z)|\leqslant|M_1^{l(z)}M_2^{1-l(z)}|=M_1^{l(x)}M_2^{1-l(x)},\ \forall z=x+iy,\ \alpha\leqslant x\leqslant\beta.$$

引理获证.

比较§2.4 的对角形域的 Phragmen - Lindelof 定理，发现证明思想都是一样的，先在 $f(z)$上乘一个带参数的因子，使当 $|z|\to\infty$，被乘以后的函数趋于 0，然后在有界闭域上应用普通极大模原理，最后令参数趋于 0 或 ∞ 取极限即得.

定理(5.2) (Riesz - Thorin) 设 $1\leqslant p_i, q_i\leqslant\infty$，$i=1,2$，

T 是定义在一般测度空间 (X,μ) 上的 S_X 上，取值于另一个一般测度空间 (Y,ν) 上的 $\mathscr{M}_Y$ 内的算子，满足

$$\|Tf\|_{q_i}\leqslant c_i\|f\|_{p_i},\ i=1,2,\ \forall f\in S_X. \tag{4}$$

又 $\forall\theta\in[0,1]$，记

$$\frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_1}+\frac{\theta}{p_2},\quad \frac{1}{q}=\frac{1-\theta}{q_1}+\frac{\theta}{q_2}, \tag{5}$$

则 T 是 (p,q) 型，即

$$\|Tf\|_q\leqslant c_1^{1-\theta}c_2^{\theta}\|f\|_p,\quad \forall f\in L^p(X,\mu). \tag{6}$$

证明 记 $\dfrac{1}{p_i}=\alpha_i$，$\dfrac{1}{q_i}=\beta_i$. 则 (α_i,β_i) 是 $\mathbb{R}^2$ 中方形 $\{(\alpha,\beta):0\leqslant\alpha,\beta\leqslant 1\}$ 内的点. 对 $0\leqslant\theta\leqslant 1$，令

$$\alpha=(1-\theta)\alpha_1+\theta\alpha_2,\ \beta=(1-\theta)\beta_1+\theta\beta_2,$$
$$\alpha(z)=(1-z)\alpha_1+z\alpha_2,\ \beta(z)=(1-z)\beta_1+z\beta_2,$$

其中 z 属于闭带形 $B=\{z=x+iy;\ 0\leqslant x\leqslant 1\}$. 当 $z=0,1,\theta$ 时，$(\alpha(z),\beta(z))$ 分别是 (α_1,β_1)，(α_2,β_2) 与 (α,β). 设 $f\in S_X$，$\|f\|_{\frac{1}{\alpha}}=1$. 则

$$\|Tf\|_{\frac{1}{\beta}}=\sup\left\{\left|\int_Y Tf\cdot g\,d\nu\right|\ :\ g\in S_Y,\|g\|_{\frac{1}{1-\beta}}=1\right\}. \tag{7}$$

固定 f,g，考虑积分

$$I=\int_Y Tf\cdot g\,d\nu.$$

记 $f=|f|e^{iu}$，$g=|g|e^{iv}$. 先考虑 $\alpha>0$，$\beta<1$ 情形. 令

$$F(z)=|f|^{\frac{\alpha(z)}{\alpha}}e^{iu},\ G(z)=|g|^{\frac{1-\beta(z)}{1-\beta}}e^{iv}, \tag{8}$$

$$\Phi(z)=\int_Y TF(z)\cdot G(z)d\nu. \tag{9}$$

注意对每个固定的 z，由于 $f=\sum\limits_{j=1}^{n}|c_j|e^{iu_j}\chi_{E_j}$，$g=\sum\limits_{k=1}^{m}|d_k|e^{iv_k}\chi_{F_k}$，故

$$F(z)=\sum_{1}^{n} e^{i\alpha_j}|c_j|^{\frac{\alpha(z)}{\alpha}}\chi_{E_j},$$

$$TF(z)=\sum_{1}^{n} e^{i\alpha_j}|c_j|^{\frac{\alpha(z)}{\alpha}}T\chi_{E_j},$$

$$\Phi(z)=\sum_{j,k}|c_j|^{\frac{\alpha(z)}{\alpha}}|d_k|^{\frac{1-\beta(z)}{1-\beta}}e^{i(\alpha_j+\gamma_k)}\int_Y T(\chi_{E_j})\chi_{F_k}dv.$$

这说明 $\Phi(z)$在 B 内解析，在闭 B 上连续有界，此外

$$|\Phi(z)|\leqslant\|TF(z)\|_{\frac{1}{\beta1}}\|G(z)\|_{\frac{1}{1-\beta1}}\leqslant c_1\|F(z)\|_{\frac{1}{\alpha1}}\|G(z)\|_{\frac{1}{1-\beta1}},$$

在 Re $z=0$ 上，

注意当 Re $z=0$ 时有

$$\|F(z)\|_{\frac{1}{\alpha_1}}=\|\,|f|^{\frac{\alpha_1}{\alpha}}\|_{\frac{1}{\alpha_1}}=1\text{（甚至当}\alpha_1=0\text{ 时也对）},$$

$$\|G(z)\|_{\frac{1}{1-\beta_1}}=\|\,|g|^{\frac{1-\beta_1}{1-\beta}}\|_{\frac{1}{1-\beta_1}}=1\text{（甚至当}\beta_1=1\text{ 时也对）}.$$

这说明在 Re $z=0$ 上，$|\Phi(z)|\leqslant c_1$. 类似地在 Re $z=1$ 上，也有 $|\Phi(z)|\leqslant c_2$. 由引理(5.1)，即得

$$|I|=|\Phi(\theta)|\leqslant c_1^{l(\theta)}\,c_2^{1-l(\theta)}=c_1^{1-\theta}c_2^{\theta}.$$

这证明了当 $\alpha>0$, 且 $\beta<1$ 时

$$\|Tf\|_q\leqslant c_1^{1-\theta}c_2^{\theta}\|f\|_p,\ \forall\ f\in S_X. \tag{10}$$

$\alpha=0$ 或 $\beta=1$ 时更简单. 当 $\alpha=0$ 且 $\beta=1$ 时，$(p,q)=(\infty,1)$就是(p_i,q_i)，没有什么好证的. 当 $\alpha>0$, $\beta=1$ 时，此时必须是 $\beta_1=\beta_2=1$, 只需在上面的证明中令 $G(z)=g$. 类似地，当 $\beta<1$, $\alpha=0$ 时只需令$F(z)=f$. 这样式(10)在 α,β 的各种可能成立. 有了(10)，Tf 可以连续地被扩充至整个$L^p(X)$，且(6)成立. 定理证毕.

定理(5.2)的最典型的应用是关于Fourier变换的Hausdorff-Young不等式，我们已在§2.4叙述过了．另外一个简单应用是用它得到关于卷积的Young不等式．我们将它写成一个推论．其证明本质上不依赖于$\mathbb{R}^n$的具体结构，只要在有平移不变测度结构的对象(例如局部紧T_2交换群)上讨论就行．但我们仍对$\mathbb{R}^n$进行叙述．

推论(5.3) (Young)设$1\leqslant p, q\leqslant\infty$，$r$满足

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1\geqslant 0. \tag{11}$$

则卷积算子

$$f*g(x)=\int_{\mathbb{R}^n}f(y)g(x-y)dy$$

满足

$$\|f*g\|_r\leqslant\|f\|_p\|g\|_q. \tag{12}$$

证明 固定$g\in L^q$，$1\leqslant q\leqslant\infty$．考虑作用在$f$上的算子$f\to Tf=f*g$．则$T$是$(L^1, L^q)$有界的，算子范数$\leqslant\|g\|_q$．事实上这可由Minkowski不等式得到

$$\|f*g\|_q\leqslant\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{R}^n}|f(y)|^{\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}}|g(x-y)|dy\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(y)|dy\right)^{\frac{1}{q'}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}|f(y)||g(x-y)|^q dy\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\|f\|_1\|g\|_q.$$

此外，由Hölder不等式知它也是$(L^{q'}, L^\infty)$型的，算子范数$\leqslant\|g\|_q$．即

$$\|f*g\|_\infty\leqslant\|f\|_{q'}\cdot\|g\|_q.$$

因此，对p满足$1\leqslant p\leqslant q'$，记$\dfrac{1}{p}=1-t+\dfrac{t}{q'}=1-\dfrac{t}{q}$，令$r$

满足 $\frac{1}{r}=\frac{1-t}{q}=\frac{1}{q}+\frac{1}{p}-1$，根据 Riesz－Thorin 定理，知 T 是 (L^p, L^r) 有界的，且算子范数 $\leqslant\|g\|_q$. 推论证毕.

Riesz－Thorin 定理可以自然地推广到多线性算子情形. T：$(f_1,\cdots,f_n)\mapsto T(f_1,\cdots,f_n)$. 多线性的意思是指对每个变元都是线性的.

定理(5.4) 设 T 是定义在 $\prod_{j=1}^{n}S_{X_j}$ 上取值于 $\mathscr{M}_Y$ 内的多线性算子，其中 (X_j,μ_j)，(Y,ν) 是 σ 有限非负测度空间. 又设 T 是 $\left(\frac{1}{\alpha_1^{(i)}},\cdots,\frac{1}{\alpha_n^{(i)}};\frac{1}{\beta^{(i)}}\right)$ 型的，且有算子范数 c_i，$i=1,2$. 即

$$\|T(f_1,\cdots,f_n)\|_{\frac{1}{\beta^{(i)}}}\leqslant c_i\prod_{j=1}^{n}\|f_j\|_{\frac{1}{\alpha_j^{(i)}}},\ i=1,2. \tag{13}$$

其中所有 (α,β) 均在单位正方形内. 则 $\forall t\in[0,1]$，令

$$\alpha_j=(1-t)\alpha_j^{(1)}+t\alpha_j^{(2)},\ \beta=(1-t)\beta^{(1)}+t\beta^{(2)},\ j=1,\cdots,n, \tag{14}$$

有

$$\|T(f_1,\cdots,f_n)\|_{\frac{1}{\beta}}\leqslant c_1^{1-t}c_2^t\prod_{j=1}^{n}\|f_j\|_{\frac{1}{\alpha_j}},\quad\forall f_j\in S_{X_j}. \tag{15}$$

且当 $\alpha_j>0, j=1,\cdots,n$ 时，(15)可以扩充至 $\prod_{j=1}^{n}L^{\frac{1}{\alpha_j}}(X_j)$.

证明 完全平行于定理(5.2)的证明，便可得结论(15). 现补充最后断言的证明. 注意到

$$\begin{aligned}&|T(f_1^{(k)},\cdots,f_n^{(k)})-T(f_1^{(l)},\cdots,f_n^{(l)})|\\ \leqslant&|T(f_1^{(k)},f_2^{(k)},\cdots,f_n^{(k)})-T(f_1^{(l)},f_2^{(k)},\cdots,f_n^{(k)})|\\ &+|T(f_1^{(l)},f_2^{(k)},\cdots,f_n^{(k)})-T(f_1^{(l)},f_2^{(l)},\cdots,f_n^{(k)})|\\ &+\cdots+|T(f_1^{(l)},\cdots,f_{n-1}^{(l)},f_n^{(k)})-T(f_1^{(l)},\cdots,f_n^{(l)})|,\end{aligned}$$

则

$$\|T(f_1^{(k)},\cdots,f_n^{(k)})-T(f_1^{(l)},\cdots,f_n^{(l)})\|$$

$$\leqslant c_1^{n-1} c_2 \left(\sup_{k,j} \|f_j^{(k)}\|_{\frac{1}{\alpha_j}}\right)^{n-1} \sum_{j=1}^{n} \|f_j^{(k)} - f_j^{(l)}\|_{\frac{1}{\alpha_j}} .$$

这说明对任意 $(f_1, \cdots, f_n) \in \prod_{j=1}^{n} L^{\frac{1}{\alpha_j}}(X_j)$，设 $(f_1^{(k)}, \cdots, f_n^{(k)})$ 是 $\prod_{j=1}^{n} S_{X_j}$ 中的在 $\prod_{j=1}^{n} L^{\frac{1}{\alpha_j}}(X_j)$ 中收敛于 $(f_1, \cdots, f_n)$ 的序列，则

$$T(f_1^{(k)}, \cdots, f_n^{(k)})$$

是 $L^{\frac{1}{\beta}}(Y)$ 中的 Cauchy 列. 从而连续扩充成为可能. 定理证毕.

Riesz–Thorin 定理虽然有很大用处，但有两个缺点. 第一，算子要求是线性的，第二，在端点空间，算子要求是强型有界的. 这限制了它的应用. Marcinkiewicz 的下述改进弥补了这两个缺陷，但也牺牲了两个优点，一是指标间大小顺序有所限制，第二是算子模的估计没有这么简单清楚了. 当被内插的点 $\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right)$ 趋于端点时，算子模的无穷大阶比较复杂一些. 下述算子的弱有界性，或弱型概念是这类内插定理的关键概念.

定义 (5.5) 设 D 是 σ 有限非负测度空间 (X, μ) 上的某些可测函数构成的线性空间，定义在其上的算子 T 称为次线性的，如果

$$|T(\lambda f)| \leqslant |\lambda| |T(f)|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \forall f \in D. \tag{16}$$

$$|T(f+g)| \leqslant |T(f)| + |T(g)|, \quad \forall f, g \in D. \tag{17}$$

T 称为拟线性的，如果 (17) 改为

$$|T(f+g)| \leqslant c_T(|T(f)| + |T(g)|), \quad \forall f, g \in D. \tag{18}$$

其中 c_T 是不依赖于 f, g 的常数.

定义 (5.6) 定义于上述 (X, μ) 上简单函数类 S 上的次（或拟）线性算子称为弱 (p, q) 型的，$0 < p, q < \infty$，若

$$\|Tf\|_{WL^q} = \sup_{\lambda > 0} \left(\lambda^q |\{Tf > \lambda\}|\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant c\|f\|_p,\quad \forall f\in S. \tag{19}$$

或等价地

$$\|Tf\|_{WL^q}=\sup_{t>0} t^{\frac{1}{q}}(Tf)^*(t)\leqslant c\|f\|_p,\quad \forall f\in S. \tag{20}$$

其中$\|\cdot\|_{WL^q}$也称弱L^q模.

显然，算子的强(p,q)型蕴含了弱(p,q)型，因为$\|Tf\|_{WL^q}\leqslant\|Tf\|_q$.

在第二章中引入的 Hilbert 变换H与共轭函数算子~，本章引入的 Hardy－Littlewood 极大函数M，都是弱$(1,1)$型的.

下面是简单指标情形下的 Marcinkiewicz 内插定理.

定理(5.7) (Marcinkiewicz) 设T是定义于(X,μ)的S_X上的拟线性算子，取值于(Y,ν)上的$\mathscr{M}_Y$内. 设T同时是弱$(1,1)$型与弱(r,r)型，$1<r<\infty$，或$r=\infty$时是强(∞,∞)型. 则$\forall p$，$1<p<r$，T也是(强)(p,p)型，且算子范数$c_p=O\left(\left(\frac{1}{p-1}+\frac{1}{r-p}\right)^{\frac{1}{p}}\right)$.

证明 设$f\in S_X$，$\lambda>0$，考虑分布函数$\sigma_{Tf}(\lambda)=|\{|Tf|>\lambda\}|$.
令$f_1=f\chi_{\{|f|>\lambda\}}$，$f_2=f\chi_{\{|f|\leqslant\lambda\}}$. 则

$$\{|Tf|>2c_T\lambda\}\subset\{|Tf_1|>\lambda\}\cup\{|Tf_2|>\lambda\},$$

$$\sigma_{Tf}(2c_T\lambda)\leqslant\sigma_{Tf_1}(\lambda)+\sigma_{Tf_2}(\lambda).$$

由T的弱$(1,1)$型与弱(r,r)型假定$(r<\infty)$得

$$\sigma_{Tf}(2c_T\lambda)\leqslant\frac{c}{\lambda}\|f_1\|_1+\left(\frac{c}{\lambda}\|f_2\|_r\right)^r$$

$$\leqslant\frac{c}{\lambda}\int_{\{|f|>\lambda\}}|f|d\mu+\frac{c}{\lambda^r}\int_{\{|f|\leqslant\lambda\}}|f|^r d\mu,$$

进而

$$\|Tf\|_p^p=c\int_0^\infty\lambda^{p-1}\sigma_{Tf}(2c_T\lambda)d\lambda$$

$$\leqslant c\int_0^\infty \lambda^{p-2}\int_{\{|f|>\lambda\}}|f|\,d\mu + c\int_0^\infty \lambda^{p-r-1}\int_{\{|f|\leqslant\lambda\}}|f|^r d\mu$$

$$= c\int_X \int_0^{|f|} \lambda^{p-2}d\lambda\,|f|d\mu + c\int_X\int_{|f|}^\infty \lambda^{p-r-1}d\lambda\,|f|^r d\mu$$

$$= O\left(\frac{1}{p-1}\,\|f\|_p^p + \frac{1}{r-p}\,\|f\|_p^p\right).$$

当 $r=\infty$ 时由 $\{|Tf|>c\,c_T\lambda\}\subset\{|Tf_1|>\lambda\}$知讨论是一样的. 这证明了定理.

这个内插定理的最典型应用自然是应用于 Hardy – Littlewood 极大算子、Hilbert 变换及共轭函数算子. 下面给出的一个应用是 Hausdorff – Young 不等式的一种推广.

推论(5.8) (Hardy – Littlewood) 设 $\omega(x)dx$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上测度, 其密度 $\omega(x)=|x|^{-n(2-p)}$, 其中 $1<p\leqslant 2$. 则 Fourier 变换是 $(L^p(\mathbb{R}^n,dx),\ L^p(\mathbb{R}^n,\omega dx))$有界的.

证明 考虑算子

$$T: f \to Tf,\ Tf(\xi)=|\xi|^n\hat{f}(\xi),\quad \forall f\in \bigcup_{1<p\leqslant 2} L^p(\mathbb{R}^n). \tag{21}$$

则 Plancherel 定理说 T 是 $(L^2(\mathbb{R}^n,dx),\ L^2(\mathbb{R}^n,|\xi|^{-2n}d\xi))$有界的、要证明它也是弱 $(L^1(\mathbb{R}^n,dx),\ L^1(\mathbb{R}^n,|\xi|^{-2n}d\xi))$有界的. 一旦获证, 则它将是 $(L^p(\mathbb{R}^n,dx),\ L^p(\mathbb{R}^n,|\xi|^{-2n}d\xi))$有界的, 即

$$\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{f}(\xi)|^p|\xi|^{-n(2-p)}d\xi$$

$$=\int_{\mathbb{R}^n}|Tf|^p|\xi|^{-2n}d\xi\leqslant c\int_{\mathbb{R}^n}|f|^p dx.$$

现证 T是弱 $(L^1(\mathbb{R}^n,dx),\ L^1(\mathbb{R}^n,|\xi|^{-2n}d\xi))$有界的. 注意 $\|\hat{f}\|_\infty\leqslant$

$\|f\|_1$，则对$\lambda>0$，有

$$\{\xi:|\xi|^n|\hat{f}(\xi)|>\lambda\}\subset\left\{\xi:|\xi|^n>\frac{\lambda}{\|f\|_1}\right\},$$

故

$$\int_{\{|\xi|^n|\hat{f}(\xi)|>\lambda\}}|\xi|^{-2n}d\xi\leqslant\int_{\left\{|\xi|^n>\frac{\lambda}{\|f\|_1}\right\}}|\xi|^{-2n}d\xi=\frac{c}{\lambda}\|f\|_1.$$

这就完成了推论的证明.

§3.6 经典奇异积分算子的 L^p 有界性

$\mathbb{R}^n$ 上奇异积分算子理论不仅在其他分析领域有很多应用，而且在实分析范围，它占有一个中心的位置. 本章只讲述其中卷积型的经典奇异积分算子的 L^p 有界性. 关于奇异积分算子的深入内容，以后各章还会不断涉及.

定义(6.1) 所谓经典的奇异积分算子是指由满足如下性质的 $\mathbb{R}^n$ 上的奇异核 $K(x)$ 定义的卷积算子，积分取主值意义，

$$f\to Tf,\ Tf(x)=\mathrm{p.v.}\int_{\mathbb{R}^n}K(x-y)f(y)dy$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x-y|>\varepsilon}K(x-y)f(y)dy \qquad (1)$$

核满足的条件(称为 Calderón－Zygmund 核条件)是

$$|K(x)|\leqslant B|x|^{-n},\quad \forall x\neq 0, \qquad (2)$$

$$|K(x)-K(x')|\leqslant B|x-x'|^{\gamma}|x|^{-n-\gamma},\ |x-x'|<\frac{1}{2}|x|, \qquad (3)$$

其中$0<\gamma\leqslant 1$，以及

$$\int_{r_1\leqslant|x|\leqslant r_2}K(x)dx=0,\quad 0<r_1<r_2<\infty. \qquad (4)$$

经典的奇异积分算子是 A.Calderón – A.Zygmund 于 50 年代初开始进行研究的. 以后 L.Hörmander 引进了如下稍弱一些的条件

定义(6.2) 如下条件称为 Hörmander 条件:

$$\int_{|x|\geqslant 2|y|} |K(x-y)-K(x)|\,dx\leqslant B,\quad \forall y,\ |y|>0. \tag{5}$$

注 这个条件基本上可以代替(3). 特别在本节, 我们将在条件(2),(5),(4)下讨论奇异积分算子 T 的 L^p 有界性, $1<p<\infty$, 以及弱 L^1 有界性. 先应用 Calderón – Zygmund 分解, 讨论弱 L^1 有界.

引理(6.3) 设 $K(x)$是一个满足(5)的奇异核, 使得由(1)定义的主值奇异积分算子 T 是 L^2 有界的. 则 T 可以扩充为弱 L^1 有界的算子, 且界只依赖于(5)中的常数 B 以及 T 的 L^2 界.

证明 设 $f\in L^1\bigcap L^2$, $\lambda>0$. 对 f 与水平 λ 作 Calderón – Zygmund 分解(见§3.3 定理 3.7), 得到不交方体族$\{Q_k\}$满足

$$\lambda<\frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k}|f|\,dx\leqslant 2^n\lambda,$$

$$|f|\leqslant\lambda,\quad \text{a.e. 于 } (\bigcup_j Q_k)^c.$$

作分解

$$f=g+h,$$

$$g=f\chi_{(\bigcup_k Q_k)^c}+\sum_1^\infty f_{Q_k}\chi_{Q_k},$$

$$h=\sum_1^\infty (f-f_{Q_k})\chi_{Q_k}=\sum_1^\infty h_k,$$

其中 $f_{Q_k}=\dfrac{1}{|Q_k|}\displaystyle\int_{Q_k}f\,dx$. 记$\overline{Q}_k$ 为 Q_k 的适当倍数扩大, y_k 为 Q_k 的心. 则我们有

$$|\{|Tf|>2\lambda\}|\leqslant|\{|Tg|>\lambda\}|+|\{|Th|>\lambda\}|$$

$$\leqslant\frac{c}{\lambda^2}\|g\|_2^2+\sum_1^\infty|\overline{Q}_k|+|\{x\in(\bigcup_k\overline{Q}_k)^c:|Th|>\lambda\}|$$

对于第一，二项，显然有

$$\frac{c}{\lambda^2}\|g\|_2^2+c\sum_1^{\infty}|Q_k|\leqslant\frac{c}{\lambda}\|g\|_1+c\sum_1^{\infty}|Q_k|\leqslant\frac{c}{\lambda}\|f\|_1.$$

对第三项，我们要用到 h_k 支于 Q_k，且积分平均为 0 的性质. 因此

$$\begin{aligned}&|\{x\in(\bigcup_k\overline{Q}_k)^c:|Th|>\lambda\}|\\&\leqslant\frac{c}{\lambda}\sum_k\int_{(\overline{Q}_k)^c}|Th_k|\,dx\\&\leqslant\frac{c}{\lambda}\sum_k\int_{(\overline{Q}_k)^c}\int_{Q_k}|(K(x-y)-K(x-y_k))|\,|h_k(y)|\,dydx\\&\leqslant\frac{c}{\lambda}\sum_k\int_{Q_k}|h_k(y)|\int_{\overline{Q}_k^c}|K(x-y)-K(x-y_k)|\,dxdy\\&\leqslant\frac{c}{\lambda}\sum_k\int_{Q_k}|h_k(y)|\,dy\leqslant\frac{c}{\lambda}\|f\|_1.\end{aligned}$$

这样，我们已证得

$$|\{|Tf|>\lambda\}|\leqslant\frac{c}{\lambda}\|f\|_1,\ \forall f\in L^1\cap L^2.$$

既然 $L^1\cap L^2$ 在 L^1 中稠密，由此即知 T 可以扩充为一个弱 L^1 有界的算子，且其界保持不变. 这就证明了引理.

注 证明中，我们把 f 分解为 g 与 h 的和，其中 $g\in L^2$，有较好的性质，h 的值较大，但它可分解为支于 Q_k 的 h_k 之和，而 h_k 的积分平均为 0. 这种分解被称为函数的 Calderón－Zygmund 分解. 它是实分析中的最重要的技巧之一，以后我们还会每次碰到它或它的变形.

在 L^2 有界性这一附加假设下，我们已得到了 T 的弱 L^1 有界性. 现想法补证 L^2 有界. 为此，我们先加一些假定来证明 L^2 有界性，然后再去掉这些附加假定.

引理(6.4) 假设 $K(x)\in L^2$, 且 K 的 Fourier 变换满足

$$|\hat{K}(\xi)|\leqslant B,\ \text{a.e.} \tag{6}$$

则卷积算子 $f\to Tf=K*f$, 是 L^2 有界的, 且界只依赖于(6)中的常数 B, 而与 K 的 L^2 模无关.

根据 Plancherel 定理, 这是显然的.

定理(6.5) 设 $K(x)$满足(2), (5), (4). 则由(1)定义的奇异积分算子 T, 其中极限理解为 L^2 中收敛, 是 L^2 有界的, 界只依赖于(2)与(5)中的常数 B.

证明 对 $\varepsilon>0$, 考虑由核 $K_\varepsilon(x)=K(x)\chi_{\{|x|\geqslant\varepsilon\}}$ 定义的奇异积分算子 T_ε

$$T_\varepsilon f(x)=\int_{|y|\geqslant\varepsilon}K(y)f(x-y)dy$$

$$=\int_{\mathbb{R}^n}K_\varepsilon(y)f(x-y)dy. \tag{7}$$

我们断言核 K_ε 对 ε 一致地满足(2), (5), (4). 事实上, 只有条件(5)需要验证. 对取定 y, x 的位置只能有下述三种情况. 即 x 与 $x-y$ 同时在以原点为心、ε 为半径的球内或球外, 此时 K_ε 就是 K 或 0, 当然有式(5)所示的估计. 第三种情况是一在球内, 一在球外. 如果 $|x|>\varepsilon$, $|x-y|<\varepsilon$, 这时简记 $x\in E$, 则(注意 $|x|>2|y|$)

$$\frac{|x|}{2}\leqslant|x-y|<\varepsilon,\ \ \varepsilon<|x|<2\varepsilon,$$

总之, $|x|\approx\varepsilon\approx|x-y|$, 而此时的积分区域包含在以原点为心, 以 ε 与 2ε 为半径的球环内, 故

$$\int_{\{|x|>2|y|\}\cap E}|K_\varepsilon(x-y)-K_\varepsilon(x)|\,dx$$

$$\leqslant cB\varepsilon^{-n}\varepsilon^n=cB. \tag{8}$$

如果 $|x|<\varepsilon$, $|x-y|>\varepsilon$, 类似地有

$$\varepsilon<|x-y|\leqslant \frac{3}{2}|x|<\frac{3}{2}\varepsilon,$$

同样有(8). 现在我们断言 $\hat{K}_\varepsilon(\xi)$ 一致满足(6). 注意 $K_\varepsilon\in L^2$, Fourier 变换是通常意义下的. 我们有

$$\hat{K}_\varepsilon(\xi)=a_0\lim_{R\to\infty}\int_{|x|\leqslant R}e^{-ix\cdot\xi}K_\varepsilon(x)dx$$

$$=\lim_{R\to\infty}a_0\left\{\int_{|x|\leqslant\frac{c}{|\xi|}}+\int_{\frac{c}{|\xi|}\leqslant|x|\leqslant R}\right\}.$$

现分别估计两个积分. 根据(4), 知

$$\left|\int_{|x|\leqslant\frac{c}{|\xi|}}\right|=\left|\int_{|x|\leqslant\frac{c}{|\xi|}}K_\varepsilon(x)(e^{-ix\cdot\xi}-1)dx\right|$$

$$\leqslant c|\xi|\int_{|x|\leqslant\frac{c}{|\xi|}}|x||K_\varepsilon(x)|dx\leqslant cB.$$

对第二个积分, 我们取 y 使 $e^{iy\cdot\xi}=-1$, 例如 $y=|\xi|^{-2}\pi\xi$ 就行. 这样我们有

$$\int_{\frac{c}{|\xi|}\leqslant|x|\leqslant R}K_\varepsilon(x)e^{-ix\cdot\xi}dx$$

$$=\int_{\frac{c}{|\xi|}\leqslant|x-y|\leqslant R}K_\varepsilon(x-y)e^{-i(x-y)\cdot\xi}dx$$

$$=-\int_{\frac{c}{|\xi|}\leqslant|x-y|\leqslant R}K_\varepsilon(x-y)e^{-ix\cdot\xi}dx$$

$$=-\int_{\frac{c}{|\xi|}\leqslant|x|\leqslant R}K_\varepsilon(x-y)e^{-ix\cdot\xi}dx+I,$$

从而

$$\int_{\frac{c}{|\xi|}\leqslant|x|\leqslant R} K_\varepsilon(x)e^{-ix\cdot\xi}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{c}{|\xi|}\leqslant|x|\leqslant R}(K_\varepsilon(x)-K_\varepsilon(x-y))e^{-ix\cdot\xi}dx+\frac{I}{2}. \quad (9)$$

其中

$$|I|=\left|\int_{\frac{c}{|\xi|}\leqslant|x|\leqslant R} K_\varepsilon(x-y)e^{-ix\cdot\xi}dx\right.$$

$$\left.-\int_{\frac{c}{|\xi|}\leqslant|x-y|\leqslant R} K_\varepsilon(x-y)e^{-ix\cdot\xi}dx\right|$$

$$\leqslant\int_D|K_\varepsilon(x-y)|\,dx,$$

这里 D 是集合 $\left\{x:\frac{c}{|\xi|}\leqslant x\leqslant R\right\}$ 与 $\left\{x:\frac{c}{|\xi|}\leqslant|x-y|\leqslant R\right\}$

的对称差，而 $|y|=\frac{\pi}{|\xi|}$，因此只要取 c 适当大，便有 $\frac{\pi}{|\xi|}\leqslant$

$\frac{1}{2}\frac{c}{|\xi|}$，故

$$D\subset\left\{x:|x|\approx\frac{c}{|\xi|}\right\}\cup\left\{x:|x|\approx R\right\}.$$ [1]

这样，注意到 $|x-y|\geqslant\frac{|x|}{2}$，有

$$\int_D|K_\varepsilon(x-y)|\,dx\leqslant cB|\xi|^n\int_{\frac{c^{-1}}{|\xi|}\leqslant|x|\leqslant\frac{c}{|\xi|}}dx+$$

---

① 这里 $a\approx b$ 同 §2.2 脚注中所述一样理解. 所谓非负量 $a\approx b$ 是指存在正常数 c 使 $c^{-1}a\leqslant b\leqslant ca$.

$$cBR^{-n}\int_{c^{-1}R\leqslant|x|\leqslant cR}dx\leqslant cB.$$

此外(9)中右边第一项满足

$$\left|\int_{\frac{c}{|\xi|}\leqslant|x|\leqslant R}(K_\varepsilon(x)-K_\varepsilon(x-y))e^{-ix\cdot\xi}dx\right|$$

$$\leqslant\int_{|x|\geqslant2|y|}|K_\varepsilon(x)-K_\varepsilon(x-y)|dx\leqslant B,$$

其中 c, B 均与 ε 无关. 这就证明了 T_ε 是在 L^2 一致有界的. 现证在 L^2 的一个稠密子集上, $T_\varepsilon f$ 在 L^2 中收敛, 从而 $\forall f\in L^2$, Tf 作为 $T_\varepsilon f$ 在 L^2 中的极限存在, 且满足 $\|Tf\|_2\leqslant c\|f\|_2$, c 只依赖于条件中的常数 B. 这个稠密子集可以取为 $C_{00}^1=\{f\in C^1, \mathrm{supp}f\text{ 紧}\}$. 在这样的稠子集上,

$$T_\varepsilon f(x)=\int_{|y|\geqslant1}K(y)f(x-y)dy$$

$$+\int_{\varepsilon\leqslant|y|\leqslant1}K(y)(f(x-y)-f(x))dy,$$

第二个积分支于 x 的一个紧集上, 且对 x 一致收敛于

$$\int_{|y|\leqslant1}K(y)(f(x-y)-f(x))dy,$$

故也在 L^2 中收敛. 定理全部获证.

定理(6.6) 设 $K(x)$ 满足(2), (5)与(4). 则由(1)定义的经典奇异积分算子 T 对 $\bigcup\limits_{p\geqslant1}L^p$ 有定义, 且是弱 L^1 有界的, 强 L^p 有界的, $1<p<\infty$, 且 T 的算子范数只依赖于条件中的常数 B.

证明 我们已在定理(6.5)中证得, $\forall f\in L^2$, Tf 可以被定义为 $\{T_\varepsilon f\}$ 在 L^2 中的极限, 且 T 是 L^2 有界的. 引理(6.3)告诉我们 T 在 L^1 上有定义, 且是弱 L^1 有界的算子. 应用 Marcinkiewicz 内插定理(5.7)于每个 T_ε, 知对 $1<p\leqslant2$, $\{T_\varepsilon\}$ 是 L^p 上一致有界

算子族，且它在 L^p 的稠密子集 C_{00}^1 上收敛．故对 $f\in L^p$，Tf 可以定义为$\{T_\varepsilon f\}$在 L^p 中的极限，且所得到的算子是 L^p 有界的．对 $p>2$，由于 T 本质上自共轭，知 T 也是 L^p 有界的．且所有情况下，算子模数只依赖于条件中的常数．定理证毕．

注 如果考虑$\{T_\varepsilon\}$的极大算子 T^*，则可知 $\forall f\in\bigcup\limits_{p\geq 1}L^p$，$\{T_\varepsilon f\}$几乎处处有极限，即 T 可以定义为$\{T_\varepsilon f\}$的点态极限．由于我们将在§5.2 对更一般的奇异积分算子作这样的工作，此处就不讨论这一问题了．

我们将奇异积分算子的其他深入一些的性质集中在第五章介绍．这里我们先把它的一个典型例子，作为 Hilbert 变换的直接高维推广的 Riesz 变换，作稍微仔细一点的描述．甚至其中出现的常数也予以精确化．涉及到 Fourier 变换与卷积时应用 $\mathbb{R}^n$ 上的规范化测度 a_0dx．仍用 c_n 表示特定常数 $\dfrac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}$，它的几何意义是 $\dfrac{2}{c_n}$ 是 S_n（$\mathbb{R}^{n+1}$ 中单位球面）的面积．令

$$K_j(x)=\frac{c_n}{a_0}\,\frac{x_j}{|x|^{n+1}},\quad x=(x_1,\cdots,x_n),\ j=1,\cdots,n.\tag{10}$$

既然 $K=K_j$ 满足 $|\nabla K(x)|\leqslant c|x|^{-n-1}$，故$K$ 满足条件(2)，(3)，(4)．用 K_j 作核作卷积，便得到 Riesz 算子

$$R_jf(x)=\text{p.v.}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{c_ny_j}{|y|^{n+1}}f(x-y)dy.\tag{11}$$

由定理(6.6)知 R_j 是弱(1,1)型与强(p,p)型的，$1<p<\infty$．现从 Fourier 变换的角度考察 R_j．我们可以更一般地考虑形如 $K(x)=\dfrac{\Omega(x)}{|x|^n}$ 的核，其中 $\Omega(x)$是零阶齐次的有界函数，在单位球面 S_{n-1} 上满足 γ 阶 Lipschitz 条件，且 $\displaystyle\int_{S_{n-1}}\Omega(x')d\sigma(x')$

$=0$. 这样 K 满足 (2), (3), (4). 这时, 有

命题 (6.7) 设 $K(x)=\dfrac{\Omega(x')}{|x|^n}$ 如上, 则 $\forall x=|x|x'$ 有

$$\hat{K}(x)=a_0\int_{S_{n-1}}\left(\log\frac{1}{|x'\cdot y'|}-\frac{\pi i}{2}\operatorname{sgn}(x'\cdot y')\right)\Omega(y')d\sigma(y'). \tag{12}$$

证明 考虑 K 在球环 $\varepsilon\leqslant|x|\leqslant\eta$ 上的截断. 则

$$\begin{aligned}
a_0^{-1}\hat{K}_{\varepsilon,\eta}(x)&=\int_{S_{n-1}}\int_\varepsilon^\eta e^{-i|x|rx'\cdot y'}\Omega(y')\frac{dr}{r}\,d\sigma(y')\\
&=\int_{S_{n-1}}\int_\varepsilon^\eta (e^{-i|x|rx'\cdot y'}-\cos|x|r)\Omega(y')\frac{dr}{r}d\sigma(y')\\
&=\int_{S_{n-1}} I_{\varepsilon,\eta}(x,y')\Omega(y')d\sigma(y'),
\end{aligned}$$

其中

$$I_{\varepsilon,\eta}(x,y')=\int_\varepsilon^\eta(e^{-i|x|rx'\cdot y'}-\cos|x|r)\frac{dr}{r}.$$

这个积分的虚部是

$$-\int_\varepsilon^\eta\frac{\sin|x|rx'\cdot y'}{r}\,dr,$$

它对 x,y 一致地关于 ε,η 是有界的, 其极限为

$$-\int_0^\infty\frac{\sin t}{t}\,dt\operatorname{sgn}(x'\cdot y')=-\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(x'\cdot y').$$

其实部关于 ε,η 有上界 $c\log\dfrac{1}{|x'\cdot y'|}+c$, 且极限为

$$\lim_{\varepsilon\to 0,\eta\to\infty}\int_\varepsilon^\eta \frac{h(\lambda r)-h(\mu r)}{r}\,dr=h(0)\log\left(\frac{\mu}{\lambda}\right),$$

其中$h(r)=\cos r$，$\lambda=|x|x'\cdot y'$，$\mu=|x|$. 而Ω所满足的条件保证

$$\lim_{\varepsilon\to 0,\eta\to\infty}\hat{K}_{\varepsilon,\eta}(x)=a_0\int_{S_{n-1}}\lim_{\varepsilon\to 0,\eta\to\infty}I_{\varepsilon,\eta}(x,y')\Omega(y')d\sigma(y')$$

$$=a_0\int_{S_{n-1}}\left(-\frac{\pi i}{2}\operatorname{sgn}(x'\cdot y')+\log\frac{1}{|x'\cdot y'|}\right)\Omega(y')d\sigma(y').$$

这证明了命题.

注 特别对$\Omega_j(x)=\dfrac{a_0^{-1}c_n x_j}{|x|}$，我们有

$$\hat{K}_j(x)=-i\frac{x_j}{|x|},\quad j=1,\cdots,n. \tag{13}$$

这因，若记y_j为$y'\in S_{n-1}$的j分量，$j=1,\cdots,n$，则由对称性，显然地有

$$\int_{S_{n-1}}\log\frac{1}{|x'\cdot y'|}y_j\,d\sigma(y')=0. \tag{14}$$

同时，我们有

$$-i\frac{\pi}{2}c_n\int_{S_{n-1}}\operatorname{sgn}(x'\cdot y')y'\,d\sigma(y')=-ix',\ \forall x. \tag{15}$$

式(15)可以如下看出. 考虑$\mathbb{R}^n$上定义的有界线性泛函

$$l:h\to\frac{\pi}{2}c_n\int_{S_{n-1}}\operatorname{sgn}(x'\cdot y')h\cdot y'd\sigma(y'), \tag{16}$$

其中$x\in\mathbb{R}^n$固定. 由数学分析中的一个事实知

$$l(x')=\frac{\pi}{2}c_n\int_{S_{n-1}}\operatorname{sgn}(x'\cdot y')x'\cdot y'\,d\sigma(y')$$

$$= \frac{\pi}{2} c_n \int_{S_{n-1}} |\cos\theta| \, d\sigma(y') = 1,$$

其中 θ 是变动向量 y' 与固定向量 x' 之间的夹角，这样，必有

$$l(h) = h \cdot x' = \frac{h \cdot x}{|x|}, \quad \forall h \in \mathbb{R}^n. \tag{17}$$

特别令 $h = e_j$，即 $\mathbb{R}^n$ 中第 j 个坐标向量，即得

$$\frac{\pi}{2} c_n \int_{S_{n-1}} \operatorname{sgn}(x' \cdot y') y_j \, d\sigma(y_j) = \frac{x_j}{|x|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, j = 1, \cdots, n. \tag{18}$$

这就是所需要的 (15)．结合 (14)，(15) 得到 (13)．

由于 Riesz 变换 R_j 有通过 Fourier 变换的如此简单有用的表示，因此它可用来作为联系偏微商运算的各种组合间的媒介，例如我们有

$$\sum_{j=1}^{n} R_j^2 = -I, \tag{19}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k} = -R_j R_k \Delta \varphi. \tag{20}$$

这只需计算两边的 Fourier 变换：

$$\left(\sum_1^n R_j^2 \varphi\right)^{\wedge}(\xi) = \sum_1^n \left(-i \frac{\xi_j}{|\xi|}\right)^2 \hat{\varphi}(\xi) = -\hat{\varphi}(\xi),$$

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k}\right)^{\wedge}(\xi) = i\xi_j i\xi_k \hat{\varphi}(\xi) = -(R_j R_k \Delta \varphi)^{\wedge}(\xi).$$

显然，公式 (19)，(20) 在偏微分方程的先验估计中是很常用的．

§3.7 Littlewood－Paley g 函数与乘子理论

本节内容涉及 L^p 空间的 Fourier 分析．其中 g 函数概念是 Littlewood－Paley 于 30 年代引进的．其目的是为了弥补不能由 Fourier 变换的大小来判定函数本身是否属于 L^p 这一缺陷．古典的 Littlewood－Paley 定理说，$f\in L^p(\mathbb{T})$，$1<p<\infty$，当且仅当由它的 Fourier 级数构成的 g 函数属于 L^p，其中

$$g(f,x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left|\sum_{2^n\leqslant |k|<2^{n+1}} c_k e^{ikx}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

且 $\|g(f)\|_p\approx\|f\|_p$．在 $\mathbb{R}^n$ 上，g 函数通过 Fourier 积分自然地应被定义为

$$g(f,x)=\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\int_{2^n\leqslant|\xi|<2^{n+1}}\hat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (1)$$

现在流行的定义是先把离散和(1)改为连续积分

$$\left(\int_0^{\infty}\left|\int_{2^t\leqslant|\xi|<2^{t+1}}\hat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi\right|^2\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{2}},$$

然后再把 Fourier 变换在球环 $\{\xi:2^t\leqslant|\xi|<2^{t+1}\}$ 上的局限改为一个光滑截断．设 $\psi(x)$ 是一个充分好的径向函数，使其 Fourier 变换支于某个球环，例如可设 $\operatorname{supp}\hat{\psi}(\xi)\subset\{\xi:\frac{1}{2}\leqslant|\xi|<2\}$，且在一个小一点的球环上，$\hat{\psi}(\xi)=1$．对 $t>0$ 如通常那样令 $\psi_t(x)=t^{-n}\psi(\frac{x}{t})$．则 $\hat{\psi}_t(\xi)=\hat{\psi}(t\xi)$．注意 $\hat{\psi}_t$ 支于$\{\xi:\frac{1}{2t}\leqslant|\xi|<\frac{2}{t}\}$．这些球环对不同的 t 本质上是不交的．这里“本质上”的意思是对 $t=2^n$，$n\in\mathbb{Z}$，$\{\xi:2^{-(n+1)}\leqslant|\xi|<2^{-(n-1)}\}$仅有三个相邻的彼此相交．

因此

$$\psi_t * f(x) = (\hat{\psi}(t\xi)\hat{f})^{\vee}(x)$$

便可看成对 Fourier 变换作光滑截断所得来的函数．由它代替 (1) 中的 $\int_{2^l \leqslant |\xi| < 2^{l+1}} \hat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi$ 便得到 g 函数的近代定义．进一步，定义中的 $\psi(x)$ 还可要求得少一些，例如设 $\psi(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上适当光滑的径向实值函数，满足

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)dx = 0, \quad \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi = c > 0, \tag{2}$$

$$|\psi(x)| + |\nabla\psi(x)| \leqslant c(1+|x|)^{-n-1-\varepsilon}, \varepsilon > 0, \forall x, \tag{3}$$

其中 ∇ 是梯度算子，$|\nabla| = \left(\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial}{\partial x_j}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$．

定义 (7.1)　设 $\psi(x)$ 如上，(2) 中 c 适当规范，则 g 函数算子定义为

$$g(f,x) = \left(\int_0^{\infty} |\psi_t * f(x)|^2 \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall f \in \bigcup_{p\geq 1} L^p. \tag{4}$$

显然 g 函数是定义在 $\bigcup L^p$ 上的一个非负次线性算子．我们来证明 g 函数算子是 L^2 有界与弱 L^1 有界的．

定理 (7.2)　我们有

$$\|g(f)\|_2 = c\|f\|_2, \quad \forall f \in L^2. \tag{5}$$

证明　先证恒等式

$$c\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g}(x)dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} (\psi_t * f(x))(\psi_t * \overline{g}(x)) \frac{dxdt}{t}, \quad \forall f, g \in L^2. \tag{6}$$

事实上，由于$\nabla\psi\in L^1$，知$\hat{\psi}(\xi)=O\left(\dfrac{1}{|\xi|}\right)$当$|\xi|\to\infty$. 同时由于$x\psi(x)\in L^1$，知$\hat{\psi}$可微，特别$\hat{\psi}(\xi)=O(|\xi|)$当$\xi\to 0$. 因此积分$\displaystyle\int_0^\infty\frac{|\hat{\psi}(t)|^2}{t}dt=c$收敛. 故

$$\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^\infty\int_{\mathbb{R}^n}\psi_t*f(x)\overline{\psi_t*g}(x)\frac{dxdt}{t}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^\infty\int_{\mathbb{R}^n}(\hat{\psi}(t\xi))^2\hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}}(\xi)d\xi\frac{dt}{t}$$

$$=\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}}(\xi)\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|\xi|\varepsilon}^\infty|\hat{\psi}(t)|^2\frac{dt}{t}\ d\xi$$

$$=c\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}}(\xi)d\xi.$$

在(6)中令$g=f$，便得定理所要求的结论.

定理(7.3) g函数算子是弱L^1有界的.

证明 完全平行于经典奇异积分算子情形. 设$f\in L^1$，$\lambda>0$. 作 Calderón – Zygmund 分解得

$$f=g+h,\quad g=f\chi_{(\bigcup Q_k)^c}+\sum_1^\infty f_{Q_k}\chi_{Q_k},$$

$$h=\sum_1^\infty(f-f_{Q_k})\chi_{Q_k}=\sum_1^\infty h_k,$$

其中g与h满足

$$\|g\|_\infty\leqslant c\lambda,\ \|g\|_1+\sum_1^\infty\|h_k\|_1\leqslant c\|f\|_1,$$

$$\sum_1^\infty |Q_k| \leqslant \frac{c}{\lambda} \|f\|_1, \quad \mathrm{supp} h_k \subset Q_k,$$

$$\int_{Q_k} h_k dx = 0, \quad \forall k.$$

因此

$$|\{g(f) > 2\lambda\}| \leqslant \frac{c}{\lambda^2} \|g\|_\infty \|g\|_1 + \frac{c}{\lambda} \|f\|_1$$
$$+ \frac{c}{\lambda} \sum_1^\infty \int_{(\tilde{Q}_k)^c} g(h_k) dx, \tag{7}$$

$$\int_{(\tilde{Q}_k)^c} g(h_k) dx = \int_{(\tilde{Q}_k)^c} \left(\int_0^\infty \left| \int_{Q_k} h_k(y) \frac{1}{t^n} \left[\psi\left(\frac{x-y}{t} \right) - \psi\left(\frac{x-y_k}{t} \right) \right] dy \right|^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}} dx.$$

注意(因 $|x-y_k| \geqslant 2|y-y_k|$, $\forall x \in (\tilde{Q}_k)^c, \forall y \in Q_k$)

$$\frac{1}{t^n} \left| \psi\left(\frac{x-y}{t} \right) - \psi\left(\frac{x-y_k}{t} \right) \right|$$
$$\leqslant c \frac{|y-y_k|}{t^{n+1}} \left(1 + \frac{|x-y_k|}{t} \right)^{-n-1-\varepsilon}$$
$$= c|y-y_k|(t+|x-y_k|)^{-n-1-\varepsilon} t^\varepsilon,$$

我们得

$$\int_{(\tilde{Q}_k)^c} g(h_k) dx \leqslant c\|h_k\|_1 \int_{(\tilde{Q}_k)^c} l(Q_k) \left\{ \int_0^{|x-y_k|} |x-y_k|^{-2n-2-2\varepsilon} t^{2\varepsilon-1} dt \right.$$
$$\left. + \int_{|x-y_k|}^\infty t^{-2n-2-2\varepsilon} t^{2\varepsilon-1} dt \right\}^{\frac{1}{2}} dx$$

$$\leqslant c\|h_k\|_1\int_{|x-y_k|\geqslant cl(Q_k)}\frac{l(Q_k)dx}{|x-y_k|^{n+1}}\leqslant c\|h_k\|_1.$$

代入(7)即得定理结论．证毕．

由 Marcinkiewicz 内插定理即得 g 函数算子是 L^p 有界的，$1<p\leqslant 2$. 但因 g 函数算子只是次线性的，无法直接应用对偶原理得到 $p>2$ 的结果．因此我们借助于 g 算子在 L^∞ 上的表现．

定理(7.4) 设 $f\in L^\infty$ 使 $g(f)<\infty$, a.e.．则存在不依赖于 f 的常数 c, 使得 $g(f)$ 的 $\#$ 函数满足

$$\|g(f)^{\#}\|_\infty\leqslant c\|f\|_\infty. \tag{8}$$

证明 设 $f\in L^\infty$ 使 $g(f)<\infty$, a.e.．任取方体 I, 边长 δ. 令 $f=f_1+f_2$, $f_1=f\chi_{\bar I}$, $\bar I$ 表示 I 的适当扩大．则对几乎处处 $x_0\in I$, $c=g(f_1)(x_0)<\infty$. 取定这样的一个 x_0, 则

$$\int_I|g(f)-c|dx\leqslant\int_I|g(f_1)|dx+\int_I|g(f_2)-c|dx$$

$$\leqslant c|I|^{\frac12}\left(\int_I|g(f_1)|^2dx\right)^{\frac12}+J\leqslant c|I|\ \|f\|_\infty+J.$$

其中第一项的估计用了 g 是 L^2 有界的．对 J 的估计，用 Minkowski 不等式，我们有

$$J=\int_I\left|\left(\int_0^\infty\left|\int_{\bar I^c}f(y)\frac{1}{t^n}\psi\left(\frac{x-y}{t}\right)dy\right|^2\frac{dt}{t}\right)^{\frac12}\right.$$

$$\left.-\left(\int_0^\infty\left|\int_{\bar I^c}f(y)\frac{1}{t^n}\psi\left(\frac{x_0-y}{t}\right)dy\right|^2\frac{dt}{t}\right)^{\frac12}\right|dx$$

$$\leqslant\int_I\left(\int_0^\infty\left|\int_{\bar I^c}f(y)\frac{1}{t^n}\left(\psi\left(\frac{x-y}{t}\right)-\psi\left(\frac{x_0-y}{t}\right)\right)dy\right|^2\frac{dt}{t}\right)^{\frac12}dx$$

$$\leqslant c\|f\|_\infty|I|\int_{\overline{I}^c}\left(\int_0^l\left|\frac{1}{t^n}\left(\psi\left(\frac{x-y}{t}\right)-\psi\left(\frac{x_0-y}{t}\right)\right)\right|^2\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{2}}dy$$

$$\leqslant c\|f\|_\infty|I|,$$

其中用到了(注意 $x, x_0\in I, y\in\overline{I}^c$)

$$\frac{1}{t^n}\left|\psi\left(\frac{x-y}{t}\right)-\psi\left(\frac{x_0-y}{t}\right)\right|\leqslant cl(I)(t+|y-x_0|)^{-n-1-\varepsilon}t^\varepsilon.$$

这样我们得到

$$\frac{1}{|I|}\int_I|g(f)-c|\,dx\leqslant c\|f\|_\infty,$$

定理证毕.

现在我们可以得到 g 函数算子的 L^p 有界, $1<p<\infty$.

定理(7.5) (Littlewood－Paley)我们有

$$c_1\|f\|_p\leqslant\|g(f)\|_p\leqslant c_2\|f\|_p,\quad\forall p, 1<p<\infty,\ \forall f\in L^p. \tag{9}$$

证明 先证 $\|g(f)\|_p\leqslant c\|f\|_p$. 既然 $p\leqslant2$ 时由弱(1,1)型与(2,2)型推出. 故只考虑 $p\geqslant2$. 令 $sf=(g(f))^{\#}, \forall f\in L^2\cap L^p$, 这是 f 的次线性算子. 则由定理(7.2)与定理(7.4), 知

$$\|sf\|_2=\|g(f)^{\#}\|_2\leqslant\|Mg(f)\|_2\leqslant c\|g(f)\|_2\leqslant c\|f\|_2,$$

$$\|sf\|_\infty=\|g(f)^{\#}\|_\infty\leqslant c\|f\|_\infty,$$

故由 Marcinkiewicz 定理知 $\|sf\|_p\leqslant c\|f\|_p, \forall f\in L^2\cap L^p$. 由于 $g(f)\in L^2$, 根据§3.4的推论(4.15), 知 $g(f)$ 本身满足

$$\int_{\mathbb{R}^n}|g(f)|^pdx\leqslant c\int_{\mathbb{R}^n}((g(f))^{\#})^pdx\leqslant c\|f\|_p,\quad\forall f\in L^2\cap L^p.$$

对一般 $f\in L^p$, 令 $f_n\in L^2\cap L^p$, $\|f_n-f\|_p\to0$. 则因任意次线性算子 T 均满足 $|Tf-Tg|\leqslant T(f-g)$, 这说明$\{f_n\}$是 L^p 中 Cauchy 列推出$\{Tf_n\}$也是 L^p 中 Cauchy 列, 从而 Tf 可以作为Tf_n的极限而

连续地扩充至整个 L^p, 并且满足 $\|Tf\|_p \leqslant c\|f\|_p$. 特别地知 g 函数算子满足 $\|g(f)\|_p \leqslant c\|f\|_p$.

现证反向不等式. $\forall f\in L^2\cap L^p$, $g\in L^2\cap L^{p'}$, 我们有

$$\|f\|_p=\sup\left\{\left|a_0\int_{R^n} fg\,dx\right| : g\in L^2\cap L^{p'},\ \|g\|_{p'}\leqslant 1\right\}$$

$$=\sup_g\left\{\left|a_0\int_{R_+^{n+1}}(\psi_t * f)(\psi_t * g)\frac{dx\,dt}{t}\right|\right\}$$

$$\leqslant c\,a_0\sup_g\int_{R^n} g(f,x)g(g,x)\,dx$$

$$\leqslant c\|g(f)\|_p\sup_g\|g(g)\|_{p'}\leqslant c\|g(f)\|_p.$$

现设 $f\in L^p$, 找 $\{f_n\}\subset L^2\cap L^p$, $f_n\to f$ 在 L^p 中, 则 $g(f_n)\to g(f)$ 在 L^p 中, 且

$$\|f\|_p=\lim_{n\to\infty}\|f_n\|_p\leqslant c\lim_{n\to\infty}\|g(f_n)\|_p=c\|g(f)\|_p.$$

这完成了定理的证明.

在下一章讨论 Hardy 空间的特征时, 将看到 g 函数的作用. 下面我们引入 g 函数的一些变形, 并由此得到 Mihlin – Hörmander 乘子定理.

定义 (7.6) 设 $\psi(x)$ 如上 (见定义 7.1), $\lambda>1$. 定义

$$g_\lambda(f,x)=\left(\int_0^\infty\int_{R^n}\left(\frac{t}{t+|y|}\right)^{\lambda n}|\psi_t * f(x-y)|^2\frac{dy\,dt}{t^{n+1}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\forall f\in\bigcup_{p\geqslant 1}L^p. \qquad (10)$$

我们的第一个结果是当 $p\geqslant 2$ 时, $g_\lambda(f)$ 的 L^p 模被 $g(f)$ 的 L^p 模控制.

定理 (7.7) 设 $1<\lambda<\infty$, $2\leqslant p<\infty$, 则

$$\|g_\lambda(f)\|_p \leqslant c_{p,\lambda}\|g(f)\|_p \leqslant c_{p,\lambda}\|f\|_p, \forall f. \tag{11}$$

证明 我们要指出对任意非负可测函数 φ，有

$$\int_{\mathbb{R}^n} g_\lambda^2(f)\varphi dx \leqslant c_\lambda \int_{\mathbb{R}^n} g^2(f) M\varphi dx, \tag{12}$$

其中 M 是 Hardy－Littlewood 极大函数算子. 假如(12)已证，则当 $p=2$ 时，(11)便可由 M 的 L^∞ 有界性得到. 当 $p>2$ 时，设 q 是 $\frac{p}{2}$ 的相伴数.

$$\begin{aligned}
\|g_\lambda(f)\|_p^2 &= \sup_{\varphi\geqslant 0,\|\varphi\|_q\leqslant 1} \int_{\mathbb{R}^n} g_\lambda^2(f)\varphi dx \\
&\leqslant \sup_\varphi c_\lambda \int_{\mathbb{R}^n} g^2(f) M\varphi dx \\
&\leqslant c_\lambda \|g(f)\|_p^2 \sup_\varphi \|M\varphi\|_q \\
&\leqslant c_{p,\lambda}\|g(f)\|_p^2.
\end{aligned}$$

现回头来证明(12). 我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} g_\lambda^2(f)\varphi dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{t}{t+|x-y|}\right)^{\lambda n}|\psi_t * f(y)|^2\frac{dydt}{t^{n+1}}\varphi(x)dx \\
&= \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n}|\psi_t * f(y)|^2\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{t}{t+|x-y|}\right)^{\lambda n}\frac{1}{t^n}\varphi(x)dxdy\frac{dt}{t} \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty|\psi_t * f(y)|^2\frac{dt}{t}\sup_{t>0}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{t^{\lambda n-n}}{(t+|x-y|)^{\lambda n}}\varphi(x)dxdy
\end{aligned}$$

$$\leqslant c_j \int_{\mathbb{R}^n} g^2(f) M\varphi dx.$$

定理证毕.

下面讨论用Poisson核取代ψ_t定义的g函数的变形. 设$P_t(x) = \dfrac{ct}{(t^2+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$ 为Poisson核, 以及$f \in \bigcup\limits_{p\geqslant 1} L^p$. 考虑$f$的Poisson积分

$$u(x,t) = c\int_{\mathbb{R}^n} \frac{t}{(t^2+|x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}} f(y)dy,$$

及其一阶偏导数

$$\frac{\partial}{\partial x_j} u(x,t) = c\int_{\mathbb{R}^n} \frac{t(x_j-y_j)}{(t^2+|x-y|^2)^{\frac{n+3}{2}}} f(y)dy.$$

记$\psi^{(j)}(x) = \dfrac{cx_j}{(1+|x|^2)^{\frac{n+3}{2}}}$, $j=1,\cdots,n$. 则$\psi^{(j)}$满足(2)与(3)中的条件, 因而由它们定义的g函数$g^{(j)}(f)$便满足

$$\|g^{(j)}(f)\|_p \approx \|f\|_p, \ 1<p<\infty, \ \forall f.$$

注意到

$$\frac{\partial}{\partial x_j} u(x,t) = c\int_{\mathbb{R}^n} \frac{ty_j}{(t^2+|y|^2)^{\frac{n+3}{2}}} f(x-y)dy$$

$$= \frac{1}{t} \psi_t^{(j)} * f(x).$$

这说明$g^{(j)}(f)$就是g函数的如下变形

$$g_{x_j}(f,x) = \left(\int_0^\infty \left|\frac{\partial}{\partial x_j} u(x,t)\right|^2 t\, dt\right)^{\frac{1}{2}}, \ \forall f \in \bigcup_{p\geqslant 1} L^p. \quad (13)$$

定义

$$g_x(f,x) = \left(\int_0^\infty |\nabla u(x,t)|^2 t\, dt\right)^{\frac{1}{2}}, \ \forall f \in \bigcup_{p\geqslant 1} L^p.$$

则有

$$\|g_{\lambda_j}(f)\|_p\approx\|f\|_p\approx\|g_\lambda(f)\|_p,\ 1<p<\infty,\ \forall f. \qquad (14)$$

用 Poisson 核定义的 g 函数的另一个变形如下. 设 k 是正整数. 定义

$$g_k(f,x)=\left(\int_0^\infty\left|\frac{\partial^k}{\partial t^k}u(x,t)\right|^2t^{2k-1}dt\right)^{\frac{1}{2}},\ \forall f\in\bigcup_{p\geq1}L^p. \quad (15)$$

其中特别重要的是 $g_1(f)$. 我们断言 g_1 与 g_λ 是 L^p 等价的. 我们要用到 Riesz 变换的一个简单事实. 这就是, f 与 R_jf 的 Poisson 扩张 $u(x,t)$, $u_j(x,t)$, $j=1,\cdots,n$, 构成了一个满足广义 Cauchy-Riemann 方程

$$\sum_{j=0}^n\frac{\partial u_j}{\partial x_j}=0,\quad \frac{\partial u_j}{\partial x_k}=\frac{\partial u_k}{\partial x_j},\quad j\neq k, \qquad (16)$$

的共轭调和系, 其中 $u_0=u$, $x_0=t$ (见 §4.6 定理 6.7). 这样我们得到

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\sum_{j=1}^n\frac{\partial u_j}{\partial x_j},\quad\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2\leqslant c\sum_{j=1}^n|\nabla u_j|^2,$$

$$g_1(f,x)\leqslant c\sum_{j=1}^n g_\lambda(R_jf,x). \qquad (17)$$

定理(7.8) 设 $1<p<\infty$. 则

$$\|g_1(f)\|_p\approx\|f\|_p,\quad \forall f\in L^p. \qquad (18)$$

证明 由(17)以及 R_j 与 g_λ 的 L^p 有界性, 我们得到 $\|g_1(f)\|_p\leqslant c_p\|f\|_p$, $\forall f\in L^p$. 现设 f 与 $g(f)$ 均属于 L^p, 我们要得到定量估计 $\|f\|_p\leqslant c\|g_1(f)\|_p$. 这是如下等式的结果

$$c\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty t\frac{\partial}{\partial t}u_1(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\overline{u_2}(x,t)dxdt$$

$$=\int_{\mathbb{R}^n}f_1(x)\overline{f_2}(x)dx,\ f_1,f_2\in L^2, \qquad (19)$$

其中u_f是f的Poisson积分. 应用它得到, $\forall f\in L^p\bigcap L^2$,

$$\|f\|_p=\sup_{\|g\|_{p'}\leqslant 1}\left|\int_{\mathbb{R}^n}f(x)g(x)dx\right|$$

$$\leqslant c\sup_g\left|\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty t\frac{\partial}{\partial t}u_f(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\overline{u_g}(x,t)dxdt\right|$$

$$\leqslant c\sup_g\|g_1(f)\|_p\|g_1(g)\|_{p'}$$

$$\leqslant c\|g_1(f)\|_p.$$

一般$f\in L^p$情形可以由极限过渡, 只需注意到

$$|g_1(f_n)-g_1(f_m)|\leqslant g_1(f_n-f_m),$$

这里$\{f_n\}$是$L^2\bigcap L^p$中在L^p内收敛到f的任意序列. 现返回来证(19). 设$f\in L^2$, $u(x,t)$是f的Poisson积分, 则

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)=a_0\int_{\mathbb{R}^n}|\xi|e^{-t|\xi|}\hat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi,$$

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\right|^2dx=\int_{\mathbb{R}^n}|\xi|^2e^{-2t|\xi|}|\hat{f}(\xi)|^2d\xi,$$

$$\int_{\mathbb{R}^n}g_1^2(f)dx=\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty t\left|\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\right|^2dtdx$$

$$=\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty te^{-2t|\xi|}|\xi|^2dt|\hat{f}(\xi)|^2d\xi$$

$$=c\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{f}(\xi)|^2d\xi=c\|f\|_2^2. \tag{20}$$

将这等式极化(即考虑$f+g$与$f+ig$, 然后取实、虚部)即得(19), 定理获证.

为了应用g函数理论于即将建立的乘子定理, 我们还需要

$g_k(f)$控制$g_1(f)$的事实.

引理(7.9) 设k是正整数. 则

$$g_1(f)\leqslant c_k g_k(f)\text{处处成立}, \ \forall f\in L^p, 1\leqslant p\leqslant\infty. \tag{21}$$

证明 设$f\in L^p$, $1\leqslant p\leqslant\infty$. 则易知

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k}u(x,t)\to 0, \text{对每个 } x, \text{当 } t\to\infty \text{ 时}.$$

这样

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k}u(x,t)=-\int_t^{\infty}\frac{\partial^{k+1}}{\partial s^{k+1}}u(x,s)s^k s^{-k}ds,$$

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial t^k}u(x,t)\right|^2\leqslant\int_t^{\infty}\left|\frac{\partial^{k+1}}{\partial s^{k+1}}u(x,s)\right|^2 s^{2k}ds\int_t^{\infty}s^{-2k}ds,$$

$$\int_0^{\infty}\left|\frac{\partial^k}{\partial t^k}u(x,t)\right|^2 t^{2k-1}dt$$

$$\leqslant c_k\int_0^{\infty}\int_t^{\infty}\left|\frac{\partial^{k+1}}{\partial s^{k+1}}u(x,s)\right|^2 s^{2k}ds\,dt$$

$$=c_k\int_0^{\infty}\left|\frac{\partial^{k+1}}{\partial t^{k+1}}u(x,t)\right|^2 t^{2(k+1)-1}dt.$$

这说明$g_k(f)$对k单增. 引理获证.

现在我们可以得到 Mihlin – Hörmander 乘子定理了. 但在此之前我们对乘子的一般理论作一个初步讨论.

定义(7.10) 设$m(x)$是有界可测函数, T_m为如下定义的线性算子

$$f\to T_m(f), \quad T_m(f)=(m\hat{f})^{\vee}, \forall f\in L^2\cap L^p. \tag{22}$$

如果

$$\|T_m(f)\|_p \leqslant c_p \|f\|_p, \quad \forall f \in L^2 \cap L^p, \tag{23}$$
则谓 T_m 是一个 L^p 乘子. 式中最小的 c_p 称为 T 的范数. 所有 L^p 乘子的集合记为 $\mathscr{M}_p$.

我们指出，当 $1 \leqslant p \leqslant 2$ 时，乘子的定义中只需要求 $\forall f \in L^p$，$(m\hat{f})^\vee \in L^p$，便可由闭图象定理(见§3.1 定理 1.10)推出 T_m 的有界性，即(23)成立. T_m 是闭的(指它的图象是闭的)，是由于当 $f_n \to f$，$(m\hat{f}_n)^\vee \to g$(收敛都是 L^p 意义)，则必然 $\hat{f}_n \to \hat{f}$，$m\hat{f}_n \to \hat{g}$ 在 $L^{p'}$ 中成立，故 $\hat{g} = m\hat{f}$，即 $g = T_m(f)$. 这就证明了 T_m 的闭性. 由闭图象定理知 T_m 是有界的，即式(23)成立.

另外，显然 $\mathscr{M}_2 = L^\infty$，这是 Plancherel 定理的结果. 此外 $\mathscr{M}_1$ 也是可以刻划的，见下面的定理(7.11). 对其他 p，$1 < p < \infty$，$p \neq 2$，$\mathscr{M}_p$ 的刻划是一个非常困难的问题. 我们只能给出某些充分条件.

$\mathscr{M}_1$ 的刻划需要用到 $M(\mathbb{R}^n)^\wedge$ 的刻划的 Bochner 定理，见§2.6，定理(6.10).

定理(7.11) 设 T 是 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 到自己内的有界线性算子. 则下述断言等价：

(a) T 与平移可交换，

(b) $T(f * g) = Tf * g = f * Tg$, $\forall f, g \in L^1$,

(c) 存在连续函数 $m(\xi)$ 使

$$(Tf)^\wedge(\xi) = m(\xi)\hat{f}(\xi), \quad \forall f \in L^1,$$

(d) 存在 $\mu \in M(\mathbb{R}^n)$，使

$$(Tf)^\wedge(\xi) = \hat{\mu}(\xi)\hat{f}(\xi), \quad \forall f \in L^1,$$

(e) 存在 $\mu \in M(\mathbb{R}^n)$，使

$$Tf = f * \mu, \quad \forall f \in L^1.$$

证明 $(a) \Rightarrow (b)$ 设 $f, g \in L^1$，$k(x) \in L^\infty$. 则

$$f \to \int_{\mathbb{R}^n} Tf(x) k(x) dx$$

是 L^1 上有界线性泛函. 因此存在 $K(x) \in L^\infty$，使

$$\int_{\mathbb{R}^n} Tf(x)k(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)k(x)dx,\ \forall f \in L^1.$$

故

$$\int_{\mathbb{R}^n} Tf * g(x)k(x)dx = \iint (Tf)_y(x)g(y)k(x)dydx$$

$$= \iint T(f_y)(x)k(x)g(y)dxdy$$

$$= \iint f_y(x)k(x)g(y)dxdy = \int f * g(x)k(x)dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} T(f * g)(x)k(x)dx.$$

由 $k(x)$是任意的，知 $Tf * g = T(f * g)$. 类似地也有 $T(f * g) = f * Tg$.

$(b) \Rightarrow (c)$　由 $Tf * g = f * Tg$, $\forall f, g \in L^1$, 有

$$(Tf)^\wedge(\xi) = \frac{(Tg)^\wedge(\xi)}{\hat{g}(\xi)} \hat{f}(\xi),\ \forall f \in L^1,$$

这里选择 g，使得 $\hat{g}(\xi) \neq 0$ 处处. 这样连续函数 $\frac{(Tg)^\wedge(\xi)}{\hat{g}(\xi)} = \varphi(\xi)$便是$(c)$中所要求的函数

$(c) \Rightarrow (d)$　我们希望证明(c)中的连续函数 φ 必须是某个 $\mu \in M(\mathbb{R}^n)$的 Fourier－Stieltjes 变换，这需要用到上面提到的 Bochner 刻划定理. 为了能应用这个 Bochner 定理，需要用到 Fourier 变换的一个重要性质(见 Ru[1]，Th.2.6.8)：任意给定紧集 C 与 $\varepsilon > 0$，存在 $f \in L^1$ 使 $\|f\|_1 \leqslant 1 + \varepsilon$，同时 $\hat{f}|_C = 1$, $0 \leqslant \hat{f} \leqslant 1$, 且 $\hat{f}$ 有紧支集. 这只需找有紧闭包的充分大的开集 V 使 $|V - C| \leqslant (1 + \varepsilon)^2 |V|$, 其中 $V - C = \{x - y : x \in V, g \in C\}$. 现在令 $g, h \in L^2$, 使

$$\hat{g}=\chi_V, \qquad \hat{h}=\chi_{C-V}.$$

然后令 $f(x)=\frac{1}{a_0|V|}g(x)h(x)$. 对这个函数我们有

$$\hat{f}(\xi)=a_0^{-1}|V|^{-1}\hat{g}*\hat{h}(\xi)=|V|^{-1}\int_V\hat{h}(\xi-\eta)d\eta.$$

当 $\xi\in C$ 时, $\hat{h}(\xi-\eta)=1$, 只要 $\eta\in V$. 因此 $\hat{f}|_C=1$. 当 $\xi\notin C-V+V$ 时, $\xi-\eta\notin C-V$, 故 $\hat{h}(\xi-\eta)=0$, 从而 $\hat{f}(\xi)=0$. 这说明 $\hat{f}$ 支于紧集 $C-\overline{V}+\overline{V}$. 此外显然 $0\leqslant\hat{f}\leqslant1$. 最后

$$\|f\|_1\leqslant a_0^{-1}|V|^{-1}\|g\|_2\|h\|_2=a_0^{-1}|V|^{-1}\|\hat{g}\|_2\|\hat{h}\|_2$$

$$=|V|^{-1}|V|^{\frac{1}{2}}|C-V|^{\frac{1}{2}}\leqslant1+\varepsilon.$$

这就证明了断言. 现设 $\{\xi_j\}_1^N$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中有限子集. 对这个紧集, 根据刚才证明的, 知存在这样的函数 f, 使 $\hat{f}(\xi_j)=1$, $\|f\|_1\leqslant1+\varepsilon$, $0\leqslant\hat{f}\leqslant1$, 且 $\hat{f}$ 有紧支集. 现在利用 (c) 中存在的函数 $m(\xi)$, 在三角多项式 $\sum\limits_1^N c_je^{-ix\cdot\xi_j}$ 上定义线性泛函 $\sum\limits_1^N c_jm(\xi_j)$, 得

$$\left|\sum_1^N c_jm(\xi_j)\right|=\left|\sum_1^N c_jm(\xi_j)\hat{f}(\xi_j)\right|$$

$$=\left|\sum_1^N c_j(Tf)^\wedge(\xi_j)\right|=\left|a_0\int_{\mathbb{R}^n}\sum_1^N c_je^{-ix\cdot\xi_j}Tf(x)dx\right|$$

$$\leqslant\|T\|\ \|f\|_1\ \left\|\sum_1^N c_je^{-ix\cdot\xi_j}\right\|_\infty.$$

既然 $\|f\|_1$ 可任意接近于 1, 故 $m(\xi)$ 满足

$$\left|\sum_1^N c_jm(\xi_j)\right|\leqslant\|T\|\ \left\|\sum_1^N c_je^{-ix\cdot\xi_j}\right\|_\infty.$$

这正是 Bochner 刻划定理中所要求的条件. 根据 Bochner 定理, 存在 $\mu\in M(\mathbb{R}^n)$, 使得 $m(\xi)=\hat{\mu}(\xi)$, 即 (d)的结论成立.

$(d)\Rightarrow(e)$　已知 $(Tf)^{\wedge}=\hat{\mu}\hat{f}$，$\forall f\in L^1$．并且 $Tf\in L^1$．同时 $f*\mu\in L^1$．对它也有 $(f*\mu)^{\wedge}=\hat{f}\hat{\mu}$．这说明 $Tf=f*\mu$．

$(e)\Rightarrow(a)$　我们有

$$T(\tau_h f)=\tau_h f*\mu=\tau_h(f*\mu)=\tau_h(Tf).$$

这完成了 $(e)\Rightarrow(a)$ 的证明．定理至此完全获证．

$\mathscr{M}_p$ 如何刻划是一个困难问题．但关于它却有下面的一个简单事实．

定理(7.12)　设 $1\leqslant p\leqslant\infty$，$p'$ 是 p 的相伴数．则 $\mathscr{M}_p=\mathscr{M}_{p'}$，包括范数相等．

证明　设 $f\in L^p\cap L^2$，$g\in L^{p'}\cap L^2$．则

$$\int_{\mathbb{R}^n}T_m(f)g\,dx=\int_{\mathbb{R}^n}m(\xi)\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)d\xi=\int_{\mathbb{R}^n}f\,T_m(g)dx.$$

因此，

$$\|T_m(g)\|_{p'}=\sup_{f:\|f\|_p\leqslant 1}\left|\int_{\mathbb{R}^n}f\ T_m(g)dx\right|$$

$$=\sup_f\left|\int_{\mathbb{R}^n}T_m(f)g\,dx\right|\leqslant\|T_m\|\,\|g\|_{p'}.$$

故 T_m 也是 $L^{p'}$ 乘子，且其 $\mathscr{M}_{p'}$ 范数小于等于 $\mathscr{M}_p$ 范数．交换 p，p' 位置便可完成证明．定理获证．

现在我们给出 $\mathscr{M}_p$ 乘子的一个充分条件，它就是著名的 Mihlin－Hörmander 乘子定理．

定理(7.13)　(Mihlin－Hörmander)．设 k 是 $>\dfrac{n}{2}$ 的整数，$m(x)\in C^k(\mathbb{R}^n-\{0\})$．假设对微分单项式 $\dfrac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}$，$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，$|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$，有

$$\left|\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} m(x)\right| \leqslant B|x|^{-|\alpha|}, \quad \forall \alpha, |\alpha| \leqslant k. \tag{24}$$

或更弱地，(24)换为

$$|m(x)| \leqslant B, \quad \sup_{0<R<\infty} R^{2|\alpha|-n} \int_{R \leqslant |x| \leqslant 2R} \left|\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} m(x)\right|^2 dx \leqslant B,$$

$$|\alpha| \leqslant k. \tag{25}$$

则 m 定义的乘子 $T_m \in \mathscr{M}_p$, $1<p<\infty$，且范数仅依赖于条件中的常数.

证明 我们只需证明对定义(7.6)中 $g_\lambda(f, x)$ 的某种类似(仍记为 $g_\lambda(f, x)$)，有如下估计

$$g_1(T_m(f), x) \leqslant B_\lambda g_\lambda(f, x), \quad \lambda = \frac{2k}{n}. \tag{26}$$

一旦获证，则结合定理(7.7)与(7.8)，即得

$$\|T_m f\|_p \leqslant c_p \|g_1(T_m f)\|_p \leqslant c_{p,\lambda} \|g_\lambda(f)\|_p \leqslant c_{p,\lambda} \|f\|_p, p \geqslant 2.$$

因此 $T_m \in \mathscr{M}_p$, $p \geqslant 2$，故 $T_m \in \mathscr{M}_p$, $\forall 1<p<\infty$. 现证(26).

记 $u(x,t)$，$U(x,t)$分别为f, $T_m(f)$的Poisson 积分. 则作为 x 的函数，它们的 Fourier 变换为

$$\hat{u}(\xi, t) = e^{-t|\xi|}\hat{f}(\xi), \quad \hat{U}(\xi, t) = e^{-t|\xi|} m(\xi)\hat{f}(\xi).$$

设 $M(x,t)$是使得 $\hat{M}(\xi, t) = e^{-t|\xi|} m(\xi)$的函数，则我们有

$$\hat{U}(\xi, t_1 + t_2) = \hat{M}(\xi, t_1)\hat{u}(\xi, t_2),$$

$$U(x, t_1 + t_2) = a_0 \int_{\mathbf{R}^n} M(y, t_1) u(x-y, t_2) dy.$$

关于 t_1 微分此式 k 次，关于 t_2 微分一次，然后令 $t_1 = t_2 = \dfrac{t}{2}$ 得

$$U^{(k+1)}(x,t) = a_0 \int_{\mathbf{R}^n} M^{(k)}\left(y, \frac{t}{2}\right) u^{(1)}\left(x-y, \frac{t}{2}\right) dy. \tag{27}$$

现在将 m 上的条件(24)(或 (25). 但为简单起见，只考虑(24).)

化到 $M(x,t)$上去．这些条件是

$$|M^{(k)}(y,t)| \leqslant cBt^{-n-k}, \tag{28}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |y|^{2k} |M^{(k)}(y,t)|^2 dy \leqslant cBt^{-n}. \tag{29}$$

(28)是因

$$\begin{aligned} |M^{(k)}(y,t)| &= \left| a_0 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d^k}{dt^k} e^{-t|\xi|} m(\xi) e^{iy\cdot\xi} d\xi \right| \\ &\leqslant cB \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^k e^{-t|\xi|} d\xi \leqslant cBt^{-n-k}. \end{aligned}$$

对(29)，更一般地可以证明对 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，$|\alpha|=k$，有

$$\int_{\mathbb{R}^n} |y^\alpha M^{(k)}(y,t)|^2 dy \leqslant cBt^{-n}.$$

事实上，由 Plancherel 定理，以及微分在 Fourier 变换中的表现，有

$$\|y^\alpha M^{(k)}(y,t)\|_2 = c\left\| \frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} (|\xi|^k m(\xi) e^{-t|\xi|}) \right\|_2.$$

用 Leibniz 法则，注意条件(24)，知

$$\left| \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} (|x|^k m(x)) \right| \leqslant cB|x|^{k-|\alpha|}, \quad \forall \alpha, \ |\alpha| \leqslant k.$$

再一次应用 Leibniz 法则于 $\frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha}(|\xi|^k m(\xi) e^{-t|\xi|})$，得

$$\begin{aligned} &\left| \frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} (|\xi|^k m(\xi) e^{-t|\xi|}) \right| \\ &\leqslant cB \sum_{\beta:|\beta|\leqslant|\alpha|=k} (t|\xi|)^{k-|\beta|} e^{-t|\xi|}, \end{aligned}$$

其中 $\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$. 注意到

$$t^{2(k-|\beta|)}\int_{\mathbb{R}^n}|\xi|^{2(k-|\beta|)}e^{-2t|\xi|}d\xi\leqslant ct^{-n},$$

这便得到(29). 我们现在可以证明(26)了. 由(27)知

$$U^{(k+1)}(x,t)^2\leqslant ct^{-n-2k}\int_{|y|\leqslant\frac{t}{2}}\left|u^{(1)}(x-y,\frac{t}{2})\right|^2dy$$

$$+ct^{-n}\int_{|y|\geqslant\frac{t}{2}}\left|u^{(1)}(x-y,\frac{t}{2})\right|^2|y|^{-2k}dy$$

$$=I_1(t)+I_2(t).$$

这样,

$$g_{k+1}(T_m(f),x)^2=\int_0^\infty|U^{(k+1)}(x,t)|^2t^{2k+1}dt$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^2\int_0^\infty I_j(t)t^{2k+1}dt$$

$$\leqslant cB\int_0^\infty\int_{|y|\leqslant\frac{t}{2}}|u^{(1)}(x-y,\frac{t}{2})|^2t^{-n+1}dydt$$

$$+cB\int_0^\infty\int_{|y|\geqslant\frac{t}{2}}|u^{(1)}(x-y,\frac{t}{2})|^2t^{-n+2k+1}|y|^{-2k}dydt$$

$$\leqslant cB\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{t}{t+|y|}\right)^{\lambda n}|u^{(1)}(x-y,\frac{t}{2})|^2t^{-n+1}dydt,$$

$$\lambda=\frac{2k}{n}>1.\qquad(30)$$

我们在定义(7.6)中引进的 $g_\lambda(f)$，可以是由任何满足条件(2)，(3)的 $\psi(x)$ 与 $\lambda>1$ 定义的算子，而 Poisson 核的微商 $\psi^{(j)}(x)=\frac{x_j}{(1+|x|^2)^{\frac{n+3}{2}}}$ (取 $t=1$，并模常数倍)便是这样的函数. 再注意 $t\frac{\partial}{\partial x_j}u(x,t)=c\psi_t^{(j)}*f(x)$，这说明

$$t^2|u^{(1)}(x,t)|^2\leqslant c\sum_{j=1}^{n}t^2|\nabla u(x,t)|^2\leqslant c\sum_{j=1}^{n}|\psi_t^{(j)}*f(x)|^2,$$

从而(30)右边定义的算子被这样的 g_λ 控制. 这便证明了(26). 整个定理的证明因而完成.

注　Mihlin－Hörmander 乘子定理还可用 Calderón－Zygmund 奇异积分算子理论比较简洁地证明，见[*GR*].

§3.8　进一步事实、习题与注记

1. 如下二断言都可用来说明 $L^2(0,1)$ 是 $L^1(0,1)$ 的第一纲子集：

(1). $\{f:\|f\|_2\leqslant n\}$ 是 L^1 中闭子集，但其内部是空的.

(2). 令 $g_n(x)=n\chi_{[0,n^{-3}]}$. 证明 $\int_0^1 f g_n\,dx\to 0$, $\forall f\in L^2$, 但对 $f\in L^1$ 却不然.

2. 证明 $\{f\in L^2(\mathbb{T}):S_n(f,0)$ 收敛$\}$ 是 $L^2(\mathbb{T})$ 中第一纲子集.

3. 设 B_0 是 Banach 空间 B 的闭子空间，$x_0\notin B_0$. 记 $d=\operatorname{dist}(x_0,B_0)$. 证明存在 $f_0\in B^*$，使得

$$f_0(B_0)=0,\ f_0(x_0)=1,\quad 且\ \|f_0\|=\frac{1}{d}.$$

4. 设 T 是 Banach 空间 B_1 到 B_2 内的线性算子，$\{f_i\}_{i\in I}$ 是 B_2^* 内的一个可分辨 B_2 中元素的族. 若对每个 f_i，$f_i\circ T\in B_1^*$. 证明 T

是 B_1 到 B_2 内的连续算子.

提示: 应用闭图象定理.

5. 设 $(X,\mathscr{F},\mu)$是任意一般测度空间(意指 σ 有限非负测度空间), $1\leqslant p<\infty$. 证明

$$\frac{t^{1-p}}{p}\leqslant\sup_{f:\|f\|_p\leqslant 1}\int_t^{\infty}|\{|f|>u\}|du\leqslant c_p t^{1-p},\quad\forall t>0.$$

6. 设 $(X,\mathscr{F},\mu)$如上, $*$ 表示非增重排函数算子, 证明

$$\left|\int_X fgd\mu\right|\leqslant\int_0^{\infty}f^*g^*dt.$$

7. 设 $(X,\mathscr{F},\mu)$同上, f,g,h 是实值可测函数, 其中 $f,g\in L^1$, $h\in L^{\infty}$. 记

$$E_\lambda=\{x:h(x)\geqslant\lambda\},\quad F_\lambda=\{x:h(x)<\lambda\},\ \lambda\in\mathbb{R},$$

假设

$$\int_{E_\lambda}fd\mu\geqslant\int_{E_\lambda}gd\mu,\ \forall\lambda\in(0,\infty),$$

$$\int_{F_\lambda}fd\mu\leqslant\int_{F_\lambda}gd\mu,\ \forall\lambda\in(-\infty,0).$$

证明 $\displaystyle\int_X fhd\mu\geqslant\int_X ghd\mu$.

8. 设 $(X,\mathscr{F},\mu)$如上, $\{f_n\}$是处处收敛于 f, 或者是在任意有限测度集合上依测度收敛于 f 的函数列, 举例说明下面二式不一定成立:

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_{f_n-f}(\lambda)=0,\ \forall\lambda>0.$$

以及

$$\lim_{n\to\infty}(f_n-f)^*(t)=0,\ \forall t>0,$$

其中σ是分布函数，$*$ 是非增重排函数.

9. 设$(X,\mathscr{A},\mu)$如上，$\{f_n\}$是可测函数列，f使得$\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{|f_n-f|}(\lambda)=0$，$\forall\lambda>0$（或者$\lim\limits_{n\to\infty}(f_n-f)^*(t)=0,\forall t>0$）. 举例说明下式

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_{f_n}(\lambda)=\sigma_f(\lambda)\ (\text{或者}\lim_{n\to\infty}f_n^*(t)=f^*(t)),\quad\forall\lambda,$$

不一定成立.

10. 设$(X,\mathscr{A},\mu)$如上，f,g是两个非负可测函数. 我们要讨论什么样的充分条件可以保证由f的某种可积性能推出g的某种可积性. 通常是讨论同样的可积性，例如L^p可积性，甚至L^Φ可积性. 而比较容易证明的往往是分布函数间的不等式，简单的积分不等式，或它们的组合. 我们在正文中给出的好λ不等式是功能最强的，我们将在本题与以下几道题中给出另外一些补充. 其中α,β与c是正常数.

假设我们有

$$\mu\{g>c\lambda\}\leqslant c\,\mu\{f>c\lambda\}+\frac{c}{\lambda^{p_0}}\int_{\{f\leqslant c\lambda\}}f^{p_0}\,d\mu,\quad\forall\lambda>0,$$

则$\forall p,0<p<p_0$，有

$$\|g\|_p\leqslant c\|f\|_p,$$

其中右边的c只依赖于条件中的常数，与具体的f,g无关.

11. 假设$\Phi(u)$是$\mathbb{R}_+$上满足$\Phi(0)=0$的限制增长的凸函数，$\varphi(u)=\Phi'(u)$左连续. 证明

$$\int_{\{g>\lambda\}}(g-\lambda)d\mu\leqslant\int_{\{g>\lambda\}}f\,d\mu,\quad\forall\lambda>0,$$

当且仅当

$$\int_X\Phi(g)d\mu\leqslant\int_X\varphi(g)f\,d\mu,\quad\text{对一切这样的}\ \Phi.$$

由此可以得到对限制增长的凸函数$\Phi(u)$的L^Φ不等式. 推导如下.

注意，$\Phi(u)$是限制增长的，当且仅当

$$p=p_{\Phi}=\sup_{u}\frac{u\Phi'(u)}{\Phi(u)}<\infty.$$

这样对限制增长的凸函数$\Phi(u)$，以及满足上述第一个积分不等式的非负函数对(f,g)便有

$$\int_X g\varphi(g)d\mu\leqslant p\int_X\Phi(g)d\mu\leqslant\int_X pf\varphi(g)d\mu.$$

而由条件

$$\int_X g\varphi(g)d\mu<\infty,\quad\int_X g\varphi(g)d\mu\leqslant\int_X f\varphi(g)d\mu,$$

可推出

$$\int_X\Phi(g)d\mu\leqslant\int_X\Phi(f)d\mu.$$

(利用关于凸函数的 Young 不等式

$$u\varphi(u)=\Phi(u)+\Psi(\varphi(u)),$$
$$v\varphi(u)\leqslant\Phi(v)+\Psi(\varphi(u)).)$$

这样我们得到

$$\int_X\Phi(g)d\mu\leqslant\int_X\Phi(pf)d\mu.$$

由此进一步还可得到

$$\|g\|_{L^\Phi}\leqslant p\|f\|_{L^\Phi}.$$

其中$\|\cdot\|_{L^\Phi}$是 Orlicz 空间范数，见§1.7，习题 32，36.

12．假设$\Phi(u)$如题 11，此外Φ还满足

$$q_{\Phi}=\inf_{u}\frac{u\Phi'(u)}{\Phi(u)}>1.$$

(条件$p_{\Phi}<\infty$说明Φ限制增长，而条件$q_{\Phi}>1$说明Φ的 Young 补函数$\Psi(v)$限制增长)．设存在常数$\alpha\geqslant\beta>0$使

$$\lambda|\{g>\alpha\lambda\}|\leqslant\int_{\{g>\beta\lambda\}}fd\mu,\quad\forall\lambda>0,$$

则

$$\int_X\frac{g}{\alpha}\varphi\left(\frac{g}{\alpha}\right)d\mu\leqslant cp_\Phi q_\Phi'\int_X f\varphi\left(\frac{g}{\alpha}\right)d\mu,$$

其中 q_Φ' 是 q_Φ 的相伴数. 进而可得 $\|g\|_{L^\Phi}\leqslant cp_\Phi q_\Phi'\|f\|_\Phi$. 此外当 $\alpha=\beta$ 时，常数因子 p_Φ 不出现，因而条件 $q_\Phi<\infty$ 是多余的.

13. 试用题 12 中给出的满足 $q_\Phi'>1$ 的凸 Φ 不等式，证明§3.2 定义的 Hardy 平均算子 $T:f(t)\mapsto\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt$, 满足 $\|Tf\|_\Phi\leqslant q_\Phi'\|f\|_\Phi$, $\forall f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$, $\forall\Phi$ 是满足 $q_\Phi'>1$ 的凸函数.

14. 试用题 11 给出的满足 $p_\Phi<\infty$ 的凸 Φ 不等式，证明§3.2 定义的另一个 Hardy 平均算子 $T^*:f(t)\mapsto T^*f(x)=\displaystyle\int_x^\infty\frac{f(t)}{t}dt$, 满足 $\|T^*f\|_\Phi\leqslant p_\Phi\|f\|_\Phi$, $\forall f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\varepsilon,\infty,\dfrac{dt}{t})$, $\forall\Phi$ 是满足 $p_\Phi<\infty$ 的凸函数.

15. Calderón－Zygmund 分解的一维前身是所谓日升引理. 它说，如果 $f\in C(\mathbb{T})$, $H=\{x\in\mathbb{T}:\exists\, y\in\mathbb{T}, y<x$, 使 $f(y)<f(x)\}$, 则存在不交的开区间 $I_k=(a_k,b_k)$, $k\in\mathbb{Z}_+$, 使得 $H=\bigcup I_k$, 其中 a_k, b_k 满足 $f(a_k)<f(b_k)$, $\forall k$.

16. 设 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, 则 Hardy－Littlewood 极大函数算子 M 满足 $Mf<\infty$, a.e., 或者 $Mf=\infty$. a.e..

17. 所谓二进极大函数算子是

$$M_d f(x)=\sup_{\text{二进}\,I\ni x}\frac{1}{|I|}\int_I|f(t)|dt,\ \forall f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n).$$

则对任意水平λ所作的Calderón－Zygmund分解所得到的二进方体族$\{Q_k\}$，确切地满足$\{M_d f>\lambda\}=\bigcup\limits_1^{\infty} Q_k$.

18．证明，对$f\in L^1_{\mathrm{loc}}$与水平$\lambda>0$作C－Z分解所得到的$\{Q_k\}$，总满足（其中M是H－L极大算子）

$$\bigcup_1^{\lambda} Q_k\subset\{Mf>\lambda\},\ \exists\alpha>1,\ 使\{Mf>\alpha\lambda\}\subset\bigcup_1^{\infty} 2Q_k .$$

19．设f支于球B，$k\geqslant 0$，记$B_\varepsilon=(1+\varepsilon)B$，$\varepsilon>0$．则

$$Mf\log^k(2+Mf)\in L^1(B_\varepsilon)\Longleftrightarrow|f|\log^{k+1}(2+|f|)\in L^1(B).$$

提示：对f与水平$\lambda>0$作C－Z分解得$\{Q_k\}$，有

$$|\{Mf>\lambda\}|\approx\sum|Q_k|\approx\frac{1}{\lambda}\int_{\cup Q_k}|f|\,dx,$$

从而有

$$\frac{c}{\lambda}\int_{\{|f|>\lambda\}}|f|dx\leqslant|\{Mf>\lambda\}|.$$

另外，已知还有相反的不等式

$$|\{Mf>\lambda\}|\leqslant\frac{c}{\lambda}\int_{\{|f|>\frac{\lambda}{2}\}}|f|dx.$$

由此两不等式可得断言.

20．记$\mathscr{R}=\{R_t\}_{t\geqslant 0}$，其中$R_t$是以原点为心的边平行于座标轴的长方体，$R_t\subset R_{t+\varepsilon}$，且$R_t$的直径$d_t$满足$\lim\limits_{t\to 0}d_t=0$，$\lim\limits_{t\to\infty}d_t=\infty$.

定义极大算子

$$M_{\mathscr{R}}f(x)=\sup_{R_t}\frac{1}{|R_t|}\int_{R_t}|f(x+y)|\,dy,\quad\forall f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n).$$

证明$M_{\mathscr{R}}$是弱(1,1)型与(强)(p,p)型的，其中$1<p\leqslant\infty$.

21．上题中若$\mathscr{R}$表示所有边平行于座标轴的长方体的集合，

则相应的极大函数称为强极大算子，常记为 M_s. 证明 M_s 仍是 (p, p) 型，$1<p\leqslant\infty$，但不再是弱 $(1,1)$ 型.

22. 设 $d\mu$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上非负 Borel 测度，满足二倍条件

$$|J|_\mu\leqslant c\,|I|_\mu,\ \forall I,J,I\subset J,l(J)=2l(I).$$

定义极大算子

$$M_\mu f(x)=\sup_{I\ni x}\frac{1}{|I|_\mu}\int_I|f|\,d\mu.$$

证明 M_μ 是弱 $(L^1(\mu),\ L^1(\mu))$ 型，$(L^p(\mu),\ L^p(\mu))$ 型，$1<p\leqslant\infty$.

23. 如果题 22 中的测度不满足二倍条件，则当维数 $n=1$ 时，或者对一般 n 在 M_μ 的定义中改用"中心"型(即仅对所有以 x 为中心的方体 I 取 sup)，则上述有界性仍然成立.

24. 设 $(X, d\mu)$ 是一个由拟距离(即三角不等式是如下广义的那种：$d(x,y)\leqslant K(d(x,z)+d(z,y))$，$K\geqslant 1,\forall x,y,z$.)产生的拓扑空间，其中非负 Borel 测度 μ 满足

$$0<|B(x,r)|\leqslant c\,|B(x,\frac{r}{2})|<\infty,\ \forall x,\forall r>0.$$

这样的空间称为齐型空间. 证明可以有如下的 Calderón – Zygmund 分解：存在常数 c_0, c_1, c_2 使对一切球 $B=B(x_0,r_0)$，与 $f\in L^1_{\text{loc}}$，以及 $\lambda>\frac{c_0}{|B|}\int_{\widetilde{B}}|f|\,d\mu$，其中 $\widetilde{B}=2KB$，都存在 $\widetilde{B}$ 中不交球族 $\{S_j\}$ 满足

$$\{x\in B:|f|>\lambda\}\subset\{x\in B:M(f\chi_{\widetilde{B}})>\lambda\}\subset\bigcup_j c_1S_j\bigcap B,$$

$$\lambda\leqslant\frac{1}{|S_j|}\int_{S_j}|f|\,d\mu\leqslant c_2\lambda,\ \forall j,$$

其中 M 是用"中心球"定义的极大算子，即

$$Mf(x)=\sup_{B(x,r)}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|f(y)|\,d\mu.$$

利用这个分解可以得到，对一切 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}$，以及对一切 $\mathbb{R}_+$ 上定义的连续增加函数 $\Phi(u)$ 满足 $\Phi(0)=0$, $\Phi(2u)\leqslant c\Phi(u)$，都存在 c_f，使得

$$\int_X \Phi(M(f-c_f))d\mu\leqslant c\int_X \Phi(f^{\#})d\mu .$$

(这个结果属于龙瑞麟、申仲伟、杨宇地 Long – Shen – Yang[LSY]).

25. 证明如果 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$，使 $f^{\#}\in L^1(\mathbb{R}^n)$，则 f 为常数. 更一般地，设 $\Phi(u)$ 是 $\mathbb{R}_+$ 上连续增加函数，满足 $\Phi(0)=0$，且 $\int_1^{\infty}\Phi\left(\frac{1}{t}\right)dt=\infty$. 则对非负非常数函数 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}$，不可能有

$$\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(f^{\#})\,dx<\infty .$$

26. 设 $d\mu$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上有界 Borel 测度. 定义

$$M(d\mu)(x)=\sup\ \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|d\mu| .$$

则

$$|\{M(d\mu)>\lambda\}|\leqslant\frac{c}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n}|d\mu|,\quad \forall\lambda>0.$$

此外，若 $d\mu$ 是纯奇异的，则对几乎所有的 x，有

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}d\mu=0.$$

提示：当 $d\mu$ 奇异时，它支于一个 Lebesgue 零测集上，故对任意 δ，存在零测度闭集 F，使得 $d\mu=d\mu_1+d\mu_2$，其中 $d\mu_1$ 支于 F, $\|d\mu_2\|\leqslant\delta$. 而对 $x\notin F$，有

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}d\mu_1=0.$$

27. 设 $1\leqslant p<\infty$. 定义如下空间

$$K_p=\Big\{f\in L^1_{\mathrm{loc}}:\forall I,\exists c_I\in\mathbb{C}, 使$$

$$\frac{1}{|I|}\int_I|f-c_I|dx\leqslant\frac{1}{|I|}\int_I\gamma\,dx, 对某\,\gamma\in L^p_+\Big\},$$

$$\|f\|_{K_p}=\inf_\gamma\|\gamma\|_p,$$

$$\widetilde{K}_p=\{f\in L^1_{\mathrm{loc}}:f^{\#}\in L^p\},$$

$$\|f\|_{\widetilde{K}_p}=\|f^{\#}\|_p,$$

$$\widetilde{\widetilde{K}}_p=\Big\{f\in L^p_{\mathrm{loc}}:\forall I,\exists c_I\in\mathbb{C}, 使$$

$$\int_I|f-c_I|^p dx\leqslant\int_I\gamma^p dx, 对某\,\gamma\in L^p_+\Big\},$$

$$\|f\|_{\widetilde{\widetilde{K}}_p}=\inf_\gamma\|r\|_p,$$

$$L^p/\mathbb{C}=\{f\in L^p_{\mathrm{loc}}:\exists c_f\in\mathbb{C}, 使\, f-c_f\in L^p\},$$

$$\|f\|_{L^p/\mathbb{C}}=\|f-c_f\|_p.$$

证明这些空间是同一空间，范数等价.

28. 设 $(X,\mathscr{F},\mu)$ 是任意一般测度空间，$0<p<\infty$，T 是定义在 L^p+L^∞ 上的拟线性算子，则 T 是弱 (p,p) 型与 (∞,∞) 型，当且仅当

$$|\{|Tf|>\lambda\}|\leqslant\frac{c}{\lambda^p}\int_{c\lambda}^\infty s^{p-1}|\{|f|>s\}|ds,\ \forall f\in L^p+L^\infty,\ \forall\lambda>0.$$

也当且仅当

$$\int_\lambda^\infty s^{p-1}|\{|Tf|>s\}|ds\leqslant c\int_{c\lambda}^\infty s^{p-1}|\{|f|>s\}|ds,\ \forall f,\ \forall\lambda>0.$$

29. 考虑算子外推的如下简单情况. 设 (X,μ)，(Y,ν) 是两个任意一般测度空间，T 是定义于 $S(X)$ 到 $\mathscr{M}(Y)$ 内取值的次线

性算子，假设 T 是 (r,r) 型，$1<r<\infty$，且对应的算子范数满足

$$A_r=\|T\|_r=O(r^{\rho}),\ r\to\infty,\text{常数 }\rho>0,$$

则存在常数 λ, K 使

$$\int_Y \exp(\lambda|Tf|^{\frac{1}{\rho}})\mathrm{d}\nu\leqslant K,\quad \forall f,\ \|f\|_\infty\leqslant 1;$$

如果

$$A_r=O((r-1)^{-\rho}),\ r\to 1,\text{常数 }\rho>0,$$

则

$$\int_Y |Tf|d\nu\leqslant K\int_X |f|(\log^+|f|)^{\rho}d\mu+K,\ \forall f.$$

(这个结果属于 Yano[Y]).

30. 弱 L^1 模可以在如下意义下叠加（属于 E. M. Stein, N. Weiss). 设 $\{g_n\}$是任意测度空间上 WL^1(弱 L^1, 见定义 5.6)中(拟)单位球内的序列(即 $|\{|g_n|>\lambda\}|\leqslant \frac{1}{\lambda}$, $\forall\lambda$, $\forall n$). $\{c_n\}$ 是非负实数序列，$\sum_1^\infty c_n=1$ 且 $K=\sum_1^\infty c_n|\log c_n|<\infty$. 证明

$$|\{|\sum_n c_n g_n|>\lambda\}|\leqslant \frac{2(K+2)}{\lambda},\quad \forall\lambda>0.$$

事实上，只需作如下分解. 对 $\lambda>0$, 令

$$u_n=g_n\chi_{\{g_n<\frac{\lambda}{2}\}},\quad v_n=g_n\chi_{\{g_n>\frac{\lambda}{2c_n}\}},\quad w_n=g_n-u_n-v_n,$$

$$u=\sum_1^\infty c_nu_n,\quad v=\sum_1^\infty c_nv_n,\quad w=\sum_1^\infty c_nw_n.$$

则 $u<\frac{\lambda}{2}$, $|\{v\neq 0\}|\leqslant\sum_1^\infty|\{g_n>\frac{\lambda}{2c_n}\}|\leqslant\frac{2}{\lambda}$,

$$\int_X wd\mu=\sum_1^\infty c_n\int_X w_nd\mu$$

$$=\sum_{1}^{n} c_n\left\{\int_0^{\frac{\lambda}{2}}|\{|g_n|>\frac{\lambda}{2}\}|\,ds+\int_{\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2c_n}}|\{|g_n|>s\}|\,ds\right\}$$

$$\leqslant\sum_{1}^{n} c_n\left(1+\log\frac{1}{c_n}\right).$$

因此

$$|\{|\sum_n c_n g_n|>\lambda\}|\leqslant|\{|w|>\frac{\lambda}{2}\}|+|\{v\neq 0\}|$$

$$\leqslant\frac{2}{\lambda}+\frac{2}{\lambda}(1+K)=\frac{2(K+2)}{\lambda}.$$

31．在§1.3 中为证关于 L^p 模的 Clarkson 不等式，曾叙述但没证明两个关于复数模的初等不等式．这两个不等式是 Riesz－Thorin 定理的推论．为说明此，把我们要证的两个不等式改变形式如下：

$$(|z+w|^p+|z-w|^p)^{\frac{1}{p}}\leqslant 2^{\frac{1}{p'}}(|z|^p+|w|^p)^{\frac{1}{p}},\ \forall z,\ w\in\mathbb{C},\ 2\leqslant p\leqslant\infty,$$

$$(|z+w|^{p'}+|z-w|^{p'})^{\frac{1}{p'}}\leqslant 2^{\frac{1}{p'}}(|z|^p+|w|^p)^{\frac{1}{p}},\ \forall z,w\in\mathbb{C},\ 1\leqslant p\leqslant 2.$$

现在令 X 为两点集，每点赋单位点测度．这个测度空间上的所有复值函数为 $\{(z,w)\}$，它们当然都是可测的．L^p 空间即为所有复值可测函数的集合，范数为 $\|f\|_p=(|z|^p+|w|^p)^{\frac{1}{p}}$．现定义算子 T 为

$$f=(z,w)\to Tf=(z+w,\ z-w).$$

它显然是线性算子．这样，我们要证的不等式化为，对 $1\leqslant p\leqslant 2$，它是 $L^p\to L^{p'}$ 内的有界算子，算子范数 $\|T\|_p\leqslant 2^{\frac{1}{p'}}$；当 $2\leqslant p\leqslant\infty$，$T$ 是 $L^p\to L^p$ 内的有界算子，算子范数 $\|T\|_p\leqslant 2^{\frac{1}{p'}}$．为利用 Riesz－Thorin 定理，对 $2\leqslant p\leqslant\infty$，充分地只需证明 T 是 L^2 有界的与 L^∞

有界的，前者实际上是平行四边形法则

$$|z+w|^2+|z-w|^2=2(|z|^2+|w|^2),$$

后者为

$$\max(|z+w|,|z-w|)\leqslant 2\max(|z|,|w|).$$

故对 $2<p<\infty$，$\frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{2}$，

$$\|T\|_p\leqslant\|T\|_2^{1-\theta}\|T\|_\infty^\theta\leqslant 2^{\frac{1}{2}(1-\theta)}2^\theta=2^{\frac{1}{p}}2^{1-\frac{2}{p}}=2^{\frac{1}{p'}}.$$

若 $1\leqslant p\leqslant 2$，除平行四边形法则外，还有

$$\max(|z+w|,|z-w|)\leqslant|z|+|w|,\ \|T\|_{(L^1,L^\infty)}\leqslant 1.$$

这样对 $1<p<2$，$\frac{1}{p}=1-\theta+\frac{\theta}{2}=1-\frac{\theta}{2}$，有

$$\|T\|_{(L^p,L^{p'})}\leqslant\|T\|_{(L^1,L^\infty)}^{1-\theta}\|T\|_{(L^2,L^2)}^\theta=2^{\frac{\theta}{2}}=2^{\frac{1}{p'}}.$$

32．设 T 是 $L^2(\mathbb{R})$ 上有界线性算子，则 T 是 Hilbert 变换 H 的常数倍，当且仅当 T 与平移 τ_h 可交换，T 与伸缩 d_δ 可交换，T 与反射 $f(x)\to f(-x)$ 反交换.

33．设 $E\subset\mathbb{R}$ 是任意可测集，H 是 Hilbert 变换，则 $H\chi_E$ 的分布函数 $\sigma_{H\chi_E}(\lambda)=\frac{2|E|}{\sinh\pi\lambda}$，其中 sinh 是双曲正弦

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\ x\in\mathbb{R}.$$

34．奇异积分算子理论中有所谓旋转法，它适于核 $K(x)=\frac{\Omega(x)}{|x|^n}$，其中 $\Omega(x)$ 是单位球面 S_{n-1} 上可积的奇函数的情形. 设 y' 是 $\mathbb{R}^n$ 中单位向量，则沿 y' 方向的 Hilbert 变换可以定义为（模常数因子）

$$H_y(f,x)=\lim_{\varepsilon\to 0}H_y^{(\varepsilon)}(f,x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|t|\geqslant\varepsilon}\frac{f(x-y't)}{t}\,dt$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{f(x-y't)-f(x+y't)}{t}\,dt.$$

已知

$$\|H_{y'}^{(\varepsilon)}(f)\|_p\leqslant A_p\|f\|_p,\ \forall f\in L^p,\ 1<p<\infty,$$

其中 A_p 与 f 及 ε 无关. 现设 $K(x)=\dfrac{\Omega(x)}{|x|^n}$ 如上, 定义

$$T_\varepsilon(f,x)=\int_{|y|\geqslant\varepsilon}\frac{\Omega(y)}{|y|^n}f(x-y)dy.$$

则

$$T_\varepsilon(f,x)=\int_{|t|\geqslant\varepsilon}\int_{S_{n-1}}\frac{\Omega(y')f(x-y't)}{t}\,d\sigma(y')dt$$

$$=\int_{|t|\geqslant\varepsilon}\int_{S_{n-1}}\frac{\Omega(-y')f(x+y't)}{t}\,d\sigma(y')dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_{S_{n-1}}\Omega(y')\int_{|t|\geqslant\varepsilon}\frac{f(x-y't)-f(x+y't)}{t}dt\,d\sigma(y')$$

$$=\frac{1}{2}\int_{S_{n-1}}\Omega(y')H_{y'}^{(\varepsilon)}(f,x)d\sigma(y'),$$

并且

$$\|T_\varepsilon(f)\|_p\leqslant\left(\frac{1}{2}A_p\int_{S_{n-1}}|\Omega(y')|d\sigma(y')\right)\|f\|_p.$$

35. 设 T 是 $L^p(\mathbb{R}^n)$到自己的一个有界线性变换, $1\leqslant p\leqslant\infty$, 且与平移可交换. 证明存在有界可测函数 m, 使

$$(Tf)^\wedge(\xi)=m(\xi)\hat{f}(\xi),\ \forall f\in L^2\cap L^p.$$

提示: 由 T 与平移可交换, 知

$$(Tf)*g=T(f*g)=f*Tg$$

处处成立, 从而可得

$$\int_{\mathbb{R}^n} Tf(x)g(-x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} Tg(x)f(-x)dx,\ \forall f, g \in L^p \cap L^{p'}.$$

由此用对偶讨论即知 T 是 $L^{p'}$ 有界的，用算子内插定理即知 T 是 L^2 有界的.

36. 设 $m(\xi)$ 是 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 的乘子，并且在 $\mathbb{R}^k, k<n$, 的每点都是连续的，则 $m(\xi)$ 是 $\mathbb{R}^k$ 的局限是 $L^p(\mathbb{R}^k)$ 的乘子.（这个结果属于 K.de Leeuw [dL]).

37. 设 $m = m_1 * m_2$, $m_1 \in L^r(\mathbb{R}^n)$, $m_2 \in L^{r'}(\mathbb{R}^n)$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$.

则当 $2 \leqslant r \leqslant \infty$, m 是 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 的乘子，只要 p 满足 $\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right| \leqslant \frac{1}{r}$.

(这个结果属于 L.S.Hahn [H]).

38. 设 $m(\xi)$ 是径向函数，是 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 的乘子,则当 $p < \frac{2n}{n+1}$ $\left(\text{或} p > \frac{2n}{n-1}\right)$, m 除原点外处处连续.

39. 设 $\delta \geqslant 0$, Bochner－Riesz 求和算子可以看成是由函数 $m_\delta(\xi) = (1 - |\xi|^2)^\delta \chi_{\{|\xi| \leqslant 1\}}$ 定义的乘子 T_δ. 对 $1 \leqslant p < \infty$, m_δ (或 T_δ) 是否是 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 乘子是一个尚未完全解决的问题. 当 $0 < \delta < \frac{n-1}{2}$,

C.Herz [He 1] 得到了如下必要条件

$$\frac{2n}{n+1+2\delta} < p < \frac{2n}{n-1-2\delta}.$$

这个条件被猜测是充分的. 其中当 $\delta = 0$ 时，这就是著名的圆盘猜测(因为此时 $m_0(\xi)$ 是单位圆盘的特征函数). 圆盘猜测已被 C. Fefferman [F2] 否定解决. $\delta > 0$ 时则只有部分结果. $n = 2$ 时回答是肯定的，这由 Carleson－Sjölin [CS] 解决. 对一般 $n \geqslant 2$, E.M.Stein [St 1] 得到当

$$\delta > (n-1)\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right|$$

时 m_δ 是 $L^p(\mathbb{R}^n)$乘子.

40. 关于算子 g_λ 有如下弱型估计. 设 $1<p<2, p=\dfrac{2}{\lambda}$,则 g_λ 是弱 (p,p)型, (这个结果属于 C. Fefferman [F1]).

41. 设 $K(x)=\dfrac{\Omega(x)}{|x|^n}$, $\Omega(x)$是零阶齐次的, 且使得

$$\int_{r_1<|x|<r_2} K(x)dx=0,\ 0<r_1<r_2<\infty,$$

$$\int_{|x|>2|y|} |K(x+y)-K(x)|\,dx\leqslant B,\ y\neq 0.$$

设 $b(x)=b_0(|x|)$是有界径向函数. 考虑核 $H(x)=b(x)K(x)$ 定义的主值奇异积分算子

$$Tf(x)=\text{p.v.}\int_{\mathbb{R}^n} H(x-y)f(y)dy.$$

则 T 是 L^2 有界的. 假设 $K(x)$没有形如 $\dfrac{\Omega(x)}{|x|^n}$ 的表示, 但仍满足积分为 0 以及大小条件

$$|K(x)|\leqslant c|x|^{-n},\ \forall x\neq 0,$$

以及 Hörmander 的光滑性条件, 则 T 不必是 L^2 有界的. 当 $b_0(r)$是有界且 Λ 有界平均变差时(概念见第四章习题 37), 其中 $\Lambda=\{\lambda_k\}$, 则 T 是 L^p 有界的, $1<p<\infty$, 当且仅当

$$m^{\frac{1}{\Lambda_m}}=O(1),\quad 其中\ \Lambda_m=\sum_{1}^{m}\frac{1}{\lambda_j}.$$

这些结果属于施咸亮 [Sh 2].

注　记

§3.1 的内容可以在一般的泛函分析书籍中找到. 命题(2.7)引自 Stein－Weiss [SW 2]. 好 λ 不等式的概念及其应用首先由 Burkholder [B] 发现. 重排的好 λ 不等式由 Bagby－Kurtz [BK] 首先明确化. 定理(3.1)引自 Stein [St 2]. 定理(3.4)的证明比传统的(例如 Stein [St 2] 上的)要稍微简单一些, 且所含的常系数也稍好一些, 它属于申仲伟. 定理(3.5)引自 Coifman－Weiss [CW]. 定理(4.5)中结论似乎属于C.Herz, 这里的证明, 以及定理(3.6), 都引自 Bennett－Sharpley [BS]. 定理(4.9)与定理(4.11)引自 Stein [St 2]. ♯ 函数是 Fefferman－Stein [FS 2] 引进的, 那里得到了 Mf 与 $f^{\#}$ (当 $f\in L^{p_0}$ 对某个 $p_0>0$)的 L^p 模等价性. 当没有 f 的任何先验假定时有怎样的等价性, 似乎由Strömberg [Str] 首先考虑. 关于内插理论的注记见第七章. 定理(5.4)引自 Zygmund [Zy]. 关于奇异积分算子的注记见第五章. §3.6 命题(6.7)以前都引自 Stein [St 2]. g 函数算子的处理是比较近代的, 很难说清楚属于谁. 关于乘子的一般理论, 以及 Mihlin Hörmander 乘子定理的证明, 也引自 Stein [St 2]. 定理(7.1)引自 Larsen [L], §3.8, 题 11 的前半断言属于C.Dellacherie. 题31中用 Riesz－Thorin 定理证明与 Clarkson 不等式有关的初等不等式是王柔怀推荐的.

第四章　Hardy 空间，BMO 与 Besov 空间

实分析中除研究 Lebesgue 空间与连续函数空间以外，还有其它几个函数空间也占据着很重要的地位，这主要指 Hardy 空间 H_1, BMO 空间[①]，Lipschitz 空间，Soblev 空间等. Lebesgue 空间中 L^1 与 L^∞ 在算子作用方面显得性质不够好，许多算子不是 L^1 到 L^1 自身的映射，因此 L^1 作为算子的定义域往往嫌大；而对 L^∞, 许多算子的值域往往会突破 L^∞ 的范围，因此 L^∞ 作为算子的值域又嫌小. 它们有没有合适的代替者呢? 本世纪初在复分析领域中出现的 H_1, 以及六十年代初在微分方程中出现的 BMO, 正好分别是 L^1 与 L^∞ 的一种令人满意的替代。那些在 L^1 与 L^∞ 上表现不尽如人意的算子常常在 H_1 与 BMO 上作用封闭，即它们是 H_1 到 H_1 有界，BMO 到 BMO 有界的. H_1 与 BMO 的出现不仅有自身的理论意义，而且为研究算子在其它空间上的作用带来了方便. 还有更多的例子说明 BMO 空间的引进在许多方面，例如复分析，奇异积分算子，曲线上的 Cauchy 积分算子，A_p 权理论，以及微分方程等领域，产生了促进作用. 此外 Sobolev 空间与 Lipschitz 空间在微分方程与函数逼近论中也起着非常重要的作用. 本章将对这些空间的基本理论作一介绍，其中主要部分(前 7 节)讲述 H_1-BMO 及其相关理论，在 §4.8 介绍概括 Sobolev 空间与 Lipshitz 空间等的所谓 Besov 空间 $B^s_{p,q}$ 与 Triebel —— Lizorkin 空间 $F^s_{p,q}$. 虽然这两类空间也包括 H_p 与 BMO, 以及其它许多空间，但我们对它们所讲的只是最基本的一

---

① BMO 是 Bounded Mean Oscillation(有界平均振动)的缩写.

般理论，不包括前面几节讲的比较精细的内容.

古典的 H_p 空间理论是复变函数论的一章，它最初定义为单位圆内或上半平面上的那些解析函数 $F(z)$ 的全体，$0<p<\infty$，

$$H_p=\left\{F(z):\ \sup_r\int_0^{2\pi}|F(re^{i\theta})|^p d\theta<\infty\right\},$$

$$\text{或}\left\{F(z):\sup_y\int_{\mathbb{R}}|F(x+iy)|^p dx<\infty\right\}.$$

以后推广到 $\mathbb{R}_+^{n+1}$，也没有离开解析，调和理论. 由于对复变理论的强烈依赖，H_p 理论的发展在 70 年代以前处于停滞阶段，直到 70 年代初，D. Burkholder, R. Gundy, M. Silverstein（见 [BGS]）发现了一个重要事实，即为判别单位圆内一个实调和函数 $u(x,r)$ 是否为某个 $F(x,r)\in H_p$ 的实部，无需象以往一样，要考察 u 的共轭调和函数 v 的表现，而只是考察 u 的角形极大函数 u^* 是否属于 L^p 就够了. 以后 E. M. Stein 和 C. Fefferman 发现为判别圆周上的实值函数 f 是否是某个 $F(x,r)\in H_p$ 的边值的实部，甚至也不需要考虑 f 的 Poisson 积分 $u(x,r)$ 的角形极大函数 u^*，而只需考察 $\varphi_t*f(x)$ 的角形极大函数 $\varphi^*(f)$ 是否属于 L^p 就可以了，这里 $\{\varphi_t\}$ 可以是非常一般的一个逼近单位. 此后，H_p 便扔掉了复变拐杖而有了自己的实变理论，并且已发展得比较成熟：H_p 已有完整的对偶理论，极大函数刻划理论，面积积分算子刻划理论，奇异积分算子刻划理论，以及原子理论等. 本章的 §4.1, 4.3 — 4.6 将对 H_p 的这些新进展作一介绍. 但因为这些理论的完整叙述需要很长的篇幅，因此我们将不追求完整，而只介绍那些比较基本的内容，特别地着重介绍 H_1 理论，因为它已是足够典型的. 有兴趣的读者如想了解其它相关理论，可以参考这方面的专著，例如 J. Garcia－Cuerva 与 J. L. Rubio *de* Francia 的专著 [GR]. 关于 BMO，由于它与许多方面有联系，因此有关它的内容是分散的. 比较集中的只是一节，即

§4.2, 其中介绍 BMO 的定义以及重要的 John – Nirenberg 定理. 本章中与 BMO 有关的节还有 §4.3 与 §4.7, 分别介绍 $H_1 - BMO$ 对偶与 Carleson 测度. 后面第五章中还会出现奇异积分算子的 BMO 估计, 第六章还会出现 BMO 与 A_p 权的关系, 第七章中还涉及 BMO 与 L^p 的内插空间. 至于 Besov 空间 $B^s_{p,q}$ 及其类似 $F^s_{p,q}$, 我们只是介绍它们的定义(这已经不是一个简单任务了)与最基本的性质, 至于它们的一些较为深入的性质, 我们只是稍微提及而已.

§4.1 原子 H_1 空间

定义(1.1) 设 $1<q\leqslant\infty$, 可测函数 a 称为一个$(1,q)$原子, 如果存在方体 I(或球)使

$$\operatorname{supp} a\subset I,\quad \|a\|_q\leqslant |I|^{\frac{1}{q}-1},\quad \int_I a(y)dy=0. \tag{1}$$

式(1)中三个条件分别称为原子的支集条件, 大小条件与消失矩条件.

定义(1.2) 定义原子的 Hardy 空间 $H_1^{(q)}$ 为

$$H_1^{(q)}=\left\{f\in L^1: f=\sum_1^\infty \lambda_k a_k,\ \{a_k\}(1,q)\text{原子},\ \{\lambda_k\}\subset\mathbb{C},\ \sum_1^\infty|\lambda_k|<\infty\right\}, \tag{2}$$

$$\|f\|_{H_1^{(q)}}=\inf\left\{\sum_1^\infty|\lambda_k|: \text{遍历} f \text{的所有可能的表示}\right\}. \tag{3}$$

设 $r\leqslant q$, $r\geqslant 1$, $q>1$, 则$(1,q)$原子满足

$$\left(\frac{1}{|I|}\int_I|a|^r dx\right)^{\frac{1}{r}}\leqslant\left(\frac{1}{|I|}\int_I|a|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant|I|^{-1} \tag{4}$$

这说明对 $1<r<q$，每个$(1,q)$原子也是$(1,r)$原子，因而

$$\|f\|_{H_1^{(r)}}\leqslant\|f\|_{H_1^{(q)}}.$$

即 $H_1^{(q)}$ 连续地嵌入到 $H_1^{(r)}$. 类似地在(4)中取 $r=1$，即知(2)中的级数在 L^1 中收敛，且 $\|f\|_1\leqslant\|f\|_{H_1^{(q)}}$，即 $H_1^{(q)}$ 连续地嵌入到 L^1 中.

定理(1.3) 设 $1<q\leqslant\infty$. 则 $H_1^{(q)}$ 是 Banach 空间.

证明 $H_1^{(q)}$ 是线性空间以及 $\|\cdot\|$ 为范数是易知的，只需证明完备性. 设$\{f_n\}$是 Cauchy 列，取$\{n_k\}$满足

$$f_{n_k}-f_{n_{k-1}}=\sum_1^{\infty}\lambda_j^{(k)}a_j^{(k)},$$

$$\sum_1^{\infty}|\lambda_j^{(k)}|\leqslant\|f_{n_k}-f_{n_{k-1}}\|_{H_1^{(q)}}+\frac{1}{2^{k+1}}\leqslant\frac{1}{2^k}.$$

这样存在 $f\in L^1$ 使 $\sum\limits_1^{\infty}(f_{n_{k+1}}-f_{n_k})$在 L^1 中收敛于 $f-f_{n_1}$，且

$$f-f_{n_1}=\sum_k\sum_j\lambda_j^{(k)}a_j^{(k)}=\sum_1^{\infty}\mu_kb_k$$

便是 $f-f_{n_1}$ 的一个原子分解，其中 $\sum\limits_1^{\infty}\mu_kb_k$ 是二重级数的任意重排(注意不管怎样重排，$\sum\limits_1^{\infty}\mu_kb_k$ 是在 L^1 中收敛于 f 的.)此外

$$\|f-f_{n_k}\|_{H_1^{(q)}}\leqslant\sum_{i=k}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|\lambda_j^{(i)}|\leqslant2^{1-k},$$

这说明$\{f_{n_k}\}$在 $H_1^{(q)}$ 中收敛于 f. 既然$\{f_n\}$是 Cauchy 序列，$\{f_n\}$也在$H_1^{(q)}$ 中收敛于 f，完备性获证，定理证毕.

现在我们断言，所有 $H_1^{(q)}$ 都相等. 我们已指出过大指标 q 的 $H_1^{(q)}$ 连续地嵌入到小指标的空间. 现只需补充证明每个 $H_1^{(q)}$ 都连续地嵌入到 $H_1^{(\infty)}$.

定理(1.4) 我们有 $H_1^{(q)}=H_1^{(\infty)}$，意即

$$C_1\|f\|_{H_1^{(q)}}\leqslant\|f\|_{H_1^{(\infty)}}\leqslant C_2\|f\|_{H_1^{(q)}},\quad \forall f\in L^1,\tag{5}$$

证明 只需证 $H_1^{(q)}\subset H_1^{(\infty)}$. 不失一般性，只考虑 $q=2$ 情形，下面的证明对 $q>1$ 是完全类似的. 设 a 是(1,2)原子，supp$a\subset Q$ (Q 是某个方体). 记 M_2 为 L^2 积分定义的 Hardy-Littlewood 极大算子，即 $M_2f=M^{\frac{1}{2}}(|f|^2)$. 记 $b(x)=|Q|a(x)$，则 $\|b\|_2^2\leqslant|Q|$. 对待定的 $\lambda>0$，记

$$U_\lambda=\{x: M_2b>\lambda\}=\{x: M(|b|^2)>\lambda^2\}.$$

只要 λ 充分大，有 $U_\lambda\subset 2Q$，这因为当 $x\notin 2Q$ 时，有

$$M(|b|^2)(x)\leqslant\frac{C\|b\|_2^2}{(\mathrm{dist}(x,Q))^n}\leqslant C$$

对 U_λ 作 Whitney 分解，得 $U_\lambda=\bigcup_j Q_j$. 因 Q_j 的适当倍数扩大与 U_λ^c 有交，故

$$\left(\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|b|^2dx\right)^{1/2}\leqslant C_1\lambda.$$

对此$\{Q_j\}$作 b 的相应分解

$$b(x)=g_0(x)+\sum_j h_j(x),$$

$$g_0(x)=b(x)\chi_{U_\lambda^c}(x)+\sum_1^\infty\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}bdx\,\chi_{Q_j}(x),$$

$$h_j(x)=\left(b(x)-\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}b(y)dy\right)\chi_{Q_j}(x),\quad\forall j.$$

显然，$|g_0(x)|\leqslant C_1\lambda$，

$$\int_{2Q} g_0(x)dx = 0 \text{（这因} \int_Q bdx = 0 \text{ 与 } \int_{2Q} \sum_1^\infty h_j(x)dx = 0\text{）}$$

$$\int_{Q_j} h_j dx = 0,$$

$$\left(\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|h_j(x)|^2dx\right)^{1/2} \leqslant 2\left(\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|b(x)|^2dx\right)^{1/2} \leqslant 2c_1\lambda.$$

记 $b_j(x) = \dfrac{1}{2C_1\lambda} h_j(x)$, $\forall j$. 则

$$\operatorname{supp} b_j \subset Q_j, \int_{Q_j} b_j(x)dx = 0, \|b_j\|_2^2 \leqslant |Q_j|.$$

这样 b_j 满足对 b 同样的条件，故可继续对一切 j 分解 b_j. 重复下去得

$$\begin{aligned} b(x) &= g_0(x) + 2C_1\lambda\left(\sum_{j_0} g_{j_0}(x) + \sum_{j_0, j_1} h_{j_0, j_1}(x)\right) \\ &= g_0(x) + 2C_1\lambda\sum_{j_0} g_{j_0}(x) + (2C_1\lambda)^2\sum_{j_0, j_1} g_{j_0, j_1}(x) + \cdots \qquad (6) \\ &\quad + (2C_1\lambda)^k\sum_{j_0, j_1, \cdots, j_{k-1}} g_{j_0, \cdots, j_{k-1}}(x) + (2C_1\lambda)^k\sum_{j_0, \cdots, j_k} h_{j_0, j_1, \cdots, j_k}, \end{aligned}$$

其中

$$\operatorname{supp} h_{j_0, \cdots, j_k} \subset Q_{j_0, \cdots, j_k},$$

$$\bigcup_{j_k} Q_{j_0, \cdots, j_k} = \{x : M(|b_{j_0, \cdots, j_{k-1}}|^2) > \lambda^2\},$$

$$\frac{1}{|Q_{j_0, \cdots, j_k}|}\int_{Q_{j_0, \cdots, j_k}}|h_{j_0, \cdots, j_k}|dx \leqslant \left(\frac{1}{|Q_{j_0, \cdots, j_k}|}\int_{Q_{j_0, \cdots, j_k}}|h_{j_0, \cdots, j_k}(x)|^2dx\right)^{1/2}$$

$$\leqslant 2C_1\lambda.$$

由极大算子M的弱(1,1)型，设其弱(1,1)型界为C_2，得

$$(2C_1\lambda)^k\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{j_0,\cdots,j_k}|h_{j_0,\cdots,j_k}(x)|dx\leqslant(2C_1\lambda)^{k+1}\sum_{j_0,\cdots,j_k}|Q_{j_0,\cdots,j_k}|$$

$$=(2C_1\lambda)^{k+1}\sum_{j_0,\cdots,j_{k-1}}|\{x:M(|b_{j_0,\cdots,j_{k-1}}|^2)>\lambda^2\}|$$

$$\leqslant(2C_1\lambda)^{k+1}C_2\lambda^{-2}\sum_{j_0,\cdots,j_{k-1}}\int_{\mathbb{R}^n}|b_{j_0,\cdots,j_{k-1}}|^2dx$$

$$\leqslant(2C_1\lambda)^{k+1}C_2\lambda^{-2}\sum_{j_0,\cdots,j_{k-1}}|Q_{j_0,\cdots,j_{k-1}}|\leqslant\cdots$$

$$\leqslant(2C_1\lambda)^{k+1}(C_2\lambda^{-2})^k\sum_{j_0}|Q_{j_0}|\leqslant(2C_1C_2\lambda^{-1})^{k+1}|Q|.$$

这样，若λ选得使$\lambda>2C_1C_2$，则当$k\to\infty$时，式(6)中最右边项在L^1中收敛于0. 这样我们得到

$$b(x)=g_0(x)+2C_1\lambda\sum_{j_0}g_{j_0}(x)+(2C_1\lambda)^2\sum_{j_0,j_1}g_{j_0,j_1}(x)+\cdots,\tag{7}$$

其中$g_{j_0,\cdots,j_k}$支于$2Q_{j_0,\cdots,j_k}$，积分平均为0，且有界$C_1\lambda$. 现令

$$a_{j_0,\cdots,j_k}(x)=\frac{1}{C_1\lambda}\ \frac{1}{|2Q_{j_0,\cdots,j_k}|}g_{j_0,\cdots,j_k}(x),\tag{8}$$

则它们都是$(1,\infty)$原子，且(7)可改写为

$$a(x)=\frac{C_1\lambda}{|Q|}\left\{2|Q|a_0(x)+\sum_{j_0}2C_1\lambda|2Q_{j_0}|a_{j_0}(x)+\cdots\right.$$

$$+\sum_{j_0,\cdots,j_k}(2C_1\lambda)^{k+1}|2Q_{j_0,\cdots,j_k}|Q_{j_0,\cdots,j_k}(x)+\cdots\Big\}$$

$$=\sum_{1}^{\infty}\lambda_j a_j,$$

其中$\{\lambda_j\}$满足(注意

$$\sum_{j_0,\cdots,j_k}|2Q_{j_0,\cdots,j_k}|\leqslant 2^n\sum_{j_0,\cdots,j_k}|Q_{j_0,\cdots,j_k}|\leqslant 2^n(C_2\lambda^{-2})^{k+1}|Q|)$$

$$\sum_{1}^{\infty}|\lambda_j|=\frac{C_1\lambda}{|Q|}\Big\{2|Q|+\sum_{j_0}2C_1\lambda|2Q_{j_0}|+\cdots+\sum_{j_0,\cdots,j_k}(2C_1\lambda)^{k+1}$$

$$\cdot|2Q_{j_0,\cdots,j_k}|+\cdots\Big\}\leqslant\frac{C_1\lambda}{|Q|}2^n\Big\{|Q|+\sum_{k=1}^{\infty}(2C_1\lambda C_2\lambda^{-2})^k|Q|\Big\}\leqslant C,$$

既然C_1, C_2只与维数n有关，而λ可选为$4C_1C_2$. 这证明了每个$(1,2)$原子$a\in H_1^{(\infty)}$，且$\|a\|_{H_1^{(\infty)}}\leqslant C$. 这样每个$f\in H_1^{(2)}$，对于它的任一$(1,2)$原子分解$\sum_{1}^{\infty}\lambda_k a_k$，我们有

$$\|f\|_{H_1^{(\infty)}}\leqslant\sum_{1}^{\infty}|\lambda_k|\,\|a_k\|_{H_1^{(\infty)}}\leqslant C\sum_{1}^{\infty}|\lambda_k|.$$

对分解取 inf, 即得$\|f\|_{H_1^{(\infty)}}\leqslant C\|f\|_{H_1^{(2)}}$. 定理获证.

此后我们用记号H_1来表示$H_1^{(q)}$这个 Hardy 空间. 可以把上述定义与定理推广到H_p去，其中$0<p<1$. 记$s_0=\left[n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right]$ ($[\cdot]$表实数的整数部分)，考虑另两个指标q, s, $1\leqslant q\leqslant\infty$, $s\geqslant s_0$. 一个可测函数$a(x)$称为一个(p,q,s)原子，如果存在方体I(或球)使

$$\operatorname{supp} a \subset I, \|a\|_q \leqslant |I|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}, \int_I x^\alpha a(x)\,dx = 0,$$

$$\forall \alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n),\ |\alpha| \leqslant s.$$

则原子的$H_p^{(q,s)}$空间由$L\left(\frac{1}{p}-1, \infty, s\right)^*$中的那些元素$f$构成

$$f = \sum_1^\infty \lambda_j a_j,\ \{a_j\}\text{是}(p, q, s)\text{原子},\ \{\lambda_k\} \subset \mathbb{C}\text{ 满足} \sum |\lambda_k|^p < \infty,$$

$$\|f\|_{H_p^{(q,s)}} = \inf\left(\sum_1^\infty |\lambda_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

inf 对所有分解取，其中级数$\sum_1^\infty \lambda_j a_j$表示$L\left(\frac{1}{p}-1, \infty, s\right)^*$中的收敛．这里空间$L(\beta, q', s)$是所谓Campanato－Meyers空间，其定义是：设s是非负整数，β满足$0 \leqslant [n\beta] \leqslant s$，$1 \leqslant q' \leqslant \infty$，则定义$L(\beta, q', s)$是$L_{\mathrm{loc}}^{q'}$中满足条件

$$\|g\|_{L(\beta, q', s)} = \sup_Q |Q|^{-\beta}\left[\int_Q |g - p_Q(g)|^{q'} \frac{dx}{|Q|}\right]^{\frac{1}{q'}} < \infty$$

的函数g组成的空间，其中Q是方体(指边平行于坐标轴的方体)，$p_Q(g)$是Q上唯一至多s次代数多项式，它使得

$$\int_Q (g - p_Q(g))x^\alpha dx = 0, \quad \forall \alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n),\ |\alpha| \leqslant s.$$

本节的结论对$H_p^{(q,s)}$仍然基本上成立，即$H_p^{(q,s)}$不依赖于q, s，且是完备的距离空间．

作为本节的结束，我们讲述H_1空间的一个应用，这就是著

名的 Hardy 不等式：若 $f \in H_1(\mathbb{T})$（可完全类似定义周期函数的 $H_1(\mathbb{T})$），$f \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$，则 $\sum_{-\infty}^{\infty}{}' |c_k|/|k| \leqslant C\|f\|_{H_1}$，其中 $\sum_{-\infty}^{\infty}{}'$ 表示求和中去掉 $k=0$ 的项．事实上，只需对支于 $[-\delta, \delta]$ 的原子，证明它的 Fourier 系数满足 $\sum_k{}' |c_k|/|k| \leqslant 4$，而这可以如下推导：由于

$$|c_k| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_I a(x)(e^{-ikx}-1)dx\right| \leqslant \frac{|k|}{2\pi}|I|\int_I |a|dx \leqslant \frac{|k||I|}{2\pi},$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_I |a|^2 dx \leqslant \frac{1}{2\pi}|I|^{-1},$$

故

$$\sum{}' |c_k|/|k| \leqslant \sum_{|k| \leqslant |I|^{-1}} + \sum_{|k| > |I|^{-1}} \leqslant 4.$$

在 §3.5 中，我们曾介绍过 $\mathbb{R}^n$ 上的 Hardy－Littlewood 不等式，$\mathbb{T}$ 情形是类似的，它为

$$\sum_{-\infty}^{\infty}{}' |c_k||k|^{p-2} \leqslant C\|f\|_p \qquad \forall f \in L^p(\mathbb{T}),\ 1<p\leqslant 2.$$

此公式当 $p=1$ 时是不成立的，上面的 Hardy 不等式表明，若用 $f \in H_1(\mathbb{T})$ 代替 $f \in L^1(\mathbb{T})$，则 Hardy－Littlewood 不等式在 $p=1$ 时也成立．值得指出的是，原来 Hardy 不等式是对经典 H_1 空间证明的，我们这里是对原子 H_1 空间证明的，要得到 Hardy 不等式原来的结果，还需要用到经典 H_1 空间与原子 H_1 空间是等价的这一事实(见后面定理(6.8))．

§4.2 BMO 空间

定义(2.1) 设 $f\in L^1_{\text{loc}}$. 称 $f\in BMO$, 如果

$$\|f\|_{**}=\sup_I \frac{1}{|I|}\int_I |f-f_I|\,dx<\infty, \tag{1}$$

其中 I 是 $\mathbb{R}^n$ 中方体, $f_I=\frac{1}{|I|}\int_I f\,dx$.

BMO 有如下等价定义

$$BMO=\left\{f\in L^1_{\text{loc}}:\|f\|_*=\sup_I \inf_c \frac{1}{|I|}\int_I |f-c|\,dx<\infty\right\}. \tag{2}$$

等价性是因为一方面显然有 $\|f\|_*\leqslant\|f\|_{**}$, 而另一方面, $\forall c\in\mathbb{C}$,

$$\frac{1}{|I|}\int_I |f-f_I|dx\leqslant \frac{1}{|I|}\int_I |f-c|\,dx+|f_I-c|\leqslant \frac{2}{|I|}\int_I |f-c|dx,$$

对 c 取 inf, 然后对 I 取 sup 即得 $\|f\|_{**}\leqslant 2\|f\|_*$. 我们下面用 $\|\cdot\|_*$ 表 BMO 的等价模(包括以后指出的其他形式)中的任何一种.

定理(2.2) BMO 是模常数的 Banach 空间.[1]

证明 $\|\cdot\|_*$ 与 $\|\cdot\|_{**}$ 都是范数, 其三角不等式与正齐性显然. 现设 $\|f\|_*=0$, 则 $\forall I$, 存在 $c_I\in\mathbb{C}$ 使 $f=c_I$, a・e 于 I. 这样如果 $I\subset J$, 则 $c_J=c_I$. 因此存在 $c_f\in\mathbb{C}$ 使 $f=c_f$ 在一切 I 上, 此

---

[1] 所谓"模常数意义下的 Banach 空间"意思是说这个空间的元素是 BMO 函数的等价类(两个相差一个常数的函数属于同一个等价类). 以下还有一些"模……"的说法也作类似理解. 例如"模 A 下唯一"是指满足该种性质的元素若不计差别 A 的话是唯一的.

即 f 是 BMO 的零元. 现证 BMO 是完备的. 设 $\{f^{(n)}\}$ 是 Cauchy 序列, 任取 I, 并取 $f^{(n)}$ 的代表函数 $f^{(n)}-f_I^{(n)}$. 这样, 由

$$\frac{1}{|I|}\int_I |(f^{(n)}-f_I^{(n)})-(f^{(m)}-f_I^{(m)})|\,dx \tag{3}$$

$$=\frac{1}{|I|}\int_I |(f^{(n)}-f^{(m)})-(f_I^{(n)}-f_I^{(m)})|\,dx$$

$$\leqslant \|f^{(n)}-f^{(m)}\|_* \to 0,$$

知 $\{f^{(n)}-f_I^{(n)}\}$ 是 $L^1(I)$ 中的 Cauchy 列, 故存在 $f^{(I)}$ 是其极限. 现设 $I\subset J$, 则因

$$|f_I^{(n)}-f_J^{(n)}|=\frac{1}{|I|}\left|\int_I (f_J^{(n)}-f^{(n)})dx\right|\leqslant \frac{|J|}{|I|}\sup_n \|f^{(n)}\|_*,$$

知它是 $\mathbb{C}$ 中有界集, 故有子列收敛. 这样在

$$f^{(n_k)}-f_J^{(n_k)}=f^{(n_k)}-f_I^{(n_k)}+f_I^{(n_k)}-f_J^{(n_k)}$$

中令 $k\to\infty$, 知存在复数 $c_{I,J}$ 使在 I 上有

$$f^{(J)}=f^{(I)}+c_{I,J},\quad \forall I,J,I\subset J \tag{4}$$

现任取 $\{I_n\}$ 单调增加到 $\mathbb{R}^n$, 并设 $f^{(I_2)}$ 已经减去一常数使在 I_1 上与 $f^{(I_1)}$ 相等, 同时 $f^{(I_3)}$ 已减去一常数使它在 I_2 上与 $f^{(I_2)}$ 相等. 如此继续, 则每个 $f^{(I_n)}$ 是它前面的延拓, 这样存在 f 满足

$$f|_{I_n}=f^{(I_n)},\quad \forall n.$$

因此 $\forall I$, 有 $f=f^{(I)}+c_I$. 由 $\int_I f^{(I)}dx=0$, 知

$$f-f_I=f^{(I)},\qquad \forall I. \tag{5}$$

注意到(3)，只要 n 充分大，便对 I 一致地有

$$\frac{1}{|I|}\int_I |f-f_I-(f^{(n)}-f_I^{(n)})|\,dx\leqslant\varepsilon.$$

故 $\|f-f^{(n)}\|_*\leqslant\varepsilon$. 定理证毕.

如同对 Lebesgue 空间一样，我们宁愿将 BMO 看成是函数的空间而不是函数的等价类的空间. 只需注意两个相差一个常数的函数在 BMO 中是不加区别的. 因此我们可以使用诸如 $L^\infty\subset BMO$ 之类的语言. 断言 $L^\infty\subset BMO$ 是显然的，它由定义直接看出. 注意这个包含是真包含，$\log|x|$ 就是 BMO 中无界函数的例子.

定理(2.3) 设 $f\in BMO$, 则 $|f|\in BMO$. 此外 Re BMO 是一个格，即当 $f,g\in$ Re BMO 时，$f\vee g=\max(f,g)$ $f\wedge g=\min(f,g)$ 也属于 BMO. 特别对 $f\in$ Re BMO 与 $N>0$, $f^{(N)}=(f\wedge N)\vee(-N)\in BMO$.

证明 设 $f\in BMO$ 方体 I 与 $c_I\in\mathbb{C}$ 任意. 由

$$\frac{1}{|I|}\int_I ||f|-|c_I||\,dx\leqslant\frac{1}{|I|}\int_I |f-c_I|\,dx,$$

知 $\||f|\|_*\leqslant\|f\|_*$. 现设 $f,g\in$Re BMO, 注意对 $x,y,c,d\in\mathbb{R}$, 有

$$x\vee y=\frac{x+y+|x-y|}{2},\quad x\wedge y=\frac{x+y-|x-y|}{2},$$

$$|x\vee y-c\vee d|\leqslant|x-c|+|y-d|,\quad |x\wedge y-c\wedge d|\leqslant|x-c|+|y-d|,$$

这样便得:

$$\frac{1}{|I|}\int_I|f\vee g-c\vee d|\,dx\leqslant\frac{1}{|I|}\int_I|f-c|\,dx+\frac{1}{|I|}\int_I|g-d|dx,$$

$$\|f\vee g\|_*\leqslant\|f\|_*+\|g\|_*.$$

类似地也有

$$\|f\wedge g\|_*\leqslant\|f\|_*+\|g\|_*,$$

$$\|f^{(N)}\|_*\leqslant\|f\|_*.$$

定理获证.

现在我们指出 BMO 的定义可以自身改进. 即定义中的一次积分平均振动有界事实上蕴含了高次积分甚至指数积分平均有界这一性质. 甚至可以证明得更多, 即一次积分平均振动有界这一条件还可减弱. 更确切而言, 设 $\Phi(u)$是 $\mathbb{R}_+$ 到 $\mathbb{R}_+$的连续增加到无穷的函数, 记

$$BMO_\Phi=\left\{f\in L^\Phi_{\mathrm{loc}}:\|f\|_{*\Phi}=\Phi^{-1}\left(\sup_I\inf_c\frac{1}{|I|}\int_I\Phi(|f-c|)dx\right)\right.$$

$$\left.<\infty\right\},\tag{6}$$

我们要指出不管 $\Phi(u)$增加得如何慢, 总有 $BMO_\Phi\subset BMO$, 并且 $f\in BMO$ 有指数积分平均有界性质. 既然我们的目标是说明 $BMO_\Phi\subset BMO$, 且 BMO_Φ 明显地关于 Φ 有递降关系: $\Phi_1\leqslant\Phi_2$ 推出 $BMO_{\Phi_2}\subset BMO_{\Phi_1}$. 因此我们总可以通过减小 Φ(因而放大了 BMO_Φ)使得 $\Phi(u)$满足

$$\Phi(a+b)\leqslant c_0(\Phi(a)+\Phi(b)+1),\quad\forall a,b.\tag{7}$$

(注意, (7)本质上是一个缓慢增加性质, 例如通常的两倍条件就推出它), 然后对减小了的 Φ 证明断言 $BMO_\Phi\subset BMO$.

定理(2.4) (John－Nirenberg) 设$\Phi(u)$是 $\mathbb{R}_+$ 到 $\mathbb{R}_+$ 的函数, 连续增加到无穷, $f\in BMO_\Phi$, 则存在常数 B 与 $b_f>0$, 使 $\forall I$, 存

在 $c_I \in \mathbb{C}$ 满足

$$\frac{1}{|I|}|\{x \in I: |f-c_I|>\lambda\}| \leqslant Be^{-\frac{\lambda}{b_f}}, \quad \forall I, \quad \forall \lambda>0. \tag{8}$$

证明 不妨设(7)成立. 设 $f \in BMO_\Phi$, I 取定, 则 $\int_I \Phi(|f-c|)dx$ 是 $c \in \mathbb{C}$ 的连续函数, 在 ∞ 处为 ∞, 故存在 c_I 使其极小. 定义函数

$$F_f(\lambda) = \sup_I \frac{1}{|I|}|\{x \in I: |f-c_I|>\lambda\}|, \ \lambda>0. \tag{9}$$

我们希望诱导出 $F_f(\lambda)$ 满足的不等方程. 如果这个不等方程表明, 当 λ 以算术级数增加到 ∞ 时, $F_f(\lambda)$ 至少以等比速度下降到 0, 则 $F_f(\lambda)$ 必须被负幂指标函数所控制. John – Nirenberg 当初引进 BMO 的概念时就已注意到这一事实, 并用它证明了这一定义条件可以自身改进的定理, 现称之为 John – Nirenberg 定理. 现在我们来诱导出 $F_f(\lambda)$ 所满足的函数不等方程, 思想与当 $\Phi(u)=u$ 时的证明思想本质上是一样的. 设 $f \in BMO_\Phi$, I 任取, c_I 如前述. 设 $\lambda_0>0$ 是待定的水平. 在 I 上对 $\Phi(|f-c_I|)$ 依水平 λ_0 作 Calderón – Zygmund 分解, 得 I 的不交子方体族 $\{I_j\}$, 满足

$$\Phi(|f-c_I|) \leqslant \lambda_0, \quad \text{a.e. 于 } I-\bigcup_1^\infty I_j, \tag{10}$$

$$\frac{1}{|I_j|}\int_{I_j}\Phi(|f-c_I|)dx \leqslant 2^n\lambda_0, \ \forall j, \tag{11}$$

$$\sum_1^\infty |I_j| \leqslant \frac{1}{\lambda_0}\int_I \Phi(|f-c_I|)dx. \tag{12}$$

我们希望由对某步长 $b>0$, 点集 $\{x \in I: |f-c_I|>\lambda+b\}$ 与每个

$\{x\in I_j:|f-c_I|>\lambda\}$的关系．推导出 $F_I(\lambda)$满足函数不等方程

$$F_I(\lambda+b)\leqslant\frac{1}{1+\varepsilon}F_I(\lambda),\qquad\forall\lambda>0.$$

这集合关系主要来自于(11)与f的BMO_Φ属性这些事实．确切地说我们有

$$|f-c_I|\leqslant\Phi^{-1}(\lambda_0)=a<\infty,\ \text{a.e. 于}\ I-\bigcup I_j,\tag{13}$$

$$\begin{aligned}\Phi(|c_I-c_{I_j}|)&=\frac{1}{|I_j|}\int_{I_j}\Phi(|c_I-f+f-c_{I_j}|)\,dx\\&\leqslant c_0\left(\frac{1}{|I_j|}\int_{I_j}\Phi(|f-c_I|)dx+\frac{1}{|I_j|}\int_{I_j}\Phi(|f-c_{I_j}|)dx+1\right)\\&\leqslant c_0(2^n\lambda_0+\Phi(\|f\|_{*\Phi})+1),\end{aligned}$$

从而

$$|c_I-c_{I_j}|\leqslant\Phi^{-1}(c_02^n\lambda_0+c_0\Phi(\|f\|_{*\Phi})+c_0)=b<\infty,\quad\forall j.\tag{14}$$

注意$b\geqslant a$，故

$$\{x\in I:|f-c_I|>\lambda+b\}\subset\{x\in I:|f-c_I|>a\}\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}I_j,$$

$$\begin{aligned}\{x\in I:|f-c_I|>\lambda+b\}&\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}\{x\in I_j:|f-c_I|>\lambda+b\}\\&\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}\{x\in I_j:|f-c_{I_j}|>\lambda\},\ \forall\lambda>0.\end{aligned}\tag{15}$$

由式(15)我们就可推出我们所需要的函数不等方程了．这因$F_f(\lambda)$是λ的下降函数，$F_f(0)\leqslant1$，由(15)我们得

$$|I|^{-1}|\{x\in I:|f-c_I|>\lambda+b\}|\leqslant F_f(\lambda)|I|^{-1}\sum_1^{\infty}|I_j|$$

$$\leqslant F_f(\lambda)\frac{1}{\lambda_0|I|}\int_I \Phi(|f-c_I|)dx,$$

$$F_f(\lambda+b)\leqslant \lambda_0^{-1}\Phi(\|f\|_{*\Phi})F_f(\lambda), \quad \forall \lambda>0.$$

特别取 $\lambda_0=e\Phi(\|f\|_{*\Phi})$，我们得

$$F_f(\lambda+b)\leqslant \frac{1}{e}F_f(\lambda), \quad \forall \lambda>0. \tag{16}$$

现在归纳地可得

$$F_f((k+1)b)\leqslant e^{-k}F_f(b), \quad \forall k\geqslant 1.$$

故当 $\lambda\in(kb,(k+1)b]$，$\forall k\geqslant 1$，有

$$F_f(\lambda)\leqslant F_f(kb)\leqslant e^{-k}\leqslant e^{1-\frac{\lambda}{b}}, \ \lambda>b. \tag{17}$$

但此不等式对 $\lambda\in[0,b]$ 自然成立，这是因为

$$F_f(\lambda)\leqslant F_f(0)=1\leqslant e^{1-\frac{\lambda}{b}}, \quad \lambda\in[0,b]. \tag{18}$$

于是我们得到

$$\frac{1}{|I|}|\{x\in I:|f-c_I|>\lambda\}|\leqslant e^{1-\frac{\lambda}{b}}, \ \forall \lambda>0.$$

定理获证.

上面定理还可改述为

推论(2.5) 设可测函数 f 使得 $\forall I$，存在 c_I 满足

$$\sup_I |I|^{-1}|\{x\in I:|f-c_I|>\lambda\}|=\psi(\lambda)\to 0, \lambda\to\infty \text{ 时}, \tag{19}$$

则 $f\in BMO$.

证明 注意 $\psi(\lambda)$是单调下降有上界为 1 的函数. 现构造 $\mathbb{R}_+$ 上增加到无穷的折线函数 $\Phi(\lambda)$使 $f\in BMO_\Phi$. 这只需令折线函数

Φ 在点$\{2^k\}$上取值

$$\Phi(2^k) = -\log\psi(2^{k-1}),\quad \forall k \in \mathbb{Z}. \tag{20}$$

应用§3.2 中用分布函数来刻划积分的事实. 我们有

$$\frac{1}{|I|}\int_I \Phi(|f-c_I|)\,dx \leqslant \int_0^\infty \psi(\lambda)\,d\Phi(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{2^k}^{2^{k+1}} \psi(\lambda)\,d\Phi(\lambda)$$

$$\leqslant \sum_{-\infty}^{\infty} \psi(2^k)(\Phi(2^{k+1}) - \Phi(2^k)) = \sum_{-\infty}^{\infty} \psi(2^k)\log\frac{\psi(2^{k-1})}{\psi(2^k)}$$

$$\leqslant \sum_{-\infty}^{\infty} \psi(2^k)\left(\frac{\psi(2^{k-1})}{\psi(2^k)} - 1\right) = \sum_{-\infty}^{\infty}(\psi(2^{k-1}) - \psi(2^k))$$

$$= \psi(0) - \psi(\infty) \leqslant 1.$$

这证明了推论.

上述 John－Nirenberg 定理最重要的应用是给出 BMO_p, $\Phi(u) = u^p$, $0<p<\infty$, 的等价性.

定理(2.6) 设 $0<p<\infty$, 则 $BMO_p = BMO$. 更确切地,

$$C_p\|f\|_{*p} \leqslant \|f\|_* \leqslant C_p\|f\|_{*p},\quad \forall f. \tag{21}$$

证明 当 $f\in BMO_p$ 时, 式(8)可以更确切地写成

$$\frac{1}{|I|}|\{x\in I: |f-c_I|>\lambda\}| \leqslant e e^{-\frac{\lambda}{e\|f\|_{*p}}},\quad \forall \lambda>0. \tag{22}$$

这是因为(7)中第三项没有, 系数 $C_0 = C_p$ 只依赖于 p, 而 λ_0 可以取为 $e\|f\|_{*p}^p$. 这样 b 便是(见式(14))

$$(2^p C_p e\|f\|_{*p}^p + C_p\|f\|_{*}^p)^{\frac{1}{p}} = C_p\|f\|_{*p}.$$

这样由(22)得

$$\|f\|_* = \sup_I \frac{1}{|I|}\int_I |f-c_I|dx \leqslant e\int_0^\infty e^{-\frac{\lambda}{C_p\|f\|_{*p}}}d\lambda \leqslant C_p\|f\|_{*p},$$

$$\|f\|_{*p} = \sup_I\left(\frac{1}{|I|}\int_I |f-c_I|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant C_p\left(\int_0^\infty \lambda^{p-1}e^{-\frac{\lambda}{c\|f\|_*}}d\lambda\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant C_p\|f\|_*.$$

定理获证.

§4.3 H_1 与 BMO 的对偶

H_1 与 BMO 之间对偶的发现，把这两个很重要的空间联系起来，从而可以进行对偶推理，为许多问题的讨论带来了方便．例如，有了对偶理论，我们便可将 H_1 的某些性质翻译到 BMO 中去，反之也可将 BMO 的某些性质翻译到 H_1 中去．有了这个对偶理论，我们可以对奇异积分算子理论讨论得更深入．

定理(3.1) (Fefferman) H_1 的对偶空间是 BMO，意即 BMO 到 H_1^* 的映射 $\varphi\to l_\varphi$ 是拓扑同构的，其中

$$l_\varphi : f \to \langle f, l_\varphi\rangle, \quad \forall f\in H_1,$$

$\langle f, l_\varphi\rangle$ 等于取适当极限意义下的积分 $\int f(x)\varphi(x)dx$.

证明 先证 BMO 连续地嵌入到 $(H_1^{(q)})^*$，$1<q\leqslant\infty$．设 $f\in H_1^{(q)}$ 是紧支集的函数(由于原子分解的有限和是紧支集的，故 $H_1^{(q)}$ 中具有紧支集的函数的全体构成了 $H_1^{(q)}$ 的稠密子集．)既然 $\varphi\in L^{q'}_{loc}$，故 $\int_{R^n} f\varphi dx$ 绝对收敛，且 $\int_{R^n} f\varphi dx=\lim\limits_{N\to\infty}\int_{R^n} f\varphi^{(N)}dx$，其中 $\varphi^{(N)}$

$=(\varphi\wedge N)\vee(-N)$，满足 $\|\varphi^{(N)}\|_*\leqslant\|\varphi\|_*$. 这个积分显然在这个稠密子空间上定义了一个线性泛函 l_φ. 要证它限制在这个稠密子集上是有界的. 设 a 是$(1,q)$原子，支于方体 I 上，则

$$|l_\varphi(a)|=\left|\int_I a\varphi dx\right|=\left|\int_I(a-a_I)\varphi dx\right|$$

$$=\left|\int_I a(\varphi-\varphi_I)\,dx\right|\leqslant\|a\|_q\left(\int_I|\varphi-\varphi_I|^{q'}dx\right)^{\frac{1}{q'}}\leqslant\|\varphi\|_{*q}.$$

这里 a_I,φ_I 如前理解，分别是 a,φ 在 I 上的平均. 现设 f 是 $H_1^{(q)}$ 中有紧支集的函数. $f=\sum_1^\infty\lambda_k a_k$ 是它的任意一个原子分解，则 $\sum_1^\infty\lambda_k a_k$ 是 L^1 中收敛的，而 $\varphi^{(N)}\in L^\infty$，故

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n}f\varphi^{(N)}dx\right|=\left|\sum_1^\infty\lambda_k\int_{\mathbb{R}^n}a_k\varphi^{(N)}dx\right|\leqslant\sum_1^\infty|\lambda_k|\,\|\varphi^{(N)}\|_{*q}.$$

对所有分解取 inf, 并令 $N\to\infty$，则得

$$|l_\varphi(f)|=\left|\int_{\mathbb{R}^n}f\varphi dx\right|\leqslant\|\varphi\|_{*q}\ \|f\|_{H_1}.$$

因此 l_φ 限制在这个稠密子集上是有界的. 然后连续扩充，即 $\forall f\in H_1^{(q)}$，任取稠子集中序列$\{f_n\}$，$f_n\to f$. 定义

$$l_\varphi(f)=\lim_{n\to\infty}l_\varphi(f_n)=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}f_n(x)\varphi(x)dx.$$

这便证明了每个 $\varphi\in BMO$，产生了一个 $l_\varphi\in(H_1^{(q)})^*$，且 $\|l_\varphi\|\leqslant c\|\varphi\|_*$.

现证当 $1<q<\infty$ 时，$(H_1^{(q)})^*$ 连续地嵌入到 BMO，即要证每

个 $l\in(H_1^{(q)})^*$ 都由某个 $\varphi\in BMO$ 按上述方式产生，且 $\|\varphi\|_*\leqslant C\|l_\varphi\|$.

任取方体 I，记

$$L_0^q(I)=\{f\in L^q(I):\int_I f\,dx=0\}.$$

对任意 $f\in L_0^q(I)$，令

$$a=\|f\|_q^{-1}|I|^{\frac{1}{q}-1}f,$$

则 a 是一个 $(1,q)$ 原子．设 $l\in(H_1^{(q)})^*$，令 $\widetilde{l}_I$ 为如下线性泛函，

$$\widetilde{l}_I(f)=\|f\|_q|I|^{1-\frac{1}{q}}l(a),$$

注意 $\|a\|_{H_1^{(q)}}\leqslant 1$，得

$$|\widetilde{l}_I(f)|=\|f\|_q|I|^{1-\frac{1}{q}}|l(a)|\leqslant\|l\|\,\|f\|_q|I|^{1-\frac{1}{q}}.$$

这说明 $\widetilde{l}_I$ 是 $L_0^q(I)$ 上的有界线性泛函，且 $\|\widetilde{l}_I\|\leqslant\|l\||I|^{1-\frac{1}{q}}$.

根据 L^q 的 Riesz 表示定理知存在 $g^{(I)}\in L^{q'}(I)$，使

$$\widetilde{l}_I(f)=\int_I f\,g^{(I)}dx,\quad \forall f\in L_0^q(I).\tag{1}$$

这个 $g^{(I)}$ 是模常数下唯一的．这是因为，若 $h\in L^{q'}(I)$ 使得

$$\int_I f\,hdx=0,\quad \forall f\in L_0^q(I),$$

则

$$\int_I f(h-h_I)dx=\int_I(f-f_I)\,hdx=0,\quad \forall f\in L^q(I).$$

这说明 $h=h_I$，这样取单调增加到 $\mathbb{R}^n$ 的方体族 $\{I^{(n)}\}$，并设相应的

$\{g^{(I_n)}\}$已经选得使(如同定理(2.2)中证明 BMO 的完备性那样.) $g^{(I_n)}$是 $g^{(I_{n-1})}$ 的延拓. 这样存在 φ 在每个 I_n 上都是 $g^{(I_n)}$的延拓. 既然任意方体 I 都包含在某个 I_n 中, 故 φ 在 I 上的限制就是 $g^{(I)}$. 注意(1), 则知这个 φ 也满足

$$\left|\int_I (\varphi-\varphi_I)f\,dx\right| = \left|\int_I (f-f_I)\varphi\,dx\right|$$

$$= |\widetilde{l}_I(f-f_I)| \leqslant |I|^{1-\frac{1}{q}}\|f-f_I\|_q\|l\|$$

$$\leqslant 2|I|^{1-\frac{1}{q}}\|f\|_q\|l\|, \quad \forall I,\ \forall f\in L^q(I). \tag{2}$$

故

$$\left(\frac{1}{|I|}\int_I|\varphi-\varphi_I|^{q'}dx\right)^{\frac{1}{q'}} = \sup_{f,\|f\|_q\leqslant 1}|I|^{-\frac{1}{q'}}\left|\int_I(\varphi-\varphi_I)f\,dx\right|,$$

$$\leqslant 2\|l\|.$$

这就证明了 $\|\varphi\|_*\leqslant c\|l\|$. 此外, 这个 φ 产生的有界线性泛函 l_φ 在$(1,q)$原子上取值

$$l_\varphi(a)=\int_I a\varphi\,dx = l(a),$$

这说明 $l=l_\varphi$.

我们第一段证明了 BMO 到$(H_1^{(q)})^*$内的映射是连续同态, 第二段实际上等于说这个映射是映上的, 且象 l_φ 的模被原象 φ 的模控制. 因此只要这个映射是一一的, 则这个映射便是拓扑同构, 而这是显然的. 设 $\varphi_1,\varphi_2\in BMO$, 产生的线性泛函 $l_{\varphi_1}, l_{\varphi_2}$ 在原子上取值相同, 则由我们前面证明式(1)中 $g^{(I)}$的唯一性时的讨论知 $\varphi_1-\varphi_2$ 必为常数, 此即 φ_1,φ_2 是 BMO 的同一元素, 定理获证.

当 $0<p<1$ 时, $H_p(=H_p^{(q,s)}\ 1\leqslant q\leqslant\infty, s\geqslant s_0)$的对偶空间有类

似的刻划，即(记号见定理(1.4)后的说明)

$$(H_p^{(q,s)})^* = L\left(\frac{1}{p}-1, q', s\right).$$

证明是类似的，由于每个 $\varphi \in L\left(\frac{1}{p}-1, q', s\right)$ 在(p, q, s)原子 a 上的作用满足

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} a\varphi dx\right| = \left|\int_Q a(\varphi - p_Q\varphi)dx\right| \leqslant \|a\|_q\left(\int_Q |\varphi - p_Q\varphi|^{q'}dx\right)^{\frac{1}{q'}}$$

$$\leqslant |Q|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\|\varphi\|_{L\left(\frac{1}{p}-1,q',s\right)}|Q|^{\frac{1}{q'}+\frac{1}{p}-1} = \|\varphi\|_{L\left(\frac{1}{p}-1,q',s\right)},$$

这说明 $L\left(\frac{1}{p}-1, q', s\right)$ 连续地嵌入$(H_1^{(q,s)})^*$. 反之，令

$$L_s^q(I) = \left\{f \in L^q(I): \int_I x^\alpha f(x)dx = 0,\quad \forall \alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n),\right.$$

$$\left.|\alpha| \leqslant s\right\},$$

则每个 $f \in L_s^q$ 使 $|I|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\|f\|_q^{-1}f$ 是一个(p, q, s)原子，从而每个 $l \in (H_p^{(q,s)})^*$ 诱导出 $L_s^q(I)$ 上的有界线性泛函 $\widetilde{l}_I$, 进而存在模 s 次多项式下唯一的函数 $g^{(I)} \in L^{q'}$, 使

$$l(f) = \int_I f(x)g^{(I)}(x)dx,\quad \forall f \in L_s^q(I).$$

同样可证存在 $\varphi \in L\left(\frac{1}{p}-1, q', s\right)$ 使 φ 在 I 上的局限是 $g^{(I)}$,

从而 l 即为 φ 如前述生成的 l_φ，这便得到 $(H_p^{(q,s)})^*$ 连续地嵌入 $L\left(\frac{1}{p}-1, q', s\right)$ 的断言．故我们证明了

$$(H_p^{(q,s)})^* \text{与} L\left(\frac{1}{p}-1,\ q',\ s\right)\text{相等}.$$

§4.4 H_1 空间的面积函数刻划

所谓面积函数算子 S 可以说是我们已在 §3.7 讨论过的 Littlewood－Paley g 函数算子的推广．它的定义如下，设 $\alpha>0$，记 $\Gamma_\alpha(x)$ 为 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 中的以 $x\in\mathbb{R}^n$ 为顶点的"宽度"为 α 的锥，

$$\Gamma_\alpha(x)=\{(y,t):|x-y|<\alpha t, y\in\mathbb{R}^n, t\in\mathbb{R}_+\},\quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{1}$$

$\psi\in C^1(\mathbb{R}^n)$ 是径向实值的，满足 $\int_{\mathbb{R}^n}\psi(x)dx=0$，且

$$|\psi(x)|+|\nabla\psi(x)|\leqslant C(1+|x|)^{-n-1-\varepsilon},\quad \forall x, \varepsilon>0. \tag{2}$$

则面积函数定义为

$$S_\alpha(f)(x)=\left(\int_{\Gamma_\alpha(x)}|\psi_t*f(y)|^2\frac{dydt}{t^{n+1}}\right)^{1/2}, f\in\bigcup_p L^p. \tag{3}$$

当 $\alpha\to 0$ 时，$\Gamma_\alpha(x)$ 退化为一条直线，积分 $\int_{\Gamma_\alpha(x)}$ 化为 $\int_0^\infty$．至于测度 $\frac{dydt}{t^{n+1}}$ 与 $\frac{dt}{t}$ 的差别，来源于 $\{y:|y-x|<\alpha t\}$ 的体积的阶 $O(t^n)$．因此，我们可以把 $g(f)$ 看作 $\alpha=0$ 时的 $S_\alpha(f)$，也就是说 $S_\alpha(f)$ 是 $g(f)$ 的推广．而实际上 $S_\alpha(f)$ 与 $g(f)$ 的确有许多类似的

性质，例如它们都与 f 在 L^p 内等价，$1<p<\infty$，且都是弱 L^1 有界的，也都是 H_1 到 L^1 有界的．现在我们给出 H_1 的面积函数刻划．我们的讨论与 α 的取值无关，故不妨设 $\alpha=1$，记 $\Gamma_1(x)=\Gamma(x)$．

引理(4.1) 我们有

$$\| S(f)\|_2 = C\|f\|_2 \qquad \forall f\in L^2. \tag{4}$$

证明 由于

$$\int_{\mathbb{R}^n} S^2(f)dx = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty \chi_{\{|x-y|<t\}}|\psi_t * f(y)|^2 \frac{dydtdx}{t^{n+1}}$$

$$= C\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty |\psi_t * f(y)|^2 \frac{dydt}{t},$$

根据 §3.7 式(6)，即

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\overline{g}dx = C\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+}\psi_t * f(x)\psi_t * \overline{g}(x)\frac{dxdt}{t}, \quad \forall f,g\in L^2,$$

由此便得

$$\| S(f)\|_2^2 = C\|f\|_2^2.$$

引理证毕．

定理(4.2) S 算子是弱 L^1 有界的．

证明 证明与 g 函数算子情形类似．设 $f\in L^1$ 与 $\lambda>0$ 给定，对 f 与 λ 作 Calderón－Zygmund 分解，得不交方体族 $\{Q_k\}$，作相应的函数的分解，

$$f=g+h,\ g=g\chi_{(\bigcup Q_k)^c}+\sum_1^\infty f_{Q_k}\chi_{Q_k},\ h=\sum_1^\infty (f-f_{Q_k})\chi_{Q_k}=\sum_1^\infty h_k.$$

这里 f_{Q_k} 是 f 在 Q_k 上的平均，我们同样有

$$
\begin{aligned}
&|\{S(f)>2\lambda\}| \\
&\leqslant |\{S(g)>\lambda\}|+|\{S(h)>\lambda\}| \\
&\leqslant \frac{C}{\lambda^2}\|g\|_\infty\|g\|_1+\sum_1^\infty|\overline{Q}_k|+|\{x\in(\bigcup\overline{Q}_k)^c : S(h)>\lambda\}| \\
&\leqslant \frac{C}{\lambda}\|f\|_1+\frac{C}{\lambda}\sum_1^\infty\int_{\overline{Q}_k^c}S(h_k)dx.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

下面来估计

$$
\int_{\overline{Q}_k^c}S(h_k)dx=\int_{\overline{Q}_k^c}\left(\int_{\Gamma(x)}\left|\int_{Q_k}h_k(z)\frac{1}{t^n}\left[\psi\left(\frac{y-z}{t}\right)-\psi\left(\frac{y-z_k}{t}\right)\right]\cdot dz\right|^2\frac{dydt}{t^{n+1}}\right)^{1/2}dx, \tag{6}
$$

其中$\overline{Q}_k$是Q_k的β倍扩大，z_k是Q_k的中心，$z\in Q_k$, $x\in\overline{Q}_k^c$,而$y\in\Gamma(x)$. 记

$$
A(x,t,z_k)=\sup_{\substack{y\in\Gamma(x)\\ z\in Q_k}}\left|\frac{1}{t^n}\left[\psi\left(\frac{y-z}{t}\right)-\psi\left(\frac{y-z_k}{t}\right)\right]\right|,
$$

则有

$$
\int_{\overline{Q}_k^c}S(h_k)dx\leqslant C\|h_k\|_1\int_{\overline{Q}_k^c}\left(\int_0^\infty A^2(x,t,z_k)\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{2}}dx, \tag{7}
$$

现分 $t<C|x-z_k|$ 与 $t\geqslant C|x-z_k|$, $C<1$, 来估计 $A(x,t,z_k)$. 当

$t<C|x-z_k|$时，有$\left(设\ C,\beta\ 适当使(1-C)(\beta-1)\geqslant\frac{3}{2}\right)$

$$|x-z_k|\leq|x-y|+|y-z_k|\leqslant C|x-z_k|+|y-z_k|,$$

$$|x-z_k|\leqslant(1-C)^{-1}|y-z_k|,$$

$$|x-z_k|\geqslant(\beta-1)|z-z_k|,$$

$$|y-z_k|\geqslant(1-C)(\beta-1)|z-z_k|\geqslant\frac{3}{2}|z-z_k|.$$

这样我们得到

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{t^n}\left(\psi\left(\frac{y-z}{t}\right)-\psi\left(\frac{y-z_k}{t}\right)\right)\right|\\ \leqslant\ &\frac{C|z-z_k|}{t^{n+1}}\left|\nabla\psi\left(\frac{y-z_k+\theta(z-z_k)}{t}\right)\right|\\ \leqslant\ &\frac{Cl(Q_k)}{t^{n+1}}\left(1+\frac{|x-z_k|}{t}\right)^{-n-1-\varepsilon}\\ \leqslant\ &\frac{Cl(Q_k)t^{\varepsilon}}{(t+|x-z_k|)^{n+1+\varepsilon}};\end{aligned}\tag{8}$$

当 $t\geqslant C|x-z_k|$ 时，我们应用 $|\nabla\psi|\leqslant C$ 得到

$$\left|\frac{1}{t^n}\left(\psi\left(\frac{y-z}{t}\right)-\psi\left(\frac{y-z_k}{t}\right)\right)\right|\leqslant\frac{Cl(Q_k)}{t^{n+1}}.\tag{9}$$

将(8)(9)代入(7)即得

$$\int_{\overline{Q}_k^c}S(h_k)dx\leqslant C\|h_k\|_1\int_{\overline{Q}_k^c}\frac{l(Q_k)dx}{|x-z_k|^{n+1}}\leqslant C\|h_k\|_1$$

代回(5)，便有

$$|\{S(f)>2\lambda\}|\leqslant\frac{C}{\lambda}\|f\|_1.$$

定理证毕.

现在我们就可以通过算子内插得到 S 在 L^p, $1<p\leqslant 2$, 上的有界性. 而对 $p\geqslant 2$ 情形, 我们可以用在 §3.7 定理(7.7)中已证明了的 g_λ^* 函数算子的 L^p 有界性, $p\geqslant 2$, 来推出 S 的相应有界性, 这是因为

$$S(f)\leqslant C\,g_\lambda^*(f)=C\left(\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{t}{t+|y|}\right)^{\lambda n}|\psi_t*f(x-y)|^2\frac{dydt}{t^{n+1}}\right)^{1/2},$$

$$\lambda>1.$$

现在把 $S(f)$ 与 f 的 L^p 等价, $1<p<\infty$, 叙述为下定理:

定理(4.3) 设 $1<p<\infty$, 则

$$C_1\|f\|_p\leqslant\|S(f)\|_p\leqslant C_2\|f\|_p,\quad \forall f\in L^p. \tag{10}$$

证明 由弱(1,1)型与(2,2)型之间的内插得 S 的 L^p 有界性, $1<p\leqslant 2$. 由 g_λ^* 的 L^p 有界, $p\geqslant 2$, 得 S 的 L^p 有界, $p\geqslant 2$. 这样(10)中第二个不等式获证. 同样因为

$$\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\overline{g}(x)dx=C\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty\psi_t*f(y)\psi_t*\overline{g}(y)\frac{dy}{dt}\,dt$$

$$=C\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\Gamma(x)}\psi_t*f(y)\psi_t*\overline{g}(y)\frac{dydt}{t^{n+1}}\,dx. \tag{11}$$

则由 $\|S(f)\|_p\leqslant C\|f\|_p$, 可得 $\|f\|_p\leqslant C\|S(f)\|_p$. 定理获证.

现在讨论 H_1 的 S 刻划. 其中一半断言是易证的. 即 H_1 连续地嵌入到如下定义的

$$H_1^{(\psi)}=\{f\in L^1:\|f\|_{H_1^{(\psi)}}=\|S(f)\|_1<\infty\}. \tag{12}$$

这个连续嵌入性质等价于算子 S 由 H_1 到 L^1 的有界性. 我们将它

述之为一个定理.

定理(4.4) 设 S 是由前述 ψ 定义的面积积分算子. 则它是 H_1 到 L^1 内有界的.

证明 充分地只需证明所有(1,2)原子都包含在 $H_1^{(\psi)}$ 的一个闭球内. 这基本上与证明 S 的弱(1,1)有界性一样. 这是因为在弱(1,1)型证明中的$\{h_k\}$本质上是原子的族. 现设 a 是一个支于某方体 I 内的(1,2)原子, 记 $\overline{I}$ 为 I 的适当倍数扩大, x_0 是它的中心, δ 是它的边长, 则有

$$\int_{\overline{I}} S(a)dx \leqslant |I|^{\frac{1}{2}}\left(\int_I |S(a)|^2 dx\right)^{1/2} \leqslant C|I|^{\frac{1}{2}}\left(\int_I |a|^2 dx\right)^{1/2} \leqslant C.$$

$$\int_{\overline{I}^c} S(a)dx \leqslant C\int_{\overline{I}^c} \|a\|_1\left(\int_0^\infty \sup_{\substack{y\in\Gamma(x)\\ z\in I}}\left|\frac{1}{t^n}\left[\psi\left(\frac{y-z}{t}\right)\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\psi\left(\frac{y-x_0}{t}\right)\right]\right|^2\frac{dt}{t}\right)^{1/2}dx \leqslant C\int_{\overline{I}^c}\frac{\delta}{|x-x_0|^{n+1}}dx \leqslant C.$$

定理获证.

至于此定理的逆, 即 $H_1^{(\psi)}$ 连续地嵌入到 H_1 内, 我们将只对更特殊一些的 ψ, 通过原子分解的具体步骤来获得. 至于为什么不同的 ψ 定义了相同的 $H_1^{(\psi)}$, 一般是通过 H_1 的极大函数刻划来过度, 我们不打算讨论这些细节了. 我们需要 Calderón 表示定理.

定义(4.5) 设 $f\in\mathscr{S}'$, 我们称 f 在无穷远处弱为0, 如果对任意 $\varphi\in\mathscr{S}$, $f*\varphi_t$ 在 $\mathscr{S}'$ 中收敛于0, 当 $t\to\infty$ 时.

注意, 如果 $f\in\mathscr{S}'$, 使得对一切 $\varphi\in\mathscr{S}$, $\int_{\mathbb{R}^n}\varphi dx\neq 0$, 有

$f*\varphi_t$ 在 $\mathscr{S}'$中收敛于0，则 $\forall\ \psi\in\mathscr{S}$，$f*\psi_t$ 也在 $\mathscr{S}'$中收敛于0. 事实上，当 $\psi\in\mathscr{S}$ 使 $\int_{\mathbb{R}^n}\psi dx=0$ 时，找 $\varphi\in\mathscr{S}$ 使 $\int_{\mathbb{R}^n}\varphi dx\neq 0$，则

$$f*\psi_t=f*(\psi+\varphi)_t-f*\varphi_t\to 0 \text{ 在 } \mathscr{S} \text{ 中}.$$

此外若 $f\in L^p$, $1\leqslant p<\infty$，则 f 在无穷远处弱为0，这是因为

$$\|f*\varphi_t\|_\infty\leqslant\|f\|_p\|\varphi_t\|_{p'}=t^{-\frac{n}{p}}\|f\|_p\|\varphi\|_{p'}\to 0,$$

当然在 $\mathscr{S}'$中收敛于0.

下面是 Calderón 表示定理.

定理(4.6) (Calderón). 设 ψ 是径向实值的，$\psi\in\mathscr{S}$，

$$\int_{\mathbb{R}^n}\psi dx=0,\text{ 但 }\int_0^\infty|\hat{\psi}(\xi t)|^2\frac{dt}{t}=1.$$

则 $\forall f\in\mathscr{S}'$，f 在无穷远处弱为0，有

$$f=\int_0^\infty f*\psi_t*\psi_t\frac{dt}{t}, \tag{13}$$

其中积分表示

$$\int_\varepsilon^A f*\psi_t*\psi_t\frac{dt}{t}\to f \quad \text{在 } \mathscr{S}' \text{ 中，当 } \varepsilon\to 0,\ A\to\infty \text{ 时}.$$

证明 令

$$\alpha(x)=\int_0^1\psi_t*\psi_t(x)\frac{dt}{t},\quad \beta(x)=\int_1^\infty\psi_t*\psi_t(x)\frac{dt}{t}.$$

显然 $\hat{\alpha}$ 在 $\xi=0$ 无穷次可微，这可由对下式积分号下求微商而知

$$\hat{\alpha}(\xi)=\int_0^1 \hat{\psi}(\xi t)\hat{\psi}(\xi t)\,\frac{dt}{t}\,.$$

我们断言 $\beta\in\mathscr{S}$，充分地只需证 $\hat{\beta}\in\mathscr{S}$. 显然在 $\xi=0$ 的任意邻域外，$\hat{\beta}$ 是无穷次可微的，且可在

$$\hat{\beta}(\xi)=\int_1^{\infty} \hat{\psi}(t\xi)\hat{\psi}(t\xi)\,\frac{dt}{t}$$

中积分号下微商. 由此知 $\hat{\beta}$ 及其各阶偏导数在无穷远处速降. 另外，由 $\hat{\beta}(\xi)=1-\hat{\alpha}(\xi)$，知 $\hat{\beta}$ 在 $\xi=0$ 也无穷次可微. 这样 $\hat{\beta}\in\mathscr{S}$，从而 $\beta\in\mathscr{S}$ 获证. 注意到

$$\beta_S(x)=\frac{1}{S^n}\,\beta\left(\frac{x}{S}\right)=\int_1^{\infty}\psi_{St}*\psi_{St}(x)\,\frac{dt}{t}=\int_S^{\infty}\psi_t*\psi_t(x)\,\frac{dt}{t}\,. \tag{14}$$

这样

$$\int_{\varepsilon}^{1}\psi_t*\psi_t\,\frac{dt}{t}=\beta_{\varepsilon}-\beta_1,$$

$$\int_{\varepsilon}^{1}\psi_t*\psi_t*f\,\frac{dt}{t}=\beta_{\varepsilon}*f-\beta_1*f. \tag{15}$$

已知(15)中右边第二项在 $\mathscr{S}'$ 中收敛于0，而第一项因为 $\beta\in\mathscr{S}$，且 $\hat{\beta}(0)=1-\hat{\alpha}(0)=1$，知 $\{\beta_{\varepsilon}\}$ 是 $\mathscr{S}'$ 中的逼近单位，即 $\beta_{\varepsilon}*f$ 在 $\mathscr{S}'$ 中收敛于 f，这可更确切地讨论如下. $\forall\varphi\in\mathscr{S}$，根据定义，

$$\langle\beta_{\varepsilon}*f,\varphi\rangle=\langle f,\widetilde{\beta}_{\varepsilon}*\varphi\rangle,$$

其中~表示反射，而 $\widetilde{\beta}_{\varepsilon}*\varphi\to\varphi$ 在 $\mathscr{S}$ 中(这又只需看到 $(\widetilde{\beta}_{\varepsilon}*\varphi)^{\wedge}$

$\to \hat{\varphi}$ 在 $\mathscr{S}$ 中)，故 $\beta_\varepsilon * f \to f$ 在 $\mathscr{S}'$ 中，这就证明了定理.

形式地看，(13)成立是显然的，因为等式两边有相同的 Fourier 变换

$$\hat{f}(\xi)=\int_0^{\infty}\hat{\psi}(t\xi)\hat{\psi}(t\xi)\hat{f}(\xi)\frac{dt}{t}=\hat{f}(\xi).$$

有了 Calderón 表示定理，我们就可对每个 $f\in H_1^{(\psi)}$ 得到它的 $H_1^{(2)}$ 原子分解，从而证明 $H_1^{(\psi)}\subset H_1^{(2)}$，不过我们现在考虑的 ψ 更特殊一些：$\psi\in C^1$，径向实值，$\int_{\mathbb{R}^n}\psi(x)dx=0$，$\int_0^{\infty}\hat{\psi}(t\xi)^2\frac{dt}{t}=1$，且 $\operatorname{supp}\psi\subset\{x:|x|\leqslant 1\}$.

定理(4.7) 对这样的 ψ，每个 $H_1^{(\psi)}$ 中元素 f 都可进行 $H_1^{(2)}$ 中的原子分解，且 $\|f\|_{H_1^{(2)}}\leqslant C\|f\|_{H_1^{(\psi)}}$.

证明 既然 $f\in L^1$，当然可以应用 Calderón 表示定理得

$$f(x)=\int_0^{\infty}\psi_t*\psi_t*f(x)\frac{dt}{t}=\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}}\psi_t(x-y)\psi_t*f(y)\frac{dydt}{t}. \tag{16}$$

首先把 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 进行如下的特殊二进分割，先将 $\mathbb{R}^n$ 作边长 $2^k, k\in\mathbb{Z}$ 的二进分割，对 $\mathbb{R}^n$ 中每个二进方体 R，令

$$R^+=\left\{(y,t):y\in R,\ \frac{l(R)}{2}<t\leqslant l(R)\right\}, \tag{17}$$

其中 l 如通常那样表示边长. 对任意两不同方体 R_1, R_2，R_1^+ 与 R_2^+ 是内部不交的，而且 $\bigcup_R R^+=\mathbb{R}_+^{n+1}$. 现任取水平 $\alpha>0$，$\forall k\in\mathbb{Z}$，令

$$\Omega_k=\{x:S(f)>2^k\alpha\},$$

$$\mathscr{R}_k=\{\text{二进 } R: |R\cap\Omega_{k-1}|\geqslant\frac{1}{2^{n+1}}|R|, |R\cap\Omega_k|<\frac{1}{2^{n+1}}|R|\}. \tag{18}$$

注意$\{\Omega_k\}$是递降的开集族，而$\mathscr{R}_k$粗略地说是那些包含在$\Omega_{k-1}\setminus\Omega_k$内的不同边长的二进方体的族.

记$f(y,t)=\psi_t*f(y)$，由(16)得

$$f(x)=\sum_{R:\text{二进}}\int_{R^+}\psi_t(x-y)f(y,t)\frac{dydt}{t}. \tag{19}$$

设$\{I_k^{(j)}\}_{j=1}^{\infty}$是$\mathscr{R}_k$中所有那些极大二进方体，即它们都不包含在$\mathscr{R}_k$的其他二进方体中. 记

$$B_k^{(j)}=\bigcup_{\substack{R\in\mathscr{R}_k\\ R\subset I_k^{(j)}}}R^+,\quad A_k=\bigcup_{R\in\mathscr{R}_k}R^+, \tag{20}$$

注意，这里求并的R^+都是内部不交的，并且$\bigcup\limits_j B_k^{(j)}=A_k$. 令

$$b_k^{(j)}=\sum_{R\in\mathscr{R}_k,R\subset I_k^{(j)}}\int_{R^+}\psi_t(x-y)f(y,t)\frac{dydt}{t}, \tag{21}$$

$$\lambda_k^{(j)}=C|I_k^{(j)}|\left(\frac{1}{|I_k^{(j)}|}\int_{B_k^{(j)}}|f(y,t)|^2\frac{dydt}{t}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{22}$$

则$\left(\text{记}\sum\limits_R{}'=\sum\limits_{R\in\mathscr{R}_k,R\subset I_k^{(j)}}\right)$

$$\|b_k^{(j)}\|_2=\sup_{h:\|h\|_2\leqslant1}\left|\sum_R{}'\int_{R^+}f(y,t)\int_{R^n}\psi_t(x-y)h(x)dx\frac{dydt}{t}\right|$$

$$\leqslant\sup_h\int_{B_k^{(j)}}|f(y,t)||h(y,t)|\frac{dydt}{t}\leqslant C\left(\int_{B_k^{(j)}}|f(y,t)|^2\frac{dydt}{t}\right)^{1/2},$$

这里用到了$h(y,t)=\widetilde{\psi}_t*h\quad(\widetilde{h}(x)=h(-x))$满足

$$\left(\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}}|h(y,t)|^2\frac{dydt}{t}\right)^{1/2}\leqslant C\|h\|_2,$$

的事实，此外

$$\operatorname{supp} b_k^{(j)}\subset\overline{I}_k^{(j)}\quad(\overline{I}_k^{(j)}\text{表示}I_k^{(j)}\text{的适当扩大})$$

这是因为$y\in I_k^{(j)}$, $t\leqslant l(I_k^{(j)})$, $|x-y|\leqslant t$. 这说明 $\frac{1}{\lambda_k^{(j)}}b_k^{(j)}=a_k^{(j)}$都是(1, 2)原子. 现在剩下来估计$\sum\limits_{k,j}|\lambda_k^{(j)}|$, 我们有

$$\sum_{k,j}|\lambda_k^{(j)}|\leqslant C\sum_{k,j}|I_k^{(j)}|^{\frac{1}{2}}\left(\int_{B_k^{(j)}}|f(y,t)|^2\frac{dydt}{t}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant C\sum_k\left(\sum_j|I_k^{(j)}|\right)^{1/2}\left(\sum_j\int_{B_k^{(j)}}|f(y,t)|^2\frac{dydt}{t}\right)^{1/2}$$

$$=C\sum_k\left(\sum_j|I_k^{(j)}|\right)^{1/2}\left(\int_{A_k}|f(y,t)|^2\frac{dydt}{t}\right)^{1/2}. \tag{23}$$

因$I_k^{(j)}\in\mathscr{R}_k$, 故$|I_k^{(j)}\cap\Omega_{k-1}|\geqslant\frac{1}{2^{n+1}}|I_k^{(j)}|$. 此外$I_k^{(j)}$对固定$k$关于$j$不交，故

$$\sum_j|I_k^{(j)}|\leqslant C\sum_j|I_k^{(j)}\cap\Omega_{k-1}|\leqslant C|\Omega_{k-1}|.$$

现在估计式(23)中的积分，注意$(y,t)\in A_k$推出存在R, 使(y,t)

$\in R^+$，而 $R \in \mathscr{R}_k$，满足

$$|R \cap \Omega_{k-1}| \geqslant \frac{1}{2^{n+1}}|R|, \quad |R \cap \Omega_k| < \frac{1}{2^{n+1}}|R|. \qquad (24)$$

第一式说明 $R \subset \{x : M(\chi_{\Omega_{k-1}}) \geqslant \frac{1}{2^{n+1}}\}$，其中 M 表示 Hardy-Littlewood 极大算子，χ 表示特征函数. (24)的第二式说明，$\forall y \in R$，

$$\left|R \cap \Omega_k^c \cap B\left(y, \frac{l(R)}{2}\right)\right| \geqslant \left|R \cap B\left(y, \frac{l(R)}{2}\right)\right|$$

$$-\left|R \cap B\left(y, \frac{l(R)}{2}\right) \cap \Omega_k\right| \geqslant \frac{1}{2^{n+1}}|R|.$$

这进一步说明，$\forall (y, t) \in A_k$ 固定，有

$$\left|\left\{x : x \in \left\{M(\chi_{\Omega_{k-1}}) \geqslant \frac{1}{2^{n+1}}\right\}, \chi \in \Omega_k^c, (y, t) \in \Gamma(x)\right\}\right| \geqslant Ct^n, \tag{25}$$

其中 C 只依赖于维数，这是因为左边集合包含了 $R \cap \Omega_k^c \cap B\left(y, \frac{l(R)}{2}\right)$，而右边 $Ct^n \approx C|R|$，(因为$(y, t) \in R^+$ 意味着 $t \approx l(R)$). 这样我们得到

$$\int_{A_k} |f(y, t)|^2 \frac{dydt}{t}$$

$$\leqslant C \int_{A_k} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\{M(\chi_{\Omega_{k-1}}) \geqslant \frac{1}{2^{n+1}}\} \cap \Omega_k^c \cap B(y, t)} dx\, |f(y, t)|^2 \frac{dydt}{t^{n+1}}.$$

即然 $\chi_{B(y,t)}(x)=\chi_{B(x,t)}(y)$，交换上述关于 x, y 的积分次序得

$$\int_{A_k}|f(y,t)|^2\frac{dydt}{t}\leqslant C\int_{\{M(\chi_{\Omega_{k-1}})\geqslant\frac{1}{2^{n+1}}\}\cap\Omega_k^c}\int_{\Gamma(x)}|f(y,t)|^2\frac{dydt}{t^{n+1}}dx$$

$$\leqslant C\int_{\{M(\chi_{\Omega_{k-1}})\geqslant\frac{1}{2^{n+1}}\}\cap\Omega_k^c}S(f)^2(x)dx$$

$$\leqslant C(2^k\alpha)^2|\Omega_{k-1}|.$$

代回(23)我们得到

$$\sum_{k,j}|\lambda_k^{(j)}|\leqslant C\sum_k|\Omega_{k-1}|^{\frac{1}{2}}2^k\alpha|\Omega_{k-1}|^{\frac{1}{2}}=C\sum_k 2^k\alpha|\Omega_{k-1}|$$

$$\leqslant C\sum_k\int_{2^{k-1}\alpha}^{2^k\alpha}\sigma_{S(f)}(x)dx=C\|S(f)\|_1.$$

$$\|f\|_{H_1^{(2)}}\leqslant C\|f\|_{H_1^{(\psi)}}.$$

这就完成了定理的证明.

综合定理(4.4)与(4.7)，我们已经证明了，$f\in H_1$ 当且仅当 $f\in L$，$S(f)\in L^1$，其中定义 $S(f)$ 的径向函数 ψ 满足 $\psi\in C^1$，$\int\psi(x)dx=0$，$\operatorname{supp}\psi\subset\{|x|\leqslant1\}$，$\int_0^\infty|\hat{\psi}(t\xi)|^2\frac{dt}{t}=1$. 实际上，$\psi$ 有紧支集的条件是可以大大减弱的，不过证明比较麻烦就是了.

对 $0<p<1$，H_p 有类似的面积函数刻划，即

$H_p=H_p^{(\psi)}$

$=\{f\in\mathscr{S}':f$ 在无穷远处弱为0，且 $\|f\|_{H_p^{(\psi)}}=\|S(f)\|_p<\infty\}H_p\subset H_p^{(\psi)}$

的证明中，只是在估计$\int_{\tilde{I}} S(a)^p dx$时($I$是$(p,2)$原子的支集)需要利用原子$a$的高阶消失矩条件，对$\psi$进行Taylor展开至足够的阶数. 在$H_p^{(\psi)}\subset H_p$的证明中，仍由Calderón表示出发，然后修改式(22)中的$\lambda_k^{(j)}$为

$$\lambda_k^{(j)}=C|I_k^{(j)}|^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{|I_k^{(j)}|}\int_{B_k^{(j)}}|f(y,t)|^2\frac{dydt}{t}\right)^{1/2}. \qquad (26)$$

最后由Hölder不等式得

$$\sum_{k,j}|\lambda_k^{(j)}|^p\leqslant C\sum_k\sum_j|I_k^{(j)}|^{1-\frac{p}{2}}\left(\int_{B_k^{(j)}}|f(y,t)|^2\frac{dydt}{t}\right)^{p/2}$$

$$\leqslant C\sum_k\left(\sum_j|I_k^{(j)}|\right)^{1-\frac{p}{2}}\left(\int_{A_k}|f(y,t)|^2\frac{dydt}{t}\right)^{\frac{p}{2}}.$$

剩下的估计同前，于是得到我们需要的结论.

§4.5 H_1空间的极大函数刻划

H_p空间的极大函数刻划，出现在70年代初期，这是H_p空间从经典理论到近代理论的转折点. 本章前几节关于H_p空间的讨论，都是在极大函数刻划出现以后建立起来的近代理论的一部分. 为了把前面的理论与经典H_p空间联系起来，本节讲述H_p的极大函数刻划，重点仍然是H_1.

所谓极大函数，是指下述的非切向极大函数. 设$\varphi\in C^1(\mathbb{R}^n)$满足$|\varphi(x)|+|\nabla\varphi(x)|\leqslant C(1+|x|)^{-n-1-\varepsilon}$，$f\in\bigcup_{p\geqslant 1}L^p$. 定义

$$\varphi_\alpha^*(f)(x)=\sup_{|y-x|<\alpha t}|f*\varphi_t(y)|, \tag{1}$$

其中 $\varphi_t(x)=t^{-n}\varphi\left(\frac{x}{t}\right)$, $t>0$. 特别地，记 $\varphi_1^*(f)=\varphi^*(f)$. 如果取$\varphi_t$为 Poisson 核 P_t, 则对应的极大函数称为 Poisson 极大函数. 除了 Poisson 极大函数以外，通常考虑 $\varphi\in\mathscr{S}$ 情形. H_p 的极大函数刻划的含义是用 $\varphi_\alpha^*(f)\in L^p$ 来判定 $f\in H_p$, 下面我们将证明有关的部分结果.

首先我们来证明，锥的宽度 α 是不重要的.

命题(5.1) 记 $\sigma_f(\lambda)$为f 的分布函数，则对任意φ, f 如上，任意$\alpha>0$, 存在 C_α, C_α', 使得

$$C_\alpha\sigma_{\varphi^*(f)}(\lambda)\leqslant\sigma_{\varphi_\alpha^*(f)}(\lambda)\leqslant C_\alpha'\sigma_{\varphi^*(f)}(\lambda).$$

证明 记 C 为仅依赖于维数的常数，令

$$E_\lambda=\{x:\varphi^*(f,x)>\lambda\},\ E_\lambda^*=\left\{x:M(\chi_{E_\lambda})(x)>\frac{C}{\alpha^n}\right\}.$$

由M 的弱(1, 1)型，知$|E_\lambda^*|\leqslant C\alpha^n|E_\lambda|$. 要证$\{x:\varphi_\alpha^*(f)>\lambda\}\subset E_\lambda^*$, 事实上，对任意$x\notin E_\lambda^*$, 任意$(y,t)\in\Gamma_\alpha(x)$, 球 $B(y,t)$不能完全包含在 E_λ 内，因为否则的话，将有

$$M(\chi_{E_\lambda})(x)\geqslant\frac{|B(y,t)|}{|B(\chi,\alpha t)|}\geqslant\frac{C}{\alpha^n},$$

从而 $x\in E_\lambda^*$, 矛盾. 因此存在 $z\in B(y,t)$, 使 $\varphi^*(f,z)\leqslant\lambda$, 故

$$|\varphi_t*f(y)|\leqslant\varphi^*(z)\leqslant\lambda,\ \varphi_\alpha^*(f,x)\leqslant\lambda.$$

这说明由 $x\notin E_\lambda^*$, 推出 $x\notin\{x:\varphi_\alpha^*(f)>\lambda\}$, 断言获证. 这样 $\sigma_{\varphi_\alpha^*(f)}(\lambda)\leqslant C\alpha^n\sigma_{\varphi^*(f)}(\lambda)$, 反向不等式的证明是一样的，命题证毕.

注意，证明过程表明 $C'_\alpha = C\alpha^n$. 命题表明，对任意 $p>0$, α_1, $\alpha_2>0$, 有

$$\varphi^*_{\alpha_1}(f) \in L^p \Longleftrightarrow \varphi^*_{\alpha_2}(f) \in L^p.$$

为了得到 H_p 空间的 Poisson 极大函数刻划，我们需要关于调和函数的一条引理.

引理(5.2) 设 u 在 Γ^k_β 调和，其中

$$\Gamma^k_\beta = \{(y,t) \in \mathbb{R}^{n+1}_+ : |y| < \beta t, 0<t<k\}.$$

若在 Γ^k_β 中 $|u| \leqslant 1$, $\beta>\alpha$, $k>h$, 则在 Γ^h_α 中有 $t|\nabla u| \leqslant C$, 其中 C 只依赖于 α, β, h, k 与维数 n.

证明 容易看出，存在 $C_1>0$, 使得对任意 $(x,t) \in \Gamma^h_\alpha$, 以 (x,t) 为中心，以 $r=C_1 t$ 为半径的球 $B \subset \Gamma^k_\beta$.

取径向函数 $\varphi \in C^\infty$, $\operatorname{supp}\varphi \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leqslant 1\}$, 且 $\int \varphi(x)dx = 1$. 则对 $\mathbb{R}^n$ 上的调和函数 $u(x)$, 有平均值公式

$$u(x_0) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x_0 - x)\varphi_r(x)dx,$$

其中 $\varphi_r(\cdot) = \frac{1}{r^n}\varphi\left(\frac{\cdot}{r}\right)$, 因此

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\gamma u(x_0) = \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\gamma \varphi_r(x_0 - y)dy.$$

由 Schwartz 不等式，得

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\gamma} u(x_0)\right| \leqslant A_{\gamma} r^{-\frac{n}{2}-|\gamma|}\left(\int_{B(x_0,r)} |u(y)|^2 dy\right)^{1/2}.$$

回到引理的情形，取 $r=1$，只要 $(x,t)\in\Gamma_{\alpha}^{h}$，有

$$|\nabla u(x,t)| \leqslant Ct^{-1} \sup_{(y,t)\in B((x,t),\ C_1 t)} |u(y,t)| \leqslant Ct^{-1}.$$

引理(5.2)证完.

显然，引理可以推广到顶点是任意的锥的情形. ∎

首先我们考虑 H_1 的 Poisson 极大函数刻划,其中 H_1 由原子定义.

定理(5.3) $f\in H_1$ 当且仅当 $f\in L^1$ 且 $P^*(f)\in L^1$，其中 $P^*(f)$ 是 f 的Poisson 极大函数.

证明 先证明"仅当"部分，与前面两节类似，只需证明 $\|P^*(a)\|_1\leqslant C$ 即可，其中 a 是 $(1,\infty)$ 原子，C 与 a 无关. 为此，只需证明下述两点：① P^* 是(2,2)型的，而这是 L^2 逼近单位的已知结果；② 得到 $P^*(a)(x)$ 的一个逐点估计，从而可以估计积分 $\int_{(2Q)^c} P^*(a)(x)dx$，其中 Q 是 a 的支集，我们把证明的细节留给读者作为一个简单的习题.

现在证明定理的另一部分，即已知 $f\in L^1$，$P^*(f)\in L^1$，要证明 $f\in H_1$. 证明的想法类似于上一节面积函数刻划，即首先给出一个包含 Poisson 核的 Calderón 表示定理，然后得到一个 f 的分解，困难在于如何通过 $P^*(f)\in L^1$ 证明这个分解的确是 H_1 的原子分解. 根据命题(5.1)，我们不妨假设 $P_{\alpha}^*(f)\in L^1$，其中 α 可任意大.

先假设 $f\in L^2\cap L^1$，记 $u(y,t)$ 是 f 的Poisson 积分.

取径向函数 $\psi\in\mathscr{S}$，支于单位球，积分为 0，且满足规范化条件

$$\int_0^{\infty}\hat{\psi}(u)e^{-u}du=-1.$$

容易证明，这样的函数是存在的．这时，我们有以下的 Calderón 表示定理：

$$f=\int_0^{\infty}f*t\frac{\partial P_t}{\partial t}*\psi_t\frac{dt}{t}. \tag{2}$$

这可以通过求两边的 Fourier 变换来验证．事实上，右边的 Fourier 变换为

$$-\int_0^{\infty}t|\xi|e^{-t|\xi|}\hat{\psi}(t\xi)\hat{f}(\xi)\frac{dt}{t}=-\int_0^{\infty}\hat{\psi}(u)e^{-u}du\hat{f}(\xi)$$

$$=\hat{f}(\xi).$$

记 $u(x,t)=P_t*f(x)$．对 $k\in\mathbb{Z}$，令

$$E_k=\{x\in\mathbb{R}^n:u_\alpha^*(x)>2^k\}=\bigcup_j Q_j^k,$$

其中$\{Q_j^k\}$是 E_k 的 Whitney 分解．对方体 Q，定义 $\hat{Q}$ 为 Q 的如下方体帐篷：

$$\hat{Q}=\{(y,t)\in\mathbb{R}_+^{n+1}:y\in Q,0<t<l(Q)\},$$

其中 $l(Q)$表示 Q 的边长．令

$$\hat{E}_k=\bigcup\hat{Q}_j^k,\ T_j^k=\hat{Q}_j^k\setminus\hat{E}_{k+1}.$$

显然$\bigcup E_k=\mathbb{R}^n$. 我们断言，只要 α 充分大，则有$\{(x,t):|u(x,t)|>2^k\}\subset\hat{E}_k$. 事实上，若 $|u(x,t)|>2^k$，则对 $|y-x|<\alpha t$ 的一切 y，有 $u^*(y)>2^k$. 因此，存在 j 使得 $x\in Q_j^k$，由 Whitney 分解的性质，

知存在仅依赖于维数的常数C，使得 $CQ_j^k\bigcap E_k^c\neq\phi$，这迫使$Q_j^k$的边长$l(Q_j^k)$相对于$t$要比较大，否则$CQ_j^k$将整个地包含在$B(x,\alpha t)\subset E_k$内，从而与$E_k^c$的交是空集．特别地，取$\alpha$充分大，可使$l(Q_j^k)>t$，即$(x,t)\in\hat{Q}_j^k$，从而证明了断言．故$\bigcup_{k,j}T_j^k$是$\{u\neq 0\}$的不交并，改写式(2)，便得

$$f(x)=\iint_{\mathbb{R}_+^{n+1}}\frac{\partial u(y,t)}{\partial t}\psi_t(x-y)dydt$$

$$=\sum_{k,j}\iint_{T_j^k}\frac{\partial u(y,t)}{\partial t}\psi_t(x-y)dydt$$

$$=\sum_{k,j}g_j^k=\sum_{k,j}\lambda_j^k a_j^k,$$

其中

$$\lambda_j^k=C2^k|Q_j^k|,$$

$$a_j^k=(\lambda_j^k)^{-1}\iint_{T_j^k}\frac{\partial u(y,t)}{\partial t}\psi_t(x-y)dydt.$$

这时

$$\sum_{k,j}|\lambda_j^k|=C\sum_{k,j}2^k|Q_j^k|=C\sum_k 2^k|E_k|$$

$$\leqslant C\int_{\mathbb{R}^n}u_\alpha^*(x)dx.$$

剩下只需验证a_j^k是(1,2)原子．由ψ支于单位球知$\operatorname{supp}a_j^k\subset CQ_j^k$．同样，由$\psi$的积分为0知$a_j^k$满足消失矩条件．现证，当$\lambda_j^k$中的常数$C$取得足够大时，有

$$\| a_j^k \|_2 \leqslant | Q_j^k |^{-\frac{1}{2}},$$

或等价地

$$\| g_j^k \|_2 \leqslant C 2^k | Q_j^k |^{1/2}. \tag{3}$$

事实上，对任意 $h \in L^2, \| h \|_2 \leqslant 1$，有

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} g_j^k(x) h(x) dx \right| = \left| \int_{T_j^k} \frac{\partial u(y,t)}{\partial t} \psi_t * h(y) dy dt \right|$$

$$\leqslant \left(\int_{T_j^k} t |\nabla u|^2 dy dt \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} |\psi_t * h(y)|^2 \frac{dy dt}{t} \right)^{1/2}. \tag{4}$$

由 Plancherel 定理(见 §3.7 讨论 g 函数时的类似推导)知

$$\iint_{\mathbb{R}_+^{n+1}} |\psi_t * h(y)|^2 \frac{dy dt}{t} \leqslant C \| h \|_2^2 \leqslant C.$$

对(4)右边的第一个因子，应用 Green 公式

$$\int_{T_j^k} t |\nabla u|^2 dy dt = \int_{\partial T_j^k} \left(tu |\nabla u| + \frac{1}{2} |u|^2 \frac{\partial t}{\partial n} \right) d\sigma, \tag{5}$$

其中 ∂T_j^k 表示 T_j^k 的边界，$\dfrac{\partial t}{\partial n}$ 表示外法线导数. 注意到 ∂T_j^k 位于 $\hat{E}_{k+1}^c$ 内，故在 ∂T_j^k 上有 $|u| \leqslant C 2^k$，而 ∂T_j^k 的面测度 $\leqslant C |Q_j^k|$，$\left| \dfrac{\partial t}{\partial n} \right| \leqslant 1$. 因此式(5)的右边第二项被 $C 2^{2k} |Q_j^k|$ 控制.

为估计(5)右边的第一项，我们断言，只要最初的 α 取得足

够大，则存在 $0<\alpha'<\alpha$，使得对任意 $(x,t)\in\partial T_j^k$，存在 $z\in\mathbb{R}^n\setminus E^{k+1}$，使得 $(x,t)\in\Gamma_{\alpha'}(z)$. 如果断言成立，则根据引理(5.2)，知在 ∂T_j^k 有 $t|\nabla u|\leqslant C2^k$，从而(5)右边第一项也被 $C2^{2k}|Q_j^k|$ 控制，于是(3)成立. 现在回过头来解释断言，事实上，$(x,t)\in\partial T_j^k$ 只有两种可能：或者 $x\in E_k\setminus E_{k+1}$，这时取 $z=x$ 即可，或者 $x\in Q_i^{k+1}$ 对某个 i，这时必有 $t>\frac{1}{5}l(Q_i^{k+1})$. 这是因为，当 $t\leqslant\frac{1}{5}l(Q_i^{(k+1)})$ 时，x 必然在 Q_i^{k+1} 的边界上，从而 x 也在另一个满足 $l(Q_l^{k+1})\geqslant\frac{1}{5}l(Q_i^{k+1})$ 的 Q_l^{k+1} 的边界上，这是 Whitney 分解决定的，而根据 T_j^k 的构造，$(x,t)\notin\partial T_j^k$. 既然 $t>\frac{1}{5}l(Q_i^{k+1})$，由 Whitney 分解，知存在 $z\in E_{k+1}^c$，使得 $(x,t)\in\Gamma_\alpha(z)$，其中 α 取得充分大.

对一般的 f，存在 $\{f_m\}\subset L^2\cap L^1$，使得

$$f=\sum_m f_m$$

满足 $\sum_m\|P^*(f_m)\|_1\leqslant C\|P^*(f)\|_1$. 已经证明，对每个 f_m，有原子分解 $f_m=\sum_j\lambda_j^m a_j^m$，从而 $f=\sum_m\sum_j\lambda_j^m a_j^m$ 是 f 的原子分解，且

$$\sum_m\sum_j|\lambda_j^m|\leqslant C\sum_m\|P^*(f_m)\|_1\leqslant C\|P^*(f)\|_1.$$

定理(5.3)证完.

容易把上述定理推广到 $H_p(0<p<1)$，得到 H_p 的 Poisson 极大函数刻划(参见[GR])

下面我们讨论由 Poisson 极大函数 $P^*(f)$ 的 L^p 可积性推出某种 $\varphi*(f)$ 的可积性，从而得到 H_p 的一般极大函数 $\varphi^*(f)$ 的刻划.

引理(5.4) 存在 $\sigma\in\mathcal{S}$，满足 $\int\sigma(x)dx=1$，而由 $\{\sigma_t\}$ 定义的

极大函数满足

$$\sigma^*(f)(x)\leqslant C\,P^*(f)(x),\ \ \forall f\in\bigcup_{p\geqslant 1}L^p. \tag{6}$$

证明 我们承认一个来自实分析的事实：存在$[1,\infty)$上无穷次可微函数ψ，满足

$$\psi(x)=O(x^{-N}),\ \ \forall x,\ \ \forall N>0,\ \int_1^\infty\psi(x)\,dx=1,$$

$$\int_1^\infty x^k\psi(x)dx=0,\,k=1,2,\cdots \tag{7}$$

现在我们可以从 Poisson 核出发构造一个$\sigma\in\mathscr{S}$，使$\{\sigma_t\}$构成了一个满足式(6)的逼近单位，这只需令

$$\sigma(x)=\int_1^\infty\psi(s)P_s(x)ds. \tag{8}$$

这个积分当然是绝对一致收敛的. 为证$\sigma\in\mathscr{S}$，充分地只需证$\hat{\sigma}\in\mathscr{S}$，事实上

$$\hat{\sigma}(\xi)=\int_1^\infty\psi(s)e^{-s|\xi|}ds. \tag{9}$$

它显然在$\xi=0$的邻域外无穷次可微，且在无穷远处速降. 由ψ的高阶消失矩(除零次外)，以及e^t的 Tayler 展开知

$$\hat{\sigma}(\xi)=\int_1^\infty\psi(s)\left\{\sum_{k=0}^{N-1}(-1)^k\frac{s^k|\xi|^k}{k!}+\frac{s^N|\xi|^N}{N!}e^{-\theta s|\xi|}\right\}ds$$

$$=1+O(|\xi|^N),\ \ \forall N,$$

再注意到

$$\int_{R^n}\sigma(x)dx=\hat{\sigma}(0)=\int_1^{\infty}\psi(s)ds=1,$$

便可推出 $\hat{\sigma}(\xi)$ 在 $\xi=0$ 也是无穷次可微的，因此(注意 $P_t(x)=t^{-n}P\left(\frac{x}{t}\right)$, $P(x)=C(1+|x|^2)^{-\frac{n+1}{2}}$)

$$\sigma_t(x)=\int_1^{\infty}\psi(s)t^{-n}s^{-n}P\left(\frac{x}{ts}\right)ds=\int_1^{\infty}\psi(s)P_{ts}(x)ds$$

构成了一个逼近单位．现在证明(6)就是直接的了．考虑 σ_t 在 $g(x)=P_\varepsilon(f,x)=P_\varepsilon * f(x)$上的作用，有

$$|\sigma_t * P_\varepsilon(f,y)|\leqslant\int_1^{\infty}|\psi(s)||P_{st}*P_\varepsilon*f(y)|ds,$$

因此

$$\sup_{(y,t)\in\Gamma_\alpha(x)}|\sigma_t * P_\varepsilon(f,y)|\leqslant\sup_{s\geqslant1,(y,t)\in\Gamma_\alpha(x)}|P_{st+\varepsilon}(f,y)|\int_1^{\infty}|\psi(s)|ds.$$

其中 $\alpha=0$ 即表示径向极大．注意

$$s\geqslant1,(y,t)\in\Gamma_\alpha(x)\Rightarrow\ |y-x|<\alpha(st+\varepsilon),\text{即}(y,st+\varepsilon)\in\Gamma_\alpha(x),$$

故得

$$\sup_{(y,t)\in\Gamma_\alpha(x)}|\sigma_t * P_\varepsilon(f,y)|\leqslant CP^*(f)(x).\qquad(10)$$

注意右边不依赖于 ε, 而 $P_\varepsilon(f,y)$在 L^p 中收敛于 $f(y)$, $1\leqslant p<\infty$, 故 $\sigma_t * P_\varepsilon(f,y)\to\sigma_t * f(y)$, 对 a.e.$(y,t)$, 这便推出式(6)以及

$\alpha=0$ 时径向极大函数的相应不等式，引理获证.

若我们从任一个 $\varphi\in\mathscr{S}$ 代替 $P(x)=C(1+|x|^2)^{-\frac{n+1}{2}}$ 出发，则此时只需 $f\in\mathscr{S}'$，仍可在式(10)的左边取极限. 这是因为 $\sigma_t*\varphi_\varepsilon(f,y)=(\sigma_t*\varphi_\varepsilon)*f(y)$，而 $\sigma_t*\varphi_\varepsilon$ 在 $\mathscr{S}$ 中收敛于 σ_t. 最后一点可以通过 Fourier 变换来验证. 事实上，由

$$\|\xi^\alpha D^\beta(\hat{\varphi}(\varepsilon\xi)\hat{\sigma}(t\xi)-\hat{\sigma}(t\xi))\|_\infty\to 0,\text{ 当 }\varepsilon\to 0\text{ 时},$$

知 $\hat{\varphi}(\varepsilon\xi)\hat{\sigma}(t\xi)$ 在 $\mathscr{S}$ 中收敛于 $\hat{\sigma}(t\xi)$，再取 Fourier 逆变换，即知 $\varphi_\varepsilon*\sigma_t$ 在 $\mathscr{S}$ 中收敛于 σ_t. 这样我们同时证明了，从任一 $\varphi\in\mathscr{S}$ 可以过渡到性质更特殊一些的 $\psi\in\mathscr{S}$.

下面我们由用 P 或 $\varphi\in\mathscr{S}$ 定义的极大函数的 L^p 的可积性，推出由 $\mathscr{S}$ 中具有紧支集的 θ 定义的极大函数的相应 L^p 可积性. 设 φ,f 如定义式(1)中要求的那样，$\lambda>0$，令

$$\varphi_\lambda^{**}(f)(x)=\sup_{(y,t)\in\mathbb{R}_+^{n+1}}\left(\frac{t}{t+|x-y|}\right)^\lambda|\varphi_t*f(y)|.$$

引理(5.5) 设 Φ 与 $\varphi\in\mathscr{S}$，而 $\psi\in\bigcup_{p\geq1}L^p$，且 $\Phi=\psi*\varphi_s$，$0<s\leqslant1$. 则对任意 $N\in\mathbb{Z}_+$，有

$$|\Phi^*(f,x)|\leqslant Cs^{-N}\int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|)^N|\psi(x)|dx\,\varphi_N^{**}(f,x).$$

证明 设 $(y,t)\in\Gamma(x)$，即 $|x-y|<t$，有

$$|\Phi_t*f(y)|\leqslant|\psi_t*\varphi_{st}*f(y)|$$

$$\leqslant\int_{\mathbb{R}^n}|\psi_t(y-z)||\varphi_{st}*f(z)|dz$$

$$=\int_{\mathbb{R}^n}|\psi_t(y-z)|\left(\frac{st}{|x-z|+st}\right)^{-N}\left(\frac{st}{|x-z|+st}\right)^{N}$$

$$\cdot|\varphi_{st}*f(z)|dz$$

$$\leqslant\varphi_N^{**}(f,x)\int_{\mathbb{R}^n}|\psi_t(y-z)|\left(1+\frac{|x-y|}{st}+\frac{|y-z|}{st}\right)^N dz$$

$$\leqslant Cs^{-N}\int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|)^N|\psi(x)|dx\,\varphi_N^{**}(f,x).$$

引理获证.

引理(5.6) 设 $0<\lambda,p<\infty$, $\lambda p>n$、φ、f 如定义式(1)中所要求的那样，则

$$\|\varphi_\lambda^{**}(f)\|_p\leqslant C\|\varphi^*(f)\|_p.$$

证明 实际上

$$\varphi_\lambda^{**}(f)(x)=\sup\left(\frac{t}{t+|x-y|}\right)^\lambda|\varphi_t*f(y)|$$

$$\leqslant\sup_{|x-y|<t}\left(\frac{t}{t+|x-y|}\right)^\lambda|\varphi_t*f(y)|+$$

$$\sum_{m=0}^\infty\sup_{2^m t\leqslant|x-y|\leqslant 2^{m+1}t}\left(\frac{t}{t+|x-y|}\right)^\lambda|\varphi_t*f(y)|$$

$$\leqslant\varphi^*(f)(x)+\sum_{m=0}^\infty 2^{-m\lambda}\varphi_{2^{m+1}}^*(f)(x).$$

当$0<p<1$时，只要$\lambda p>n$，根据命题(5.1)就有

$$\int\varphi_{\lambda}^{**}(f)(x)^p dx\leqslant\int_{\mathbf{R}^n}\varphi^*(f)(x)^p dx+\sum_{m=0}^{\infty}\int 2^{-m\lambda p}\varphi_{2^m+1}^*(f)(x)^p dx$$

$$\leqslant C\left\{1+\sum_{m=0}^{\infty}2^{-m\lambda p}2^{(m+1)n}\right\}\|\varphi^*(f)\|_p^p=C\|\varphi^*(f)\|_p^p.$$

当$p\geqslant 1$时，只要$\lambda p>1$，也有

$$\|\varphi_{\lambda}^{**}(f)\|_p\leqslant\|\varphi^*(f)\|_p+\sum_{m=0}^{\infty}2^{-m\lambda}\|\varphi_{2^m+1}^*(f)\|_p$$

$$\leqslant\left\{1+\sum_{m=0}^{\infty}2^{-m\lambda}2^{(m+1)\frac{1}{p}}\right\}\|\varphi^*(f)\|_p=C\|\varphi^*(f)\|_p.$$

定理(5.7) 设σ如引理(5.4)所述，$\theta\in\mathscr{S}$，且$\operatorname{supp}\theta\subset\{x:|x|\leqslant 1\}$，则

$$\theta^*(f)(x)\leqslant C\int(|\theta(x)|+|\nabla\theta(x)|)dx\,\sigma^*(f)(x).\qquad(11)$$

证明 我们有

$$\theta=\theta*\sigma*\sigma+\sum_{k=0}^{\infty}(\theta*\sigma_{2^{-k-1}}*\sigma_{2^{-k-1}}-\theta*\sigma_{2^{-k}}*\sigma_{2^{-k}}).$$

这是因为，由$(f*g)_t=f_t*g_t$，知右边的部分和

$\theta*\sigma_{2^{-k-1}}*\sigma_{2^{-k-1}}=\theta*(\sigma*\sigma)_{2^{-k-1}}\to\theta$，当$k\to\infty$时，且收敛至少是一致收敛(因$(\sigma*\sigma)_t$也是一个逼近单位)．这样

$$\theta=\theta*\sigma*\sigma+\sum_{k=0}^{\infty}\theta*(\sigma_{2^{-k-1}}-\sigma_{2^{-k}})*(\sigma_{2^{-k-1}}+\sigma_{2^{-k}})$$

$$=\theta*\sigma*\sigma+\sum_{k=0}^{\infty}\theta*(\sigma_-)_{2^{-k}}*(\sigma_+)_{2^{-k}},$$

其中 $\sigma_-=\sigma_{2^{-1}}-\sigma$, $\sigma_+=\sigma_{2^{-1}}+\sigma$. 注意 σ_- 有零阶消失矩性质，而 σ_+ 满足 $(\sigma_+)_1^{**}(f,x)\leqslant C\,\sigma_1^{**}(f,x)$（$C$ 只依赖于 n）. 这样我们得到（由引理(5.5)取 $N=0$）

$$\theta^*(f,x)\leqslant C\sigma^*(f,x)\left\{\int_{R^n}|\theta*\sigma(y)|dy\right.$$

$$\left.+\sum_{k=0}^{\infty}\int_{R^n}|\theta*(\sigma_-)_{2^{-k}}(y)|dy\right\}. \qquad (12)$$

右边第一个积分有所需要的估计

$$\int_{R^n}|\theta*\sigma(y)|\,dy\leqslant\int_{|z|\leqslant 1}|\theta(z)|\int_{R^n}|\sigma(y-z)|dydz$$

$$\leqslant C\int_{|z|\leqslant 1}|\theta(z)|dz.$$

现考虑式(12)中每个依赖于 k 的积分，设 $0<s\leqslant 1$，有

$$|\theta*(\sigma_-)_s(y)|=\left|\int_{R^n}[\theta(y-z)-\theta(y)](\sigma_-)_s(z)dz\right|$$

$$\leqslant\int_{R^n}\int_0^1|z||\nabla\theta(y-rz)|\,dr\,|(\sigma_-)_s(z)|\,dz,$$

$$\int_{R^n}|\theta*(\sigma_-)_s(y)|dy$$

$$\leqslant C\int_0^1\int_{R^n}\int_{R^n}|\nabla\theta(y-rs)||z||(\sigma_-)_s(z)|drdydz$$

$$\leqslant C\int_{R^n}|z||(\sigma_-)_s(z)|dz\|\nabla\theta\|_1=Cs\|\nabla\theta\|_1.$$

代入(12)即得

$$\theta*(f,x)\leqslant C\sigma^*(f,x)\left(\|\theta\|_1+\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}\|\nabla\theta\|_1\right).$$

此即(11)，定理获证.

定理(5.8) 设 $\varphi\in\mathscr{S}$，$\int\varphi dx\neq0$. 则 $f\in H_1$ 当且仅当 $f\in L^1$，$\varphi^*(f)\in L^1$.

本定理证明从略，我们只指出其梗概. 证明由 $f\in H_1$，推出 $\varphi^*(f)\in L^1$ 时不必要求 $\int\varphi(x)dx\neq0$. 当 $\varphi\in\mathscr{S}$，φ 有紧支集时，若 $f\in H_1$，则由定理(5.3)，引理(5.4)与定理(5.7)，知 $\varphi^*(f)\in L^1$. 当 $\varphi\in\mathscr{S}$，没有紧支集时，可以通过逼近化为有紧支集的情形，证明比较复杂. 至于反过来，(此时要求 $\int\varphi dx\neq0$)由 $f\in L^1$，$\varphi^*(f)\in L^1$，推出 $f\in H_1$，证明更加复杂，有兴趣的读者可以参考[GR]，[DH2].

我们还可用径向极大函数

$$\varphi^+(f)(x)=\sup_{t>0}|\varphi_t*f(x)|,$$

代替定理(5.8)中的 $\varphi^*(f)$，相应结论仍然成立.

本节的类似结果，对 H_p 成立，$0<p<1$，我们在此也不作详

细讨论了.

§4.6 经典 Hardy 空间与 H_1 的奇异积分算子刻划

本节介绍经典的高维 Hardy 空间 $\mathscr{H}_1$，并得到它的奇异积分算子刻划，然后证明经典的 $\mathscr{H}_1$ 与前面讲述的 H_1 的等价性，最后通过对偶得到 BMO 的奇异积分算子刻划.

定义(6.1) 设 $F=(u_0,\cdots,u_n)$是定义在 $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 上的向量值函数，说 F 是 Stein－Weiss 意义下解析的，如果 F 满足下述广义 Cauchy－Riemann 方程

$$\sum_{j=0}^{n}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}=0,\quad \frac{\partial u_i}{\partial x_j}=\frac{\partial u_j}{\partial x_i}. \tag{1}$$

简称 F 是一共轭调和函数系.

例 设 $x=(x_0,\cdots x_n)$, $|x|=\left(\sum_{i=0}^{n}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$，则

$$F=\left(\frac{x_0}{|x|^{n+1}},\cdots,\frac{x_n}{|x|^{n+1}}\right)$$

便是一个共轭调和函数系. 更一般地，用一个函数 f 与这个系作卷积，则$\left(\frac{x_0}{|x|^{n+1}}*f,\cdots\frac{x_n}{|x|^{n+1}}*f\right)$也是共轭调和系.

定理(6.2) 设 F 是一个共轭调和函数系，$p\geqslant\frac{n-1}{n}$，则 $|F|^p=\left(\sum_0^n|u_j|^2\right)^{\frac{p}{2}}$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 上的下调和函数(参见 §4.9 习题 7).

证明 只要证明 $\Delta(|F|^p)\geqslant 0$ 即可. 我们引入记号:

$$F=(u_0,u_1,\cdots,u_n),\ G=(v_0,v_1,\cdots,v_n),$$

$$F\cdot G=\sum_{j=0}^{n}u_jv_j,\ F_{x_j}=\frac{\partial F}{\partial x_j}=\left(\frac{\partial u_0}{\partial x_j},\frac{\partial u_1}{\partial x_j},\cdots,\frac{\partial u_n}{\partial x_j}\right),$$

$$|\nabla F|^2=\sum_{j=0}^{n}|F_{x_j}|^2.$$

由于

$$\frac{\partial}{\partial x_j}F\cdot G=F_{x_j}\cdot G+F\cdot G_{x_j},$$

我们有

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(|F|^p)=\frac{\partial}{\partial x_j}(F\cdot F)^{\frac{p}{2}}=p|F|^{p-2}(F_{x_j}\cdot F),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}(|F|^p)=p(p-2)|F|^{p-4}(F_{x_j}\cdot F)^2+p|F|^{p-2}(|F_{x_j}|^2+F_{x_jx_j}\cdot F).\tag{2}$$

注意到 $\sum_{j=0}^{n}F_{x_jx_j}=0$, 当 $p\geqslant 2$ 时, 显然有 $\Delta(|F|^p)\geqslant 0$, 现在考虑 $p<2$ 的情形. 此时, 我们将证明

$$\sum_{j=0}^{n}(F_{x_j}\cdot F)^2\leqslant\frac{n}{n+1}|F|^2|\nabla F|^2.\tag{3}$$

假设(3)已证, 代回(2), 得

$$\Delta(|F|^p)\geqslant p|F|^{p-4}\left\{(p-2)\frac{n}{n+1}|F|^2|\nabla F|^2+|F|^2|\nabla F|^2\right\}$$

$$=p\left[1+(p-2)\frac{n}{n+1}\right]|F|^{p-2}|\nabla F|^2\geqslant 0,$$

这里我们用到了条件 $\frac{n-1}{n}\leqslant p<2$.

现在回头证明(3). 令 $\mu=(m_{jk})$是满足 $\sum\limits_{j=0}^{n}m_{jj}=0$ 的$(n+1)\times(n+1)$实对称矩阵，并定义

$$\|\mu\|=\sup_{|F|=1}|\mu(F)|,\ |||\mu|||^2=\sum_{j,k}|m_{jk}|^2.$$

由于$\|\mu\|$与$|||\mu|||$对正交变换不变，故不妨设μ为对角矩阵

$$\mu=\begin{pmatrix}\lambda_0 & & & 0\\ & \lambda_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

其中$\sum\limits_{j=0}^{n}\lambda_j=0$(矩阵的迹在正交变换下也不变)，即 $\lambda_{j_0}=-\sum\limits_{j\neq j_0}\lambda_j$.

由 Schwartz 不等式:

$$\lambda_{j_0}^2\leqslant n\sum_{j\neq j_0}\lambda_j^2,$$

从而

$$(1+n)\lambda_{j_0}^2\leqslant n\sum_{j\neq j_0}\lambda_j^2+n\lambda_{j_0}^2=n\sum_{j=0}^{n}\lambda_j^2,$$

于是

$$\sup\lambda_j^2\leqslant\frac{n}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\lambda_j^2,$$

即

$$|||\mu|||\leqslant \frac{n}{n+1}\|\mu\|.$$

取 $m_{jk}=\dfrac{\partial u_j}{\partial x_k}$，便得

$$\sum_{j=0}^{n}(F_{x_j}\cdot F)^2\leqslant \|u\|^2|F|^2\leqslant \frac{n}{n+1}|||u|||^2|F|^2=\frac{n}{n+1}|F|^2|\nabla F|^2,$$

这就是(3)，从而定理(6.2)获证.

定理(6.2)中的指标 $\dfrac{n-1}{n}$ 是不能改进了的，换言之，若 $p<\dfrac{n-1}{n}$，则存在共轭调和函数系 F，使得 $|F|^p$ 不再是下调和函数. 例如 $F=\left(\dfrac{x_0}{r^{n+1}},\dfrac{x_1}{r^{n+1}},\cdots,\dfrac{x_n}{r^{n+1}}\right)$ 就是如此. 由简单的计算可知，$\Delta(|F|^p)=-np(n-np-1)r^{-np-2}$，当 $p<\dfrac{n-1}{n}$ 时，$\Delta(|F|^p)<0$，即 F 不是下调和函数.

现在对 $p>\dfrac{n-1}{n}$，我们可以定义 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 上的经典 $\mathscr{H}_p$ 空间了.

定义(6.3) 设 $1\geqslant p>\dfrac{n-1}{n}$，$F(u_0,u_1,\cdots u_n)$ 是 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 上的共轭调和函数系，我们称 $F\in\mathscr{H}_p$（或 $F\in\mathscr{H}_p(\mathbb{R}_+^{n+1})$，它是经典的 Hardy 空间），如果

$$\|F\|_{\mathscr{H}_p}=\sup_{t>0}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|F(x,t)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}<\infty.$$

注意当 $n=1$ 时，$F=(u_0,u_1)$是共轭调和函数系等价于说 u_0+iu_1 是 $\mathbb{R}^2_+$ 上的解析函数，这时 $\mathscr{H}_p$ 就是用在上半平面解析的函数定义的 Hardy 空间，即经典的 Hardy 空间.

$n>1$ 时的 $\mathscr{H}_p\left(p>\dfrac{n-1}{n}\right)$，是由 Stein－Weiss引进的，故也称Stein－Weiss 意义下的 Hardy 空间．为区别于前面讲的 H_p，我们也把它归入经典的 Hardy 空间.

为证明 $\mathscr{H}_p$ 空间的基本定理，我们需要调和函数的若干性质，在此不予证明，加上若干提示后，把它们放到 §4.9 作为习题(习题 9)留给读者．读者可参阅 [SW2]，[DH2].

命题(6.4) (调和控制) 设 $v(x,t)\geqslant 0$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 上的下调和函数，并且满足条件

$$\sup_{t>0}\int_{\mathbb{R}^n}|v(x,t)|^q dx=C^q<\infty,\ 1\leqslant q<\infty,$$

则存在 $v(x,t)$的极小调和控制$u(x,t)$，即一方面

$$v(x,t)\leqslant u(x,t),\quad \forall (x,t)\in\mathbb{R}^{n+1}_+,$$

而且若 $\tilde{u}(x,t)$是 $v(x,t)$的调和控制，则 $u(x,t)\leqslant\tilde{u}(x,t)$.

此外，当 $q>1$ 时，$u(x,t)$是某个 $f\in L^q$ 的 Poisson积分，$\|f\|_q\leqslant C$；当 $q=1$，u 是某个有界 Borel 测度 $d\mu$ 的 Poisson 积分，$\|\mu\|\leqslant C$.

命题(6.5) (Fatou) 设$u(x,t)$是 $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 上的调和函数，若对几乎所有的 x，存在 $\alpha,h>0$，使得 $u(y,t)$在 $\Gamma^h_\alpha(x)=\{(y,t)\in\mathbb{R}^{n+1}_+:|x-y|<\alpha t,0<t<h\}$有界，则 $u(x,t)$ 当 $t\to 0$ 时几乎处处有非切向极限，即对任意 β，有 $\displaystyle\lim_{\substack{t\to 0\\(y,t)\in\Gamma_\beta(x)}}u(y,t)$对 a.e. $x\in\mathbb{R}^n$

存在.

定理(6.6) (Stein－Weiss, $\mathscr{H}_p$ 空间基本定理). 设 $F \in \mathscr{H}_p$, $1 \geqslant p > \frac{n-1}{n}$, 则当 $t \to 0$ 时, $F(x, t)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上有几乎处处的以及 L^p 意义下的非切向边值(见 §4.9 习题 5).

证明 令 $V(x, t) = |F(x, t)|^{\frac{n-1}{n}}$, 则由定理(6.2)知它是下调和的. 记 $q = \frac{n}{n-1} p$, 则 $q > 1$, 并且

$$\sup_{t>0} \int_{\mathbb{R}^n} V(x, t)^q dx = \sup_{t>0} \int_{\mathbb{R}^n} |F(x, t)|^p dx < \infty .$$

这样, $V(x, t)$具有极小调和控制 $U(x, t)$, 它是某个 $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ 的 Poisson 积分. 因此

$$|u_j(x, t)|^{\frac{n-1}{n}} \leqslant V(x, t) \leqslant U(x, t).$$

由 Poisson 积分的性质知 $U(x, t)$ 几乎处处有非切向极限, 因此 $U(x, t)$满足命题(6.5)的条件, 即几乎处处非切向有界. 故 $u_j(x, t)$也满足命题(6.5)的条件, 从而 $u_j(x, t)$几乎处处有非切向边值 $f_j(x)$. 已知

$$|F(x, t)|^p = V(x, t)^q \leqslant U(x, t)^q \leqslant CM(g)^q(x) \in L^1(\mathbb{R}^n),$$

其中 M 是 Hardy－Littlewood 极大函数, 根据控制收敛定理, 知 f_j 也是 $u_j(x, t)$的 L^p 极限, 定理证完.

由下面的 §4.9 的习题 4, 还可以知道 $u_j(x, t)$是其边值 f_j 的 Poisson 积分.

定理(6.6)是一个很深刻的结果, 因为单个的调和函数 $u(x, t)$,

如果满足 $\sup\limits_{t>0}\|u(\cdot,t)\|_p<\infty$，当 $p\leqslant 1$ 时，并不能判定 $u(x,t)$ 的 L^p 边值存在，但当 F 是共轭调和函数系时，由 $\sup\limits_{t>0}\|F(\cdot,t)\|_p<\infty$，$1\geqslant p>\dfrac{n-1}{n}$，便能判定 $u_j(x,t)$ 的边值存在，从定理的证明中还可看出，$|F|^p$ 的下调和性起了关键的作用.

下面我们给出 $\mathscr{H}_1$ 的奇异积分算子刻划.

定理(6.7) (Stein－Weiss) $F(x,t)=(u_0(x,t),\cdots u_n(x,t))\in\mathscr{H}_1$，当且仅当存在 L^1 中函数 f_j，$j=0,\cdots,n$ 使 $f_j=R_j(f_0)$ $j=1,2,\cdots n$，其中 R_j 是 Riesz 变换，且 $u_j(x,t)=P_t*f_j(x)$(P_t 是 Poisson 核)，$j=0,\cdots n$. 进一步 $\|F\|_{\mathscr{H}_1}$ 与 $\sum\limits_{j=0}^{n}\|f_j\|_1$ 是等价模.

证明 假设 $F\in\mathscr{H}_1$，则由定理(6.6)知存在 $f=(f_0,\cdots,f_n)$ 使 $f_j\in L^1$，$u_j(x,t)=P_t*f_j(x)$，且 $\sum\limits_{j=0}^{n}\|f_j\|_1\leqslant C\|F\|_{\mathscr{H}_1}$，现证 $f_j=R_j(f_0)$. 充分地只需证它们的 Fourier 变换相同. 有$\Big($仍记 $a_0=\left(\dfrac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\Big)$:

$$u_j(x,t)=a_0\int_{\mathbb{R}^n}e^{-t|y|}\hat{f}_j(y)e^{ix\cdot y}dy,\ j=0,\cdots,n.$$

由于 $\dfrac{\partial u_j}{\partial t}=\dfrac{\partial u_0}{\partial x_j}$，知

$$iy_j\hat{f}_0(y)e^{-t|y|}=-|y|\hat{f}_j(y)e^{-t|y|},$$

$$\hat{f}_j(y) = -i\frac{y_j}{|y|}\hat{f}_0(y).$$

我们已在§3.6证明了

$$R_j(f)^{\wedge}(\xi) = -i\frac{\xi_j}{|\xi|}\hat{f}(\xi), \text{当} f, R_jf \in L^1,$$

因此 $f_j = R_j(f_0)$. 必要性获证. 现证充分性, 即假设 $f_j \in L^1, f_j = R_j(f_0)$, 要证存在 $F = (u_0, \cdots u_n) \in \mathscr{H}_1$, 以 $(f_0, \cdots f_n)$ 为边值. 事实上, 令 $u_j = P_t * f_j$, 这样只要 $F = (u_0, \cdots u_n)$ 是共轭调和系, 便有 $\|F\|_{\mathscr{H}_1} \leqslant C\sum_{j=0}^{n}\|f_j\|_1$, 且 F 以 $f = (f_0, \cdots, f_n)$ 为边值. F 是共轭调和系可如下看,

$$u_j(x, t) = P_t * (R_jf_0)(x),$$

$$\hat{u}_j(\xi, t) = e^{-t|\xi|}\left(-i\frac{\xi_j}{|\xi|}\right)\hat{f}_0(\xi), \quad j = 1, 2, \cdots n,$$

因此

$$u_j(x, t) = -a_0\int_{\mathbb{R}^n} i\frac{\xi_j}{|\xi|}e^{-t|\xi|}\hat{f}_0(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi.$$

由于被积函数在 $\xi = \infty$ 处衰减快, 可积分号下求微商. 故

$$\sum_{j=0}^{n}\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = a_0\int_{\mathbb{R}^n}\left(-|\xi| + \sum_{j=1}^{n}\frac{\xi_j^2}{|\xi|}\right)\cdots d\xi = 0,$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial x_j} = a_0\int_{\mathbb{R}^n}(i\xi_j)\cdots d\xi = \frac{\partial u_j}{\partial t}, j = 1, \cdots n,$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_j}=a_0\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{\xi_j\xi_k}{|\xi|}\right)\cdots d\xi=\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\quad j\neq k.$$

这就完成了定理的证明.

现在，我们定义空间 $\mathbb{R}^n$ 上的经典 Hardy 空间.

$$\mathscr{H}_1(\mathbb{R}^n)=\{f:f\in L^1(\mathbb{R}^n),\quad R_j(f)\in L^1(\mathbb{R}^n),\ j=1,2,\cdots,n\},$$

其范数为

$$\|f\|_{\mathscr{H}_1(\mathbb{R}^n)}=\|f\|_1+\sum_{j=1}^{n}\|R_j(f)\|_1.$$

定理(6.7)告诉我们，它与用 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 上的共轭调和函数系定义的 $\mathscr{H}_1(\mathbb{R}_+^{n+1})$是等价的. 下面的定理告诉我们，$\mathscr{H}_1(\mathbb{R}^n)$与我们前面讨论的 $H_1(\mathbb{R}^n)$也是相同的，这样，我们就把经典的 $\mathscr{H}_1$ 空间与用现代观点引入的 H_1 联系了起来，而定理(6.7)也就同时给出了 H_1 的奇异积分刻划.

定理(6.8) $\mathscr{H}_1(\mathbb{R}^n)=H_1(\mathbb{R}^n)$，即两个空间的元素相同，且范数等价.

证明 首先证明 $H_1(\mathbb{R}^n)\subset\mathscr{H}_1(\mathbb{R}^n)$. 类似于以前的讨论，我们只需证明，对任意$(1,\infty)$原子 a，有 $\|R_j(a)\|_1\leqslant C$ 即可，其中 C 与 a 无关. 为此，只需证明下述两点：(1)R_j 是(2,2)型的，这是§3.6已知的结果；(2)得到 $R_j(a)$的一个逐点估计，从而可以估计积分 $\int_{(2Q)^c}|R_j(a)(x)|dx$，其中 Q 是 a 的支集. 我们把证明的细节留给读者作为一个简单的习题. 我们在此实际上证明了，R_j 是 H_1 到 L_1 有界的，在下面的§5.1，我们会得到更一般的结果.

现在证明 $\mathscr{H}_1(\mathbb{R}^n)\subset H_1(\mathbb{R}^n)$. 设 $f\in\mathscr{H}_1(\mathbb{R}^n)$. 记 $u_0(x,t)=P_t*f(x)$，$u_j(x,t)=P_t*R_j(f)(x)$. 根据定理(6.7)，$F=(u_0,$

$u_1, \cdots u_n) \in \mathscr{H}_1(\mathbb{R}_+^{n+1})$. 取 $q = \dfrac{n}{n-1}$ ($n=1$ 时取任意 $q>1$). 这时，根据定理(6.2)，$|F(x,t)|^{\frac{n-1}{n}}$ 是 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 的下调和函数，且满足

$$\sup_{t>0}\int_{\mathbb{R}^n}(|F(x,t)|^{\frac{n-1}{n}})^q dx = \sup_{t>0}\int_{\mathbb{R}^n}|F(x,t)|dx < \infty.$$

应用调和控制命题(6.4)，知存在函数 $U(x,t)$，它是某个 $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$的 Poisson 积分，且控制了 $|F(x,t)|^{\frac{n-1}{n}}$，即

$$|F(x,t)|^{\frac{n-1}{n}} \leqslant U(x,t),\ U(x,t) = P_t * g(x),\ g \in L^q, q>1.$$

我们已知

$$P^*(g)(x) = \sup_{|x-y|<t} |P_t * g(y)| \leqslant AM(g)(x) \in L^q,$$

即$P^*(g) \in L^q$，这等价于 $P^*(g)^{\frac{n}{n-1}} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. 由

$$|u_0(x,t)| = |P_t * f(x)| \leqslant |F(x,t)|,$$

知

$$P^*(f)(x) \leqslant P^*(g)(x)^{\frac{n}{n-1}} \in L^1,$$

故 $P^*(f) \in L^1$. 根据上一节 H_1 空间的极大函数刻划的定理(5.3)，$f \in H_1(\mathbb{R}^n)$，定理(6.8)证完.

定理(6.8)的结果可以推广到 $1>p>\dfrac{n-1}{n}$ 的情形. 由于此时 $H_p(\mathbb{R}^n)$的元素，一般说来是广义函数(不一定是函数)，因此，需要证明，若 $F \in \mathscr{H}_p(\mathbb{R}_+^{n+1})$，则其第一个分量有广义函数边值 f，

把全体这样的 f 记为 $\mathscr{H}_p(\mathbb{R}^n)$，便可证明 $\mathscr{H}_p(\mathbb{R}^n)=H_p(\mathbb{R}^n)$，$\frac{n-1}{n}<p<1$，有关的证明比较复杂也比较专门，我们在此省略.

作为定理(6.7)的推论，我们可以得到 BMO 函数的 Fefferman－Stein 分解，即每个 $f\in BMO$ 可表为 $\sum_0^n R_j f_j$，其中 $f_j\in L^\infty$. 但在此之前，我们需要作点准备，下述定理、引理有独立意义.

定理(6.9) 下述 H_0 在 H_1 中稠密，

$$H_0=\{f\in L^1:\hat{f}\in C^\infty, \text{且在 } 0 \text{ 与 } \infty \text{ 的某个邻域为 } 0\}. \tag{4}$$

证明 根据刚才的 H_1 的奇异积分算子刻划定理，有

$$H_1=\{f\in L^1:R_jf\in L^1, j=1,\cdots n\}, \tag{5}$$

$$\|f\|_{H_1}=\sum_0^n\|f_j\|_1, f_0=f, f_j=R_jf. \tag{6}$$

任取 $f_0\in H_1, f_j=R_jf_0$. 注意由 $(R_jf_0)^\wedge(\xi)=-i\frac{\xi_j}{|\xi|}\hat{f}_0(\xi)\in C_0(\mathbb{R}^n)$，知必有 $\hat{f}_0(0)=0$，因而亦有 $\hat{f}_j(0)=0, j=1,\cdots n$. 我们首先构造 L^1 中序列 $\{f^{(k)}\}$，使得 $\hat{f}^{(k)}(\xi)$ 在 0 与 ∞ 的邻域为零，且 $\{f^{(k)}\}$，$\{R_jf^{(k)}\}$ 在 L^1 中分别收敛于 f_0 与 f_j，这只需选 C^∞ 中函数 $\Phi(\xi)$，有紧支集，且在 $\{|\xi|\leqslant 1\}$ 上为 1，对 $\delta>0$，定义 E_δ:

$$(E_\delta f)^\wedge(\xi)=\Phi\left(\frac{\xi}{\delta}\right)\hat{f}(\xi).$$

设 φ 是 Φ 的 Fourier 逆变换(注意 $\varphi\in\mathscr{S}$)，则 E_δ 是由 $\varphi_{\frac{1}{\delta}}$ 定义

的卷积算子. 由 $\Phi(0)=1$, 知$\{E_\delta\}_{\delta>0}$是一个逼近单位(当 $\delta\to\infty$ 时收敛到单位). 注意 E_δ 的算子范数 $\leqslant C\|\varphi\|_1$, 与 δ 无关. 现令

$$\widetilde{E}_k=E_k(I-E_{\frac{1}{k}}),\ k\in\mathbb{Z}_+.$$

则$\{\widetilde{E}_k\}$是 L^1 上的一致有界算子序列, 在 L^1 的稠密子集 H_0 上收敛. 事实上 $\forall f\in H_0$, 当 k 充分大时 $\widetilde{E}_kf=f$, 这是因为

$$(\widetilde{E}_kf)^\wedge(\xi)=\Phi\left(\frac{\xi}{k}\right)(\hat{f}(\xi)-\Phi(k\xi)\hat{f}(\xi))=\hat{f}(\xi),\quad(7)$$

故亦在 L^1 上收敛. 这样对 $f_0\in H_1$, 令 $f^{(k)}=\widetilde{E}_kf_0$, 有

$$R_j(f^{(k)})=E_k(I-E_{\frac{1}{k}})R_jf_0=\widetilde{E}_kR_jf_0,\ j=1,\cdots n,$$

则$\{f^{(k)}\}$便是满足我们的第一步逼近要求的序列, 它使得$f^{(k)}\to f_0$, $R_jf^{(k)}\to R_jf_0$, $j=1,\cdots n$, 且其 Fourier 变换满足(由(7)知), 每个$(f^{(k)})^\wedge(\xi)$在$\{|\xi|\leqslant\frac{1}{k}\}$上为 0, 在$\{|\xi|>kr\}$上也为 0, 其中$\{|\xi|\leqslant r\}$为包含 supp $\hat{\Phi}(\xi)$ 的球.

下面进一步的逼近是将$\{f^{(k)}\}$改造成使得$f^{(k)\wedge}(\xi)$除了仍在 0 与 ∞ 的邻域为 0 外还属于 C^∞. 现看某个 $g\in L^1$ 使 $\hat{g}(\xi)$在 0, 与 ∞ 的某邻域为 0, 要证存在 H_0 中序列$\{g^{(k)}\}$使

$$\|g^{(k)}-g\|_1\to0,\ \|R_jg^{(k)}-R_jg\|_1\to0\quad j=1,\cdots n.\quad(8)$$

这只需找 $\psi\in C^\infty$, 有紧支集, $a_0\int_{\mathbb{R}^n}\psi(x)\,dx=1$. 设 Ψ 是 ψ 的 Fourier 逆变换, 则 $\Psi(0)=1$, 令 $g^{(k)}(x)=\Psi\left(\frac{x}{k}\right)g(x)$, 则显

然地 $\|g^{(k)}-g\|_1\to 0$. 而因 $\hat{g}^{(k)}(\xi)=\psi_{\frac{1}{k}}*\hat{g}(\xi)$, 知 $\hat{g}^{(k)}\in C^\infty$, 当 k 充分大时, $\hat{g}^{(k)}$的支集包含在 $\hat{g}$ 的支集与 $\psi_{\frac{1}{k}}$ 的支集的和集内, 而 $\psi_{\frac{1}{k}}$ 的支集包含在某个$\left\{|\xi|\leqslant\frac{r}{k}\right\}$内(即 $\operatorname{supp}\psi\subset\{|\xi|\leqslant r\}$), 当 k 充分大时它可任意小, 故 $\hat{g}^k$ 的支集在 0 与 ∞ 的某个邻域之外. 现剩下只是证明 $\|R_jg^{(k)}-R_jg\|_1\to 0, j=1,\cdots n$. 既然 $\hat{g}$ 支于一个不包含 $\xi=0$ 的紧集 K 内, 故存在 $h_j\in L^1$, 使局限于 K 上, $\hat{h}_j(\xi)=-i\frac{\xi_j}{|\xi|}$, $j=1,\cdots n$. 这样 $R_jg^{(k)}=h_j*g^{(k)}$故

$$\|R_jg^{(k)}-R_jg\|_1=\|h_j*(g^{(k)}-g)\|_1\to 0, k\to\infty, j=1,\cdots n.$$

这样我们最终实现了对每个 $f_0\in H_1$, 用 H_0 中$\{g^{(k)}\}$序列使

$$\|g^{(k)}-f_0\|_1\to\infty, \|R_jg^{(k)}-R_jf_0\|_1\to 0, j=1,\cdots n.$$

定理至此获证.

下面引理在用古典方法讨论 H_1-BMO 对偶时有用.

引理(6.10) 我们有下述对偶等式:

$$\int_{\mathbb{R}^n}(R_jf)\varphi dx=-\int_{\mathbb{R}^n}fR_j\varphi dx, \ \forall f\in H_0, \ \forall\varphi\in L^\infty, j=1,\cdots,n. \tag{9}$$

其中R_j 在 L^∞ 上的作用被定义为: 对 $j=1,2\cdots n$,

$$R_j\varphi(x)=\int_{\mathbb{R}^n}(K(x-y)-K(-y))\varphi(y)dy, \varphi\in L^\infty,$$

$$K(y)=a_0^{-1}c_n\frac{x_j}{x^{n+1}}.$$

证明 我们知道对$f\in H_0$, $\hat{f}(\xi)\in\mathscr{S}$，因而$\hat{f}_j(\xi)=-i\frac{\xi_j}{|\xi|}\cdot\hat{f}(\xi)\in\mathscr{S}$，故$f$，$R_jf\in\mathscr{S}$，特别$f(x)=O(1+|x|)^{-n-1}$，$R_jf\in L^1$，$j=1,\cdots n$. 此外，在定理(6.8)中证明了$R_j$是$H_1$到$L^1$有界的，因而也是$L^\infty$到$BMO$有界的(其实我们已对$g$函数算子证明了此，这是一样的). 另外，我们将在下节指出任意BMO函数$b(x)$使$\int_{R^n}\frac{|b(x)|}{(1+|x|)^{n+1}}dx<\infty$(见下节式(7))，这样式(9)两边积分都是绝对收敛的.

记$\varphi_N=\varphi\,\chi_{\{|x|\leqslant N\}}$，则$\varphi_N\in L^2$，注意$f\in L^2$，故

$$\int_{R^n}R_jf\,\varphi_N dx=-\int_{R^n}f\,R_j\varphi_N dx$$

$$=\int_{R^n}f\,R_j(\varphi-\varphi_N)dx-\int_{R^n}f\,R_j\varphi dx. \tag{10}$$

如果我们能证明式(10)中右边第一项趋于0，则等式(9)获证. 选$\{C_N\}$使

$$\lim_{N\to\infty}C_N=\infty,\ \lim_{N\to\infty}\frac{C_N}{N}=0.$$

设I是以原点为心，边长为$\frac{N}{C_N}$的方体. 令

$$a_N=\frac{1}{|I|}\int_I R_j(\varphi-\varphi_N)dz$$

$$= \frac{1}{|I|} \int_I \int_{|y| \geqslant N} [K(z-y) - K(-y)] \varphi(y) dy dz$$

$$= \int_{|y| \geqslant N} \frac{1}{|I|} \int_I [K(z-y) - K(-y)] dz \varphi(y) dy.$$

应用将在下节给出的式(7)，即对任意 $b \in BMO$，任意 Q，Q 是中心为 x_0，边长为 δ 的方体，则

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|b(x) - b_Q|}{\delta^{n+1} + |x - x_0|^{n+1}} dx \leqslant C \frac{1}{\delta} \|b\|_*,$$

我们得

$$\int_{|x| \geqslant \frac{N}{C_N}} |f(R_j(\varphi - \varphi_N) - a_N)| dx$$

$$\leqslant C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|R_j(\varphi - \varphi_N) - a_N|}{\left(\frac{N}{C_N}\right)^{n+1} + |x|^{n+1}} dx$$

$$\leqslant C \frac{C_N}{N} \|R_j(\varphi - \varphi_N)\|_* \leqslant C \frac{C_N}{N} \|\varphi\|_\infty \to 0;$$

同时，当 $|x| \leqslant \dfrac{N}{C_N}$ 时，我们有逐点估计

$$|R_j(\varphi - \varphi_N) - a_N|$$

$$= \left| \int_{|y| \geqslant N} \left[K(x-y) - K(-y) - \frac{1}{|I|} \int_I (K(z-y) - K(-y)) dz \right] \right.$$

$$\cdot\ \varphi(y)dy\Big|$$

$$=\left|\int_{|y|\geqslant N}\frac{1}{|I|}\int_I(K(x-y)-K(z-y))dz\,\varphi(y)dy\right|$$

$$\leqslant Cl(I)\int_{|y|\geqslant N}\frac{dy}{y^{n+1}}\|\varphi\|_\infty=\frac{C}{C_N}\|\varphi\|_\infty.$$

故

$$\left|\int_{|x|\leqslant\frac{N}{C_N}}(f(R_j(\varphi-\varphi_N)-a_N))dx\right|\leqslant\frac{C}{C_N}\|\varphi\|_\infty\|f\|_1\to 0.$$

于是，注意到f的平均值为0，有

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n}fR_j(\varphi-\varphi_N)dx\right|=\left|\int_{\mathbb{R}^n}f(R_j(\varphi-\varphi_N)-a_N)dx\right|\to 0.$$

引理获证.

现在我们可以得到 BMO 的 Fefferman – Stein 分解了.

定理(6.11) (Fefferman – Stein) $f\in BMO$，当且仅当存在 $f_j\in L^\infty,(j=1,\cdots n)$，使得 $f=\sum\limits_0^n R_jf_j\ (R_0=I)$，进一步还有

$$\|f\|_*\approx\inf\left\{\sum_0^n\|f_j\|_\infty:\text{遍历所有可能表示}f=\sum_0^n R_jf_j\right\}.\quad(11)$$

证明 如前述R_j是L^∞到BMO有界的，故当$f=\sum\limits_0^n R_jf_j$时有

$$\|f\|_*=\left\|\sum_0^\infty R_jf_j\right\|_*\leqslant C\sum_0^n\|f_j\|_\infty,$$

对 f 的所有可能表示取 inf 即得 $\|f\|_* \leqslant \inf\left\{\sum_0^n \|f_j\|_\infty\right\}$. 现证每个 $\varphi \in BMO$ 有如此表示. 设 $f_0 \in H_0$, 则 $f_j = R_j f_0 \in L^1$, $j=1,\cdots,n$. 故 $(f_0, f_1, \cdots f_n) \in L^1(\mathbb{R}^n) \times \cdots \times L^1(\mathbb{R}^n)$, 由对偶理论知 φ 可在 $L^1(\mathbb{R}^n) \times \cdots \times L^1(\mathbb{R}^n)$的子空间

$$\{(f_0, \cdots f_n): f_0 \in H_0, f_j = R_j f_0, j=1, \cdots n\}$$

上产生一个有界线性泛函 $l_\varphi((f_0, \cdots f_n)) = \int_{\mathbb{R}^n} f_0 \varphi dx$, 其中右边理解为 $\lim_{N\to\infty} \int f_0 \varphi^{(N)} dx$, $\varphi^{(N)} = (\varphi \vee (-N)) \wedge N$. 但既然右边积分存在, 故这个极限就是此积分. 由 Hahn - Banach 定理(见 §3.1), 它可连续地扩充至整个 $L^1(\mathbb{R}^n) \times \cdots \times L^1(\mathbb{R}^n)$而不增加范数 $C\|\varphi\|_*$. 由 Riesz 表示定理知$(L^1(\mathbb{R}^n) \times \cdots \times L^1(\mathbb{R}^n))^* = L^\infty(\mathbb{R}^n) \times \cdots \times L^\infty(\mathbb{R}^n)$, 因此存在$(\varphi_0, \cdots \varphi_N) \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \times \cdots \times L^\infty(\mathbb{R}^n)$, 使得

$$\sum_0^n \|\varphi_j\|_\infty \leqslant C\|\varphi\|_*,$$

$$l_\varphi((f_0, \cdots f_n)) = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=0}^n f_j \varphi_j dx, \ \forall f_0 \in H_0, f_j = R_j f_0.$$

由引理(6.10)知

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_0 \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=0}^n f_j \varphi_j dx = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=0}^n R_j f_0 \varphi_j dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f_0 \varphi_0 dx - \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^n f_0 R_j \varphi_j dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f_0(\varphi_0 - \sum_1^n R_j\varphi_j)dx, \quad \forall f_0 \in H_0.$$

这说明 BMO 中函数 φ 与 $\varphi_0 - \sum_1^n R_j\varphi_j$ 作为 H_1 上的线性泛函在 H_0 上取值一样. H_0 的稠密性说明 $\varphi = \varphi_0 - \sum_1^n R_j\varphi_j$. 这就完成了定理的证明.

§4.7 Carleson 测度

Carleson 测度是在讨论是否存在 H_p 中函数在给定点列$\{z_n\}$(单位圆内)取给定数值$\{\lambda_n\}\subset\mathbb{C}$ 时提出的一个概念. 近来在许多分析问题中表现出了它的重要性, 例如在 H_p, BMO 理论中, 在下一章将要讲述的 Calderón – Zygmund 算子理论中, 在日冕问题中, 等等. 本节介绍这个概念与 H_p, BMO 的关系.

定义(7.1) $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 上的非负 Borel 测度 μ 称为一个 Carleson 测度, 如果

$$|\hat{Q}|_\mu \leqslant C|Q|, \quad \forall \text{ 方体 } Q\subset\mathbb{R}^n, \tag{1}$$

其中 $\hat{Q}$ 称为以 Q 为底的帐蓬, 其定义为

$$\hat{Q} = \{(y,t)\in\mathbb{R}_+^{n+1} : B(y,t)\subset Q\}. \tag{2}$$

式(1)中最小的 C 记为 $\|\mu\|$, 称为 μ 的 Carleson 模.

帐蓬的名称反映了 $\hat{Q}$ 的形状, 有一个使用上也很方便的等价形状如下:

$$\hat{Q} = \{(y,t)\in\mathbb{R}_+^{n+1} : y\in Q, 0<t<l(Q)\}. \tag{3}$$

关于 Carleson 测度的一个重要而简单的事实是所谓的 Carleson 不等式.

定理(7.2) (Carleson 不等式) 设 $f(y,t)$ 是 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 上连续函数，μ 是 Carleson 测度，则

$$\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} |f(y,t)|\,d\mu(y,t) \leqslant C\,|||\mu|||\int_{\mathbb{R}^n} f^*(x)\,dx, \tag{4}$$

其中 f^* 是 f 的非切向极大函数:

$$f^*(x) = \sup_{(y,t)\in\Gamma(x)} |f(y,t)|. \tag{5}$$

证明 记

$$E_\lambda = \{(y,t): |f(y,t)| > \lambda\}, \quad E_\lambda^* = \{x\in\mathbb{R}^n : f^*(x) > \lambda\}.$$

则 E_λ^* 是开集，故由 Whitney 分解，知 $E_\lambda^* = \bigcup_j Q_j$，且 Q_j 的边长与 Q_j 到 E_λ^* 的边界距离可比较，等价地说，存在仅与 n 有关的常数 C_0 使 $C_0Q_j\bigcap(E_\lambda^*)^c \neq \phi$. 现设 $(y,t)\in E_\lambda$，即 $|f(y,t)|>\lambda$，既然 $\forall\, x\in B(y,t)$，$(y,t)\in\Gamma(x)$，故 $f^*(x)>\lambda$，此即 $B(y,t)\subset E_\lambda^*$，特别 $y\in Q_j$ 对某个 j 成立，这样对某个常数 c_1，成立着 $t\leqslant c_1 l(Q_j)$（否则 $B(y,t)$ 将包含 c_0Q_j，因而与 $(E_\lambda^*)^c$ 有交）. 因此 Q_j 的适当倍数扩大，例如 CQ_j，将包含 $B(y,t)$. 故

$$(y,t)\in(CQ_j)^\wedge = \{(y,t)\in\mathbb{R}_+^{n+1} : B(y,t)\subset CQ_j\}.$$

从而 $E_\lambda\subset\bigcup_j(CQ_j)^\wedge$，于是

$$|E_\lambda|_\mu \leqslant \sum |(CQ_j)^\wedge|_\mu \leqslant C\,|||\mu|||\sum_j |CQ_j| \leqslant C\,|E_\lambda^*|.$$

由此推出积分不等式(4)，定理获证.

Carleson 定理的原来的形式是对调和函数来叙述的，我们把它写出来.

命题(7.3) 对 $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 上非负 Borel 测度 μ, 下述断言等价:

(a) μ 是 Carleson 测度,

(b) $$\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+}|P_t*f(x)|^p d\mu(x,t)\leqslant C\int_{\mathbb{R}^n}P^*(f,x)^p dx,$$

$$\forall p, 0<p<\infty, \forall f\in\bigcup_{q\geqslant 1}L^q. \qquad (6)$$

(c)对某个 $p>1$,(6)成立.

证明 (a)推(b)由定理(7.2)知. (c)推(a)由简单地取 $f=\chi_Q$ 知. 事实上，此时在 $\hat{Q}$ 上，有

$$|P_t*\chi_Q(x)|\geqslant\frac{C|Q|}{t^n}\geqslant C>0.$$

故由(c)得

$$C_1|\hat{Q}|_\mu\leqslant\int_{\mathbb{R}^n}|P_t*f(x)|^p d\mu\leqslant C_2\int_{\mathbb{R}^n}M(\chi_Q)^p dx\leqslant C_2|Q|.$$

这完成了(c)推(a)的证明，命题证毕.

下面讨论 BMO 与 Carleson 测度的关系，先讨论 BMO 函数在无穷远处的增长情形，如下述引理所示.

引理(7.4) 设 $\varepsilon>0$, Q_0 是任意方体，边长为 δ, 中心在 x_0. 则存在 $C=C_{\varepsilon,n}$ 使 $\forall f\in BMO$, 有

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\delta^\varepsilon|f(x)-f_{Q_0}|}{\delta^{n+\varepsilon}+|x-x_0|^{n+\varepsilon}}dx\leqslant C\|f\|_*. \qquad (7)$$

证明 令 $Q_k=2^kQ_0$ 则

$$|f_{Q_{k+1}}-f_{Q_k}|=\left|\frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k}(f_{Q_{k+1}}-f)dx\right|\leqslant 2^n\|f\|_*,$$

$$|f_{Q_k}-f_{Q_0}|\leqslant k2^n\|f\|_*.$$

设 $Q_{-1}=\phi$，则

$$\int_{R^n}\frac{\delta^\varepsilon|f(x)-f_{Q_0}|}{\delta^{n+\varepsilon}+|x-x_0|^{n+\varepsilon}}dx\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\int_{Q_k-Q_{k-1}}\frac{\delta^\varepsilon|f(x)-f_{Q_0}|}{\delta^{n+\varepsilon}+|x-x_0|^{n+\varepsilon}}dx$$

$$\leqslant C_\varepsilon\sum_{k=0}^{\infty}(2^k\delta)^{-\varepsilon}\delta^\varepsilon\frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k}|f-f_{Q_0}|dx$$

$$\leqslant C_{\varepsilon,n}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)2^{-k\varepsilon}\|f\|_*\leqslant C\|f\|_*.$$

引理获证.

定理(7.5) 设 $b\in BMO$，ψ是径向实值函数，满足

$$\int_{R^n}\psi(x)dx=0,\ |\psi(x)|+|\nabla\psi(x)|\leqslant C(1+|x|)^{-n-\varepsilon}. \qquad (8)$$

则 $d\mu=|\psi_t*b(x)|^2\dfrac{dxdt}{t}$ 是 Carleson 测度，且 $|||\mu|||\leqslant C\|b\|_*^2$.

证明 设 Q 给定，以 x_0 为心，δ 为边长，$\overline{Q}=2Q$. 令

$$b=b_{\overline{Q}}+(b-b_{\overline{Q}})\chi_{\overline{Q}}+(b-b_{\overline{Q}})\chi_{(\overline{Q})^c}=b_1+b_2+b_3,$$

由 $\int_{R^n}\psi dx=0$，知 $\psi_t*b_1(x)\equiv 0$. 而

$$\int_{\hat{Q}}|\psi_t * b_2|^2\frac{dxdt}{t}\leqslant\int_{R_+^{n+1}}|\psi_t * b_2|^2\frac{dxdt}{t}\leqslant C\int_{R^n}|b_2|^2dx$$

$$=C\int_{\overline{Q}}|b-b_{\overline{Q}}|^2dx\leqslant C|Q|.$$

此外，当$(x,t)\in\hat{Q}$时，$x\in Q,t\leqslant l(Q)$，故对$y\notin\overline{Q}$，我们有$|y-x|\geqslant C|y-x_0|$，从而有

$$|\psi_t * b_3(x)|\leqslant C\int_{R^n\setminus\overline{Q}}\frac{t^\varepsilon|b(y)-b_{\overline{Q}}|}{(t+|x-y|)^{n+\varepsilon}}dy$$

$$\leqslant C\int_{R^n\setminus\overline{Q}}\frac{t^\varepsilon|b(y)-b_{\overline{Q}}|}{(t+|y-x_0|)^{n+\varepsilon}}dy$$

$$\leqslant C t^\varepsilon\int_{R^n\setminus\overline{Q}}\frac{|b(y)-b_{\overline{Q}}|}{(\delta+|y-x_0|)^{n+\varepsilon}}dy\leqslant C\frac{t^\varepsilon}{\delta^\varepsilon}\|b\|_*,$$

这样我们得到

$$\int_{\hat{Q}}|\psi_t * b_3(x)|^2\frac{dxdt}{t}\leqslant C\int_Q\int_0^{l(Q)}\frac{t^{2\varepsilon-1}}{\delta^{2\varepsilon}}$$

$$dxdt\|b\|_*^2\leqslant C\|b\|_*^2|Q|.$$

这就完成了定理的证明.

定理的逆也是成立的，它就是后面的定理(7.8).

面积函数与 Carleson 测度的定义中的 L^2 积分可自然地推广

到 L^q 积分，现在讨论这种推广.

定义(7.6) 设 $1\leqslant q<\infty$, $f(y,t)$, $g(y,t)$是 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 上可测函数，定义(记 B 为 $\mathbb{R}^n$ 中的球)

$$A_q(f,x)=\left(\int_{\Gamma(x)}|f(y,t)|^q\frac{dydt}{t^{n+1}}\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$A_\infty(f,x)=\sup_{(y,t)\in\Gamma(x)}|f(y,t)|, \tag{9}$$

$$C_q(g,x)=\sup_{x\in B}\left(\frac{1}{|B|}\int_{\hat{B}}|g(y,t)|^q\frac{dydt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{10}$$

定理(7.7) (邓东皋) 设 $1<q\leqslant\infty$, $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$, 则

$$\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}}|f(y,t)g(y,t)|\frac{dydt}{t}\leqslant C\int_{\mathbb{R}^n}A_q(f,x)C_{q'}(g,x)dx. \tag{11}$$

证明 定义截锥:

$$\Gamma^h(x)=\{(y,t):|y-x|<t,0<t<h\}$$

以及截断面积函数

$$A_{q'}^{(h)}(g,x)=\left(\int_{\Gamma^h(x)}|g(y,t)|^{q'}\frac{dydt}{t^{n+1}}\right)^{\frac{1}{q'}}.$$

注意 $A_q^{(h)}(g,x)$单调上升地收敛于 $A_q(g,x)$. 此外定义停时 $h(x)$ 如下

$$h(x)=\sup\{h: A_q^{(h)}(g,x)\leqslant MC_q(g,x)\}, \qquad (12)$$

其中 M 是待定的, 充分大的仅依赖于维数的常数. 我们要证对半径为 r 的球 B, 有

$$|\{x\in B: h(x)>r\}|\geqslant Cr^n. \qquad (13)$$

一旦得证, 则对非负 $\Phi(y,t)$, 将有

$$\int_{R_+^{n+1}}\Phi(y,t)t^n dydt\leqslant C\int_{R^n}\int_{\Gamma^{h(x)}(x)}\Phi(y,t)dydtdx, \qquad (14)$$

这是因为右边是

$$C\int_{R^n}\int_0^\infty\Phi(y,t)\int_{R^n}\chi_{\{|x-y|<t<h(x)\}}dxdydt,$$

而内层积分又是球 $B(y,t)$中点 x 使 $h(x)$大于半径的点集的测度, 根据假定, 此测度 $\geqslant Ct^n$. 应用式(14)于 $\Phi(y,t)=|f(y,t)g(y,t)|t^{-n-1}$, 则得

$$\int_{R_+^{n+1}}|f(y,t)||g(y,t)|\frac{dydt}{t}$$

$$\leqslant C\int_{R^n}\int_{\Gamma^{h(x)}(x)}|f(y,t)||g(y,t)|\frac{dydt}{t^{n+1}}dx$$

$$\leqslant C\int_{R^n}A_q^{(h(x))}(f,x)A_q^{(h(x))}(g,x)dx$$

$$\leqslant CM\int_{R^n} A_q(f,x)C_{q'}(g,x)dx.$$

这将完成定理的证明．现在回到关键事实(13)的证明．设 B 是半径为 r 的任意球，$\overline{B}=3B$．这时

$$\frac{1}{|B|}\int_B (A_{q'}^{(r)}(g,x))^{q'}dx$$

$$=\frac{1}{|B|}\int_{R^n}\int_0^\infty |g(y,t)|^{q'}\int_{R^n}\chi_{\{x\in B:|x-y|<t<r\}}dx\frac{dydt}{t^{n+1}}$$

$$\leqslant \frac{C}{|B|}\int_{\hat{\bar{B}}}|g(y,t)|^{q'}\frac{dydt}{t}\leqslant C\inf_{x\in\bar{B}}(C_{q'}(g,x))^{q'}.$$

但同时由(12)知

$$\frac{1}{|B|}\int_B (A_{q'}^{(r)}(g,x))^{q'}dx\geqslant\frac{1}{|B|}\int_{\{x\in B:h(x)\leqslant r\}}(A_{q'}^{(h(x))}(g,x))^{q'}dx$$

$$\geqslant\frac{1}{|B|}\int_{\{x\in B:h(x)\leqslant r\}}M^{q'}(C_{q'}(g,x))^{q'}dx$$

$$\geqslant\frac{1}{|B|}M^{q'}|\{x\in B:h(x)\leqslant r\}|\inf_{x\in B}(C_{q'}(g,x))^{q'}.$$

这样我们得到

$$\frac{1}{|B|}M^{q'}|\{x\in B:h(x)\leqslant r\}|\leqslant C.$$

注意此处 C 只与维数有关．故存在 M 只与维数有关，使得 $|\{x\in B: h(x)\leqslant r\}|\leqslant \frac{C}{M^q}|B|\leqslant \frac{1}{2}|B|$，故 $|\{x\in B: h(x)>r\}|$

$\geqslant \frac{1}{2}|B|\geqslant Cr^n$．定理至此完全获证．

当 $q'=1, q=\infty$ 时，如果 $|g(y,t)|\frac{dydt}{t}$ 是 Carleson 测度，这意味着 $C_{q'}\in L^\infty$，则式(11)化为定理(7.2)的 Carleson 不等式，因为这时 $A_\infty(f)$ 就是非切向极大函数(见 §4.9 习题 5)．$q=2$ 时就得到 H_1-BMO 对偶定理．事实上，设 ψ 是径向实值函数，满足 $\int_{R^n}\psi(x)dx=0$，以及 $|\psi(x)|+|\nabla\psi(x)|\leqslant C(1+|x|)^{-n-1-\varepsilon}$，则

我们已对此种 ψ 建立了 H_1 的 S 函数刻划．注意 $S(f,x)=A_2(f,x)$．此外，我们在定理(7.5)中知道对此 ψ，$b\in BMO$，蕴含 $|\psi_t * b(x)|^2\frac{dxdt}{t}$ 是 Carleson 测度，故由刚才得到的 A_q 与 $C_{q'}$ 的对偶即得

$$\left|\int_{R^n} f(x)b(x)dx\right|=\left|\int_{R_+^{n+1}}\psi_t * f(x)\psi_t * b(x)\frac{dxdt}{t}\right|$$

$$\leqslant C\|b\|_*\int_{R^n} S(f,x)dx.$$

此即 H_1-BMO 对偶．一个相关的事实是当承认 H_1-BMO 对偶理论时，这个定理可用来得到定理(7.5)的逆．

定理(7.8) 设 ψ 是径向实值函数，使 $\int_{R^n}\psi(x)dx=0$，以及

$$|\psi(x)|+|\nabla\psi(x)|\leqslant C(1+|x|)^{-n-\varepsilon},$$

$$\int_0^\infty|\hat{\psi}(t\xi)|^2\frac{dt}{t}\neq 0,\quad\forall\,\xi\neq 0.$$

假设 $b\in L^1_{\mathrm{loc}}$, 且使 $d\mu=|\psi_t*b|^2\dfrac{dxdt}{t}$ 是 Carleson 测度，则 $b\in BMO$.

证明 设 $f\in H_1$, 对 $q=q'=2$ 应用定理(7.7)知 b 可在 H_1 上通过式子

$$\int_{\mathbb{R}^n}f\,b\,dx=C\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+}\psi_t*f(x)\psi_t*b(x)\frac{dxdt}{t}$$

定义一个有界线性泛函，它满足

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n}f\,b\,dx\right|\leqslant C|||\mu|||^{\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}S(f,x)dx=C|||\mu|||\,\|f\|_{H_1}.$$

这证明了 $b\in BMO$, 且 $\|b\|_*\leqslant C|||\mu|||^{\frac{1}{2}}$. 定理获证.

BMO 与 Carleson 测度的关系还可通过所谓扫帚算子来体现，对任意 $\nu\in M(\mathbb{R}^{n+1}_+)$($\mathbb{R}^{n+1}_+$ 上有界复值 Borel 测度的全体)，定义

$$S(\nu)(y)=\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+}P_t(x-y)d\nu(x,t),\tag{15}$$

其中 $P_t(x)$ 是 Poisson 核.

定理(7.9) 设 $\mu\in M(\mathbb{R}^{n+1}_+)$，使得 $|\mu|$ 是 Carleson 测度. 则 $S(\mu)\in BMO$, 且 $\|S(\mu)\|_*\leqslant C|||\mu|||$.

证明 无妨设 $\mu\geqslant 0$. 设 I_0 是以 y_0 为中心，δ 为边长的方体.

令 $I_k=2^kI_0$，则 $\forall y\in I_0,\forall(x,t)\in\hat{I}_k\setminus\hat{I}_{k-1},k\geqslant 2$，

$$|P_t(x-y)-P_t(x-y_0)|\leqslant C\frac{|y-y_0|}{(t^2+|x-y_0|^2)^{\frac{n+1}{2}}}\leqslant C\frac{\delta}{(2^k\delta)^{n+1}}.$$

因此

$$\int_{I_0}\left|\int_{\hat{I}_1}P_t(x-y)d\mu(x,t)\right|dy=\int_{\hat{I}_1}\int_{I_0}P_t(x-y)dyd\mu(x,t)$$

$$\leqslant C|\hat{I}_1|_\mu\leqslant C|||\mu|||\,|I_0|.$$

$$\int_{I_0}\left|\int_{\hat{I}_k\setminus\hat{I}_{k-1}}(P_t(x-y)-P_t(x-y_0))d\mu(x,t)\right|dy$$

$$\leqslant C\int_{I_0}\frac{\delta}{(2^k\delta)^{n+1}}|\hat{I}_k|_\mu dy\leqslant C2^{-k}|||\mu|||\,|I_0|.$$

若令

$$C_{I_0}=\int_{R^n\setminus I_1}P_t(x-y_0)d\mu(x,t),$$

则我们得

$$\frac{1}{|I_0|}\int_{I_0}|S(\mu,y)-C_{I_0}|dy$$

$$\leqslant\frac{1}{|I_0|}\int_{I_0}\left|\int_{\hat{I}_1}P_t(x-y)d\mu(x,t)\right|dy$$

$$+\frac{1}{|I_0|}\int_{I_0}\left|\sum_{k=2}^{\infty}\int_{\hat{I}_k\setminus\hat{I}_{k-1}}(P_t(x-y)-P_t(x-y_0))d\mu(x,t)\right|dy$$

$$\leqslant C\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}|||\mu|||=C|||\mu|||.$$

这就证明了断言. 定理获证.

将 S 看成 $M(\mathbb{R}_+^{n+1})$到 L^1 内有界的算子, 则其共轭算子正是定义在 L^∞ 上的 Poisson 积分算子. 另外, 本定理的逆也成立, 即每个 BMO 函数可表为$S(\mu)$, 其中 μ 是 Carleson 测度, 我们略去证明.

§4.8 Besov 空间 $B_{p,q}^s$ 与 Triebel－Lizorkin 空间 $F_{p,q}^s$

除了 Lebesgue 空间、连续函数空间、Hardy 空间以及 BMO 等主要的函数空间以外, 我们在分析的其他分支, 例如偏微分方程, 还经常遇到别的一些函数空间, 例如由 f 及其导数的L^p 属性定义的 Sobolev 空间, 以及由函数的光滑性所定义的 Lipschitz 空间等. J. Peetre 发现, 所有这些空间都可统一地用 $\mathscr{S}$ 中满足适当条件的函数ψ 来定义. 例如我们已知 $L^p,p>1$, 可用 ψ 生成的 g 函数的 L^p 可积性来定义; $H_p,p\leqslant 1$, 可用 ψ 生成的面积函数 S的 L^p 可积性来定义. 我们再以 Sobolev 空间 H_2^s 为例, 看看它如何被类似地定义出来. 先考虑乘法算子 $T^s:f\to(1+|x|^2)^{\frac{s}{2}}f$, s 实数, 它作用在 f 上的 L^2 模与 f 自己的L^2 模有如下关系:

$$\|T^sf\|_2^2=\sum_{-\infty}^{\infty}\int_{2^{j-1}}^{2^j}(1+|x|^2)^s|f(x)|^2dx$$

$$\approx \sum_{-\infty}^{\infty} 2^{2js} \| \chi_j f \|_2^2,$$

χ_j 表示特征函数 $\chi_{\{2^{j-1} \leqslant |x| < 2^j\}}$. 现过渡到对应的微分算子

$$v: f \to (-\Delta + I)f, \quad v^s: f \to (-\Delta + I)^{\frac{s}{2}} f.$$

应用 Plancherel 定理(§2.4 定理 4.9), 我们有

$$\| v^s f \|_2^2 = \| \mathscr{F}(v^s f) \|_2^2 = \| T^s \mathscr{F} f \|_2^2 \approx \sum_{-\infty}^{\infty} 2^{2js} \| \chi_j \mathscr{F} f \|_2^2$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} 2^{2js} \| \mathscr{F}^{-1}(\chi_j \mathscr{F} f) \|_2^2.$$

Sobolev 空间 $L_m^2, m \in \mathbb{Z}_+$, 便可定义为

$$L_m^2 = \{ f \in L^2 : \| f \|_{L_m^2} = \| f \|_2 + \| v^m f \|_2 < \infty \}.$$

本来它的定义中还包含有f的其他阶导数的L^2模, 但由 Sobolev 嵌入定理知

$$\| v^s f \|_2 \leqslant C(\| f \|_2 + \| v^m f \|_2), \quad \forall s, |s| \leqslant m. \qquad (*)$$

事实上, 这是我们在 §3.7 定理(7.13)中讨论过的 Mihlin－Hörmander 乘子定理的推论. 事实上, 定理断言, 如果 m 满足

$$\| |x|^{\alpha} \frac{\partial^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} m(x) \|_{\infty} \leqslant B, \ \forall \alpha, |\alpha| \leqslant k, k > \frac{n}{2}, \text{则 } m \text{ 是 } L^p \text{ 乘子}.$$

Sobolev 嵌入定理($*$)可以改写为

$$\| \mathscr{F}^{-1}(\xi^{\alpha} \mathscr{F} f) \|_p \leqslant C \| \mathscr{F}^{-1}\left(\left(1 + \sum_{j=1}^{n} \xi_j^{2k} \right) \mathscr{F} f \right) \|_p,$$

或等价地(记 $g=\mathscr{F}^{-1}((1+\sum_{j=1}^{n}\xi_j^{2k})\mathscr{F}f)$)

$$\|\mathscr{F}^{-1}(\xi^\alpha\left(1+\sum_{j=1}^{n}\xi_j^{2k}\right)^{-1}\mathscr{F}g)\|_p\leqslant C\|g\|_p.$$

因此应用 Mihlin – Hörmander 定理于 $m_\alpha(x)=\xi^\alpha\left(1+\sum_{j=1}^{n}\xi_j^{2k}\right)^{-1}$,

由于它满足 $\|(1+|\xi|^\beta)D^\beta m_\alpha(\xi)\|_\infty\leqslant B$, 知 m_α 是 L^p 乘子, 即$(*)$成立. 除 Sobolev 空间外, 其它函数空间可类似地被定义, 这里用以截取f的Fourier 变换的函数 χ_j 要用光滑函数 ψ_j 代替. 因此, 为定义函数空间, 我们先要讨论具有紧支集 Fourier 变换的函数或广义函数的性质, 然后, 在此基础上给出 Besov 与 Triebel – Lizorkin 两类空间的定义. 至于空间的性质, 我们则建议读者参考 H. Triebel 的书 [Tr]. 从前面的介绍看出, 其思想来源于 Littlewood – Paley 理论(见 §3.7). 首先讨论具有紧支集 Fourier 变换的函数或广义函数的性质.

我们已在 §2.4 讲过, 具有紧支集 Fourier 变换的函数可扩充为半平面上的指数增长的整函数, 此即 Paley – Wiener 定理(§2.4 定理 4.18). 在高维情形, 可以类似地刻划具有紧支集的 $\mathscr{S}$ 中函数与$\mathscr{S}'$中广义函数的Fourier 变换, 此即 Paley – Wiener – Schwartz 定理, 我们叙述它而只证涉及到 $\mathscr{S}$ 中函数的那部分.

定理(8.1) (Paley – Wiener – Schwartz) 下述(a), (b)等价, (c), (d)等价.

(a) $f\in\mathscr{S}$, 且$\mathscr{F}f$ 支于球$\{\xi:|\xi|\leqslant b\}$,

(b) $f(z)$作为$f(x)$到 $\mathbb{C}^n$ 中的扩充, $z=(z_1,\cdots,z_n)$, $z_j=x_j+iy_j$, 具有下述性质, $\forall\lambda>0$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists C_{\lambda,\varepsilon}$ 使

$$|f(z)|\leqslant C_{\lambda,\varepsilon}(1+|x|)^{-\lambda}e^{(b+\varepsilon)|y|},\ z=x+iy,\ x=(x_1,\cdots x_n),$$

$$y=(y_1,\cdots,y_n);\tag{1}$$

$(c)\ f\in\mathscr{S}'$, 且$\mathscr{F}f$支于$\{\xi:|\xi|\leqslant b\}$,

$(d)\ f(z)$作为$f(x)$到$\mathbb{C}^n$中的延拓满足，对某个实数λ, $\forall\varepsilon$; $\exists C_\varepsilon$使

$$|f(z)|\leqslant C_\varepsilon(1+|x|)^\lambda e^{(b+\varepsilon)|y|},\ z=x+iy,\ x=(x_1,\cdots,x_n),$$

$$y=(y_1,\cdots,y_n).\tag{2}$$

证明 只证(a), (b)等价. 设$f\in\mathscr{S}$, 且$\mathscr{F}f=F(\xi)$支于半径为b的球，则(注意$F(\xi)\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$)

$$f(x)=a_0\int_{\{|\xi|\leqslant b\}}F(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi,$$

$$-ix^\alpha f(x)=a_0\int_{\{|\xi|\leqslant b\}}D^\alpha F(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi.$$

故以$z=x+iy$代x即得

$$|f(z)|\leqslant C_\alpha(1+|z|)^{-|\alpha|}e^{b|y|},\ \forall z,\ \ \forall\alpha.$$

此即f满足(1). 现设$f(z)$满足(1). 要证$\mathscr{F}f(\xi)=F(\xi)$支于$\{\xi:|\xi|\leqslant b\}$. 现在我们从

$$F(\xi)=a_0\int_{\mathbb{R}^n}f(x)e^{-ix\cdot\xi}dx$$

出发，设$\xi\in\mathbb{R}^n$, $\alpha>0$, $y_0=\dfrac{\alpha\xi}{|\xi|}$, 考虑由如下四部分构成的围道

$$\Gamma:\Gamma_1=[-M,M],\Gamma_2=[-M+iy_0,M+iy_0],\Gamma_3=-M+iy,$$

$\Gamma_4=M+iy$，y 在 0 与 y_0 之间，其中 $M, y_0\in\mathbb{R}^n$. 则 $\displaystyle\int_\Gamma f(z)e^{-iz\cdot\xi}dz=0$. 但

$$\left|\int_{\Gamma_3\cup\Gamma_4} f(z)e^{-iz\cdot\xi}dz\right|\leqslant C_{N,\varepsilon}\,\alpha e^{\alpha(|\xi|+b+\varepsilon)}(1+|M|)^{-N}\to 0,$$

$$|M|\to\infty.$$

故得

$$F(\xi)=a_0\int_{\mathbb{R}^n} f(x+iy_0)e^{-i(x+iy_0)\cdot\xi}dx,$$

$$|F(\xi)|\leqslant C_{N,\varepsilon}\,e^{(b+\varepsilon)|y_0|+y_0\cdot\xi}\int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|)^{-N}dx$$

$$\leqslant C_{N,\varepsilon}\,e^{\alpha(b+\varepsilon-|\xi|)}.$$

当 $|\xi|>b$ 时，选 ε 充分小，使 e 的指数是负的，令 $\alpha\to\infty$ 则推出 $F(\xi)=0$，这就证明了 $F(\xi)$ 支于 $\{\xi:|\xi|\leqslant b\}$. 定理获证.

下面讨论有紧支集 Fourier 变换的函数或广义函数的其他性质. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中紧集，记

$$\mathscr{S}'^{\Omega}=\{\varphi\in\mathscr{S}':\operatorname{supp}\mathscr{F}\varphi\subset\Omega\},\tag{3}$$

$$L^{p,\Omega}=\{f\in L^p,\ \operatorname{supp}\mathscr{F}f\subset\Omega\},\ 0<p\leqslant\infty.\tag{4}$$

下面要得到所谓 Plancherel－Polya－Nikolskij 不等式. 它说 $\|f\|_p$ 等价于 f 在适当格点上的限制的 l^p 模，以及 $\|D^\alpha f\|_q$ 等价于 $\|f\|_p$，$\forall\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，$\forall q, p\leqslant q\leqslant\infty$.

引理(8.2) 记 M 为 Hardy – Littlewood 极大算子，$0<r<\infty$，$M_r(f)=M^r(|f|^r)$. 则 $\forall\varphi\in\mathscr{S}^{\Omega}$，$\forall x\in\mathbb{R}^n$，有

$$\begin{aligned}&\sup_{z\in\mathbb{R}^n}(1+|z|)^{-\frac{n}{r}}|\nabla\varphi(x-z)|\\ \leqslant\ & C\sup_{z\in\mathbb{R}^n}(1+|z|)^{-\frac{n}{r}}|\varphi(x-z)|\\ \leqslant\ & CM_r(\varphi,x).\end{aligned}\tag{5}$$

证明 取 $\psi\in\mathscr{S}$ 满足 $\mathscr{F}\psi|_{\Omega}=1$，则 $\forall\varphi\in\mathscr{S}^{\Omega}$，有

$$\mathscr{F}\varphi=\mathscr{F}\varphi\cdot\mathscr{F}\psi,\quad \varphi=a_0\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(y)\psi(x-y)dy,$$

$$\begin{aligned}\nabla\varphi(x-z)&=C\left|\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(y)\nabla\psi(x-y-z)dy\right|\\ &\leqslant C\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi(y)|(1+|x-y-z|)^{-N}dy.\end{aligned}$$

应用不等式

$$\frac{1+|x-y|^{\frac{n}{r}}}{1+|z|^{\frac{n}{r}}}\leqslant C(1+|x-y-z|^{\frac{n}{r}}),\quad \forall x,y,z\in\mathbb{R}^n,\tag{6}$$

(它的证明是显然的，只需分情况 $|z|\leqslant\frac{1}{2}|x-y|$ 与 $|z|>\frac{1}{2}|x-y|$ 讨论)，可得(N 充分大，使 $N-\frac{n}{r}>n$)

$$\sup_{z\in\mathbb{R}^n}(1+|z|)^{-\frac{n}{r}}|\nabla\varphi(x-z)|$$

$$\leqslant C\sup_{z\in\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\varphi(y)}{1+|x-y|^{\frac{n}{r}}}(1+|x-y-z|)^{-(N-\frac{n}{r})}dy$$

$$\leqslant C\sup_{z\in\mathbb{R}^n}(1+|z|)^{-\frac{n}{r}}|\varphi(x-z)|.$$

这证明了式(5)中第一个不等式. 第二个不等式由下述事实得: 设 $g(z)$是 $\mathbb{R}^n$ 中任意球 B_δ(以任意点为中心, 半径为 δ)上的连续可微函数, 则

$$|g(z)|\leqslant C\delta\sup_{y\in B_\delta}|\nabla g(y)|+C\delta^{-\frac{n}{r}}\left(\int_{B_\delta}|g(y)|^r dy\right)^{\frac{1}{r}},$$

$$\forall z\in B_\delta. \qquad (7)$$

事实上这只需取 $z_0\in B_\delta$ 使 $g(z_0)$达到极小, 然后应用微分中值公式, 得

$$|g(z)|\leqslant|g(z_0)|+C\delta\sup_{y\in B_\delta}|\nabla g(y)|,$$

由它进一步便可得到(7). 现设 B_δ 是以 0 为中心, δ 为半径的球, 对 $\varphi(x-z+y)$作为 y 的函数(x, z 任意取定)在 B_δ 上应用(7)即得

$$|\varphi(x-z)|\leqslant C\delta\sup_{y:|y|\leqslant\delta}|\nabla\varphi(x-z-y)|$$

$$+C\delta^{-\frac{n}{r}}\left(\int_{|y|\leqslant\delta}|\varphi(x-z-y)|^r dy\right)^{\frac{1}{r}}. \qquad (8)$$

设 $\delta\leqslant 1$，则上式中的积分

$$\leqslant C\,\delta^{-\frac{n}{r}}\left(\int_{|y|\leqslant 1+|z|}|\varphi(x-y)|^{r}dy\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$\leqslant C\,\delta^{-\frac{n}{r}}(1+|z|)^{\frac{n}{r}}M_r(\varphi,x).$$

将此代入(8)，两边除以$(1+|z|)^{\frac{n}{r}}$，则得

$$\sup_{z\in\mathbb{R}^n}(1+|z|)^{-\frac{n}{r}}|\varphi(x-z)|$$

$$\leqslant C\,\delta\sup_{z\in\mathbb{R}^n}(1+|z|)^{-\frac{n}{r}}|\nabla\varphi(x-z)|+C\delta^{-\frac{n}{r}}M_r(\varphi,x). \tag{9}$$

应用已经证明过的式(5)中的第一个不等式，注意 $\varphi\in\mathcal{S}$，因而 $\sup\limits_{z\in\mathbb{R}^n}(1+|z|)^{-\frac{n}{r}}|\varphi(x-z)|<\infty$，$\forall x$，以及$\delta$可任意小，知式(9)右边第一项可以 $\leqslant\dfrac{1}{2}\sup\limits_{z\in\mathbb{R}^n}(1+|z|)^{-\frac{n}{r}}|\varphi(x-z)|$，这样便得到式(5)之第二个不等式. 引理获证.

下面是 Plancherel – Polya – Nikolskij 型不等式:

定理(8.3) 设 α 是多重指标，$0<p\leqslant q\leqslant\infty$，则

$$\|D^{\alpha}\varphi\|_q\leqslant C\|\varphi\|_p,\quad\forall\varphi\in\mathcal{S}^{\Omega}. \tag{10}$$

证明 取 $\psi\in\mathcal{S}$，满足 $\hat{\psi}|_{\Omega}=1$. 假设 $\alpha=0$. 先证 $q=\infty$ 情形. 当 $p\geqslant 1$ 时，对

$$\varphi(x)=C\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(y)\psi(x-y)dy=C\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x-y)\psi(y)dy$$

应用 Hölder 不等式便得(10). 当$p<1$,由

$$|\varphi(x)|\leqslant C\sup_{y}|\varphi(y)|^{1-p}\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi(y)|^p dy.$$

对 x 取 sup 即得(10). 现看$p<1, p\leqslant q<\infty$ 情形. 这时

$$\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi(y)|^q dy\leqslant \sup_{y}|\varphi(y)|^{q-p}\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi(y)|^p dy$$

$$\leqslant C\|\varphi\|_p^{q-p+p}=C\|\varphi\|_p^q.$$

当$1\leqslant p<q<\infty$ 时, 取 $\frac{1}{r}=1+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$, 应用卷积的 Young 不等式, $\varphi\in L^p, \psi\in L^r$, 知卷积属于 L^q, 且有相应的范数估计. 这完成了 $\alpha=0$ 的结论的证明. 对任意多重指标 α, 由

$$D^\alpha\varphi(x)=C\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(y)D^\alpha\psi(x-y)dy,$$

知同样的证明给出了一般 α 时的结论, 定理获证.

现在考虑上述不等式的离散类似, 充分地只需建立对某离散测度 μ, 有 $\|f\|_p$ 与 $\|f\|_{L^p(\mu)}$等价, 一旦有了它, 则我们对此 μ 也将有

$$\|D^\alpha f\|_{L^q(\mu)}\approx\|D^\alpha f\|_q\leqslant C\|f\|_p\approx\|f\|_{L^p(\mu)}, \quad \forall\alpha.$$

我们考虑的离散测度是格点上的 Dirac 测度.

设 $k=(k_1,\cdots k_n)$是 $\mathbb{R}^n$ 中整点, 记

$$Q_{k,h}=\{x=(x_1,\cdots x_n): k_jh\leqslant x_j<(k_j+1)h, j=1,\cdots n\},\ h>0.$$

对固定 h, $\{Q_{k,h}\}_k$ 构成了 $\mathbb{R}^n$ 的一个剖分. 任意取 $x_k\in Q_{k,h}$ 固定, 我们得到一个格点结构.

定理(8.4) 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中紧集, 则存在 h_0, 使 $\forall\, h,\, h<h_0$, $\forall\,\varphi\in\mathscr{S}^{\Omega}$, 我们有

$$C_1\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}|\varphi(x_k)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant h^{-\frac{n}{p}}\|\varphi\|_p\leqslant C_2\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}|\varphi(x_k)|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{11}$$

证明 $\forall\, x\in Q_{k,h}$, 有

$$\begin{aligned}|\varphi(x)|&\leqslant|\varphi(x_k)|+Ch\sup_{z\in Q_{k,h}}|\nabla\varphi(z)|\\&\leqslant|\varphi(x_k)|+Ch\sup_{z\in B_{x,Ch}}|\nabla\varphi(z)|.\end{aligned}\tag{12}$$

但应用式(5)有

$$\sup_{z\in B_{x,Ch}}|\nabla\varphi(z)|=\sup_{z\in B_{Ch}}|\nabla\varphi(x-z)|\leqslant CM_r(\varphi,x).$$

设 $p<\infty$. 对(12)两边取 p 次幂, 然后在 $Q_{k,h}$ 上积分, 并对 k 求和得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi(x)|^p dx&\leqslant Ch^n\sum_k|\varphi(x_k)|^p+Ch^p\int_{\mathbb{R}^n}M(|\varphi|^r)^{\frac{p}{r}}dx\\&\leqslant Ch^n\sum_k|\varphi(x_k)|^p+Ch^p\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi(x)|^p dx.\end{aligned}\tag{13}$$

这里只需取$r<p$. 注意这里的系数 C 均只依赖紧集 Ω(因 ψ 被它决定), 故存在 h_0 使当 $h<h_0$ 时 $Ch^p\leqslant\frac{1}{2}$, 这证明了(11)的第二

个不等式．至于(11)的第一个不等式由

$$|\varphi(x_k)|\leqslant|\varphi(x)|+Ch\sup_{z\in B_{x,Ch}}|\nabla\varphi(z)|\leqslant|\varphi(x)|+Ch\,M_r(\varphi,x),$$

即得

$$h^n\sum_k|\varphi(x_k)|^p\leqslant C\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi(x)|^p dx+Ch^p\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi(x)|^p dx$$

$$\leqslant C\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi(x)|^p dx.$$

当 $p=\infty$ 时，第一个不等式显然，第二个不等式由(12)以及 $\|\nabla\varphi\|_\infty\leqslant C\|\varphi\|_\infty$ 而得．定理证毕．

一个有意思的问题是当 $\Omega=Q_b=\{x:|x|\leqslant b\}$ 时，式(10)与式(11)中的系数 C 与 b 的依赖关系如何？答案是(10)中的 C_b 满足

$$C_b\leqslant C\,b^{|\alpha|+n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)},\tag{14}$$

而式(11)中的系数 C 与 b 无关．事实上，设 $\varphi\in\mathscr{S}^{Q_b}$，则 $\psi=b^{-n}\varphi\left(\frac{x}{b}\right)\in\mathscr{S}^{Q_1}$（因 $\mathscr{F}\psi(\xi)=\mathscr{F}\varphi(b\xi)$），故对仅依赖于 n 的系数 C 有

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|D^\alpha\psi|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant C\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\psi|^p dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

即

$$|b|^{-|\alpha|-n} b^{\frac{n}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha \varphi|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C |b|^{-n+\frac{n}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

这就推出了(14)、对$\varphi \in \mathscr{S}^{Q_b}$，同样令$\psi \in \mathscr{S}^{Q_1}$，有

$$\left(\sum_k |\varphi(x_k)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = b^n \left(\sum_k |\psi(bx_k)|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\|\psi\|_p = b^{-n+\frac{n}{p}} \|\varphi\|_p.$$

但 $x_k \in Q_{k,h}$，则

$$y_k = bx_k \in bQ_{k,h} = \{ y : bhk_j \leqslant y_j < bh(k_j + 1),\ j = 1, \cdots, n \}.$$

故我们可对格点$\{y_k\}$应用式(11)，即

$$\left(\sum_k |\psi(bx_k)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \approx (bh)^{-\frac{n}{p}} \|\psi\|_p,$$

这就是

$$\left(\sum_k |\varphi(x_k)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \approx h^{-\frac{n}{p}} \|\varphi\|_p,$$

比较系数发现，同$\Omega = \mathscr{Q}_1$情形一样，即不依赖于b. 但式(11)中使用的条件$h < h_0$中的h_0则随b增大而减小。更确切地说应该有$h_0 \approx \frac{1}{b}$，这因对给定$\varphi \in \mathscr{S}^{Q_b}$，由(13)应用于$\psi = \varphi_b$，得

$$b^{-n+\frac{n}{p}}\|\varphi\|_p\leqslant Cb^{-n}(bh)^{\frac{n}{p}}\left(\sum_k|\varphi(x_k)|^p\right)^{\frac{1}{p}}+Cb^{-n+\frac{n}{p}}(bh)\|\varphi\|_p,$$

$$\|\varphi\|_p\leqslant Ch^{\frac{n}{p}}\left(\sum_k|\varphi(x_k)|^p\right)^{\frac{1}{p}}+Cbh\|\varphi\|_p. \tag{15}$$

由此可知h只需满足 $h<h_0\leqslant\dfrac{1}{2Cb}$（$C$只依赖于维数）即可. 这证明了断言.

上述引理(8.2)与定理(8.3)可由 $\mathscr{S}^{\Omega}$ 推广到 $L^{p,\Omega}$, 正是在这里我们要用 Paley－Wiener－Schwartz 定理.

定理(8.5) 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中紧集, $0<p\leqslant q\leqslant\infty$, $0<r<p$. 则

$$\left\|\sup_{z\in\mathbb{R}^n}\frac{|f(\cdot-z)|}{1+|z|^{\frac{n}{r}}}\right\|_p\leqslant C\|f\|_p,\ \forall f\in L^{p,\Omega}, \tag{16}$$

以及 $\forall\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$,

$$\|D^\alpha f\|_q\leqslant C\|f\|_p,\ \forall f\in L^{p,\Omega}. \tag{17}$$

证明 当$p=\infty$ 时, (16)显然成立. 设 $0<r<p<\infty$. 选 $\varphi\in\mathscr{S}$ 满足$\varphi(0)=1$, $\operatorname{supp}\mathscr{F}\varphi\subset Q_1=\{y\,.\,|y|\leqslant1\}$, 令 $f_\delta(x)=\varphi(\delta x)f(x)$, $0<\delta<1$, 其中 $f\in L^{p,\Omega}$. 则由 Paley－Wiener－Schwartz 定理知$f_\delta\in\mathscr{S}$（这因f可以扩充为复$z\in\mathbb{C}^n$的整函数, 且关于 $x\in\mathbb{R}^n$ 的增长性是某个阶次的多项式增长）, 且$\mathscr{F}f_\delta$ 支于 Q_1 与$\mathscr{F}f$ 的支集 Ω 的代数和$\overline{\Omega}$内. 故由对 $\mathscr{S}^{\overline{\Omega}}$的有关结论知(16)对$f_\delta$代替$f$ 成立. 应用(10)于 f_δ, 其中 $q=\infty$, 知$\{f_\delta\}$是一致模意义下的 Cauchy 序列. 但因$f_\delta\to f$在$\mathscr{S}'$中(这因$\langle\psi,f_\delta\rangle=$

$\langle \varphi_\delta\psi, f \rangle$, 而 $\varphi_\delta\psi \to \psi$ 在 $\mathscr{S}$ 中), 故$\{f_\delta\}$的一致极限就是f. 在下式中令$\delta \to 0$

$$\left\| \sup_{z\in\mathbb{R}^n} \frac{f_\delta(\cdot - z)}{1+|z|^{\frac{n}{r}}} \right\|_p \leqslant C\| M^{\frac{1}{r}}(|f_\delta|^r)\|_p$$

$$\leqslant C\|f_\delta\|_p \leqslant C\|f\|_p, \ \forall f \in L^{p,\Omega},$$

即得所需的结论, (16)得证.

对(17)类似地有

$$\| D^\alpha f_\delta \|_q \leqslant C\|f_\delta\|_p \leqslant C\|f\|_p, \ \forall f\in L^{p,\Omega}.$$

同样 $D^\alpha f_\delta \to D^\alpha f$, 当 $\delta \to 0$ 时. Fatou 引理给出了所需要的结论. 定理证毕.

现在讨论 $L^{p,\Omega}$ 的一个 Fourier 乘子定理.

定义(8.6) 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个紧集, $0<p\leqslant\infty$. 设 $m\in\mathscr{S}'$ 使$\mathscr{F}^{-1}m\in L^1$. 则 m 称为 $L^{p,\Omega}$ 的一个乘子, 如果

$$\|\mathscr{F}^{-1}(m\mathscr{F}f)\|_p \leqslant C\|f\|_p, \ \forall f\in L^{p,\Omega}. \tag{18}$$

注 由于$\mathscr{F}^{-1}m\in L^1$, 下式有意义:

$$\mathscr{F}^{-1}(m\mathscr{F}f) = a_0\int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{F}^{-1}m(y)f(x-y)dy, \ \forall f\in \bigcup_{p\geqslant 1} L^p. \tag{19}$$

引理(8.7) 设 Ω, Γ 是 $\mathbb{R}^n$ 中两个紧集, $0<p\leqslant\infty$, $\widetilde{p}=\min(p,1)$. 则 $\forall f\in L^{p,\Omega}$, 对任意 $m(\xi)$满足 $\mathscr{F}^{-1}m\in L^{\widetilde{p},\Gamma}$, 有

$$\|\mathscr{F}^{-1}(m\mathscr{F}f)\|_p \leqslant C\|\mathscr{F}^{-1}m\|_{\widetilde{p}}\|f\|_p. \tag{20}$$

证明 注意 $\mathscr{F}^{-1}m\in L^{p,\Gamma}$ 推出 $\mathscr{F}^{-1}m\in L^{1}$. 故当 $p\geqslant 1$ 时，结论自然成立. 现设 $p<1$. 注意 $\mathscr{F}^{-1}m\in L^{p,\Gamma}$ 还推出 $\mathscr{F}^{-1}m\in L^{\infty}$，故对 x 固定，作为 y 的函数

$$g(y)=\mathscr{F}^{-1}m(y)f(x-y)\in L^{p,\Gamma-\Omega},$$

这因为它的Fourier变换是 $m(\xi)$ 与 $\mathscr{F}f(-\xi)e^{ix\cdot\xi}$ 的卷积，因此支于 Γ 与 $-\Omega$ 的代数和即 $\Gamma-\Omega$ 内. 故由定理 8.5 知 $\|g\|_1\leqslant C\|g\|_p, p\leqslant 1$，从而

$$|\mathscr{F}^{-1}(m\mathscr{F}f)(x)|\leqslant a_0\int_{\mathbb{R}^n}|\mathscr{F}^{-1}m(y)f(x-y)|dy$$

$$\leqslant C\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\mathscr{F}^{-1}m(y)|^p|f(x-y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}.$$

于是

$$\|\mathscr{F}^{-1}(m\mathscr{F}f)\|_p\leqslant C\|\mathscr{F}^{-1}m\|_p\|f\|_p.$$

这完成了引理的证明.

现在给出关于 Fourier 乘子的一个重要定理.

定理(8.8) 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 的紧集，$0<p\leqslant\infty$，$\sigma_p=n\left(\frac{1}{\min(1,p)}-\frac{1}{2}\right)$，$N\in\mathbb{Z}_+$，$N>\sigma_p$，则 $\forall f\in L^{p,\Omega}$、$\forall m\in L^2_N$，有

$$\|\mathscr{F}^{-1}(m\mathscr{F}f)\|_p\leqslant C\|m\|_{L^2_N}\|f\|_p. \tag{21}$$

这里 L_N^2 是 Sobolev 空间，其等价定义为(对 $-\infty<s<\infty$，并用它的另一通用记号)，

$$H_2^s=\{f\in\mathscr{S}':\|f\|_{H_2^s}=\|(1+|x|^2)^{\frac{s}{2}}\mathscr{F}f\|_2<\infty\}. \qquad (22)$$

证明 设 $f\in L^{p,\Omega}$，选 $\psi\in\mathscr{S}$ 使得

$$\operatorname{supp}\psi\subset\widetilde{\Omega}=\{y:\operatorname{dist}(y,\Omega)\leqslant 1\},\ \psi|_\Omega\equiv 1,$$

$$|D^\alpha\psi|\leqslant C \text{ 不依赖于 } \Omega,$$

则 $m\mathscr{F}f=\psi m\mathscr{F}f$，而 ψm 满足

$$\operatorname{supp}\psi m\subset\widetilde{\Omega},\ \|\psi m\|_{H_2^N}\leqslant C\|m\|_{H_2^N}. \qquad (23)$$

式(23)中的第二个断言是上面提到过的 Sobolev 嵌入定理的结果

$$\left(\sum_{|\alpha|\leqslant N}\|D^\alpha(\psi m)\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant C\left(\sum_{|\alpha|\leqslant N}\|D^\alpha m\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant C\left(\sum_{|\alpha|=N}\|D^\alpha m\|_2^2+\|m\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

式(23)说明我们一开始便可假设 m 满足 $\operatorname{supp}m\subset\widetilde{\Omega}$，这样 $\mathscr{F}^{-1}m\in L^{\widetilde{\Omega}}$，我们的任务便是证明 $\|\mathscr{F}^{-1}m\|_{\tilde{p}}\leqslant C\|m\|_{H_2^N}$，这等于说对 $p\leqslant 1$，要证 $\|\mathscr{F}^{-1}m\|_p\leqslant C\|m\|_{H_2^N}$. 一旦得证再引用引理 8.7 便得本定理所要证的结果.

现设

$$K_0=\{x:|x|\leqslant 1\},\ K_j=\{x:2^{j-1}\leqslant|x|<2^j\},\quad j=1,2,\cdots$$

则

$$\|\mathscr{F}^{-1}m\|_p^p=\sum_{j=0}^{\infty}\int_{K_j}|\mathscr{F}^{-1}m|^p dx$$

$$\leqslant C\sum_{j=0}^{\infty}2^{jn\frac{2-p}{2}}\left(\int_{K_j}|\mathscr{F}^{-1}m|^2dx\right)^{\frac{p}{2}}$$

$$=C\sum_{j=0}^{\infty}\left(2^{2j\sigma_p}\int_{K_j}|\mathscr{F}^{-1}m|^2dx\right)^{\frac{p}{2}}$$

$$\leqslant C\left(\sum_{j=0}^{\infty}2^{\frac{jp(\sigma_p-N)}{2-p}}\right)^{\frac{2-p}{2}}\left(\sum_{j=0}^{\infty}2^{2jN}\int_{K_j}|\mathscr{F}^{-1}m|^2dx\right)^{\frac{p}{2}}$$

$$\leqslant C\left(\int_{R^n}(1+|x|^2)^N|\mathscr{F}^{-1}m|^2dx\right)^{\frac{p}{2}}$$

$$=C\|m\|_{H_2^N}^p.$$

这就完成了定理的证明.

我们在§3.7定理(7.1)中讨论 Mihlin－Hörmander 乘子时，曾得到过 L^p 乘子，$1<p<\infty$，的充分条件

$$\left||x|^{|\alpha|}\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}m(x)\right|\leqslant B,\ \forall\alpha,|\alpha|\leqslant N,N>\frac{n}{2},$$

或更弱一些，

$$R^{2|\alpha|-n}\int_{R\leqslant x\leqslant 2R}\left|\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}m(x)\right|^2 dx\leqslant B,\ \forall\alpha,|\alpha|\leqslant N,N>\frac{n}{2}.$$

它比此处的条件 $M\in H_2^m$ 稍强一些. 这里我们讨论的是 $L^{p,\Omega}$ 的乘子.

当 $\Omega=Q_b=\{x:|x|\leqslant b\}$时, (21)中系数如何依赖于 b 呢? 设 $f\in L^{p,Q_b}$, 则 $f_b(x)=b^{-n}f\left(\dfrac{x}{b}\right)\in L^{p,Q_1}$ (这因为 $\mathscr{F}f_b(\xi)=\mathscr{F}f(b\xi)$). 注意我们有等式

$$\begin{aligned}\mathscr{F}^{-1}(m\mathscr{F}f)(x)&=b^n\mathscr{F}^{-1}(m(b\cdot)\mathscr{F}f(b\cdot))(bx)\\&=b^n\mathscr{F}^{-1}(m(b\cdot)\mathscr{F}f_b(\cdot))(bx),\end{aligned}$$

这样我们得到常数 C 仅依赖于 n, 不依赖 b, 使得

$$\begin{aligned}\|\mathscr{F}^{-1}(m\mathscr{F}f)\|_p&=b^{n-\frac{n}{p}}\|\mathscr{F}^{-1}(m(b\cdot)\mathscr{F}f_b)\|_p\\&\leqslant C\,b^{n-\frac{n}{p}}\|m(b\cdot)\|_{H_2^N}\|f_b\|_p\\&=C\|m(b\cdot)\|_{H_2^N}\|f\|_p.\end{aligned}\tag{24}$$

这样式(21)中常数 C 对 b 的依赖只是体现在将 $m(x)$换为 $m(bx)$ 后再求其 H_2^N 模这一过程中.

我们需要将上述乘子定理推广到某些向量值情形. 设 X 是底空间, B 是 Banach 空间, $0<p\leqslant\infty$. 我们用 $L^p(X,B)$表示在 X 上定义的取值于 B 中的强可测函数 f, 并使得 $\int_X\|f\|_B^p dx<\infty$ 的

全体构成的空间. 我们下面只讨论 $X=\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{Z}_+$, $B=L^p$ 或 l^p 情形. 确切地说, 设 $0<p,q\leqslant\infty$, 我们考虑

$$L^p(l^q)=L^p(\mathbb{R}^n,l^q)$$

$$=\left\{f=(f_k)_0^\infty:\|f\|_{L^p(l^q)}=\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\sum_0^\infty|f_k(x)|^q\right)^{\frac{p}{q}}dx\right)^{\frac{1}{p}}<\infty\right\}, \quad (25)$$

$$l^q(L^p)=l^q(\mathbb{Z}_+,L^p)$$

$$=\left\{f=(f_k)_0^\infty:\|f\|_{l^q(L^p)}=\left(\sum_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f_k(x)|^p dx\right)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{1}{q}}<\infty\right\}. \quad (26)$$

首先我们需要Hardy－Littlewood 极大算子 M 在这样的向量值函数空间上的有界性结果.

定理(8.9) (Fefferman－Stein) 设 $1<p,q<\infty$, 则

$$\|\{Mf_k\}\|_{L^p(l^q)}\leqslant C\|\{f_k\}\|_{L^p(l^q)},\quad\forall f=\{f_k\}. \quad (27)$$

证明 固定 q, 对 p 进行内插. 已知 $p=q$ 时, 式(27)显然成立. 现证 $p=1$ 时有

$$\left|\left\{\left(\sum_k(Mf_k)^q\right)^{\frac{1}{q}}>\lambda\right\}\right|\leqslant\frac{C}{\lambda}\left\|\left\{\sum_k|f_k|^q\right\}^{\frac{1}{q}}\right\|_1,\quad\forall\lambda>0. \quad (28)$$

对 $\left(\sum_k|f_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$ 与水平 λ 作 Calderon－Zygmund 分解得不交方体

族$\{Q_j\}$，满足

$$\left(\sum_k |f_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \lambda,\quad \text{a.e. 于 } F=\left(\bigcup_j Q_j\right)^c,$$

$$\lambda < \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}\left(\sum_k |f_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} dx \leqslant 2^n\lambda,\quad \forall j.$$

令$f' = f\chi_F$（即$f' = (f'_k)$，$f'_k = f_k\chi_F$），$f'' = f - f'$. 则

$$\|\{Mf'_k\}\|_{L^q(l^q)} \leqslant C\|\{f'_k\}\|_{L^q(l^q)} \leqslant C\lambda^{q-1}\left\|\left(\sum_k |f_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\|_1.$$

现要估计Mf''. 引进辅助函数

$$\overline{f_k} = \sum_j \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|f_k|dx\,\chi_{Q_j}(x),$$

则所有$\overline{f_k}$均支于$\Omega = \bigcup_j Q_j$，且在每个Q_j上，有

$$\left(\sum_k |\overline{f}_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_k\left(\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|f_k|dx\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}\left(\sum_k |f_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} dx \leqslant 2^n\lambda.$$

这说明

$$\left\|\left(\sum_k |\bar{f}_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\|_{L^q}^q \leqslant C\lambda^q|\Omega| \leqslant C\lambda^{q-1}\left\|\left(\sum_k |f_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\|_1.$$

要证 $\forall\, x\notin\overline{\Omega}=\bigcup_j \overline{Q}_j$, 其中$\overline{Q}_j$是 Q_j 的适当倍数扩大，有

$$Mf_k''(x)\leqslant C\,M\bar{f}_k(x),\ \forall\, k.$$

事实上，$\forall\, x\notin\overline{\Omega}$, 任意方体 $Q\ni x$, 如果 Q_j 与 Q 有交，则 $Q_j\subset\overline{Q}$(Q 的适当倍数扩大)，故

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f_k''|dx=\frac{1}{|Q|}\sum_j\int_{Q_j\cap Q}|f_k|dx$$

$$\leqslant\frac{1}{|Q|}\sum_j{}'\int_{Q_j}|f_k|dx=\frac{1}{|Q|}\sum_j{}'\int_{Q_j}\bar{f}_k\,dx$$

$$\leqslant\frac{1}{|Q|}\int_{\overline{Q}}\bar{f}_k\,dx\leqslant C\,M\bar{f}_k(x),$$

这里$\sum\limits_j{}'$表示对所有那些满足 $Q_j\subset\overline{Q}$ 的 j 求和. 此外我们已用到 $|f_k|$ 与$\bar{f}_k$ 在每个 Q_j 上积分相等的事实. 这样我们得到

$$\left|\left\{\left(\sum_k (Mf_k'')^q\right)^{\frac{1}{q}}>\lambda\right\}\right|$$

$$\leqslant|\overline{\Omega}|+\left|\left\{x\notin\overline{\Omega}:\left(\sum_k (M\bar{f}_k)^q\right)^{\frac{1}{q}}>C\lambda\right\}\right|$$

$$\leqslant \frac{C}{\lambda}\left\|\left(\sum_k |f_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\|_1 + \frac{C}{\lambda^q}\left\|\left(\sum_k |\overline{f}_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\|_q^q$$

$$\leqslant \frac{C}{\lambda}\left\|\left(\sum_k |f_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\|_1.$$

结合对 Mf 的估计，便证明了(28).

现应用 $p=1$ 时的有界结果(28)，以及 $p=q$ 时的有界结果，内插出 $1<p\leqslant q$ 时的 $L^p(l^q)$ 有界结果，它本质上就是 Marcinkiewicz 内插定理. 事实上，设 $1<p\leqslant q, f=\{f_k\}\in L^p(l^q)$，$\lambda>0$. 记 $g=\left(\sum_k |f_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$，令 $f_k'=f_k\chi_{\{g>\lambda\}}$，$f_k''=f_k\chi_{\{g\leqslant\lambda\}}$. 则

$$\left|\left\{\left(\sum_k (Mf_k)^q\right)^{\frac{1}{q}}>2\lambda\right\}\right|$$

$$\leqslant\left|\left\{\left(\sum_k (Mf_k')^q\right)^{\frac{1}{q}}>\lambda\right\}\right|+\left|\left\{\left(\sum_k (Mf_k'')^q\right)^{\frac{1}{q}}>\lambda\right\}\right|$$

$$\leqslant \frac{C}{\lambda^q}\left\|\left(\sum_k |f_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}\chi_{\{g\leqslant\lambda\}}\right\|_q^q + \frac{C}{\lambda}\left\|\left(\sum_k |f_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}\chi_{\{g>\lambda\}}\right\|_1.$$

这样我们得

$$\left\|\left(\sum_k (Mf_k)^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\|_p^p = C\int_0^\infty \lambda^{p-1}\left|\left\{\left(\sum_k (Mf_k)^q\right)^{\frac{1}{q}} > 2\lambda\right\}\right| d\lambda$$

$$\le C\int_0^\infty \lambda^{p-1-q}\int_{g\le\lambda} g^q\,dx\,d\lambda + C\int_0^\infty \lambda^{p-2}\int_{g>\lambda} g\,dx\,d\lambda$$

$$= C\|g\|_p^p = C\left\|\left(\sum_k |f_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\|_p^p .$$

这完成了 $1<p\leq q$ 时(27)的证明.

现看 $p>q$ 的情形. 此时的(27)将是如下不等式的直接推论: $\forall f,g$ 非负可测, 以及 $q>1$, 有

$$\int_{\mathbb{R}^n}(Mf)^q g\,dx \leq C\int_{\mathbb{R}^n} f^q Mg\,dx. \tag{29}$$

为证明(29), 考虑 M 作为定义在($\mathbb{R}^n$, $Mg\,dx$)到($\mathbb{R}^n$, $g\,dx$)的函数空间之间的次线性算子. 容易看出, 它是(∞,∞)型的, 要证它是弱$(1,1)$型的. 一旦得证, 则它也是(q,q)型的, $1<q<\infty$, 即(29)成立. 其弱$(1,1)$型可如下推导. 对 f 与水平 $\lambda>0$, 作 Calderón－Zygmund 分解得不交方体族$\{Q_j\}$, 则如我们在§3.3指出的(或§3.8习题18), 存在 $\alpha>0$ 使$\{Mf>\alpha\lambda\}\subset\bigcup_j 2Q_j$. 因此(不妨认为$\alpha=1$)

$$|\{Mf>\lambda\}|_g = \int_{\{Mf>\lambda\}} g\,dx \leq \sum_j\int_{2Q_j} g\,dx$$

$$\leqslant C\sum_j \inf_{x\in Q_j} Mg(x)\frac{1}{\lambda}\int_{Q_j} f dx$$

$$\leqslant \frac{C}{\lambda}\sum_j \int_{Q_j} f Mg dx \leqslant \frac{C}{\lambda}\|f\|_{L^1(Mg)}.$$

有了(29)，对$p>q$(记r'为$\frac{p}{q}$的相伴数)，我们便知

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\sum_k (Mf_k)^q\right)^{\frac{p}{q}} dx\right)^{\frac{q}{p}\cdot\frac{1}{q}}$$

$$= \sup_{g,\|g\|_{r'}\leqslant 1}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\sum_k (Mf_k)^q g(x) dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant \sup_g \left(\int_{\mathbb{R}^n}\sum_k |f_k|^q Mg dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant \sup_g \left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\sum_k |f_k|^q\right)^{\frac{p}{q}} dx\right)^{\frac{1}{r}}\|g\|_{r'}^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant C\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\sum_k |f_k|^q\right)^{\frac{p}{q}} dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

这就完成了定理的证明.

现在考虑$L^{p,\Omega}$的向量值情形扩充. 设$0<p,q\leqslant\infty$，$\Omega=\{\Omega_k\}_0^\infty$

是 $\mathbb{R}^n$ 中紧集的序列．设 $d_k = d(\Omega_k)$，d 表示直径．

定义 (8.10) 定义

$$L^p(l^q)^\Omega = \{ f = \{ f_k \} \subset \mathscr{S}' : \operatorname{supp} \mathscr{F} f_k \subset \Omega_k, \| \{ f_k \} \|_{L^p(l^q)} < \infty \}. \tag{30}$$

则我们有引理8.2 的如下类似:

引理(8.11) 设$0<p<\infty$，$0<q\leqslant\infty$，$\{\Omega_k\}$是 $\mathbb{R}^n$ 中紧集的序列．$d_k>0$. 设 $0<r<\min(p,q)$. 则

$$\| \{ \sup_{z\in\mathbb{R}^n} (1+|d_k z|)^{-\frac{n}{r}} f_k(\cdot - z) \} \|_{L^p(l^q)} \leqslant C \| \{ f_k \} \|_{L^p(l^q)}. \tag{31}$$

证明 不失一般性，可设$\Omega_k = Q_{d_k} = \{ y : |y| \leqslant d_k \}$. 事实上我们首先用球覆盖$\Omega_k$，然后用 $e^{-ix\cdot\xi_k^{(0)}} f_k(x)$代替 f_k，则前者的Fourier变换为 $\mathscr{F} f_k(\xi_k + \xi_k^{(0)})$(其中 $\xi_k^{(0)}$ 是用以覆盖 Ω_k 的球的中心)，它便支于 Q_k(将刚才的球平移到原点所得到的球)，而函数自己的 $L^p(l^q)$范数保持不变．现对 $f_k \in L^{p,Q_{d_k}}$，考虑 $g_k(x) = f_{d_k}(x) = d_k^{-n} f\left(\frac{x}{d_k}\right)$，则 $g_k \in L^{p,Q_1}$．注意极大函数在伸缩变换 δ 下不变．即(设 $d_\delta f(x) = f(\delta x)$)

$$M(d_\delta f) = \sup_B \frac{1}{|B|} \int_B |f(\delta(x+y))| dy$$

$$= \sup_B \frac{1}{\delta^n |B|} \int_{\delta B} |f(\delta x + y)| dy = d_\delta(Mf)(x).$$

这样由g_k满足的不等式，其中系数只依赖于维数 n，

$$\frac{g_k(x-z)}{1+|z|^{\frac{n}{r}}} \leqslant CM^{\frac{1}{r}}(|g_k|^r)(x), \quad \forall x, \forall z,$$

便得

$$\sup_z \frac{|f_k(x-z)|}{1+|d_k z|^{\frac{n}{r}}} = \sup_z \frac{f_k(d_k^{-1}(d_k x - z))}{1+|z|^{\frac{n}{r}}}$$

$$\leqslant C d_k^n M^{\frac{1}{r}}(|g_k|^r)(d_k x)$$

$$= CM^{\frac{1}{r}}(|d_{d_k^{-1}} f_k|^r)(d_k x) = CM^{\frac{1}{r}}(|f_k|^r)(x). \qquad (32)$$

既然 $\frac{p}{r}>1$，$\frac{q}{r}>1$，由定理 8.9 我们得到

$$\left\|\left\{\sup_z \frac{|f_k(x-z)|}{1+|d_k z|^{\frac{n}{r}}}\right\}\right\|_{L^p(l^q)} \leqslant C\|\{f_k\}_0^\infty\|_{L^p(l^q)}.$$

$q=\infty$ 时也是一样证明. 我们有

$$\sup_z \frac{|f_k(x-z)|}{1+|d_k z|^{\frac{n}{r}}} \leqslant C \sup_k M^{\frac{1}{r}}(|f_k|^r)(x)$$

$$\leqslant CM^{\frac{1}{r}}(\sup_k |f_k|^r)(x), \quad \forall x, z,$$

$$\left\|\sup_k \sup_z \frac{|f_k(x-z)|}{1+|d_k z|^{\frac{n}{r}}}\right\|_{L^p(l^\infty)} \leqslant C\left\|M^{\frac{1}{r}}\left(\sup_k |f_k|^r\right)\right\|_p$$

$$\leqslant C\left\|\sup_k |f_k|^r\right\|_p$$

这正是所需要的空间 $L^p(l^\infty)$ 内的范数不等式. 引理获证.

我们所需要的在 $L^p(l^q)$ 内的乘子定理如下.

定理(8.12) 设 $0<p<\infty$, $0<q\leqslant\infty$, $\Omega=\{\Omega_k\}_0^\infty$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中紧集序列, 每个 $d_k>0$. $N\in\mathbb{Z}_+$, 满足 $N>\frac{n}{2}+\frac{n}{\min(p,q)}$, 则 $\forall f=\{f_k\}_0^\infty\in L^p(l^q)^\Omega$, $\forall m=\{m_k\}_0^\infty\subset H_2^N$, 有

$$\|\{\mathscr{F}^{-1}(m_k\mathscr{F}f_k)\}\|_{L^p(l^q)}\leqslant C\sup_l\|m_l(d_l\,\cdot\,)\|_{H_2^N}\|\{f_k\}\|_{L^p(l^q)}. \tag{33}$$

证明 $\mathscr{F}^{-1}(m_k\mathscr{F}f_k)$ 是很好定义的, 因可设 m_k 支于 $\bar{\Omega}_k$(如前所述), 这样 $\mathscr{F}^{-1}m_k\in L^{p,\bar{\Omega}_k}$, 故 $\mathscr{F}^{-1}m_k\in L^1$, 又 $f_k\in L^{p,\Omega_k}$, 因此 $f_k\in L^\infty$, 故 $\mathscr{F}^{-1}(m_k\mathscr{F}f_k)$ 是 $\mathscr{F}^{-1}m_k$ 与 f_k 的卷积, 有定义. 我们要证

$$\sup_z\frac{|\mathscr{F}^{-1}(m_k\mathscr{F}f_k)(x-z)|}{1+|d_kz|^{\frac{n}{r}}}\leqslant C\sup_z\frac{|f_k(x-z)|}{1+|d_kz|^{\frac{n}{r}}}\|m_k(d_k\,\cdot\,)\|_{H_2^N}, \tag{34}$$

其中 $0<r<\min(p,q)$, $N>\frac{n}{2}+\frac{n}{r}$, C 不依赖于 x、k、m_k、f_k.

事实上(注意初等不等式(6))

$$|\mathscr{F}^{-1}(m_k\mathscr{F}f_k)(x-z)|\leqslant C\int_{\mathbb{R}^n}|\mathscr{F}^{-1}m_k(x-z-y)||f_k(y)|dy$$

$$\leqslant C \sup_{u\in\mathbb{R}^n} \frac{|f_k(u)|}{1+|d_k(x-u)|^{\frac{n}{r}}} \int_{\mathbb{R}^n} |\mathscr{F}^{-1}m_k(x-z-y)|$$

$$\cdot (1+|d_k(x-y)|^{\frac{n}{r}})dy$$

$$\leqslant C \sup_{u} \frac{|f_k(x-u)|}{1+|d_k u|^{\frac{n}{r}}} (1+|d_k z|^{\frac{n}{r}}) \int_{\mathbb{R}^n} |\mathscr{F}^{-1}m_k(x-z-y)|$$

$$\cdot (1+|d_k(x-z-y)|^{\frac{n}{r}})dy,$$

这样,

$$\sup_{z} \frac{|\mathscr{F}^{-1}(m_k\mathscr{F} f_k)(x-z)|}{1+|d_k z|^{\frac{n}{r}}}$$

$$\leqslant C \sup_{z} \frac{|f_k(x-z)|}{1+|d_k z|^{\frac{n}{r}}} \int_{\mathbb{R}^n} d_k^{-n}(\mathscr{F}^{-1}m_k)(d_k^{-1}y)(1+|y|^{\frac{n}{r}})dy$$

$$\leqslant C \sup_{z} \frac{|f_k(x-z)|}{1+|d_k z|^{\frac{n}{r}}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |d_k^{-n}(\mathscr{F}^{-1}m_k)(d_k^{-1}y)|^2(1+|y|^2)^N dy\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{35}$$

注意此处我们应用了 Hölder 不等式，被省略的项是

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|y|^2)^{\frac{n}{r}-N}dy\right)^{\frac{1}{2}} < \infty \quad \left(因\ \frac{n}{r}-N<-\frac{n}{2}\right),$$

而剩下的积分正好是

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\mathcal{F}^{-1}(m_k(d_k\ \cdot\ ))(y)|^2(1+|y|^2)^N dy\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\|m_k(d_k\ \cdot\ )\|_{H_2^N}.$$

这就证明了(34). 由于

$$|\mathcal{F}^{-1}(m_k\mathcal{F}f_k)(x)|\leqslant \sup_z \frac{|\mathcal{F}^{-1}(m_k\mathcal{F}f_k)(x-z)|}{1+|d_kz|^{\frac{n}{r}}}$$

$$\leqslant C\sup_z \frac{|f_k(x-z)|}{1+|d_kz|^{\frac{n}{r}}}\|m_k(d_k\ \cdot\ )\|_{H_2^N},$$

应用引理(8.11)(式(31)), 得

$$\|\{\mathcal{F}^{-1}(m_k\mathcal{F}f_k)\}\|_{L^p(l^q)}\leqslant C\|m(d_k\ \cdot\ )\|_{H_2^N}\|\{f_k\}\|_{L^p(l^q)}.$$

定理获证.

现在我们已经作好了定义空间 $B_{p,q}^s$ 与 $F_{p,q}^s$ 的准备. 我们先看看经常遇到的有哪些函数空间. 兹列举一些如下:

(*a*). Hölder 空间.

设 $m\in\mathbb{Z}_+$, 记 $C^0(\mathbb{R}^n)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上有界且一致连续的函数组成的空间, $C^m(\mathbb{R}^n)$ 表示 $\{f: D^\alpha f\in C^0(\mathbb{R}^n), \forall\alpha, |\alpha|\leqslant m\}$. 设 s 是非负非整实数. $s=[s]+\{s\}$, $0\leqslant\{s\}<1$, $[\ \cdot\ ]$ 表整数部分, 则定义 Hölder 空间如下

$$C^s(\mathbb{R}^n)=\{f\in C^{[s]}(\mathbb{R}^n): \|f\|_{C^s}<\infty\}, \tag{36}$$

$$\|f\|_{C^s}=\|f\|_{C^{[s]}}+\sum_{|\alpha|=[s]}\sup_{x\neq y}\frac{|D^\alpha f(x)-D^\alpha f(y)|}{|x-y|^{\{s\}}},\quad(37)$$

其中

$$\|f\|_{C^m}=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\|D^\alpha f\|_\infty.\quad(38)$$

(b)Zygmund 空间

设 s 是非负实数，$s=[s]^-+\{s\}^+$，其中

$$[s]^-=\begin{cases}[s], & s\neq 整数,\\ s-1, & s=整数,\end{cases}\qquad 0<\{s\}^+\leqslant 1,$$

定义

$$\mathscr{C}^s(\mathbb{R}^n)=\{f\in C^{[s]^-}(\mathbb{R}^n):\|f\|_{\mathscr{C}^s(\mathbb{R}^n)}<\infty\},\quad(39)$$

$$\|f\|_{\mathscr{C}^s}=\|f\|_{C^{[s]^-}}$$

$$+\sum_{|\alpha|=[s]^-}\sup_{h\neq 0}\frac{|D^\alpha f(x+h)+D^\alpha f(x-h)-2D^\alpha f(x)|}{|h|^{\{s\}^+}}.\quad(40)$$

(c)Sobolev 空间 $L_m^p(\mathbb{R}^n)$，$1<p<\infty$，$m=1,2,\cdots$

$$L_m^p(\mathbb{R}^n)=\{f\in L^p(\mathbb{R}^n):\|f\|_{L_m^p}=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\|D^\alpha f\|_p<\infty\}.\quad(41)$$

(d)Besov 空间 $\Lambda_{p,q}^s$，$s>0$，$1\leqslant p,q<\infty$，

$$\Lambda_{p,q}^{s}(\mathbb{R}^n)=\{f\in L_p^{[s]^-}:\|f\|_{\Lambda_{p,q}^{s}}<\infty\},\tag{42}$$

其中

$$\|f\|_{\Lambda_{p,q}^{s}}=\|f\|_{L_p^{[s]^-}}$$

$$+\sum_{|\alpha|=[s]^-}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{\|D^{\alpha}f(x+h)+D^{\alpha}f(x-h)-2D^{\alpha}f(x)\|_p}{|h|^{\{s\}^+}}\right)^q\frac{dh}{|h|^n}\right)^{\frac{1}{q}},$$

(43)

(e)Bessel 势空间 $H_p^s(\mathbb{R}^n)$，$-\infty<s<\infty$，$1<p<\infty$，

$$H_p^s(\mathbb{R}^n)=\{f\in\mathscr{S}':\|f\|_{H_p^s}=\|\mathscr{F}^{-1}((1+|x|^2)^{\frac{s}{2}}\mathscr{F}f)\|_p<\infty\}.$$

(44)

我们下面要将所有这些空间统一在下述的 $B_{p,q}^s$ 与 $F_{p,q}^s$ 内.

定义(8.13) 设 $\Phi(\mathbb{R}^n)$表示 $\mathscr{S}$ 中满足如下性质的函数序列 $\varphi=\{\varphi_j\}_0^{\infty}$ 的集合:

$$\operatorname{supp}\varphi_0\subset\{x:|x|\leqslant 2\},\tag{45}$$

$$\operatorname{supp}\varphi_j\subset\{x:2^{j-1}\leqslant|x|<2^{j+1}\},\ j=1,2,\cdots\tag{46}$$

$$2^{j|\alpha|}|D^{\alpha}\varphi_j(x)|\leqslant C_{\alpha},j=0,1,\cdots,\forall x\in\mathbb{R}^n,\tag{47}$$

$$\sum_{0}^{\infty} \varphi_j(x) = 1, \ \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{48}$$

注意，Φ 是非空的．事实上，取 $\psi \in \mathcal{S}$，$\psi \geqslant 0$，$\operatorname{supp} \psi \subset \{x : \frac{1}{2} \leqslant |x| \leqslant 2\}$，$\psi$ 在 $\{x : \frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant |x| \leqslant \sqrt{2}\}$ 上恒正，令

$$\varphi_j(x) = \psi(2^{-j}x)\Big(\sum_{-\infty}^{\infty} \psi(2^{-k}x)\Big)^{-1}, \ j = 1, 2, \cdots,$$

$$\varphi_0 = 1 - \sum_{1}^{\infty} \varphi_j,$$

则 $\varphi = \{\varphi_j\}_0^{\infty} \in \Phi(\mathbb{R}^n)$．这时，仅仅式(47)需要验证：注意 $\sum_{-\infty}^{\infty} \psi(2^{-k}x)$ 中仅仅相邻三项不同时为 0，故在 φ_j 的支集 $\{x : 2^{j-1} \leqslant |x| \leqslant 2^{j+1}\}$ 上，

$$\varphi_j(x) = \psi(2^{-j}x)(\psi(2^{-j-1}x) + \psi(2^{-j}x) + \psi(2^{-j+1}x))^{-1},$$

注意分母在这个支集上有正的下界，故 $D^{\alpha}\varphi_j(x)$ 对一切 $x \in \mathbb{R}^n$ 有上界 $C_{\alpha}2^{-j|\alpha|}$，即(47)成立．

定义(8.14) 设 $-\infty < s < \infty$，$0 < q \leqslant \infty$，$\varphi = \{\varphi_j\}_0^{\infty} \in \Phi(\mathbb{R}^n)$，

(1)对 $0 < p \leqslant \infty$，定义

$$B^s_{p,q} = \left\{ f \in \mathcal{S}' : \|f\|^{(\varphi)}_{B^s_{p,q}} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} (2^{js}\|\mathcal{F}^{-1}(\varphi_j \mathcal{F} f)\|_p)^q\right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\}; \tag{49}$$

(2)对$0<p<\infty$，定义

$$F_{p,q}^{s}=\left\{f\in\mathscr{S}':\|f\|_{F_{p,q}^{s}}^{(\varphi)}\right.$$

$$\left.=\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\sum_{j=0}^{\infty}|2^{js}\mathscr{F}^{-1}(\varphi_j f)|^q\right)^{\frac{p}{q}}dx\right)^{\frac{1}{p}}<\infty\right\}. \tag{50}$$

对这样定义的空间，首先要解决的问题是它与所选取的 $\varphi=\{\varphi_j\}_0^\infty$ 无关. 我们有

定理(8.15) 设 $\varphi=\{\varphi_j\}_0^\infty$ 与 $\psi=\{\psi_j\}_0^\infty$ 均属于 $\Phi(\mathbb{R}^n)$，则

(1)若 $-\infty<s<\infty,0<p\leqslant\infty,0<q\leqslant\infty$，有

$$\|f\|_{B_{p,q}^{s}}^{(\varphi)}\approx\|f\|_{B_{p,q}^{s}}^{(\psi)}, \tag{51}$$

(2)若 $-\infty<s<\infty,0<p<\infty,0<q\leqslant\infty$，有

$$\|f\|_{F_{p,q}^{s}}^{(\varphi)}\approx\|f\|_{F_{p,q}^{s}}^{(\psi)}. \tag{52}$$

证明 我们要利用定理(8.8)中所述的 Fourier 乘子定理，我们指的是其中系数 C 如何依赖于支集大小的式(24)，即

$$\|\mathscr{F}^{-1}(m\mathscr{F}f)\|_p\leqslant C\|m(d\cdot)\|_{L_2^N}\|f\|_p,\ \forall f\in L^{p,Q_d}, \tag{53}$$

其中 $Q_d=\{y:|y|\leqslant d\}$. 记 $\psi_{-1}\equiv 0$，注意 $\sum_j\psi_j\equiv 1$，以及与φ_j的支集相交的只是相邻三项 $\psi_{j-1},\psi_j,\psi_{j+1}$ 的支集，因此

$$\varphi_j=\sum_{r=-1}^{1}\psi_{j+r}\varphi_j,$$

故

$$\mathscr{F}^{-1}(\varphi_j\mathscr{F}f)=\sum_{r=-1}^{1}\mathscr{F}^{-1}(\varphi_j\mathscr{F}[\mathscr{F}^{-1}(\psi_{j+r}\mathscr{F}f)]). \tag{54}$$

现把$\mathscr{F}^{-1}(\psi_{j+r}\mathscr{F}f)$看成式(53)中的$f$, φ_j看成m,则得

$$\|\mathscr{F}^{-1}(\varphi_j\mathscr{F}f)\|_p\leqslant C\sum_{r=-1}^{1}\|\varphi_j(2^{j+1}\cdot\ )\|_{H_2^N}\|\mathscr{F}^{-1}(\psi_{j+r}\mathscr{F}f)\|_p,\forall j,$$

注意$\varphi_j(2^{j+1}\cdot\ )$支于球$Q_1=\{x:|x|\leqslant 1\}$, 且

$$|D^\alpha(\varphi_j(2^{j+1}\cdot\ ))(\xi)|\leqslant C\,2^{j|\alpha|}|D^\alpha\varphi_j(2^{j+1}\xi)|\leqslant C,\ \forall\alpha,\ \forall\xi.$$

既然$D^\alpha\varphi_j(2^{j+1}\xi)$支于$Q_1$, 这说明$\varphi_j(2^{j+1}x)\in H_2^N$, $\forall N$充分大, 且$\|\varphi_j(2^{j+1}\cdot\ )\|_{H_2^N}\leqslant C$. 故

$$\left(\sum_0^\infty\|\mathscr{F}^{-1}(\varphi_j\mathscr{F}f)\|_p^q\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant C\left(\sum_0^\infty\|\mathscr{F}^{-1}(\psi_j\mathscr{F}f)\|_p^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

这就证明了关于$B_{p,q}^s$的断言(51).

现证关于$F_{p,q}^s$的断言, 证明是一样的, 只需应用向量值情形的乘子定理(定理(8.12))

$$\|\{\mathscr{F}^{-1}(m_k\mathscr{F}g_k)\}\|_{L^p(l^q)}\leqslant C\sup_l\|m_l(d_l\cdot\ )\|_{H_2^N}\|\{g_k\}\|_{L^p(l^q)}. \tag{55}$$

在(54)中如只看右边$r=0$那一项, 把$2^{js}\mathscr{F}^{-1}(\psi_j\mathscr{F}f)$看成$g_j$, φ_j看成m_j, 再应用(55)即得

$$\|2^{js}\{\mathscr{F}^{-1}(\varphi_j\mathscr{F}f_j)\}\|_{L^p(l^q)}\leqslant C\|2^{js}\{\mathscr{F}^{-1}(\psi_j\mathscr{F}f_j)\}\|_{L^p(l^q)},$$

此即$\|f\|_{F_{p,q}^{s}(\omega)} \leqslant C\|f\|_{F_{p,q}^{s}(\psi)}$. 定理至此证毕.

现在我们基本上已完成了本节提出的任务. 下面关于这些空间的基本共性，我们基本上只给以叙述而不加证明(个别例外)

命题(8.16) 我们有如下包含关系:

(a) 设 $0<q_0\leqslant q_1\leqslant\infty$, $-\infty<s<\infty$, 则

$$B_{p,q_0}^{s}\subset B_{p,q_1}^{s},\qquad 0<p\leqslant\infty, \tag{56}$$

$$F_{p,q_0}^{s}\subset F_{p,q_1}^{s},\qquad 0<p<\infty; \tag{57}$$

(b) 设 $0<q_0, q_1\leqslant\infty$, $-\infty<s<\infty$, $\varepsilon>0$. 则

$$B_{p,q_0}^{s+\varepsilon}\subset B_{p,q_1}^{s},\qquad 0<p\leqslant\infty, \tag{58}$$

$$F_{p,q_0}^{s+\varepsilon}\subset F_{p,q_1}^{s},\qquad 0<p<\infty; \tag{59}$$

(c) 设 $0<q\leqslant\infty$, $0<p<\infty$, $-\infty<s<\infty$, 则

$$B_{p,p\wedge q}^{s}\subset F_{p,q}^{s}\subset B_{p,p\vee q}^{s}. \tag{60}$$

证明 (56), (57)是 l^q 关于 q 的单调增加性质的结果. 由于

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}2^{skq_1}|b_k|^{q_1}\right)^{\frac{1}{q_1}}$$

$$\leqslant\sup_k\{2^{(s+\varepsilon)k}|b_k|\}\left(\sum_{l=0}^{\infty}2^{-\varepsilon lq_1}\right)^{\frac{1}{q_1}}$$

$$\leqslant C\sup_k\{2^{(s+\varepsilon)k}|b_k|\}$$

($q_1=\infty$ 时此式亦成立)，这说明$B^{s+\varepsilon}_{p,q_0}\subset B^{s+\varepsilon}_{p,\infty}\subset B^s_{p,q_1}$. 类似的证明对 $F^s_{p,q}$ 空间也行. 这证明了(58)，(59). 现证(60).

记 $a_k=2^{ks}\mathscr{F}^{-1}(\varphi_k\mathscr{F}f)$. 当 $0<q\leqslant p<\infty$ 时，$B^s_{p,p\vee q}=B^s_{p,p}=F^s_{p,p}$. 故此时只有(60)中的第一个包含关系要证. 要证

$$\|\{a_k\}\|_{L^p(l^q)}\leqslant C\|\{a_k\}\|_{l^q(L^p)}.$$

我们有(由 Minkowski 不等式)

$$\|\{a_k\}\|_{L^p(l^q)}=\left\|\sum_0^\infty|a_k|^q\right\|_{L^{p/q}}^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant\left(\sum_0^\infty\|a_k\|_p^q\right)^{\frac{1}{q}}=\|\{a_k\}\|_{l^q(L^p)}.$$

断言获证. 当 $0<p<q\leqslant\infty$ 时，类似地有

$$\|\{a_k\}\|_{l^q(L^p)}=\left(\sum_0^\infty\|a_k\|_p^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\left(\sum_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^n}|a_k|^pdx\right)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\sum_0^\infty|a_k|^q\right)^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}}=\|\{a_k\}\|_{L^p(l^q)}.$$

命题获证.

注 我们甚至还得到式(56)(57)(60)中的范数不等式的系数全都可以是 1.

关于这两类空间与我们以前遇到过、或刚才列举过的空间的关系，我们有

命题(8.17) 我们有

$$\Lambda^s = B^s_{\infty,\infty}, \quad s>0;$$

$$H^s_p = F^s_{p,2}, 1<p<\infty, -\infty<s<\infty;$$

$$\Lambda^s_{p,q} = B^s_{p,q}, s>0, 1\leqslant p<\infty, 1\leqslant q\leqslant\infty;$$

$$H_p = \dot{F}^0_{p,2},$$

$$\mathrm{BMO} = \dot{F}^0_{\infty,2},$$

其中 $\dot{B}^s_{p,q}$、$\dot{F}^s_{p,q}$ 是 $B^s_{p,q}$、$F^s_{p,q}$ 的齐次类似. 即将$\{\psi_j\}_0^\infty$改为$\{\psi_j\}_{-\infty}^\infty$, ψ_j满足的条件类似.

这两类空间在分数次微分，积分算子 I^σ 作用下性质很好. 我们有

命题(8.18) 设 $-\infty<s,\sigma<\infty, 0<q\leqslant\infty$. 则

(a) 当 $0<p\leqslant\infty$ 时，I^σ 是 $B^s_{p,q}$ 到 $B^{s+\sigma}_{p,q}$ 上的拓扑同构. 且 $\|I^\sigma f\|_{B^{s+\sigma}_{p,q}}$ 是 $B^s_{p,q}$ 的一个等价拟范数. 此外，对 $m=1,2,\cdots$

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m}\|D^\alpha f\|_{B^{s-m}_{p,q}} \text{ 与 } \|f\|_{B^{s-m}_{p,q}}+\sum_{j=1}^n\left\|\frac{\partial^m f}{\partial x_j^m}\right\|_{B^{s-m}_{p,q}}$$

也是 $B^s_{p,q}$ 的等价拟范数.

(b) 对 $0<p<\infty$, I^σ 在 $F^s_{p,q}$ 上有类似的性质.

其中 I^{s} 是算子

$$f \to I^{s}f = \mathscr{F}^{-1}((1+|x|^{2})^{\frac{s}{2}}\mathscr{F}f), \ \forall f \in \mathscr{S}'. \quad (61)$$

命题(8.19) $B^{s}_{p,q}, F^{s}_{p,q}$ 是拟 Banach 空间；当 $1 \leqslant p \leqslant \infty, 1 \leqslant q \leqslant \infty$ 时，$B^{s}_{p,q}$ 是 Banach 空间；$F^{s}_{p,q}$ 亦然，但要求 $p < \infty$. 在连续嵌入下，有

$$\mathscr{S} \subset B^{s}_{p,q} \subset \mathscr{S}', \quad \mathscr{S} \subset F^{s}_{p,q} \subset \mathscr{S}'. \quad (62)$$

此外 $\mathscr{S}$ 在 $B^{s}_{p,q}, F^{s}_{p,q}$ 内稠密，对 $-\infty < s < \infty, 0 < p, q < \infty$.

关于对偶空间有

命题(8.20) 设 $1 \leqslant q \leqslant \infty$，$q'$ 表示 q 的对偶指标，但对 $0 < q < 1$. 记 $q' = \infty$. 则对 $1 \leqslant p < \infty, -\infty < s < \infty$，有

$$(B^{s}_{p,q})^{*} = B^{-s}_{p',q'}, \quad 0 < q < \infty, \quad (63)$$

$$(F^{s}_{p,q})^{*} = F^{-s}_{p',q'}, \quad 1 < q < \infty. \quad (64)$$

关于内插空间，我们只指出 $B^{s}_{p,q}, F^{s}_{p,q}$ 都在内插下封闭，即使对三指标同时内插.

§4.9 进一步事实、习题与注记

1. 设 D 是 $\mathbb{R}^{n}$ 中一个域(即连通开集)．u 称为 D 上的调和函数，如果 u 是两次连续可微的，且 $\Delta u = 0$. 其中 $\Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^{2}}{\partial x_{j}^{2}}$ 是

Laplace 算子. 验证 $u(x,t)=e^{-\langle x_0\rangle}e^{ix\cdot x_0}$ 是 $(x,t)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^{n+1}$ 上的调和函数. $P(x,t)=C\dfrac{t}{(|x|^2+t^2)^{\frac{n+1}{2}}}$ 是 $(x,t)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+=\mathbb{R}_+^{n+1}$ 上的调和函数, $u(x)=|x|^{2-n}, n\geq 3$, 是 $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ 上的调和函数; $u(x)=\log|x|$ 是 $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ 上的调和函数.

2. (调和函数的平均值定理) 设 u 是域 D 中的调和函数, 则

$$\frac{1}{\omega_{n-1}}\int_{S_{n-1}}u(x+ry')d\sigma(y')=u(x),$$

$$\forall x\in D,\quad B(x,r)\subset D,$$

其中左边表示 u 在以 x 为心, r 为半径的球面上的平均, ω_{n-1} 是单位球面 S_{n-1} 的面积. 反之, 设 u 是连续的(甚至只是局部可积的), 满足上述平均值性质, 则 u 是调和的.

3. 利用上述平均值定理推出调和函数的极大模原理. 假设 u 是有界域 D 上的实值调和函数, 使 $A=\sup\limits_{x\in D}u(x)<\infty$, 则 $u(x)<A$, $\forall x\in D$, 只要 u 不是常数函数. 它可以等价地叙述为: 若有界域 D 上的实调和函数 u 在 $\overline{D}$ 上是连续的, 则 u 只能在 $\partial D=\overline{D}\setminus D$ 上达到它的极大值与极小值, 除非 u 是常数函数. 换句话说, 若 u_1,u_2 是在有界域 D 上调和, $\overline{D}$ 上连续的函数, 使 $u_1=u_2$ 在 ∂D 上, 则 $u_1=u_2$ 处处. 此外, 应用平均值定理可推出 Liouville 定理: 设 u 是 $\mathbb{R}^n$ 上调和且有界的函数, 则 u 是常数函数.

4. 本题将说明一类非常重要的调和函数都由 Poisson 积分表示. 设 $u(x,t)$ 是 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 上的调和函数, 则

(a) 当 $1<p\leq\infty$ 时, u 是 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中函数 $f(x)$ 的 Poisson 积

分当且仅当 $\sup\limits_{t>0}\|u(\cdot\ ,\ t)\|_p<\infty$.

(*b*) u 是 $\mathbb{R}^n$ 上有界 Borel 测度 $d\mu$ 的 Poisson 积分当且仅当 $\sup\limits_{t>0}\|u(\cdot\ ,\ t)\|_1<\infty$.

5. 设 $1\leqslant p\leqslant\infty$, $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $u=P_t*f(x)$ 是 f 的Poisson 积分. 记

$$\Gamma_\alpha(x)=\{(y,t):|x-y|<\alpha t\},\quad 0<\alpha<\infty.$$

则如下非切向极大函数

$$u^*(x)=\sup_{(y,t)\in\Gamma_\alpha(x)}|u(y,t)|,$$

满足

$$|\{u^*>\lambda\}|\leqslant\frac{C}{\lambda}\|f\|_1,$$

$$\|u^*\|_p\leqslant C_p\|f\|_p,\quad 1<p\leqslant\infty.$$

此外非切向极限存在 $\lim\limits_{\Gamma_\alpha(x)\ni z\to x}u(z)=f(x)$, a. e. x. 以及

$$\lim_{t\to 0}\int|u(x,t)-f(x)|^p dx=0,\ 1<p<\infty.$$

6. 设 $u(x,t)$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 上的调和函数, $E\subset\mathbb{R}^n$ 是可测集. 说 u 在 E 上非切向有界, 如果 $\exists\alpha>0$ 使 $|u(\cdot,t)|\Big|_{\Gamma_\alpha(x_0)}\leqslant C_{x_0}<\infty$, $\forall x_0\in E$, 证明 Fatou 命题: u 在 E 上非切向有界推出 $u(y,t)$ 对 a. e. $x_0\in E$ 有非切向极限. (见 E. M. Stein [St2])

7. 域 $D\subset\mathbb{R}^n$ 上定义的实值函数 v 称为下调和的，如果

(a) v 取值于 $[-\infty,\infty)$，但不恒为 $-\infty$，

(b) v 是上半连续的，意即 $\forall x_0\in D,\forall\varepsilon>0$，存在 x_0 的邻域，使在它上面 $v(x)<v(x_0)+\varepsilon$，

(c) $\forall x_0\in D$，对严格包含于 D 中的一切球 $B(x_0,r)$，有

$$v(x_0)\leqslant\frac{1}{\omega_{n-1}}\int_{S_{n-1}}v(x_0+ry')d\sigma(y').$$

若 u 是调和的，则 $|u|$ 是下调和的．设 v 是下调和的，$\varphi(t)$ 是一个包含 v 的值域的有限或无限区间上的非减凸函数，则 $\varphi(v)$ 是下调和的．特别 $\varphi(t)=t^p,1\leqslant p<\infty$，以及 $\varphi(t)=t\chi_{(0,\infty)}$ 满足所要求的条件．特别设 $f(z)$ 是 $D\subset\mathbb{C}$ 上的解析函数，则 $\log|f(z)|=\mathrm{Re}\log f(z)$ 是下调和的，$\log^+|f(z)|$ 也是下调和的，此外对 $0<p<\infty$，$e^{p\log|f(z)|}=|f(z)|^p$ 也是下调和的．

8. 在讨论古典的 H_p 理论时，需要用到下调和函数的如下性质：设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中有界域，v、u 在 $\overline{D}$ 上连续，v 是下调和函数，u 是调和函数，且在边界 ∂D 上满足 $v\leqslant u$，则 $v\leqslant u,\ \forall x\in\overline{D}$．这只需应用 u 的平均值性质与 v 的平均值不等式．用反证法，设 $C=\sup\limits_{x\in D}\{v(x)-u(x)\}>0$，如果它在某内点 x_0 达到，则

$$\begin{aligned}C&=v(x_0)-u(x_0)\\&\leqslant\frac{1}{\omega_{n-1}}\int_{S_{n-1}}(v(x_0+ry')-u(x_0+ry'))d\sigma(y').\end{aligned}$$

但因 C 是极大值，这说明 $v(x_0+ry')-u(x_0+ry')=C,\ \forall y'\in S_{n-1}$．因此 $\{x:v(x)=u(x)\}$ 是开的，显然它又是闭的，按边值假定，也不可能是 $\overline{D}$．矛盾证明了断言．

9. 设 $v(x,t)$ 是 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 上的非负下调和函数，$1\leqslant q<\infty$，满足 $\|v(\cdot\ ,t)\|_q\leqslant C<\infty$. 则$v$ 有一个最小的调和控制 u. 当 $q>1$ 时 u 是某个 $f\in L^q(\mathbb{R}^n)$的 Poisson 积分，且 $\|f\|_q\leqslant C$; 当$q=1$ 时，u 是某个 $d\mu\in M(\mathbb{R}^n)$的 Poisson – Stieltjes 积分，且 $\|d\mu\|\leqslant C$.

提示：令 $U_\varepsilon(x,t)=P_t*v(\cdot\ ,\varepsilon)(x)$，则 $U_\varepsilon(x,t)$是调和的，且 $U_\varepsilon(x,t)\geqslant v(x,\varepsilon+t)$，对$\{\varepsilon\}$的适当子序列取极限.

10. 证明 $H_1(\mathbb{R}_+^2)$(上半平面上解析函数的 H_1)的如下奇异积分刻划：令 $B=\{f\in L^1:Hf\in L^1\}$，赋范 $\|f\|_B=\|f\|_1+\|Hf\|_1$. 则 H_1 作为实 Banach 空间(即将纯量域局限于实数)与 Re B 拓扑同构，同构映射可取为 $\alpha:u\to P_t*(u+iHu)$，$\forall\ u\in \mathrm{Re}\,B$.

提示：由 $P_t*Hu=Q_t*u$ 知 $P_t*(u+iHu)$是解析的，且显然属于 H_1，故其 H_1 模即为其边值的 L^1 模，即 $\|u+iHu\|_1\approx\|u\|_B$. 显然映射是一一的. 剩下只需证映上. 对任意 $f\in H_1$，有 $f(z)=P_t*(\mathrm{Re}f+i\,\mathrm{Im}f)(x)$，这说明 $P_t*\mathrm{Im}f(x)=Q_t*\mathrm{Re}f(x)$，这样$f=\alpha(\mathrm{Re}f)$，$\mathrm{Re}f\in B$.

11. 设$1\leqslant p\leqslant 2$，$f\in L^p(\mathbb{R})$，则$f(x)$是$f(z)\in H_p$ 的边值，当且仅当$\hat{f}(\xi)=0$，$\forall\ \xi\leqslant 0$，又若 $d\mu$ 是 $\mathbb{R}$ 上有界正规 Borel 测度，使$(d\mu)^\wedge(\xi)=0$，$\forall\ \xi\leqslant 0$，则存在$f\in L^1$ 是$f(z)\in H_1$ 的边值，使 $d\mu=f\,dx$.

12. 设 $1\leqslant p<\infty$，$f\in L^p(\mathbb{R})$. 证明$f(x)$是$f(z)\in H_p$ 的边值的充要条件是 $Hf(x)=-if(x)$.

提示：设$f\in L^p$，满足 $Hf(x)=-if(x)$. 则由 $P_t*Hf(x)=Q_t*f(x)$，得

$$P_t*f(x)=\frac{1}{2}\left(P_t*f(x)+iQ_t*f(x)\right)\in H_p.$$

反之，当$f(x)$是$f(z)\in H_p$ 的边值时，

$$\mathrm{Im}\,f=H\,\mathrm{Re}\,f,\quad \mathrm{Re}\,f=-H\mathrm{Im}\,f,$$

$$f=\mathrm{Re}f+i\mathrm{Im}f=iH(\mathrm{Re}f+i\mathrm{Im}f)=iHf.$$

13. 设$d\mu, d\nu$是$\mathbb{R}$上有界正规 Borel 测度，满足

$$(d\nu)^\wedge(\xi)=-i\mathrm{sgn}\xi(d\mu)^\wedge(\xi),\ \forall\xi,$$

则存在$f, g\in L^1$，使 $d\mu=f\,dx$, $d\nu=g\,dx$, $g=Hf$. 这是熟知的 F; M. Riesz 兄弟定理.

14. 是否存在 $f\in L^p(\mathbb{R})$, $1\leqslant p<\infty$, $f\geqslant 0$, 使 $Hf\in L^1(\mathbb{R})$?

15. 设$f(z)$是单位圆 D 内的解析函数，证明

(a)如果 $\mathrm{Re}f(z)>0$ 于D内，则$f\in H_p$, $\forall p<1$.

(b)若$f(z)\in H_1$，且$f(e^{ix})$是实的，则f恒为常数，但存在非常值函数$f(z)\in H_p$, $\forall p<1$，使$f(e^{ix})$是实的.

(c)若$f(z)\in H_{\frac{1}{2}}$，$f(e^{ix})>0$, a. e.，则f是常值函数.

16. 若$f(z)$在单位圆 D 内解析，$|\arg f(z)|\leqslant\lambda\leqslant\pi$，则 $\forall p<\frac{\pi}{2\lambda}$，$f\in H_p$.

17. 关于 $H_p(\mathbb{R}^{n+1}_+)$的奇异积分算子刻划问题可以进一步地问：对怎样的算子族$\{K_0, K_1,\cdots,K_m\}$(其中 K_0 为恒等算子 I)，$H_p=\{f\in\mathscr{S}':\sum_0^m\|K_jf\|_p<\infty\}$，并且$\sum_0^m\|K_jf\|_p$与$\|f\|_{H_p}$等价？1977年，S. Janson [J] 找到了$p=1$时一维情形的充要条件，以及$\mathbb{R}^n$情形的必要条件. 1981 年，A. Uchiyama [U1] 证明了该条件的充分性. 他进一步指出，当$\{K_j\}_0^m$满足这个所谓Janson－Uchiyama 条件时，存在$p_0<1$，使$\forall p$, $p_0<p\leqslant 1$, $H_p(\mathbb{R}^{n+1}_+)$可用算子族$\{K_j\}_0^m$如上刻划. 关于这一课题，可参见 Janson[J],

Uchiyama [U1].

18. 设 $p>\frac{n-1}{n}$, $F(x,t)=(u_0(x,t),\cdots,u_n(x,t))\in H_p(\mathbb{R}_+^{n+1})$, $F^*(x)$是F的非切向极大函数. 证明: $\|F^*\|_p\leqslant C\|F\|_{H_p}$(这属于Stein－Weiss[SW1]).

19. 70年代初, Burkholder－Gundy－Silverstein[BGS] 发现了$H_p(\mathbb{R}_+^2)$的如下极大函数刻划. 它说: $\mathbb{R}_+^2$上调和函数$u(z)$是$f(z)=u(z)+i\,v(z)\in H_p(\mathbb{R}_+^2)$的实部, 当且仅当$u^*(x)\in L^p$, 且这种情况下$\|f\|_{H_p}$与$\|u^*\|_p$是等价的, 其中$u^*$是$u$的非切向极大函数. 显然断言的一半是已知的(如题18所示). 故充分地只需证: 当$u^*\in L^p$时, 存在u的共轭调和函数$v(z)$, 使$\sup\limits_t\|v(x,t)\|_p\leqslant C_p\|u^*\|_p$. 下面是P. Koosis[Ko1]简化证明的主要步骤.

第一步证明: 设$f(z)=u(z)+iv(z)\in H_2(\mathbb{R}_+^2)$, $v(x)$为$v(z)$的边值, 记$\sigma_g(\lambda)$为$\mathbb{R}$上定义的函数g的分布函数, 则

$$\sigma_v(\lambda)\leqslant 2\sigma_{u^*}(\lambda)+\frac{2}{\lambda^2}\int_0^\lambda s\sigma_{u^*}(s)ds,\ \forall\lambda>0.$$

事实上, 记$U_\lambda=\{u^*>\lambda\}$, $E_\lambda=\mathbb{R}-u_\lambda=\{u^*\leqslant\lambda\}$,

$$\varepsilon=\varepsilon_\lambda=\bigcup_{x\in E_\lambda}\Gamma(x),\ \partial\varepsilon=E_\lambda\bigcup\Gamma,$$

这里Γ是U_λ的所有构成区间上支撑的帐篷的位于$\mathbb{R}_+^2$中的边界.

注意$f(z)\in H_2$, 推出$\int_{\partial\varepsilon}f^2(z)dz=0$. 取实部得(注意$z=x+it$)

$$\int_{E_\lambda}(u^2-v^2)dx+\int_\Gamma(u^2-v^2)dx-\int_\Gamma 2uvdt=0.$$

注意在 Γ 上，$|dt|=dx$，以及 $|2uv|\leqslant u^2+v^2$，因此

$$-\int_\Gamma 2uvdt\leqslant\int_\Gamma(u^2+v^2)dx,$$

$$0\leqslant\int_{E_\lambda}(u^2-v^2)dx+2\int_\Gamma u^2dx,$$

$$\int_{E_\lambda}v^2dx\leqslant\int_{E_\lambda}u^2dx+2\int_\Gamma u^2dx.$$

此外注意在 Γ 上，$u(z)\leqslant\lambda$，故

$$\int_\Gamma u^2dx\leqslant\lambda^2\int_\Gamma dx=\lambda^2|U_\lambda|=\lambda^2\sigma_{u^*}(\lambda).$$

同时

$$\int_{E_\lambda}u^2dx\leqslant\int_{E_\lambda}u^{*2}dx=\int_{\{u^*\leqslant\lambda\}}u^{*2}dx$$

$$\leqslant 2\int_0^\lambda(\sigma_{u^*}(s)-\sigma_{u^*}(\lambda))sds$$

$$=2\int_0^{\lambda} s\sigma_{u^*}(s)ds-\lambda^2\sigma_{u^*}(\lambda).$$

这样便得

$$|\{x:|v(x)|>\lambda\}|\leqslant|\{x\in E_\lambda:|v(x)|>\lambda\}|+|U_\lambda|$$

$$\leqslant 2\sigma_{u^*}(\lambda)+\frac{2}{\lambda^2}\int_0^{\lambda} s\sigma_{u^*}(s)ds.$$

第二步回到主要断言的证明. 设 $u^*\in L^p$, 根据调和函数的平均值性质的下述变形

$$|u(x_0,t_0)|\leqslant C\left(\frac{1}{|B((x_0,t_0),r)|}\int_{B((x_0,t_0),r)}|u(x,t)|^p dxdt\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$0<p<\infty,$$

(当 $p\geqslant 1$ 时, 这是 $|u(x,t)|^p$ 的下调和性的结果, $p<1$ 时的证明见 Fefferman－Stein [FS2]) 可得 $|u(x,t)|$ 在半空间域 $t\geqslant t_0>0$ 是有界的, 从而也有 $\sup\limits_{t>t_0}\|u(x,t)\|_2<\infty$. 这样存在 u 的唯一共轭调和函数 v 使 $f=u+iv$ 满足 $\sup\limits_{t\geqslant t_0}\|v(x,t)\|_2<\infty$. 在半空间 $t>t_0$ 应用刚才的命题, 记 $u_0(z)=u(z+it_0)$, $v_0(z)=v(z+it_0)$, 注意 $u_0^*(x)\leqslant u^*(x)$, 我们得

$$|\{|v(x+it_0)|>\lambda\}|\leqslant 2\sigma_{u^*}(\lambda)+2\int_0^{\lambda} s\sigma_{u^*}(s)ds,$$

由它不难得到

$$\int_{-\infty}^{\infty}|v(x+it_0)|^p dx \leqslant 2\left(1+\frac{1}{2-p}\right)\|u^*\|_p^p.$$

令 $t_0 \to 0$ 即得所要的结论. $H_p(\mathbb{R}_+^2)$的极大函数刻划获证.

20. $H_p(\mathbb{R}_+^{n+1})$的极大函数刻划由 Fefferman－Stein[FS2] 完成，其中重要的一步是建立极大函数与面积函数的下述等价：设 $u(x,t)$是 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 上的调和函数，它的面积函数 S 定义如下

$$S(u,x)=\left(\int_{\Gamma(x)}|\nabla u(y,t)|^2 t^{1-n}dydt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$u^*(x)=\sup\{|u(y,t)|:(y,t)\in\Gamma(x)\}$ 如常. 则 $\|u^*\|_p<\infty$ 等价于 $\|S(u)\|_p<\infty$ 与 $u(x,t)\to 0$, 当 $t\to\infty$ 时，且 $\|u^*\|_p\approx\|S(u)\|_p$.

21. 进一步对 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 上的调和函数 $u(x,t)$定义径向极大函数 $u^+(x)=\sup\limits_{t>0}|u(x,t)|$, 则$\|u^*\|_p\approx\|u^+\|_p$, $0<p<\infty$. 这个结果也属于Fefferman－Stein[FS2], 也是题19 中应用过的调和函数的平均值不等式的结果.

22. 原子生成的 Hardy 空间中每个元素的(拟)范数的定义是对这个元素的所有可能的原子的无限线性组合来取 inf, 对那些由原子的有限线性组合得到的元素，其(拟)范数也不能只局限于有限线性组合来取inf. Y. Meyer, M. Taibleson, G. Weiss 在 [MTW] 中举出了这样的反例.

23. 原子定义中的消失矩条件，只有一个阶数的下界要求，再高并不影响所定义的空间. 但若低于下界，则定义出不同的空间. 例如，Taibleson－Weiss[TW2] 首先考虑了原子 H_1 空间的下述类似. 设 $1<q\leqslant\infty$，函数 b 称为一个 q 块(q－block)，如果

存在一个方体 Q, 使得 $\operatorname{supp} b \subset Q$, 且$\| b \|_q \leqslant |Q|^{\frac{1}{q}-1}$, 定义

$$B_q = \{ f = \sum \lambda_j b_j : \| f \|_{B_q} < \infty \},$$

$$\| f \|_{B_q} = \inf \left\{ \sum_1^\infty |\lambda_j| \left(1 + \log \frac{1}{|\lambda_j|} \right) : \right.$$

$$\left. \text{遍历 } f \text{ 的所有可能表示} \right\}.$$

一维 B_q 空间与 Fourier 积分的几乎处处收敛密切相关，上述引文中给出了结果：若$f \in B_q$, 则 Fourier 积分部分和 $S_N(f, x) \to f(x)$, a. e.. 高维情形块生成的空间 B_q 的研究可以参阅 Lu – Taibleson – Weiss [LTW]， Taibleson – Weiss [TW2]， Meyer – Taibleson – Weiss [MTW].

24. 若$\varphi \in BMO(\mathbb{R}^n)$使得 $\varphi \chi_I \in BMO$, $\| \varphi \chi_I \|_* \leqslant C \| \varphi \|_*$, $\forall$ 方体 $I \subset \mathbb{R}^n$. 则 $\varphi \in L^\infty$, 且 $\| \varphi \|_\infty \leqslant C \| \varphi \|_*$.

25. 若 h 是 $\mathbb{T}$ 上可测函数, 则 $h\varphi \in BMO$, $\forall \varphi \in BMO$, 当且仅当 $h \in L^\infty$, 且

$$\sup_I \left\{ \frac{1}{|I|} \log \frac{1}{|I|} \int_I |h - h_I| dx \right\} < \infty.$$

26. 若 $\varphi \in BMO(\mathbb{R})$, 方体 I 使 $\varphi_I = 0$, $\bar{I} = 3I$. 则存在 $\psi \in BMO(\mathbb{R})$使 $\psi = \varphi$ 在 I 上, $\psi \equiv 0$ 在 $\mathbb{R} - \bar{I}$ 上, 且 $\| \psi \|_* \leqslant C \| \varphi \|_*$.

提示: 设 $I = \bigcup J_n$, 其中 J_n 也是方体, 满足 $\operatorname{dist}(J_n, \partial I) \approx$

$|J_n|$, ∂ 表示边界. 例如逐次三等分便可得到这种分解. 设 J_0 是最大的一个, 即三等分 I 的中间部分. 对 $n>0$, 令 K_n 是 J_n 的关于 I 的离 J_n 近的端点的对称区间, 则

$$\psi(x)=\varphi_{J_n}, \quad x\in K_n; \quad \psi(x)=0, \quad x\notin I\bigcup(\bigcup_n K_n),$$

便是所求.

27. 若 $g(x)=\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n e^{i2^n x}$. 则

$$g\in BMO(\mathbb{T})\Longleftrightarrow \sum_{n\geqslant 0}|a_n|^2<\infty.$$

但同时(记 D 为单位圆)

$$\iint_D |g'(z)|dxdy<\infty\Longleftrightarrow \sum_{n\geqslant 0}|a_n|<\infty.$$

28. 设 $f=\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n e^{inx}$. 用对偶定理证明

$$\sum_k |a_{2^k}|^2\leqslant C\|f\|_1^2,$$

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{|a_n|}{n+1}\leqslant C\|f\|_1.$$

29. 设 $\varphi\in BMO(\mathbb{R}^n)$, I, J 是方体, 满足 $I\subset J$, $|J|\geqslant 2|I|$. 则

$$|\varphi_I-\varphi_J|\leqslant C\log\frac{|J|}{|I|}\|\varphi\|_*.$$

如果 I, J 是任意两个等边长方体，则

$$|\varphi_I-\varphi_J|\leqslant C\log\left(2+\frac{\operatorname{dist}(I,J)}{l(I)}\right)\|\varphi\|_*.$$

30. 设 $\varphi\in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$，$1\leqslant p<\infty$. 则 $\varphi\in BMO$，当且仅当

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\varphi(x)|^p}{1+|x|^{n+1}}dx<\infty,$$

且

$$\sup_{t>0}\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi(y)-\Phi(x,t)|^pP_t(x-y)dy=A_p<\infty,$$

其中 $\Phi(x,t)$ 是 φ 的 Poisson 积分，并且上式中最小的常数 A_p 满足

$$C_1\|\varphi\|_*\leqslant A_p^{\frac{1}{p}}\leqslant C_2\|\varphi\|_*.$$

证明

$$\inf_{\alpha}\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi(y)-\alpha|^2P_t(x-y)dy$$

$$=\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi(y)-\Phi(x,t)|^2P_t(x-y)dy$$

$$=|\varphi|^2*P_t(y)-\Phi^2(x,t).$$

31. 设 μ 是 $\mathbb{R}^n$ 上局部有限非负 Borel 测度，使得

$$M\mu(x)=\sup_{x\in I}\frac{\mu(I)}{|I|}<\infty\text{, a. e. },$$

则 $\log M\mu\in BMO$.

32. 设E是$[0,1]$的子集, $|E|\leqslant 4^{-\frac{1}{\varepsilon}}$. 则存在 $\varphi\in BMO$ 使

$$0\leqslant\varphi\leqslant 1,\ \varphi|_E=1,\ \varphi|_{[-1,2]^c}=0,\ 且\ \|\varphi\|_*\leqslant C\varepsilon,$$

其中 C 是绝对常数, $0<\varepsilon<1$ 是任意取定的数.

提示: 令 $\varphi=(\alpha+\beta\log M\chi_E)^+$, f^+ 表示函数 f 取正部.

33 关于二进 BMO(记为 BMO_d). $\varphi\in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 称为属于 BMO_d, 如果

$$\|\varphi\|_{*d}=\sup_{二进 I\ni x}\frac{1}{|I|}\int_I|\varphi-\varphi_I|dx<\infty,$$

$$\varphi_I=\frac{1}{|I|}\int_I\varphi dx.$$

说明 $BMO\subsetneqq BMO_d$. 若 $\varphi\in BMO_d$, 则 $\varphi\in BMO$ 当且仅当

$$|\varphi_{I_1}-\varphi_{I_2}|\leqslant A,\ \forall I_1,I_2\ 是等边长相邻二进方体, 此时有$$

$$C_1\|\varphi\|_*\leqslant A+\|\varphi\|_{*d}\leqslant C_2\|\varphi\|_*.$$

34. 记 I_0 为 $\mathbb{R}^n$ 中单位方体. 定义二进 H_{1d} 为

$$H_{1d}=\left\{f\in L^1(I_0):\ \sup_{二进 I\ni x}\left|\frac{1}{|I|}\int_I f(x)dx\right|\in L^1(I_0)\right\}.$$

证明 $BMO_d(I_0)=H_{1d}(I_0)^*$.

35. 设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上实可测函数，对所有方体 I, f 在 I 上的中数 $m_I(f)$ 定义为具有下述性质的数

$$|\{x\in I: f(x)>m_I(f)\}|\leqslant \frac{1}{2}|I|,$$

$$|\{x\in I: f(x)<m_I(f)\}|\leqslant \frac{1}{2}|I|.$$

(注意中数一般不是唯一的)．这个定义可自然地推广到复值函数

$$m_I(f)=m_I(\mathrm{Re}f)+im_I(\mathrm{Im}f).$$

不管中数如何确定，总有

$$\lim_{I_n\searrow x} m_{I_n}(f)=f(x),\quad \text{a.e.}\ \forall f.$$

设 f 是复值可测函数，$I\subset\mathbb{R}^n$, $C_I\in\mathbb{C}$, $\alpha<\frac{1}{2}$ 使得

$$|\{x\in I: |f(x)-C_I|>\lambda\}|\leqslant \alpha|I|,$$

则对中数的任意确定法，总有

$$|\{x\in I: |f(x)-m_I(f)|>2\sqrt{2}\ \lambda\}|\leqslant 2\alpha|I|.$$

利用中数的上述性质可以证明如下断言：设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上可测函数，假设存在 $\lambda_f>0$, 使得 $\forall$ I, 存在 $C_I\in\mathbb{C}$, 满足

$$\sup_I \frac{1}{|I|}|\{x\in I: |f-C_I|>\lambda_f\}|\leqslant \frac{1}{2(2^n+2)},$$

则 $f\in BMO$. 这是 §4.2 定理(2.4)的改进．它甚至可以改进得上

式右边 $\dfrac{1}{2(2^n+2)}$ 用任意 $\varepsilon<\frac{1}{2}$ 代替. 其证明参见 J. Strömberg[Str], 其思想是利用中数代替积分平均来改进 Calderón－Zygmund 分解.

36. 考虑 Littlewood－Paley g 函数算子(见 §3.7), 证明当 $f\in BMO$, 使 $g(f,x)<\infty$ 在某个正测集上成立时, 则 $\|g(f)\|_*\leqslant C\|f\|_*$, 其中 C 只依赖于维数. 举出例子说明即使 $f\in L^\infty$, 也可以使 $g(f,x)=\infty$, a. e., 以及 g 函数算子不是 L^∞ 到 L^∞ 有界的(意指存在 $f_0\in L^\infty$, 使 $g(f_0,x)<\infty$, a. e., 但 $g(f_0)\notin L^\infty$). 这个结果属于王斯雷[W2].

37. 设 $\Lambda=\{\lambda_n\}$是一个增序列, 满足 $\sum\limits_1^\infty\dfrac{1}{\lambda_n}=\infty$, $I_n=[\alpha_n,\beta_n]\subset[0,2\pi]$, 两两不重叠, 记 $\Delta_{I_n}(f)=|f(\beta_n)-f(\alpha_n)|$. 如果 $\sum\limits_1^\infty\dfrac{\Delta_{I_n}(f)}{\lambda_n}<\infty$, 则说 f 是 Λ 有界变差的(这个概念属于 D. Waterman), 记为 $f\in\Lambda BV$, 特别 $\lambda_n=n$ 时, ΛBV 记为 HBV, 称为调和有界变差. 下述将 ΛBV 与 BMO 结合起来的 ΛBMV 概念及其在 Fourier 级数收敛中的应用属于施咸亮[Sh1]. 设$\{I_n\}$是 $[a,a+2\pi]$ 中两两不重叠的区间组, 记 $\mu_{I_n}=\dfrac{1}{|I_n|}\displaystyle\int_{I_n}|f-f_I|dx$, 其中 f_I 是 f 在方体 I 上的积分平均. 如果

$$M_\Lambda(f)=\sup_{\{I_n\},a}\sum_1^\infty\frac{\mu_{I_n}(f)}{\lambda_n}<\infty,$$

则说 f 是 Λ 平均有界变差的, 记为 $f\in\Lambda BMV$. 证明当 $\lambda_n\nearrow\infty$ 时,

$\Lambda BV \subsetneqq \Lambda BMV$，而当 $\lambda_n = O(1)$ 时，则 $\Lambda BMV = BV$(有界变差)．此外 $\Lambda BMV \subsetneqq BMO$．关于 L^1 中 f 在第一类间断点使 Fourier 部分和收敛的充分条件，D. Waterman 首先将 $f \in BV$ 改进为 $f \in HBV$，施咸亮则改进为 $f \in HBMV$．类似地，§2.9 中所述的高维 Fourier 积分(或级数)临界阶 Bochner－Riesz 求和在给定点 x 收敛的充分条件 $f_x(t) \in HBV$ 也可改进为 $f_x(t) \in HBMV$

38. 考虑 Fourier 部分和算子 $\{S_n(f, x)\}$ 在 $H_1(\mathbb{T})$ 空间上的收敛问题，证明存在 $f \in H_1(\mathbb{T})$，使 $\{S_n(f, x)\}$ 不在 $H_1(\mathbb{T})$ 中收敛(只需证明存在幂级数型的 $f \sim \sum\limits_{0}^{\infty} c_n e^{inx} \in L^1$，使 $\{\|f - S_n(f)\|_1\}$ 不收敛到 0)．但却有如下的平均对数求和结果

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\log(N+1)} \sum_{n=1}^{N} \frac{\|S_n(f) - f\|_{H_1}}{n} = 0.$$

$\mathbb{T}^k$ 上用临界阶 Bochner－Riesz 求和算子代替 $\mathbb{T}$ 上的部分和算子，也有类似的结果．这个结果属于江寅生，刘和平与陆善镇，见 [JLL]．

39. $\mathbb{R}^n$ 上实可测函数 f 称为属于 BLO (即 Bounded Lower Oscillation 的简称)，如果

$$f_I - \inf_{x\in I} f(x) \leqslant C, \forall I.$$

证明 $BLO \subsetneqq BMO$．设 $g, h \in L^1_{\mathrm{loc}}$，使 $Mg < \infty$，$Mh < \infty$，a. e.，α，$\beta > 0$，$b \in L^\infty$．证明 $f \in BMO$，当且仅当

$$f = \alpha \log Mg - \beta \log Mh + b,\ \text{且} \|f\|_* \approx \alpha + \beta + \|b\|_\infty.$$

对每个 $g \in L^1_{\mathrm{loc}}$ 使 $Mg < \infty$，a. e.，则 $\log Mg \in BLO$．参见 R. Coifman, R. Rochberg. [CR]．

40. $\mathbb{R}^n$ 上(复)可测函数 f 称为属于 VMO(Vanishing Mean Oscillation)，如果

$$f\in BMO.\ 且\ \lim_{\delta\to 0}\sup_{I,|I|\leqslant\delta}\frac{1}{|I|}\int_I|f-f_I|dx=0.$$

记 UC 为 $\mathbb{R}^n$ 上一致连续函数的集合，$C^0(\mathbb{R}^n)$ 为有界一致连续函数的集合. 证明下述断言等价

(a) $f\in VMO$,

(b) $\lim\limits_{h\to 0}\|\tau_h f-f\|_*=0$,

(c) $\lim\limits_{t\to 0}\|f*P_t-f\|_*=0$,

(d) $f\in\overline{UC\bigcap BMO}$.

此外，当 $n=1$ 时，$f\in VMO\Longleftrightarrow f=f_1+Hf_2+C$, $f_1,f_2\in C^0(\mathbb{R}^n)$ (这些结果属于 Sarason[S])，VMO 的另一刻划属于 R. Coifman, G. Weiss [GW2]，它说 $VMO^*=H_1$.

注　记

古典 H_1 的原子分解思想来源于不少数学家，如 C. Herz [He 2] 在块 H_p 的研究中(1974)，R. Coifman [Co] 在经典 $H_p(\mathbb{R})$ 的研究中(1974)都发现了原子分解的思想. 以后 R. Latter [La] 完成了 $H_p(\mathbb{R}^n)$ 的原子分解. 定理(1.4)取材于 Garcia-Cuerva. J. Rubio *de* Francia, J. L. 的专著[GR]，定理(2.4)及其证明的主要思想(利用 Calderón-Zygmund 分解)属于 John-Nirenberg[JN]，这里的证明属于方向，王键. 推论(2.5)也属于方向—王键. 定理(4.7)中利用 Calderón 表示定理得到 H_1 的原子分解的思想来源于 A. P. Calderón [C 4]，A. Chang-R. Fefferman [CR1] 在乘积空间上把它叙述得十分清楚. H_p 空间的极大函数刻划，在一维的情形，首先由 Burkholder-Gundy-Silverstein [BGS] 得到，高维的结果主要属于 Fefferman-Stein [FS 2]. §4.5 的处理大部分取材于上述专著[GR]，但定理(5.3)的证明属于 Wilson [Wi 1, 2]. §4.6 内容属于 Stein-Weiss [SW 2]，但定理 6.11 属于

Fefferman－Stein[FS 2]．定理(7.5)属于 Fefferman－Stein[FS 2]．定理(7.7)属于邓东皋[De]，这里的证明取自 Coifman－Meyer－Stein[CMS 2]，§4.8 内容属于 J. Peetre[P]，但取材于 H. Triebel.[Tr].

第五章　Calderón – Zygmund 算子

本章将讨论 $\mathbb{R}^n$ 上很一般的一种积分算子，即它由某个核通过积分表示出来，这个核在 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 的对角线上具有相当强的奇性，而在对角线之外满足一定的大小条件与光滑性条件．当核 $K(x,y)$ 的形式为 $K(x-y)$ 时，它是本书第三章讨论过的经典的卷积型奇异积分算子；当核 $K(x,y)$ 的形式是 $K(x,x-y)$ 时，它是经典的伪微分算子．本章要讨论的算子，不仅概括了这两种算子，同时还包含了大量本质上是非卷积型的算子，我们称之为 Calderón – Zygmund 算子．如果把经典奇异积分算子与经典伪微分算子分别称为第一代与第二代奇异积分算子的话，则 Calderón – Zygmund 算子便可称为第三代奇异积分算子．它的一般理论是 80 年代发展起来的．这种算子在 Fourier 分析、复分析、偏微分方程、位势论、算子理论、非线性分析与概率论中都有许多应用．

本章的 §5.1 将给出 Calderón – Zygmund 算子的一般理论，包括一般概念及在 L^p，H_1 和 BMO 中的有界性等．证明的技巧与 § 3.6 中讨论经典奇异积分算子时有许多相似的地方． §5.2 将研究 Calderón – Zygmund 算子与主值积分的关系．§5.3 给出 Calderón – Zygmund 算子的若干例子．§5.4 将给出一个奇异积分算子 L^2 有界性的判别准则，即所谓的 $T(b)$ 定理．

§5.1　Calderón – Zygmund 算子的概念及 L^p 有界性

记 $\mathscr{D}=\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ 为由全体具有紧支集且无穷次可微的函数组成的检验函数空间，$\mathscr{D}'$ 是它的对偶空间．这是最常见的分布

(广义函数)空间之一．设 T 是 $\mathscr{D}\to\mathscr{D}'$ 的线性连续算子．我们称 $K\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ 为 T 的分布核，如果

$$\langle T\varphi,\psi\rangle=\langle K,\varphi\times\psi\rangle$$

对所有的 $\varphi,\psi\in\mathscr{D}$ 成立．此处 $\langle\ ,\ \rangle$ 表示泛函作用．我们考虑的算子，要求具有导言提到的奇性与光滑性，可以通过下面的定义准确地叙述出来．

定义(1.1) 我们称 $K\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ 为标准核，如果它在 $\Omega=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\setminus\{x=y\}$ 上等于连续函数(此函数仍用 $K(x,y)$ 表示) 它在 Ω 上满足

$$|K(x,y)|\leqslant\frac{C}{|x-y|^n}\tag{1}$$

$$|K(x,y)-K(x,y')|\leqslant\frac{C|y-y'|^r}{|x-y|^{n+r}},\ \text{当}\ |y-y'|\leqslant\frac{1}{2}|x-y|,\tag{2}$$

$$|K(x,y)-K(x',y)|\leqslant\frac{C|x-x'|^r}{|x-y|^{n+r}},\ \text{当}\ |x-x'|\leqslant\frac{1}{2}|x-y|,\tag{3}$$

其中 $0<r\leqslant1$．此时记 $K\in SK(r)$，或简记为 $K\in SK$．

显然，当算子 T 的分布核 $K\in SK(r)$ 时，只要 $\varphi\in\mathscr{D}$，$\psi\in\mathscr{D}$，$\operatorname{supp}\varphi\cap\operatorname{supp}\psi=\phi$，便有

$$\langle T\varphi,\psi\rangle=\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}K(x,y)\varphi(y)\psi(x)\,dydx,$$

这等价于

$$T\varphi(x)=\int_{\mathbb{R}^n}K(x,y)\varphi(y)dy$$

对 $x\notin\operatorname{supp}\varphi$ 成立．

定义(1.2) 设算子 $T:\mathscr{D}\to\mathscr{D}'$ 线性且连续，我们称 T 为

Calderón − Zygmund 算子，如果

(i) T 可以延拓为 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的有界算子；

(ii) 存在 $K \in SK(r)$，使得对 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中任意具有紧支集的 f，有

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y) f(y) dy$$

对 a.e. $x \in (\operatorname{supp} f)^c$ 成立．这时记 $T \in CZO(r)$，或简记为 $T \in CZO$．

注意，当 T 只具有性质(ii)时，则称 T 联系于标准核 K，记为 $T \in SK(r)$，或简记为 $T \in SK$．

由于这里定义的算子包括非卷积算子，其核又具有很强的奇性，故我们采取这种最一般的定义方式．在下一节将看到，在大多数情形，它差不多可以通过一个主值积分表示出来．值得指出的是，Calderón − Zygmund 算子的分布核，其在 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 中对角线以外（即在 Ω 上）的限制，并不能唯一地决定算子．事实上，考虑 $Tf(x) = m(x) f(x)$，即用 $m(x)$ 作乘法的算子，其中 $m(x) \in L^\infty$．它的分布核在对角线外的限制恒等于 0，并且显然满足定义 (1.2) 的两条要求．

Calderón − Zygmund 算子具有下面的重要性质．

定理 (1.3) 设 $T \in CZO(r)$，则存在常数 C_p 使得

(i) $\|Tf\|_p \leqslant C_p \|f\|_p$，$\forall f \in L^p$，$1 < p < +\infty$；

(ii) $|\{x : |Tf(x)| > \lambda\}| \leqslant \dfrac{C_1}{\lambda} \|f\|_1$，$\forall f \in L^1$；

(iii) $\|Tf\|_{L^1} \leqslant C_1 \|f\|_{H_1}$，$\forall f \in H_1$．

这定理说明，如果一个算子 T 联系于一个标准核，则其 L^2 有界性自动保证它的弱 (1,1) 型，H_1 到 L^1 有界性以及 L^p 有界性，$1 < p < +\infty$．

这里的证明，与前面讨论过的经典奇异积分情形完全类似．

证明 我们先证明(iii)．

先设 a 为(1,2)原子，我们要证明 $\|T(a)\|_1\leqslant C$，其中 C 不依赖于 a．不妨设 a 的支集是以原点为中心的方体 Q，记 $\tilde{Q}=2\sqrt{n}\,Q$．记

$$\int|T(a)(x)|\,dx=\int_{\tilde{Q}}+\int_{\tilde{Q}^c}=\mathrm{I}+\mathrm{II}.$$

用 Hölder 不等式以及 T 的 L^2 有界性，得

$$\mathrm{I}\leqslant|\tilde{Q}|^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\tilde{Q}}|T(a)(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant C|Q|^{\frac{1}{2}}\left(\int_Q|a(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant C.$$

根据核的条件，有

$$\mathrm{II}=\int_{\tilde{Q}}\left|\int_Q(K(x,y)-K(x,0))a(y)dy\right|dx$$

$$\leqslant C\|a\|_1\int_{\tilde{Q}^c}\frac{|Q|^{\frac{r}{n}}}{|x|^{n+r}}\,dx\leqslant C.$$

现设 f 是 H_1 的非零元，则存在 f 的(1,2)原子分解 $f=\Sigma\lambda_ja_j$，满足

$$\sum_1^{\infty}|\lambda_j|\leqslant2\|f\|_{H_1}.$$

这样，$T\left(\sum_N^M\lambda_ja_j\right)$ 有定义，且

$$\left\|T\left(\sum_N^M\lambda_ja_j\right)\right\|_1=\|\sum_N^M\lambda_jT(a_j)\|_1\leqslant C\sum_N^M|\lambda_j|,$$

$$\| T(\sum_1^M \lambda_j a_j)\|_1 \leqslant C\sum_1^\infty |\lambda_j| \leqslant C\|f\|_{H_1} .$$

这说明，$\sum_1^N \lambda_j Ta_j$ 在 L^1 中的极限存在，记为 Tf，它满足$\|Tf\|_1 \leqslant C\|f\|_{H_1}$.

需要指出的是，这里有一个 Tf 是否唯一决定的问题．因为我们是对 f 的某一个原子分解来定义 Tf 的，而原子分解并不是唯一的．不过，答案是肯定的．事实上，下一步的证明将表明，T 在 L^1 上的作用是有明确意义的，因而当 $f\in H_1$ 时，Tf 是唯一决定的．

(ii)的证明　证明与经典奇异积分算子的情形相同．先对于 $f\in L^1\bigcap L^2$ 与 $\lambda>0$，作 Calderón－Zygmund 分解，得到互不重叠的立方体 $\{Q_j\}$，满足

$$|f(x)|\leqslant\lambda ,\ \text{a.e.}\ x\in F=(\bigcup Q_j)^c ,$$

$$\lambda\leqslant\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|f(x)|dx\leqslant C\lambda .$$

令 $f=g+b$，其中 $b=\sum_1^\infty b_j$，

$$b_j=(f-f_{Q_j})\chi_{Q_j} ,$$

$$g=f\chi_F+\sum_j f_{Q_j}\chi_{Q_j} ,$$

f_{Q_j} 是 f 在 Q_j 上的平均．注意到

$$\|g\|_\infty\leqslant C\lambda ,\ \int_{Q_j} b_j dx=0 ,$$

$$\sum_j\|b_j\|_1\leqslant C\|f\|_1 ,$$

以及显然地 $\sum_j b_j$ 在 L^2 中收敛到 b，知 $T(b)=\sum_j T(b_j)$，$|T(b)|\leqslant$

$\sum_j T(b_j)$. 记 $\widetilde{\Omega}=\bigcup \widetilde{Q}_j$, $\widetilde{Q}_j=cQ_j$, y_j 为 Q_j 的中心，则

$$|\{x:|Tf(x)|>2\lambda\}|\leqslant|\{x:|Tg(x)|>\lambda\}|+|\{x:|Tb(x)|>\lambda\}|$$

$$\leqslant\frac{C}{\lambda^2}\|g\|_2^2+|\widetilde{\Omega}|+|\{x\in\widetilde{\Omega}^c:|Tb(x)|>\lambda\}|$$

$$\leqslant\frac{C}{\lambda}\|f\|_1+\frac{C}{\lambda}\sum_j\int_{\widetilde{Q}_j^c}|Tb_j|\,dx$$

$$\leqslant\frac{C}{\lambda}\|f\|_1+\frac{C}{\lambda}\sum_j\int_{\widetilde{Q}_j^c}\frac{|Q_j|^{\frac{\varepsilon}{n}}}{|x-y_j|^{n+\varepsilon}}\,dx\cdot\|b_j\|_1$$

$$\leqslant\frac{C}{\lambda}\|f\|_1.$$

对任意的 $f\in L^1$，任取 $\{f_n\}\subset L^1\bigcap L^2$，使得 $\|f_n-f\|_1\to0$，由刚证明的结论知，$\forall\lambda>0$，

$$|\{x:|T(f_n-f_m)(x)|>\lambda\}|\leqslant\frac{C}{\lambda}\|f_n-f_m\|_1\to0,\ (n,m\to+\infty).$$

这说明 $\{Tf_n\}$ 依测度收敛于某个 F. 由于对任意这样的序列 $\{f_n\}$，都有 $\{Tf_n\}$ 依测度收敛，则极限必是同一个 F. 定义它为 Tf. 这样，对任意 $f\in L^1$，有唯一的 Tf，它满足

$$|\{x:|Tf(x)|>\lambda\}|\leqslant\frac{C}{\lambda}\|f\|_1.$$

顺便指出，在前面的证明中，对 $f\in H_1$，Tf 是由 Tf_n 来定义的，其中 $f_n=\sum_1^n\lambda_j a_j$. 显然 $f_n\to f$ 在 L^1 意义下成立. 由这里的讨论知，Tf 是唯一决定的，与原子分解的选择无关.

(i)的证明　当 $1<p\leqslant2$ 时，由 Marcinkiewicz 内插定理(或在 H_1 与 L^2 之间作内插)便得所需结果. 当 $p>2$ 时，注意到 T 的转置 T'，其核为 $K(y,x)$，有与 $K(x,y)$ 相同的性质，采用

对偶性推理，也得所要的结论．定理(1.3)证完．

利用对偶性推理，从定理(1.3)的(iii)自然会看到：如果 $T\in CZO$，则 T 是 L^∞ 到 BMO 有界的．但 T 作用在 L^∞ 上的含义是什么？下面我们来回答这个问题．

定理(1.4) 设 $T\in CZO(r)$，$f\in L^2\bigcap L^\infty$，则

$$\|Tf\|_{BMO}\leqslant C\|f\|_\infty .$$

为证明定理，我们需要一个引理．此引理在其它地方还有应用．

引理(1.5) 设 $f\in L^2\bigcap L^\infty$，对 $\varepsilon>0$，令

$$I_\varepsilon=\int_{|y|\geqslant\varepsilon}K(0,y)f(y)\,dy,$$

$1<p<+\infty$，则

$$\varepsilon^{-n}\int_{|x|\leqslant\varepsilon/2}|Tf(x)-I_\varepsilon|\,dx$$

$$\leqslant C_pM_pf(0)+\varepsilon^{-n}\iint_{|x|\leqslant\frac{\varepsilon}{2},\,|y|\geqslant\varepsilon}|K(x,y)-K(0,y)||f(y)|\,dy\,dx,$$

其中 $M_pf=M^{\frac{1}{p}}(|f|^p)$，$M$ 是 Hardy－Littlewood 极大函数，C_p 与 f，ε 无关．(C_p 也依赖于 n，不过我们不关心这种依赖关系．)

引理(1.5)的证明 记

$$f_1(x)=\begin{cases}f(x), & \text{当 } |x|<\varepsilon,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

$f_2=f-f_1$．则当 $|x|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ 时，有

$$|Tf(x)-I_\varepsilon|\leqslant|Tf_1(x)|+|Tf_2(x)-I_\varepsilon|$$

$$=|Tf_1(x)|+\left|\int_{|y|\geqslant\varepsilon}[K(x,y)-K(0,y)]f(y)\,dy\right|.$$

因此，为了证明引理，只需证明

$$\int_{|x|<\varepsilon/2}|Tf_1(x)|\,dx\leqslant C_pM_pf(0)$$

就足够了．由定理(1.3)知，T 在 L^p 上有界，用 Hölder 不等式，得

$$\int_{|x|<\varepsilon/2}|Tf_1(x)|dx\leqslant C_p\varepsilon^{\frac{n}{p'}}\|Tf_1\|_p$$

$$\leqslant C_p\varepsilon^{\frac{n}{p'}}\|f_1\|_p$$

$$\leqslant C_p\varepsilon^n M_pf(0).$$

引理(1.5)证完．

定理(1.4)的证明 对 $p=2$ 应用引理(1.5)，根据 $M_2f(0)\leqslant\|f\|_\infty$，以及

$$\varepsilon^{-n}\iint_{\substack{|x|<\varepsilon/2\\|y|>\varepsilon}}|K(x,y)-K(0,y)||f(y)|dy$$

$$\leqslant C\|f\|_\infty\varepsilon^{-n}\int_{|x|<\varepsilon/2}\int_{|y|>\varepsilon}\frac{|x|^r}{|y-x|^{n+r}}dydx\leqslant C\|f\|_\infty,$$

有

$$\sup_{\varepsilon>0}\varepsilon^{-n}\int_{|x|\leqslant\varepsilon/2}|Tf(x)-I_\varepsilon|dx\leqslant C\|f\|_\infty.$$

由推理的平移不变性，便得对任意球 B，存在 I_B，使

$$\sup_B\frac{1}{|B|}\int_B|Tf(x)-I_B|dx\leqslant C\|f\|_\infty.$$

定理(1.4)证完．

定理(1.4)说明，如果 $T\in CZO(r)$，那么 T 局限于 $L^2\cap L^\infty$ 是 L^∞ 到 BMO 有界的．由于 $L^2\cap L^\infty$ 不是在 L^∞ 中稠密的，因此无法拓广 T 为 L^∞ 到 BMO 的有界算子．可否考虑 $Tf=\lim\limits_{j\to+\infty}T(f\chi_{B_j})$，其中 $B_j=\{x:|x|\leqslant j\}$？然而，一般说来，此极限是可以不存在的(参见下面定理(1.6)的证明)，但由于我们是在

BMO 中考虑 Tf 与 $T(f\chi_{B_j})$，因此可以从 $T(f\chi_{B_j})$ 中减去一个常数．再看其极限是否存在．从而给出 Tf 的合理定义．

定理(1.6) 设 $T\in CZO(r)$，$f\in L^\infty$，则存在 γ_j 使得

$$Tf(x)=\lim_{j\to+\infty}[T(f\chi_{B_j})-\gamma_j] \tag{4}$$

存在，其中极限可按局部 L^1 模与几乎处处意义理解．由此定义的算子 T 是 L^∞ 到 BMO 有界的．即

$$\|Tf\|_{BMO}\leqslant C\|f\|_\infty .$$

证明 事实上．取

$$\gamma_j=\int_{1\leqslant|y|\leqslant j}K(0,y)f(y)dy ,$$

此积分显然是存在的．记 $g_j(x)=T(f\chi_{B_j})(x)-\gamma_j$．对任意 $R>0$，在球 $|x|\leqslant R$ 上，当 $j,l>2R+1$，$j>l$ 时，

$$g_j(x)=g_l(x)+S_{lj}(x),$$

其中

$$S_{lj}(x)=\int_{l<|y|\leqslant j}[K(x,y)-K(0,y)]f(y)dy .$$

它满足

$$|S_{lj}(x)|\leqslant\|f\|_\infty\int_{l<|y|\leqslant j}\frac{|x|^r}{|y-x|^{n+r}}dy .$$

显然此不等式右边积分当 $l,j\to+\infty$ 时．在 $|x|\leqslant R$ 上是一致收敛于0的，这就证明了(4)中的极限存在．根据定理(1.4)，有

$$\begin{aligned}\|Tf\|_{BMO}&\leqslant\overline{\lim_{j\to+\infty}}\|g_j\|_{BMO}=\overline{\lim_{j\to+\infty}}\|T(f\chi_{B_j})\|_{BMO}\\&\leqslant C\|f\|_\infty .\end{aligned}$$

定理(1.6)证完．

当 $f\in L^2\cap L^\infty$ 时，定理(1.6)给出的 Tf 与原来定义的 Tf 仅差一个常数 $\int_{|y|\geq 1}K(0,y)f(y)dy$. 由于它们都属于 BMO，因此它们是 BMO 中的同一个元素.

§5.2 Calderón－Zygmund 算子与主值积分

设 $T\in CZO(r)$，它联系于标准核 $K\in SK(r)$. 这时由条件 $|K(x,y)|\leq C|x-y|^{-n}$ 知，

$$T_\varepsilon f(x)=\int_{|x-y|\geq\varepsilon}K(x,y)f(y)dy$$

对任意具有紧支集的 $f\in L^p$ 是存在的，$1\leq p<+\infty$. 一个自然的问题是 T 与下列的主值积分

$$\lim_{\varepsilon\to 0}T_\varepsilon f(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x-y|>\varepsilon}K(x,y)f(y)\,dy$$

有什么联系？为此我们先讨论这个主值积分何时有意义，根据以前的经验，我们来考虑极大算子

$$T^*f(x)=\sup_{\varepsilon>0}|T_\varepsilon f(x)|.$$

定理(2.1) (Cotlar 不等式)设 $T\in CZO(r)$，$f\in L^p$，$1\leq p<+\infty$，$q>1$，则存在常数 C，C_q(忽略对维数 n 的依赖)使得

$$T^*f(x)\leq C_qM_q(f)(x)+CM(Tf)(x).$$

证明 不妨假设 $x=0$，否则只需作一个平移即可. 我们要应用引理(1.5). 由(记 I_ε 为引理 1.5 中引进的记号，以及 A 与 C 为仅依赖于维数的常数)

$$\varepsilon^{-n}\int_{|x|\leq\varepsilon/2}|Tf(x)-I_\varepsilon|dx$$

$$\geqslant A|T_\varepsilon f(0)| - \varepsilon^{-n}\int_{|x|\leqslant\varepsilon/2}|Tf(x)|\,dx$$

$$\geqslant A|T_\varepsilon f(0)| - CM(Tf)(0),$$

以及

$$\int_{|y|\geqslant 2|x|}|K(x,y)-K(0,y)||f(y)|\,dy$$

$$\leqslant \int_{|y|\geqslant 2|x|}\frac{C|x|^r}{|y|^{n+r}}|f(y)|\,dy$$

$$\leqslant C\sum_{j=1}^{\infty}\int_{2^j|x|\leqslant|y|\leqslant 2^{j+1}|x|}\frac{|x|^r}{|y|^{n+r}}|f(y)|\,dy$$

$$\leqslant C\sum_{j=1}^{\infty}\frac{|x|^r}{(2^j|x|)^{n+r}}\int_{|y|\leqslant 2^{j+1}|x|}|f(y)|\,dy$$

$$\leqslant CM(f)(0)\leqslant CM_q(f)(0),$$

应用引理(1.5)，便得：

$$A|T_\varepsilon f(0)|\leqslant CM(Tf)(0)+C_qM_q(f)(0).$$

对ε取上确界，便证得定理(2.1)．

推论(2.2) 若$T\in CZO(r)$，$1<p<+\infty$，则

$$\|T^*f\|_p\leqslant C_p\|f\|_p.$$

证明 只需选择$1<q<p$，应用Hardy－Littlewood极大函数的性质与定理(2.1)，即得推论(2.2)．

定理(2.3) 若$T\in CZO(r)$，则T^*是弱(1,1)型的，即对任意$f\in L^1$，有

$$|\{x: T^*f(x)>\lambda\}|\leqslant\frac{C}{\lambda}\|f\|_1.$$

证明 证明与本章定理(1.3)的(ii)相类似，只需稍加修改即可，记

$$K_\varepsilon(x,y)=\begin{cases}K(x,y), & \text{当 } |x-y|>\varepsilon,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

对任意 $\lambda>0$，作 Calderón－Zygmund 分解 $f=g+b$，g 与 $b=\sum_1^\infty b_j$ 同定理(1.3)(ii)的证明中一样．此时有

$$T^*f(x)\leqslant T^*g(x)+T^*b(x).$$

由 T^* 的(2.2)型，有

$$|\{x:T^*g(x)>\lambda\}|\leqslant\frac{C}{\lambda^2}\|g\|_2^2\leqslant\frac{C}{\lambda}\|f\|_1.$$

为估计 $T^*b(x)$，我们来证明，当 $x\notin\bigcup\widetilde{Q}_j$ 时，

$$\sup_{\varepsilon>0}|T_\varepsilon b(x)|\leqslant\sum\int_{Q_j}|K(x,y)-K(x,y_j)||b(y)|dy$$
$$+CM(b)(x), \tag{1}$$

其中 y_j 是 Q_j 的中心．

事实上，对任意 $x\notin\bigcup\widetilde{Q}_j$，$\varepsilon>0$，$Q_j$ 有三种可能：

(a) 对任意的 $y\in Q_j$，有 $|x-y|<\varepsilon$，此时 $K_\varepsilon(x,y)=0$，从而

$$T_\varepsilon(b_j)(x)=\int_{Q_j}K_\varepsilon(x,y)b(y)dy=0;$$

(b) 对任意的 $y\in Q_j$，有 $|x-y|>\varepsilon$，此时有 $K_\varepsilon(x,y)=K(x,y)$，故

$$T_\varepsilon(b_j)(x)=\int_{Q_j}K_\varepsilon(x,y)b(y)dy$$
$$=\int_{Q_j}[K(x,y)-K(x,y_j)]b(y)dy.$$

(c) 存在 $y\in Q_j$ 使得 $|x-y|=\varepsilon$. 此时存在 r_n，使得 $\overline{B(x,r_n\varepsilon)}\supset Q_j$，同时也存在 $r_n{}'$，使得 $|x-y|>r_n{}'\varepsilon$ 对一切 $y\in Q_j$ 成立. 这里的 r_n 与 $r_n{}'$ 只与维数有关，这就是说，对任意 $y\in Q_j$，有 $|x-y|\approx\varepsilon$，故

$$
\begin{aligned}
|T_\varepsilon(b_j)(x)| &\leqslant \int_{Q_j}|K_\varepsilon(x,y)b(y)|\,dy \\
&\leqslant \int_{B(x,r_n\varepsilon)\cap Q_j}|K_\varepsilon(x,y)||b(y)|\,dy \\
&\leqslant C\varepsilon^{-n}\int_{B(x,r_n\varepsilon)\cap Q_j}|b(y)|\,dy .
\end{aligned}
$$

对这样的 j 求和，便得：

$$
\begin{aligned}
\sum_j|T_\varepsilon(b_j)(x)| &\leqslant C\varepsilon^{-n}\int_{B(x,r_n\varepsilon)}|b(y)|\,dy \\
&\leqslant CM(b)(x) .
\end{aligned}
$$

再把(b)的情形的有关项加起来，便得(1). 用 Hardy－Littlewood 极大函数的弱(1.1)型，并重复定理(1.3)中(ii)的证明，便得

$$
|\{x:T^*(b)(x)>\lambda\}|\leqslant|\{x:M(b)>C\lambda\}|+|\tilde{\Omega}|
$$

$$
+\frac{C}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n\setminus\tilde{\Omega}}\sum_j\frac{|Q_j|^{\frac{r}{n}}}{|x-y_j|^{n+r}}\|b_j\|_1dx\leqslant\frac{C}{\lambda}\|f\|_1 .
$$

定理(2.3)获证.

运用 Hardy－Littlewood 极大函数的弱(1,1)型与(p,p)型推出 Lebesgue 微分定理的技巧(见§1.5 或§3.4)，我们有下面的定理.

定理(2.4) 设 $T\in CZO(r)$，且其分布核 K 满足

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|x-y|\leq 1} K(x,y)\,dy \tag{2}$$

对 a.e.$x\in\mathbb{R}^n$ 存在，则对任意 $f\in L^p$，$1\leq p<\infty$，极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x-y|>\varepsilon} K(x,y)f(y)dy \tag{3}$$

几乎处处存在．进一步，存在 $m(x)\in L^\infty$，使得

$$Tf(x)=m(x)f(x)+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x-y|>\varepsilon} K(x,y)f(y)\,dy \tag{4}$$

几乎处处成立．并且当 $1<p<\infty$ 时，上式在 L^p 极限意义下也是成立的．

证明 首先证明，对任意 $\varphi\in\mathscr{S}$，(3)中的极限存在．事实上，由 $|K(x,y)|\leq C|x-y|^{-n}$ 知，积分

$$\int_{|x-y|>1} K(x,y)\varphi(y)dy$$

绝对收敛．而

$$\int_{\varepsilon<|x-y|\leq 1} K(x,y)\varphi(y)\,dy$$

$$=\int_{\varepsilon<|x-y|\leq 1} K(x,y)[\varphi(y)-\varphi(x)]dy+\varphi(x)\int_{\varepsilon<|x-y|\leq 1} K(x,y)dy,$$

上式右边第一个积分中的被积函数被 $\dfrac{\|\nabla\varphi\|_\infty}{|x-y|^{n-1}}$ 控制，因而是绝对收敛的，这就证明了(3)中的积分当 $f\in\mathscr{S}$ 是几乎处处存在的．

转移到一般的 L^p，$1<p\leq\infty$，我们只需用 T^* 的弱 (p,p) 型

结果(见定理(2.3)与推论(2.2)). 设$f\in L^p$, 无妨设$T_\varepsilon f(x)$是实值的.令

$$\Omega f(x)=|\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}T_\varepsilon f(x)-\underline{\lim_{\varepsilon\to 0}}T_\varepsilon f(x)|.$$

只需证明$\Omega f(x)=0$, a.e..由$\mathscr{D}$在L^p稠密，令

$$f=g+h,$$

其中$h\in\mathscr{D}$, $\|g\|_p$任意小，已知$\Omega h(x)=0$.而

$$\Omega g(x)\leqslant 2T^*g(x).$$

因此，对任意$\delta>0$.

$$|\{x:\Omega f(x)>\delta\}|=|\{x:\Omega g(x)>\delta\}|$$

$$\leqslant|\{x:T^*g(x)>\delta/2\}|\leqslant\frac{2^pA_p}{\delta^p}\|g\|_p^p$$

可任意小，即$\Omega f(x)=0$, a.e..

考虑

$$G(f,x)=Tf(x)-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x-y|>\varepsilon}K(x,y)f(y)dy$$

作为$\mathscr{D}\to\mathscr{D}'$的线性连续算子，其分布核的支集为$\Delta=\{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n: x=y\}$. 对每个固定的$x$, 泛函$G:\mathscr{D}\to\mathbb{C}$的支集只有一点$x$, 因此它是Dirac函数的倍数，即$G(f,x)=m(x)f(x)$. 由于$G$是$L^2$有界的，便知$m\in L^\infty$.

当$f\in L^p$, $1<p<\infty$时，为说明(3)中的极限在L^p意义下也存在，只需用推论(2.2)与Lebesgue控制收敛定理. 定理(2.4)证完.

注 如同在§3.6中已指出的，“任意Calderón－Zygmund奇异积分算子(即我们这里的记号CZO)都使得$\{T_\varepsilon f\}$在L^p中有极限，对所有$f\in L^p(\mathbb{R}^n)$成立，其中$1<p<\infty$.”这一断言的证明可以无需经过T^*的L^p有界性，而只需$\{T_\varepsilon\}$的对ε一致的L^p有界性，以及$\{T_\varepsilon f\}$当f局限于L^p的某个稠密子集时在L^p中收敛这两个事实.

在(2)中极限存在的前提下，我们证明了，每一个 Calderón－Zygmund 算子，在相差一个用函数 $m(x)$ 作乘法的算子外，都等同于一个用主值积分定义的(奇异)积分算子．一个自然的问题是，(2)中极限存在这个条件能否去掉．事实上，这条件完全去掉后，结论是不成立的．例如设 $r\in\mathbb{R}$，考虑算子 M_r：$L^2(\mathbb{R}^n)\to L^2(\mathbb{R}^n)$ 如下：$(M_r f)^{\wedge}(\xi)=|\xi|^{ir}\hat{f}(\xi)$，它所对应的分布核为 $K_r(x,y)=C|x-y|^{-n-ir}$，其中复常数 $C\neq 0$ 可以用 Γ 函数简单表出．显然 $M_r\in CZO$，但极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x-y|>\varepsilon}\frac{f(y)}{|x-y|^{n+ir}}\,dy$$

不是对任意 $f\in\mathscr{S}$ 都几乎处处存在的．其理由请读者自己思考(也可参看[M])．

把(2)中极限存在这个条件去掉来讨论类似的问题，可参看本章§5.5的习题5．

§5.3 Calderón－Zygmund 算子的例子

这里提供若干个 Calderón－Zygmund 算子的例子，它们中有一些是我们遇见过的，在这里再概括一下，并作一些深入的讨论或用新的方法加以处理．还有一些新的例子，它们是第三代奇异积分的典型代表，是十分基本而又重要的．

1．经典奇异积分算子

经典奇异积分算子主要是指卷积算子，它的核具有一定的奇性，通过主值积分定义．也就是说，这时的核

$$K(x,y)=L(x-y),$$

其中 L 在 $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ 定义，要求它满足：

$$|L(x)|\leqslant C|x|^{-n};\tag{1}$$

$$|L(x-y)-L(x)|\leqslant C|y|^{\gamma}|x|^{-n-\gamma},\ \text{当}\ |y|\leqslant\frac{|x|}{2}.\tag{2}$$

为应用定理(2.4)，我们还假设极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon\leqslant|y|<1} L(y)dy \tag{3}$$

存在，算子定义为

$$Tf(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x-y|>\varepsilon} L(x-y)f(y)dy. \tag{4}$$

为保证算子的 L^2 有界性，还需假设

$$\sup_{\varepsilon<\eta} \left|\int_{\varepsilon<|x|<\eta} L(x)\,dx\right|<\infty. \tag{5}$$

在§3.6我们曾假设核满足：$\forall \varepsilon,\eta>0$，

$$\int_{\varepsilon<|x|<\eta} L(x)\,dx=0. \tag{6}$$

显然，条件(6)蕴含了(3)、(5)，我们在这里讨论的是较§3.6中更一般的算子.

定理(3.1) 设 L 满足条件(1)(2)(3)(5)，则由 L 定义的经典奇异积分算子(4)是Calderón－Zygmund算子.

为证明定理(3.1)，我们叙述一条引理，记

$$T_\varepsilon f(x)=\int_{|x-y|>\varepsilon} L(x-y)f(y)dy.$$

引理(3.2) 由(4)定义的算子 T 是 L^2 有界的，当且仅当 $T_\varepsilon-T_\eta$，$0<\varepsilon<\eta$，是 L^2 一致有界的.

引理(3.2)的证明 设 $T_\varepsilon-T_\eta$ 一致有界，用Hölder不等式，容易看出，当 $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$，$\|\varphi\|_2\leqslant 1$时，则当 $\eta\to\infty$ 时有 $\|T_\eta\varphi\|_2\to 0$. 由

$$\|T_\varepsilon\varphi\|_2\leqslant\|(T_\varepsilon-T_\eta)\varphi\|_2+\|T_\eta\varphi\|_2,$$

根据 Fatou 引理，知

$$\| T\varphi \|_2 \leqslant \underline{\lim} \| T_\varepsilon \varphi \|_2 \leqslant C \| \varphi \|_2 ,$$

这就证明了 T 是 L^2 有界的．

反过来，若 T 是 L^2 有界的，则 $T \in CZO(r)$．由本章推论(2.2)知 T^* 也是 L^2 有界的，显然

$$|(T_\varepsilon - T_\eta)\varphi(x)| \leqslant 2T^*\varphi(x),$$

故 $T_\varepsilon - T_\eta$ 是 L^2 一致有界的．

定理(3.1)的证明　只需证明 T 可延拓为 L^2 有界的算子．由引理(3.2)，又只需证明 $T_\varepsilon - T_\eta$ 是 L^2 一致有界的．而根据 Plancherel 定理(§2.4 定理 4.9)，则只需证明 $L_{\varepsilon\eta} = L(u)\chi_{\{\varepsilon<|u|<\eta\}}$ 的 Fourier 变换是一致有界的．考虑

$$a_0^{-1}\hat{L}_{\varepsilon\eta}(y) = \int_{\varepsilon<|x|<\eta} L(x)e^{-ixy}dx$$

$$= \left(\int_{\frac{C}{|y|}\leqslant x} + \int_{|x|\leqslant\frac{C}{|y|}}\right) L_{\varepsilon\eta}(x)e^{-ixy}dx = \mathrm{I} + \mathrm{II}.$$

这里 a_0 是规范化 Lebesgue 测度中的常数，C 是泛指常数，即使同一式中也不必是一样的．

对于 II，利用条件(1)与(5)，有

$$|\mathrm{II}| \leqslant \left|\int_{|x|\leqslant\frac{C}{|y|}} L_{\varepsilon\eta}(x)(e^{-ixy}-1)dx\right| + \left|\int_{|x|\leqslant\frac{C}{|y|}} L_{\varepsilon\eta}(x)dx\right|$$

$$\leqslant \int_{|x|\leqslant\frac{C}{|y|}} |e^{-ixy}-1| \frac{C}{|x|^n} dx + C$$

$$\leqslant C|y| \int_{|x|\leqslant\frac{C}{|y|}} \frac{dx}{|x|^{n-1}} + C \leqslant C.$$

对于 I 的估计，完全与 § 3.6 中定理 6.5 的证明一样，为理解

各条件在证明中的作用，我们简述如下：取 $z=\frac{\pi y}{|y|^2}$，作变量替换

$$I=\int_{|x|\geqslant\frac{C}{|y|}}L_\eta(x)e^{-ixy}\,dx$$

$$=-\int_{|x-z|\geqslant\frac{C}{|y|}}L_\eta(x-z)e^{-ixy}\,dx.$$

取平均，便有

$$I=\frac{1}{2}\int_{\frac{C}{|y|}\leqslant|x|}[L_\eta(x)-L_\eta(x-z)]e^{-ixy}dx+R,$$

其中 R 满足

$$|R|\leqslant\int_{\frac{C_1}{|y|}\leqslant|x|\leqslant\frac{C_2}{|y|}}|L(x)|\,dx\leqslant\int_{\frac{C_1}{|y|}\leqslant|x|\leqslant\frac{C_2}{|y|}}\frac{dx}{|x|^n}\leqslant C,$$

而由 L 满足的条件(2)，知 I 的右边第一项也被常数控制定理(3.1)证完.

定理(3.1)的证明过程表明，核的光滑性条件(2)可以用下面更弱的条件代替：

$$\int_{|x|\geqslant2|y|}|L(x-y)-L(x)|\,dx\leqslant C. \tag{7}$$

这条件，一般称为 Hörmender 条件，是迄今所知卷积奇异积分保证 L^2 有界的最弱条件．在这条件下，算子的 L^2 有界性，也自动保证 $L^p(1<p<\infty)$有界性．这个问题，留给读者思考．

这种经典奇异积分算子中，最典型的一类是

$$L(x)=\frac{\Omega(x)}{|x|^n},$$

其中$\Omega(x)$是0次齐次函数，即满足$\Omega(rx)=\Omega(x)$，且它在单位球面的平均为0：

$$\int_{S_{n-1}} \Omega(x)d\sigma(x)=0.$$

在S_{n-1}上，$\Omega(x)$还要求属于Lip r，即

$$|\Omega(x)-\Omega(x')|\leqslant C|x-x'|^r, \quad \forall x, x'\in S_{n-1}.$$

这时，奇异积分算子为

$$T(f)(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^n} f(y)dy.$$

这类算子在§3.6我们已讨论过了．一维的Hilbert变换与高维的Riesz变换，都是这类算子中的特例．

2．仿积(paraproduct)

有许多形式相近的仿积算子．这里只介绍其中的一种．设$\varphi, \psi, \widetilde{\psi}\in\mathscr{S}$，都是径向函数，分别满足：

$$\int \varphi(x)dx=1, \quad \int \psi(x)dx=\int \widetilde{\psi}(x)dx=0.$$

记 $\varphi_t(\cdot)=\frac{1}{t^n}\varphi\left(\frac{\cdot}{t}\right)$，$P_t(f)=\varphi_t*f$，$Q_t(f)=\psi_t*f$，$\widetilde{Q}_t(f)=\widetilde{\psi}_t*f$，则仿积可定义为

$$\Pi(f)=\Pi_b(f)=\int_0^\infty \widetilde{Q}_t(Q_t(b)P_t(f))\frac{dt}{t},$$

其中b是一"参变"函数．

定理(3.3) 若$b\in BMO$，则仿积$\Pi_b\in CZO(\varepsilon)$，其中$\varepsilon=1$．

证明 首先，$\varphi\in\mathscr{S}$，显然有

$$|\varphi_t(x-y)|\leqslant \frac{C}{t^n}\cdot\frac{1}{1+\left|\frac{x-y}{t}\right|^{n+1}}\leqslant\frac{Ct}{t^{n+1}+|x-y|^{n+1}},$$

对 ψ_t，$\widetilde{\psi}_t$ 有类似的估计，记 $m_t(b)$ 为 b 在以 x 为中心以 t 为边长的方体上的平均，由 BMO 的性质（§4.7 引理 7.4）知

$$\left|\int \psi_t(x-y)b(y)dy\right| = \left|\int \psi_t(x-y)[b(y)-m_t(b)]\,dy\right|$$

$$\leqslant \int \frac{t\,|b(y)-m_t(b)|}{t^{n+1}+|x-y|^{n+1}}\,dy \leqslant C\|b\|_*,$$

故 $\|Q_t(b)\|_\infty \leqslant C\|b\|_*$，其中 $\|b\|_*$ 表示 b 的 BMO 范数．同理可证

$$\|\nabla_x Q_t(b)\|_\infty \leqslant Ct^{-1}\|b\|_*. \tag{8}$$

用 $K_t(x,y)$ 表示 $\widetilde{Q}_t(Q_t(b)P_t(f))$ 的核，即

$$\widetilde{Q}_t(Q_t(b)P_t(f))(x) = \int K_t(x,y)f(y)dy,$$

则显然有

$$|K_t(x,y)| = \left|\frac{1}{t^{2n}}\int \widetilde{\psi}\left(\frac{x-z}{t}\right)\varphi\left(\frac{z-y}{t}\right)Q_t(b)(z)dz\right|$$

$$\leqslant C\|b\|_*\Phi_t(x-y),$$

其中

$$\Phi(x) = \int |\widetilde{\psi}(x-z)\varphi(z)|\,dz,$$

它满足

$$|\Phi(x)| \leqslant \frac{C}{1+|x|^{n+2}}.$$

（作为一个习题留给读者），这样，Π_b 的核 $K(x,y)$ 满足：

$$|K(x,y)| = \left|\int_0^\infty K_t(x,y)\frac{dt}{t}\right| \leqslant C\|b\|_*\int_0^\infty |\Phi_t(x-y)|\frac{dt}{t}$$

$$\leqslant C\|b\|_* \big/ |x-y|^n.$$

同理，由(8)可证得．

$$|\nabla K_t(x,y)|\leqslant C\|b\|_* t^{-1}\Phi_t(x-y),$$

其中 Φ 是类似于前面的函数．从而得到

$$|\nabla K(x,y)|\leqslant C\|b\|_*/|x-y|^{n+1},$$

这就证明了 Π_b 的核 K 具有标准估计，其中 $r=1$．

为证明 Π_b 是 L^2 有界的，设 $g\in L^2$，$\|g\|_2\leqslant 1$，则

$$
\begin{aligned}
&|\langle \Pi_b(f),\ g\rangle| \\
&=\left|\iint_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \widetilde{Q}_t(Q_t(b)P_t(f))(x)\overline{g}(x)\frac{dxdt}{t}\right| \\
&=\left|\iint_{\mathbb{R}_+^{n+1}} Q_t(b)(x)P_t(f)(x)\widetilde{Q}_t'(\overline{g})(x)\frac{dxdt}{t}\right| \\
&\leqslant\left(\iint_{\mathbb{R}_+^{n+1}}|P_t(f)(x)|^2|Q_t(b)(x)|^2\frac{dxdt}{t}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad\cdot\left(\iint_{\mathbb{R}_+^{n+1}}|\widetilde{Q}_t'(\overline{g})(x)|^2\frac{dxdt}{t}\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

其中 $\widetilde{Q}_t'$ 表示 $\widetilde{Q}_t$ 的转置．用 Plancherel 定理(§2.4，定理 4.9)，有

$$
\begin{aligned}
\iint_{\mathbb{R}_+^{n+1}}|\widetilde{Q}_t'(\overline{g})(x)|^2\frac{dxdt}{t}&=\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{\widetilde{\psi}}(\xi t)|^2|\hat{\overline{g}}(\xi)|^2\frac{d\xi dt}{t} \\
&=\int_0^\infty\frac{|\hat{\widetilde{\psi}}(t)|^2}{t}dt\,\|g\|_2^2\leqslant C,
\end{aligned}
$$

其中积分

$$\int_0^\infty\frac{|\hat{\widetilde{\psi}}(t)|^2}{t}dt<\infty$$

容易由 $\hat{\tilde{\psi}}(0)=\int\tilde{\psi}(y)dy=0$ 以及 $\hat{\tilde{\psi}}\in\mathscr{S}$ 等事实推出．

再由 $b\in BMO$ 知 $|Q_t(b)(x)|^2\frac{dxdt}{t}$ 是 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 的 Carleson 测度（见§4.7定理7.5）．根据 Carleson 不等式（见§4.7命题7.3），有

$$\iint_{\mathbb{R}_+^{n+1}}|P_t(f)(x)|^2|Q_t(b)(x)|^2\frac{dxdt}{t}$$

$$\leqslant C\int_{\mathbb{R}^n}|P^*(f)(x)|^2dx\leqslant C\|f\|_2^2,$$

其中

$$P^*(f)(x)=\sup_{|y-x|<t}|P_t(f)(y)|.$$

这就证明了 Π_b 是 L^2 有界的，从而得到 $\Pi_b\in CZO$．

Π_b 有一条重要性质：$\Pi_b(1)=b$，这可以如下简单地看出．事实上，$P_t(1)=1$，而

$$\int_0^\infty\tilde{Q}_t(Q_t(b))\frac{dt}{t}=\int_0^\infty\tilde{\psi}_t*\psi_t*b\frac{dt}{t}=b,$$

这正是 Calderón 表示定理，可以简单地从两边取 Fourier 变换验证，只要假设

$$\int_0^\infty\frac{\hat{\psi}(t)\hat{\tilde{\psi}}(t)}{t}dt=1.$$

另外，还有 $\Pi_b^t(1)=0$（或 $\Pi_b^*(1)=0$），这也是由 $\tilde{Q}_t(1)=0$ 不难验证的．Π_b 的这两条性质，在简化 Calderón－Zygmund 算子 L^2 有界性准则的 $T(1)$ 定理的证明中．有重要的作用，我们将在§5.4介绍 $T(1)$ 定理以及它的推广－$T(b)$ 定理．

仿积算子曾被 J. Bony 用于非线性分析中．另外，它是一类最基本的 Calderón－Zygmund 算子，详见 Y. Meyer 的专著 [M]．

3．Calderón 的交换子

$$C_m(f)(x)=\mathrm{p.v.}\ \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{A(x)-A(y)}{x-y}\right)^m\frac{f(y)}{x-y}\,dy,$$

其中 $A'\in L^\infty(\mathbb{R})$．$m=0$ 时，这是 Hilbert 变换．当 $m=1$ 时，若记 M_A 为用函数 $A(x)$ 作乘法的算子，即 $M_Af(x)=A(x)f(x)$，则 $C_1(f)=[M_A, \dfrac{d}{dx}H](f)$，其中 H 是 Hilbert 变换，$[T_1, T_2]=T_1T_2-T_2T_1$ 表示算子 T_1 与 T_2 的交换子．类似地，当 $m>1$ 时，C_m 可表成 M_A 与 H 的微分的高阶交换子．

定理（3.4）（Calderón－Coifman－Meyer）若 $A'\in L^\infty$，则 $C_m\in CZO$，其中 m 为非负整数．

C_m 的核满足标准估计是显然的．当 $m\geq 1$ 时，C_m 的 L^2 有界性证明是比较复杂的．在以后给出 L^2 有界性判别准则后，L^2 有界性就变成一个简单的推论了．

Calderón 交换子是 Calderón 于 1965 年为了研究奇异积分算子代数引进来的，它们是最典型的也是最简单的非卷积型奇异积分算子（$m\geq 1$）．

4．Lipschitz 曲线上的 Cauchy 积分算子

考虑复平面上的 Lipschitz 曲线 $z=x+iA(x)$，$-\infty<x<\infty$，$A'\in L^\infty$，其上的 Cauchy 积分算子可定义为

$$C_A(f)(x)=\mathrm{p.v.}\ \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(y)\,dy}{(x+iA(x))-(y+iA(y))}$$

$$=\mathrm{p.v.}\ \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(y)dy}{(x-y)+i(A(x)-A(y))}. \quad (9)$$

一般来说，积分元应该是弧微分 ds ，但现在

$$ds=\sqrt{1+(A'(x))^2}\,dx,$$

满足 $dx\leqslant ds\leqslant\sqrt{1+\|A'\|_\infty^2}\,dx$，因此，用 dx 代替 ds 是合理的，显然它的核满足标准估计．$C_A(f)$ 的 L^2 有界性的证明是相当困难的，但用下一节证明的 L^2 有界性判别准则（$T(b)$ 定理），便很容易得到这一结果．我们把这结论写成定理的形式：

定理（3.5） （Calderón－Coifman－McIntosh－Meyer）若 $A'\in L^\infty$，则由（9）式定义的 Cauchy 积分算子是 Calderón－Zygmund 算子．

$C_A(f)$ 与 Calderón 的交换子有密切的关系，事实上，按 Taylor 公式展开，

$$C_A(f)(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+i\left(\dfrac{A(x)-A(y)}{x-y}\right)}\cdot\frac{f(y)}{x-y}\,dy$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-i)^k}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{A(x)-A(y)}{x-y}\right)^k\frac{f(y)}{x-y}\,dy$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-i)^kC_k(f)(x).$$

如果能证明 C_k 的 L^2 有界性，并得到其算子模的较好估计使能进行求和，也可由此证明 $C(f)$ 的 L^2 有界性．R．Coifman，A．McIntosh 与 Y．Meyer 于 1982 年，正是得到了 $\|C_k\|_{op}\approx(1+k)^4\|A'\|_\infty^k$，从而完成了 Lipschitz 曲线上的 Cauchy 积分算子的 L^2 有界性的证明．以前，A．P．Caldtrón 于 1977 年曾在 $\|A'\|_\infty$ 很小的条件下，用复分析证明过 $C_A(f)$ 是 L^2 有界的．

还可以讨论较 Lipschitz 曲线更一般的曲线．我们称复平面

上的一条曲线 Γ 为弦弧曲线(Chord－Arc curve).如果它的任何一段弧长与对应的弦长是可比较的，这意思是，Γ 是可求长的，且它的用弧长作参数的本性方程 $z=z(s)$满足条件

$$\gamma\leqslant\left|\frac{z(s)-z(s')}{s-s'}\right|\leqslant 1,\ -\infty<s,s'<\infty,$$

其中 $\gamma>0$ 与 s,s'无关，这时，我们可以定义 Γ 上的 Cauchy 积分算子

$$\overline{C_\Gamma}(f)(s)=\mathrm{p.v.}\ \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)z'(t)dt}{z(s)-z(t)}.$$

由于 $\gamma ds\leqslant|dz|\leqslant ds$,($dz=z'(s)ds$)，我们可以考虑形式更简单一些的算子

$$C_\Gamma(f)(s)=\mathrm{p.v.}\ \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{z(s)-z(t)}dt. \qquad (10)$$

定理(3.6) (Coifman－Meyer)若 Γ 是弦弧曲线，则由(10)定义的 Cauchy 积分算子 C_Γ 是 Calderón－Zygmund 算子.

C_Γ 的核满足标准估计是显然的，它的 L^2 有界性的证明，也放到下一节 $T(b)$定理证明之后.

显然，Lipschitz 曲线是弦弧曲线，因此，定理(3.6)蕴含了定理(3.5).

5. g 函数与 S 函数

前面讨论过的 Littlewood－Paley 的 g 函数以及 S 函数，可以看作向量值的 Calderón－Zygmund 算子加以简单处理. 设 A 与 B 是两个 Banach 空间，T 是线性算子，将 $f:\mathbb{R}^n\to A$ 映射为函数 $Tf:\mathbb{R}^n\to B$，它由积分

$$Tf(x)=\int K(x,y)f(y)dy$$

定义，其中 $K(x,y)$ 定义在 $\Omega=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\setminus\{x=y\}$，取值于 $\mathscr{L}(A,B)$（由 A 到 B 的有界线性算子全体组成的空间）.在本段中，分别用 $|\cdot|_A$，$|\cdot|_B$，表示空间 A 与 B 的范数，$\|K\|$ 表示算子 K 的范数. 类似于本章定理(1.3)的(i)(ii)的证明，可以得到

定理(3.7) 如果 $K(x,y)$ 满足

$$\|K(x,y+h)-K(x,y)\|\leqslant C\frac{|h|^r}{|x-y|^{n+r}}, \tag{11}$$

对一切 $x,y,h\in\mathbb{R}^n$，$|h|<\frac{1}{2}|x-y|$ 成立，$r\in(0,1]$，且

$$\|Tf\|_{L^{p_0}_{(B)}}\leqslant C\|f\|_{L^{p_0}_{(A)}}.$$

对某个 $1<p_0\leqslant\infty$ 成立，其中 $L^p(A)$，$L^p(B)$ 是分别在 A，B 取值的函数构成的 L^p 空间，则

$$|\{x\in\mathbb{R}^n:|Tf(x)|_B>\lambda\}|\leqslant\frac{C}{\lambda}\|f\|_{L^1(A)},$$

从而进一步有：

$$\|Tf\|_{L^p_{(B)}}\leqslant C_p\|f\|_{L^p_{(A)}},\qquad 1<p\leqslant p_0.$$

设 $\psi\in C^\infty$，满足：

(i) $|\psi(x)|\leqslant C/1+|x|^{n+1}$，$|\nabla\psi(x)|\leqslant C/1+|x|^{n+2}$，

(ii) $\int\psi(x)dx=0$，

(iii) ψ 是径向函数，即 $\psi(x)=\psi(|x|)$，且

$$\int_0^\infty\frac{|\hat{\psi}(t)|^2}{t}dt=1,$$

则 f 的 g 函数与 S 函数可分别定义为

$$g(f)(x)=\left(\int_0^\infty |\psi_t*f(x)|^2\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$S(f)(x)=\left(\iint_{\Gamma(x)} |\psi_t*f(y)|^2\frac{dydt}{t^{n+1}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

其中 $\Gamma(x)=\{(y,t)\in\mathbb{R}^{n+1}_+:|y-x|<t\}$

表示以 x 为顶点的锥.

定理(3.8) 若 $1<p<\infty$，则

$$\|g(f)\|_p\leqslant C_p\|f\|_p,$$

$$\|S(f)\|_p\leqslant C_p\|f\|_p.$$

证明 我们只讨论 S 函数的情形，对 g 函数可以类似进行但更简单. 我们把 S 函数看成向量值的算子，然后用定理(3.7). 事实上，取 $A=\mathbb{C}$，$B=L^2(\Gamma(0),\frac{dydt}{t^{n+1}})$，定义函数 K：$\mathbb{R}^n\to B$ 如下：

$$K(x)(y,t)=\psi_t(x-y).$$

这样，$K(x-z)$可以看作 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathscr{L}(A,B)$的映射，因为从下面的证明将看出，对任意的 $\alpha\in\mathbb{C}$，$K(x)(y,t)\alpha$ 是 $\mathbb{C}$ 到 B 的有界线性算子. 定义

$$T=K*f=\int K(x-z)f(z)dz.$$

我们首先证明，T 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$到 $L^2(\mathbb{R}^n,B)$有界的，由于

$$\|Tf\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n,B)}=\int_{\mathbb{R}^n}\|K*f\|^2_B dx$$

$$=\int_{\mathbb{R}^n}\iint_{\Gamma(0)}|\psi_t*f(x-y)|^2\frac{dydt}{t^{n+1}}dx$$

$$=\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n}|\psi_t*f(y)|^2\chi(x,y,t)\frac{dydtdx}{t^{n+1}},$$

其中$\chi(x,y,t)$是集合

$$\{(x,y,t)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+^{n+1}: |x-y|<t\}$$

的特征函数．显然

$$\int_{\mathbb{R}^n}\chi(x,y,t)dx=Ct^n,$$

其中C是$\mathbb{R}^n$单位球体积，用 Placherel 定理（§2.4 定理 4.9），有

$$\begin{aligned}\|Tf\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n,B)}&=C\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n}|\psi_t*f(y)|^2\frac{dydt}{t}\\&=C\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{\psi}(\xi t)\hat{f}(\xi)|^2\frac{d\xi dt}{t}\\&=C\int_0^\infty\frac{|\hat{\psi}(t)|^2}{t}dt\|f\|_2^2.\end{aligned}$$

其次，我们验证核K满足定理(3.7)的条件(11)．设$|h|<\frac{1}{2}|x-z|$.应用微分中值定理与ψ的条件，有

$$\begin{aligned}&\|K(x,z+h)-K(x,z)\|^2_{\mathscr{L}(A,B)}\\&=\iint_{\Gamma(0)}|\psi_t(x-z-y-h)-\psi_t(x-z-y)|^2\frac{dydt}{t^{n+1}}\\&\leqslant C|h|^2\int_0^\infty\int_{|y|<t}\frac{t^2}{t^{2n+4}+|x-z-y-\theta h|^{2n+4}}\frac{dydt}{t^{n+1}}\\&=C|h|^2\left(\int_0^{\frac{|x-z|}{4}}+\int_{\frac{|x-z|}{4}}^\infty\right)\int_{|y|<t}\cdots dydt=\mathrm{I}+\mathrm{II}\end{aligned}$$

容易看出

$$\mathrm{I}\leqslant C|h|^2\int_0^{\frac{|x-z|}{4}}\frac{tdt}{|x-z|^{2n+4}}\leqslant\frac{C|h|^2}{|x-z|^{2n+2}},$$

$$\mathrm{II}\leqslant C|h|^2\int_{\frac{|x-z|}{4}}^{\infty}\frac{dt}{t^{2n+3}}\leqslant\frac{C|h|^2}{|x-z|^{2n+2}}.$$

根据定理(3.7)，T 是 $L^p(\mathbb{R}^n)$到 $L^p(\mathbb{R}^n,B)$有界的，$1<p\leqslant 2$．注意到 T 是卷积算子，应用简单的对偶推理，便得 T 是 $L^p(\mathbb{R}^n)$到 $L^p(\mathbb{R}^n,B)$有界的，$2\leqslant p<\infty$．这就证明了定理(3.8)．

设 P_t 为 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 上的 Poisson 核，即

$$P(x)=C\frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}},$$

$$P_t(x)=\frac{1}{t^n}P\left(\frac{x}{t}\right).$$

取 $\psi_t=t\nabla P_t$，其中 ∇ 表示 $\mathbb{R}^n$ 上的梯度算子，则 ψ 满足 S 函数定义中的一切要求．这时，在 $n=1$ 时，S 函数就是经典 Lusin 面积积分，在 $n>1$ 时，S 函数就是 Stein－Weiss 引入的广义面积积分，

$$S(f)(x)=\left(\iint_{\Gamma(x)}\left|\nabla u(y,t)\right|^2t^{1-n}dydt\right)^{\frac{1}{2}},$$

其中 u 是 f 的Poisson 积分．有关材料可参阅 A．Zygmund 的经典著作[Zy] 与 E．Stein 的书 [St2]．

§5.4 L^2 有界性判别准则—— $T(b)$定理

按定义，Calderón －Zygmund 算子，除了要求它的核满足

一定的大小条件与光滑性条件外，还要求它可扩充为 L^2 有界的算子．本章前两节的推理表明，这个 L^2 有界性在 CZO 性质的讨论中是关键的．自然要问，是否存在对这类算子的 L^2 有界性判别准则呢？要知道，这类算子包含了大量非卷积型算子，因此，Fourier 分析中的 Plancherel 定理不能直接应用．需要另辟途径．1983 年，G.David 与 J.L.Journé 首次给出了这样的准则，即著名的 $T(1)$ 定理，不久以后，为了应用到 Lipschitz 曲线上的 Cauchy 积分以及别的算子，G.David，J.L.Journé 与 S.Semmes 又把 $T(1)$ 定理推广成所谓 $T(b)$ 定理，本节的目点就是叙述和证明 $T(b)$ 定理并介绍它的应用．

本节中讨论的算子 T，都假设是 $\mathscr{D}$ 到 $\mathscr{D}'$ 的线性算子，且联系于一个标准核 $K\in SK(r)$．一般说来，并不事先假定它的 L^2 有界性．

首先需要研究 $T(1)$ 的意义．因为没有 T 的 L^2 有界性假设，故 § 5.1 中讨论 T 在 L^∞ 中的作用不能直接应用．

令

$$\mathscr{D}_0=\left\{g\in\mathscr{D}:\int g(x)dx=0\right\}.$$

我们定义 $T(1)$ 作为 $\mathscr{D}_0$ 上的分布，即 $T(1)\in\mathscr{D}_0'$．事实上，对任意 $g\in\mathscr{D}_0$，设 $D=\operatorname{supp} g$．取 D 的合适邻域 D_1，令 $f_1\in\mathscr{D}$，满足

$$f_1(x)=\begin{cases}1, & x\in D,\\ 0, & x\in D_1^c.\end{cases}$$

这样的 f_1 显然存在，并且 $\langle Tf_1,g\rangle$ 有意义．记 $f_2=1-f_1$．现在定义 $\langle Tf_2,g\rangle$．取 $x_0\in D$，利用 g 的积分为 0 的条件，定义

$$\langle Tf_2,g\rangle=\iint_{x\in D,y\in D_1^c}K(x,y)f_2(y)g(x)dydx$$

$$= \iint_{x\in D, y\in D_1^c} f_2(y)[K(x,y)-K(x_0,y)]g(x)dxdy.$$

这积分是绝对收敛的，因为

$$\iint_{D_1^c\times D} |f_2(y)||K(x,y)-K(x_0,y)||g(x)|dxdy$$

$$\leqslant C\|f\|_\infty \int_{D_1^c} \frac{dy}{|y-x_0|^{n+r}} \int_D |x-x_0|^r |g(x)|dx<\infty.$$

这样，便可定义

$$\langle T(1), g\rangle = \langle Tf_1, g\rangle + \langle Tf_2, g\rangle.$$

容易证明，$T(1)$的定义与$f_1+f_2=1$的分解方式及x_0的选取无关.

不难看出，如果取$\varphi\in\mathscr{D}$，在$|x|\leqslant K$有$\varphi(x)=1$，则有

$$\langle T(1), g\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\langle T\varphi(\varepsilon\cdot), g\rangle.$$

我们还需要一个弱有界(weak boundedness property)概念，设B是半径为R的球，$f\in\mathscr{D}$，supp $f\subset B$，令

$$N_q^B(f)=R^{\frac{n}{2}}\sum_{|\alpha|\leqslant q} R^{|\alpha|}\|\partial^\alpha f\|_\infty.$$

定义(4.1) 设$T:\mathscr{D}\to\mathscr{D}'$线性连续，我们称$T$是弱有界的(记为$T\in WBP$)，如果存在常数$C$与正整数$q$，使得

$$|\langle Tf, g\rangle|\leqslant CN_q^B(f)N_q^B(g)$$

对任意$f,g\in\mathscr{D}$，supp $f\subset B$，supp $g\subset B$成立.

可以证明，只要对核加上适当的条件(例如满足标准核的大小条件)，则弱有界性与q的选择是无关的. 也就是说，如果$T\in WBP$，则对任意正整数s，存在常数C_s，使得

$$|\langle Tf, g\rangle|\leqslant C_sN_s^B(f)N_s^B(g)$$

对于$f,g\in\mathscr{S}$，$\operatorname{supp} f\subset B$，$\operatorname{supp} g\subset B$成立．由于不想分散我们的注意力，就不在此证明了，有兴趣的读者可参看Y.Meyer的书[M]．

容易看出，(1)若T是L^2有界的，则$T\in WBP$．(2)若T联系标准核K，且核是反对称的，即$K(x,y)=-K(y,x)$，则$T\in WBP$．我们把这两点的证明留给读者．

我们现在可以叙述$T(1)$定理了．

定理(4.2) (David-Journé的$T(1)$定理) 设$T:\mathscr{S}\to\mathscr{S}'$线性连续，且具有标准核($T\in SK(r)$)，则$T$可延拓为$L^2$上的有界算子的充要条件是

$T(1)\in BMO$，$T'(1)\in BMO$，$T\in WBP$．

这里的T'表示T的转置，即由

$$\langle f,Tg\rangle=\langle T'f,g\rangle,\ \forall f,g\in\mathscr{S}$$

定义的$\mathscr{D}\to\mathscr{D}'$的算子．

定理(4.2)的必要性是已知的，这是因为，如果T可延拓为L^2有界，则$T\in CZO$，故T是L^∞到BMO有界的．特别地，$T(1)\in BMO$．由于T'对应的标准核为$K(y,x)$，故$T'\in CZO$，从而$T'(1)\in BMO$．充分性的证明比较复杂，它是我们将要证明的$T(b)$定理的一种特殊情形．

定义(4.3) 我们称复值函数b为增长的，如果

$$b\in L^\infty,\ 且\ \operatorname{Re} b(x)\geq C>0,\ \text{a.e.};$$

我们称b为强仿增长的，如果$b\in L^\infty$，且存在常数$C>0$使得

$$\left|\frac{1}{|I|}\int_I b(x)dx\right|\geq C,\ \forall I$$

其中I是$\mathbb{R}^n$的二进方体或边长比为1或$\frac{1}{2}$的拟二进方体．

显然，若b是增长的，则b是强仿增长的．关于拟二进方体的准确说法，将在后面给出．作为Lebesgue微分定理的一个

推论知，若 b 强仿增长，则 $|b|$ 有正的上、下确界．

对 $b\in L^\infty$，用 M_b 表示用 b 作乘法的算子，即 $M_bf=bf$．由于 b 没有任何光滑性假设，因此要求 $T:(b\mathcal{D})\to(b\mathcal{D})'$ 是线性连续的，其中 $b\mathcal{D}$，$(b\mathcal{D})'$ 的意义是明显的．

定理(4.4) （David－Journé－Semmes 的 $T(b)$ 定理）设 b_1，b_2 是强仿增长函数，$T:(b_1\mathcal{D})\to(b_2\mathcal{D})'$ 线性连续，具有标准核，即 $T\in SK(r)$．如果 $M_{b_2}TM_{b_1}\in WBP$，$Tb_1\in BMO$，$T'b_2\in BMO$，那末 T 可扩充为 L^2 有界的算子．

我们先对简单情形，即 $b_1=b_2=b$，$Tb=T'b=0$，证明定理，然后过渡到一般的情形．

简单情形的证明思想是离散化，即我们希望找到 L^2 的一个表现得很象标准正交基的"基函数族" $\{\alpha_i\}$，使得具有足够好性质的 f，有

$$f\sim\sum\langle f,\alpha_i\rangle\alpha_i, \tag{1}$$

$$\|f\|_2\approx\Big(\sum_i|\langle f,\alpha_i\rangle|^2\Big)^{\frac{1}{2}}, \tag{2}$$

其中级数展开以及 $\langle\ ,\ \rangle$ 的意义将作适当的解释．这样，算子 T 在这组"基"下诱导出一个矩阵 $t=\{\langle T\alpha_i,\alpha_j\rangle\}$．由于

$$\begin{aligned}Tf&\sim\sum_i\langle f,\alpha_i\rangle T\alpha_i\\&\sim\sum_i\sum_j\langle f,\alpha_i\rangle\langle T\alpha_i,\alpha_j\rangle\alpha_j\\&=\sum_j\Big(\sum_i\langle T\alpha_i,\alpha_j\rangle\langle f,\alpha_i\rangle\Big)\alpha_j,\end{aligned}$$

$$\|Tf\|\approx\Big(\sum_j\Big|\sum_i\langle T\alpha_i,\alpha_j\rangle\langle f,\alpha_i\rangle\Big|^2\Big)^{\frac{1}{2}},$$

证明 T 的 L^2 有界性便等价于证明对应的矩阵算子 t 是 l^2 有界的，

即证明

$$t:\{\langle f,\alpha_i\rangle\}_i\rightarrow\{\sum\langle T\alpha_i,\alpha_j\rangle\langle f,\alpha_i\rangle\}_j$$

是 l^2 有界的．为此，有现成的 Schur 引理可以应用．

引理(4.5) (Schur) 设$\{\varepsilon_{ij}\}$是非负元素构成的矩阵，如果存在正序列$\{\omega_i\}$，使得

$$\sup_i \omega_i^{-1}\sum_j(\varepsilon_{ij}+\varepsilon_{ji})\omega_j\leqslant C,$$

则由矩阵$\{\varepsilon_{ij}\}$定义的算子 t

$$t:(a_j)\rightarrow(b_j),\ b_j=\sum_i\varepsilon_{ij}a_i,$$

是 l^2 有界的

证明 事实上，用 Cauchy 不等式，

$$|b_j|^2=|\sum_i\varepsilon_{ij}^{\frac12}\ \omega_i^{\frac12}\omega_i^{-\frac12}\varepsilon_{ij}^{\frac12}\ a_i|^2$$

$$\leqslant(\sum_i\varepsilon_{ij}\omega_i)(\sum_i\omega^{-1}\varepsilon_{ij}|a_i|^2)$$

$$\leqslant C\omega_j\sum_i\omega_i^{-1}\varepsilon_{ij}|a_i|^2,$$

$$\sum_j|b_j|^2\leqslant C\sum_i\omega_i^{-1}\sum_j\varepsilon_{ij}\omega_j|a_i|^2\leqslant C^2\sum_i|a_i|^2.$$

Schur 引理证毕．

因此，为了证明 $T(b)$定理，只需找出合适的“基函数族”，并给出$\langle T\alpha_i,\alpha_j\rangle$相应的估计．由于证明比较复杂，我们分几个步骤来完成．注意我们现在考虑的是 $b_1=b_2=b$，$T(b)=0=T'(b)$的情形．

1．$L^2(\mathbb{R}^n)$ 的离散化以及相应的投影算子

我们首先假定有 $\mathbb{R}^n$ 的一系列剖分，每次用的都是相同大小的“拟二进方体”(准确的说法将在以后明确)，用 $\mathbb{Z}$ 作指标集．对每个 $k\in\mathbb{Z}$，$\mathbb{R}^n$ 的第 k 次剖分的全体“拟二进方体”集合记为$\mathscr{S}_k$，假设

$\{\mathscr{I}_k\}$是鸟巢性的，即每个$I\in\mathscr{I}_k$是一些$\mathscr{I}_{k+1}$中"拟方体"的并，记$\mathscr{I}=\bigcup\mathscr{I}_k$. 令

$$\mathscr{F}_k=\{f\in L^2:f|_{I_j}=C_j,\ \forall I_j\in\mathscr{I}_k\},$$

即全体在每个$I_j\in\mathscr{I}_k$取常数值的L^2函数构成的集合. 显然$\mathscr{F}_k\subset\mathscr{F}_{k+1}$. 设$b$是强仿增长的，即

$$b\in L^\infty,\left|\frac{1}{|I|}\int_I b(x)dx\right|\geqslant C>0.\ \forall I\in\mathscr{I}.$$

我们引入$L^2(\mathbb{R}^n)$到$\mathscr{F}_k$的二个投影算子（平均算子）：

$$\widetilde{E}_kf(x)=\sum_{j:I_j\in\mathscr{I}_k}\frac{1}{|I_j|}\int_{I_j}f(x)dx\cdot\chi_{I_j},$$

$$E_kf(x)=\sum_{j:I_j\in\mathscr{I}_k}\frac{1}{|I_j|_b}\int_{I_j}f(x)b(x)dx\cdot\chi_{I_j},$$

其中χ_{I_j}是I_j的特征函数，$|I_j|_b=\int_{I_j}b(x)dx$. 记相应的差算子为

$$\widetilde{\Delta}_k=\widetilde{E}_k-\widetilde{E}_{k-1},\ \ \Delta_k=E_k-E_{k-1}.$$

假设

$$\lim_{\substack{I\in\mathscr{I}_k\\ k\to-\infty}}|I|=\infty,\quad \lim_{\substack{k\to+\infty\\ I\in\mathscr{I}_k}}|I|=0,$$

则当$f\in L^2\bigcap L^1$时，显然还有，

$$\lim_{k\to-\infty}E_kf(x)=0,\quad \lim_{k\to+\infty}E_kf(x)=f(x)$$

在a.e.与L^2意义下成立，即

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Delta_kf(x).$$

这里a.e.收敛基于Lebesgue积分的微分定理的同样理由，L^2

收敛由控制收敛，这都是 $|E_k f| \leqslant CMf$ 的结果，M 是 Hardy-Littlewood 极大函数.

记

$$S(f)(x)=\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\Delta_k f(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

相应于 $\{\widetilde{\Delta}_k\}$，也有 $\widetilde{S}(f)(x)$. 这是一种离散的面积函数（也称均方函数）.

引理(4.6) 存在 $C_1, C_2>0$. 使得

$$C_1\|f\|_2 \leqslant \|\widetilde{S}(f)\|_2 \leqslant C_2\|f\|_2 .$$

证明 注意到 $\widetilde{E}_k$ 是 L^2 的压缩范数算子，$\widetilde{\Delta}_k f$ 与 $\widetilde{\Delta}_l f$ 是正交的 $(k\neq l)$，有

$$\int\sum_M^N|\widetilde{\Delta}_k f|^2dx=\int\sum_M^N\widetilde{\Delta}_k f\,\overline{\widetilde{\Delta}_k f}\,dx$$

$$=\int\sum_M^N\widetilde{\Delta}_k f\sum_M^N\overline{\widetilde{\Delta}_l f}\,dx=\int|\widetilde{E}_N f-\widetilde{E}_{M-1}f|^2dx\leqslant 4\|f\|_2^2 .$$

这就证明了第二个不等式. 设 $f\in L^1\cap L^2$，则

$$\|f\|_2=\sup_{\|g\|_2\leqslant 1}\left|\int f\bar{g}dx\right|=\sup_{\|g\|_2\leqslant 1}\left|\int\sum_{-\infty}^{\infty}\widetilde{\Delta}_k f\cdot\sum_{-\infty}^{\infty}\overline{\widetilde{\Delta}_l g}dx\right|$$

$$=\sup_{\|g\|_2\leqslant 1}\left|\int\sum_{-\infty}^{\infty}\widetilde{\Delta}_k f\,\overline{\widetilde{\Delta}_k g}dx\right|\leqslant\sup_{\|g\|_2\leqslant 1}\|\widetilde{S}(f)\|_2\|\widetilde{S}(g)\|_2$$

$$\leqslant C\|\widetilde{S}(f)\|_2^2 .$$

我们下面要证明，用 $S(f)$ 代替 $\widetilde{S}(f)$，定理的结论仍然成立. 为此，先看若干简单事实. 从 $\mathscr{F}_k$ 的构造与 E_k 的定义，不难看出 E_k 在 L^1_{loc} 上有定义，并且具有如下简单性质：

(i) 当 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}$，$\forall k$，有

$$\int_I f(x)b(x)dx=\int_I E_kf(x)b(x)dx,\forall I\in\mathscr{I}_k$$

(ii) 对 $f\in L^1_{\rm loc}$，$g\in\mathscr{F}_k$，有

$$E_k(fg)=E_k(f)g;$$

(iii) 对 $f\in L^1_{\rm loc}$，有

$$E_k(E_mf)=E_{k\wedge m}f;$$

其中 $k\wedge m=\min(k,m)$；

(iv) 对 $f\in L^1_{\rm loc}$，$k\geqslant m\geqslant l$，有

$$E_l(E_k-E_m)f=0;$$

(v) 当 $f\in L^p_{\rm loc}$，$g\in L^{p'}_{\rm loc}$，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=0$，$k\neq m$，

$k,m\geqslant l$，有

$$\widetilde{E}_l(\Delta_kf\cdot\Delta_mg\cdot b)=0.$$

我们只验证(v)，其余的留给读者．不妨设 $k>m$．这时每个 $I\in\mathscr{I}_l$ 都是 $\mathscr{I}_{k-1}$ 中一些 J_j 的并，而在每个 J_j 上，Δ_mg 是常数(因为 $m\leqslant k-1$)，故

$$\widetilde{E}_l(\Delta_kf\cdot\Delta_mg\cdot b)|_I=\frac{1}{|I|}\sum_J\int_{J_j}\Delta_kf\Delta_mg\cdot bdx$$

$$=\frac{1}{|I|}\sum_j\Delta_mg\int_{J_j}\Delta_kf\cdot bdx=\frac{1}{|I|}\sum_j\Delta_mg\int_{J_j}E_{k-1}(\Delta_kf)\cdot bdx$$

$=0$，

其中我们用到了上面的(i)，(iv)．

引理(4.7) 存在 $C_1,C_2>0$．使得

$$C_1\|f\|_2\leqslant\|S(f)\|_2\leqslant C_2\|f\|_2.$$

证明 先证第二个不等号，由于

$$\Delta_kf=\frac{\widetilde{E}_k(bf)}{\widetilde{E}_k(b)}-\frac{\widetilde{E}_{k-1}(bf)}{\widetilde{E}_{k-1}(b)}$$

$$= \frac{\widetilde{E}_k(bf)}{\widetilde{E}_k(b)\widetilde{E}_{k-1}(b)}(\widetilde{E}_{k-1}(b) - \widetilde{E}_k(b)) + \frac{1}{\widetilde{E}_{k-1}(b)}(\widetilde{E}_k(bf)$$

$$- \widetilde{E}_{k-1}(bf)),$$

有

$$|\Delta_k f|^2 \leqslant C(|\widetilde{E}_k(bf)|^2 |\widetilde{\Delta}_k(b)|^2 + |\widetilde{\Delta}_k(bf)|^2).$$

对 $bf \in L^2$ 用引理 (4.6)，得到

$$\int S(f)^2 dx \leqslant C \int \sum_k |\widetilde{E}_k(bf)|^2 |\widetilde{\Delta}_k(b)|^2 dx + C\|f\|_2^2$$

$$\leqslant C \int \sum_k (\widetilde{E}_k^*(bf))^2 |\widetilde{\Delta}_k(b)|^2 dx + C\|f\|_2^2$$

$$= CJ + C\|f\|_2^2,$$

其中 $\widetilde{E}_k^* = \sup\limits_{m \leqslant k} |\widetilde{E}_m|$. 我们来估计 J.

$$J = \int \sum_{-\infty}^{\infty} (\widetilde{E}_k^*(bf))^2 [\sum_{m=k}^{\infty} |\widetilde{\Delta}_m(b)|^2 - \sum_{m=k+1}^{\infty} |\widetilde{\Delta}_m(b)|^2]\, dx$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int \sum_{m=k+1}^{\infty} |\widetilde{\Delta}_m(b)|^2 ((\widetilde{E}_{k+1}^*(bf))^2 - (\widetilde{E}_k^*(bf))^2)dx$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int \widetilde{E}_{k+1}(\sum_{m=k+1}^{\infty} |\widetilde{\Delta}_m(b)|^2 ((\widetilde{E}_{k+1}^*(bf))^2 - (\widetilde{E}_k^*(bf))^2))dx.$$

应用上面的性质 (ii) (因为 $\widetilde{E}_{k+1}^*(bf)^2 - \widetilde{E}_k^*(bf)^2 \in \mathscr{F}_{k+1}$) 以及

$$\widetilde{E}_{k+1}(\sum_{m=k+1}^{\infty} |\widetilde{\Delta}_m(b)|^2) = \widetilde{E}_{k+1}(\sum_{m=k+1}^{\infty} \widetilde{\Delta}_m(b) \sum_{l=k+1}^{\infty} \overline{\widetilde{\Delta}_l(b)})$$

$$= \widetilde{E}_{k+1}(|b - \widetilde{E}_k(b)|^2) \leqslant C\|b\|_*^2 \leqslant C\|b\|_\infty^2 \leqslant C,$$

得

$$J \leqslant C \int \sum_k ((\widetilde{E}_{k+1}^*(bf))^2 - (\widetilde{E}_k^*(bf))^2)\, dx$$

$$\leqslant C\int(\widetilde{E}^*_\infty(bf))^2dx\leqslant C\int(M(bf))^2dx\leqslant C\|f\|_2^2,$$

从而证明了定理结论中的第二个不等式．第一个不等号的证明完全类似于引理(4.6)第二部分的证明，只需注意到 $b\in L^\infty$，$b^{-1}\in L^\infty$，引理(4.7)证完．

2．拟正交基对的构造

具有性质(1)(2)的拟正交基是存在的．(见 G．David的书[D]．)但如将它改为拟正交基对，则可以叙述得更简明，并且是完全构造性的．为此，我们把 $\mathscr{S}_k$ 的构造作得更特殊一些．取 $\mathscr{S}_0$ 为边长为1的二进方体构成的集合．将每个 $I\in\mathscr{S}_0$ 沿 x_1 轴等分，得到二个拟二进方体．记其全体为 $\mathscr{S}_1$，将每个 $I\in\mathscr{S}_1$ 沿 x_2 轴等分为二个小一级的拟二进方体，记其全体为 $\mathscr{S}_2$．等到沿 x_n 轴等分从而得到 $\mathscr{S}_n$ 以后，再返回沿 x_1 轴等分每个 $I\in\mathscr{S}_n$ 得到 $\mathscr{S}_{n+1}$，如此延续下去．对 $n\leqslant 0$，把上述过程逆转，即依次沿坐标轴方向，将 $\mathscr{S}_n$ 的相邻两个拟二进方体合并成 $\mathscr{S}_{n-1}$ 的一个拟二进方体，这样得到的 $\mathscr{S}_k$，$k\in\mathbb{Z}$，完全满足上述1中所列的要求．记 $\mathscr{S}=\bigcup\mathscr{S}_k$．当 $I\in\mathscr{S}_k$ 时，$|I|=2^{-k}$．它还具有较二进方体更方便的一点性质，那就是，$\forall I\in\mathscr{S}_k$，

$$I=I_1\bigcup I_2,\quad I_1、I_2\in\mathscr{S}_{k-1}.$$

引理(4.8) 设 $\mathscr{S}$ 如上述构造，b 是强仿增长的函数．则存在一族函数对 $\{\alpha_I,\beta_I\}_{I\in\mathscr{S}}$，满足：

$$(a)\quad\begin{cases}\alpha_I(x)=\alpha_1\chi_{I_1}(x)+\alpha_2\chi_{I_2}(x),\\ \beta_I(x)=\beta_1\chi_{I_1}(x)+\beta_2\chi_{I_2}(x),\end{cases}$$

其中 α_i、β_i 是复数，满足

$$|\alpha_i|\approx|I|^{-\frac{1}{2}},\quad|\beta_i|\approx|I|^{-\frac{1}{2}};$$

(b)对任意 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}$，有

$$\Delta_k(f)=\sum_{I\in\mathscr{S}_{k-1}}\langle f,\beta_I\rangle_b\,\alpha_I,$$

其中 $\langle f, g\rangle_b=\int f(x)g(x)b(x)dx$；

(c) $\int \alpha_I(x)b(x)dx=0$，$\int \beta_I(x)b(x)dx=0$，$\forall I\in\mathscr{I}$.

证明 方法是初等的，任取 $I\in\mathscr{I}_{k-1}$，$I=I_1\bigcup I_2$，$I_1, I_2\in\mathscr{I}_k$. 计算

$$\Delta_k f|_{I_1}=\frac{1}{|I_1|_b}\int_{I_1}bf\,dx\,\chi_{I_1}+\frac{1}{|I_2|_b}\int_{I_2}bf\,dx\,\chi_{I_2}$$

$$-\frac{1}{|I|_b}\left(\int_{I_1}bf\,dx+\int_{I_2}bf\,dx\right)(\chi_{I_1}+\chi_{I_2})$$

$$=\left[\left(\frac{1}{|I_1|_b}-\frac{1}{|I|_b}\right)\int_{I_1}bf\,dx-\frac{1}{|I|_b}\int_{I_2}bfdx\right]\chi_{I_1}$$

$$+\left[\left(\frac{1}{|I_2|_b}-\frac{1}{|I|_b}\right)\int_{I_2}bf\,dx-\frac{1}{|I|_b}\int_{I_1}bfdx\right]\chi_{I_2};$$

$$\langle f, \beta_I\rangle\alpha_I=(\alpha_1\chi_{I_1}+\alpha_2\chi_{I_2})\left(\beta_1\int_{I_1}bfdx+\beta_2\int_{I_2}bfdx\right)$$

$$=\left(\alpha_1\beta_1\int_{I_1}bf\,dx+\alpha_1\beta_2\int_{I_2}bf\,dx\right)\chi_{I_1}$$

$$+\left(\alpha_2\beta_2\int_{I_2}bf\,dx+\alpha_2\beta_1\int_{I_1}bf\,dx\right)\chi_{I_2}.$$

比较系数知，如果选择 α_j，β_j 满足

$$\begin{cases}\alpha_1\beta_1=\dfrac{1}{|I_1|_b}-\dfrac{1}{|I|_b}, \\ \alpha_2\beta_2=\dfrac{1}{|I_2|_b}-\dfrac{1}{|I|_b}, \\ \alpha_1\beta_2=\alpha_2\beta_1=-\dfrac{1}{|I|_b}.\end{cases}$$

则(b)的结论成立，其余的性质也可直接验证．事实上，上述方程组是可解的．容易看出，

$$\begin{cases} \alpha_1=\left(\dfrac{1}{|I_1|_b}-\dfrac{1}{|I|_b}\right)|I_1|_b|I|^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{|I_2|_b}{|I|_b}|I|^{-\frac{1}{2}}, \\ \alpha_2=-\left(\dfrac{1}{|I_2|_b}-\dfrac{1}{|I|_b}\right)|I_2|_b|I|^{-\frac{1}{2}}=-\dfrac{|I_1|_b}{|I|_b}|I|^{-\frac{1}{2}}, \\ \beta_1=\dfrac{1}{|I_1|_b}|I|^{\frac{1}{2}}, \\ \beta_2=-\dfrac{1}{|I_2|_b}|I|^{\frac{1}{2}}, \end{cases}$$

便是一组解，由b的强仿增长性，知$|\alpha_j|\approx|I|^{-\frac{1}{2}}$，$|\beta_j|\approx|I|^{-\frac{1}{2}}$．直接计算也可验证$(c)$，引理(4.8)证完．

引理(4.9)　存在$L^2(\mathbb{R}^n,dx)$的拟标准正交基对$\{\alpha_I,\beta_I\}_{I\in\mathscr{I}}$，即满足

$$\int|\alpha_I|^2dx\approx1,\quad\int|\beta_I|^2dx\approx1,\tag{3}$$

$$\int\alpha_I(x)\beta_J(x)b(x)dx=0,\ \forall I\neq J,\ I,J\in\mathscr{I},\tag{4}$$

并且对任意$f\in L^2\cap L^1$，有

$$f(x)=\sum_{I\in\mathscr{I}}\langle f,\beta_I\rangle_b\alpha_I,\tag{5}$$

$$\|f\|_2\approx\left(\sum|\langle f,\beta_I\rangle_b|^2\right)^{\frac{1}{2}}.\tag{6}$$

其中(5)中的级数在a.e.与L^2意义下收敛．

证明　式(3)由引理(4.8)的(a)推出．式(4)当I与J不

交时，由 $\operatorname{supp}\alpha_I\cap\operatorname{supp}\beta_I=\phi$ 推得．而当 I、J 有包含关系时，例如 $I\subsetneqq J$，则 β_J 在 I 上是常数．这时式(4)由引理(4.8)的(c)推得．当 $f\in L^2\cap L^1$ 时，由引理(4.8)，有

$$f=\sum_k\Delta_k f=\sum_k\sum_{I\in\mathscr{I}_{k-1}}\langle f,\beta_I\rangle_b\alpha_I=\sum_{I\in\mathscr{I}}\langle f,\beta_I\rangle_b\alpha_I .$$

根据引理(4.7)，注意到

$$\begin{aligned}\|S(f)\|_2^2&=\int\sum_k\Big|\sum_{I\in\mathscr{I}_{k-1}}\langle f,\beta_I\rangle_b\alpha_I\Big|^2dx\\&=\int\sum_k\sum_{I\in\mathscr{I}_{k-1}}|\langle f,\beta_I\rangle_b|^2|\alpha_I|^2dx\\&\approx\sum|\langle f,\beta_I\rangle_b|^2,\end{aligned}$$

便证得(b)．引理(4.9)证完．

把(1)(2)两步证明的思想概括证明一下，就是先找到 L^2 的一串离散化空间 $\mathscr{F}_k$：

$$\mathscr{F}_k\subset\mathscr{F}_{k+1},\quad\bigcap\mathscr{F}_k=\{0\},\quad\overline{\bigcup\mathscr{F}_k}=L^2 .$$

Δ_k 实际上是 L^2 到 W_k 的投影，其中 $W_k=\mathscr{F}_{k+1}\ominus\mathscr{F}_k$ 是 $\mathscr{F}_k$ 在 $\mathscr{F}_{k+1}$ 中的正交补，引理(4.8)在 W_k 建立了一组拟正交基对(对测度 $b(x)dx$ 而言)，因而它们的并构成了整个 L^2 的拟正交基对．实际上，这组拟正交基对是 Haar 系的一种修正．

3．$\langle T(b\alpha_I),\beta_J\rangle_b$ 的估计与 Schur 引理的应用

注意到 $|b|$ 有正的上下界，而 T 是 $(b\mathscr{D})$ 到 $(b\mathscr{D})'$ 定义的．已知 M_bTM_b 弱有界，故要证 T 是 L^2 有界的，自然地是证明 M_bTM_b 是 L^2 有界的．由于当 f 是足够好时，

$$f\sim\sum\langle f,\beta_I\rangle_b\alpha_I ,$$

$$M_bTM_bf\sim b\sum_J\Big(\sum_I\langle T(b\alpha_I),\beta_J\rangle_b\langle f,\beta_I\rangle_b\Big)\alpha_J ,$$

根据 Schur 引理，只需找到适当的$\{\omega_I\}_{I\in\mathscr{I}}$，使得

$$\sup_I \omega_I^{-1}\sum_{J\in\mathscr{I}}(|\langle T(b\alpha_I),\beta_J\rangle_b|+|\langle T(b\alpha_J),\beta_I\rangle_b|)\omega_J<\infty .$$

由于

$$\langle T(b\alpha_J),\beta_I\rangle_b=\langle \alpha_J,T^t(b\beta_I)\rangle_b,$$

而 T^t 的核具有与 T 的核一样的性质，α_I 与 β_I 的性质又完全类似，因此两项的估计是完全一样的．故只需证明，对 $\omega_I=|I|^{\frac{1}{2}-\delta}$，$0<\delta<\frac{r}{n}$，有

$$\sum_{J\in\mathscr{I}}|\langle T(b\alpha_I),\beta_J\rangle_b||J|^{\frac{1}{2}-\delta}\leqslant C|I|^{\frac{1}{2}-\delta} \tag{7}$$

就足够了．为书写简单，记

$$C_{IJ}=|\langle T(b\alpha_I),\beta_J\rangle_b|.$$

这里需要说明一下，按照对 T 的假定，它只是 $(b\mathscr{D})$ 到 $(b\mathscr{D})'$ 的线性连续算子，但我们现在要估计的却是 $\langle T(b\alpha_I),\beta_J\rangle_b$，其中 α_I,β_J 是拟二进方体特征函数的有限线性组合，因此这里发生如何理解 $\langle T(b\chi_I),\chi_J\rangle_b$ 的问题，先看 $I\cap J=\phi$ 情形．$\forall g\in\mathscr{D}$，$\operatorname{supp} g\subset J$，

$$T^t(bg)(y)=\int_{\mathbb{R}^n}K(x,y)b(x)g(x)dx,\quad \forall y\in I .$$

上述积分在普通意义下存在，且在 I 上局部可积，故可按对偶

$$\langle T(b\chi_I),g\rangle_b=\langle\chi_I,T^t(bg)\rangle_b,\ \forall g\in\mathscr{D},\operatorname{supp} g\subset J$$

来理解 $T(b\chi_I)(x)$．这说明可以定义

$$T(b\chi_I)(x)=\int_I K(x,y)b(y)dy,\ \forall x\notin I .$$

当 I,J 有严格包含关系时，利用 $T(b)=0$，或 $T^t(b)=0$，以

及 T 的线性，可以将对 $C_{I,J}$ 的估计化到刚才的情形．当 $I=J$ 时，G.David [D] 已经指出对 $\langle T(b\chi_I),\chi_I\rangle_b$ 的估计完全可以利用 T 的弱有界假定，仿佛原来的弱有界假定就是对拟方体的特征函数而不是对 $\mathscr{D}$ 中函数来描述似的．总之，尽管 T 原来只是被假定为 $b\mathscr{D}$ 到 $(b\mathscr{D})'$ 的线性连续算子，当我们遇到 T 或 T' 在 χ_I 上的作用时可以形式上把 χ_I 看作 $\mathscr{D}$ 中函数那样对待．

我们先写出两个一般性的估计．

引理(4.10) 若 $x\notin 2I$，则

$$|T(b\alpha_I)(x)|+|T'(b\beta_I)(x)|\leqslant \frac{C|I|^{\frac{1}{2}+\frac{r}{n}}}{|x-x_I|^{n+r}},$$

其中 x_I 是 I 的中心．

证明 由 α_I,β_I 的消失矩性质以及标准核的光滑性条件容易证得．

引理(4.11) 设 $I,J\in\mathscr{I}$，$I\cap J=\varphi$（意指内部不交）$l(I)\leqslant Cl(J)$，$\mathrm{dist}(I,J)\leqslant Cl(J)$，其中 $l(I)$ 表示 I 的小边长，C 是只依赖于维数的常数，则

$$\int_I\int_J\frac{dxdy}{|x-y|^n}\leqslant C|I|\log\frac{Cl(J)}{l(I)}.$$

证明 不妨设 $x_I=0$，记 $\rho(x)=\mathrm{dist}(x,J)$．设 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in I$，$y\in J$，则有（记 $l_j(I)$ 为 I 的 j 坐标方向边长）

$$Cl(J)\geqslant|x-y|\geqslant\rho(x)\geqslant\min_j\left(\frac{1}{2}l_j(I)-|x_j|\right).$$

设 min 对 $j=1$ 取到，则

$$\int_I\int_J\frac{dxdy}{|x-y|^n}\leqslant C\int_I\log\frac{Cl(J)}{\rho(x)}\,dx$$

$$\leqslant C|I|^{\frac{n-1}{n}}\int_0^{\frac{l_1(I)}{2}}\log\frac{Cl(J)}{\frac{l_1(I)}{2}-x_1}\,dx_1\leqslant C|I|\log\frac{Cl(J)}{l(I)}.$$

我们现在分几种情形来验证不等式(7).

(i) 当 $|J|>|I|$, $J\cap 2I=\Phi$ 时，应用引理(4.10)，有

$$C_{IJ}\leqslant C|I|^{\frac{1}{2}+\frac{r}{n}}|J|^{-\frac{1}{2}}\int_J\frac{dx}{|x-x_I|^{n+r}}.$$

这时相应于不等式(7)的和为

$$\sum_{(i)}C_{IJ}|J|^{\frac{1}{2}-\nu}\leqslant C\sum_{m=1}^{\infty}(2^m|I|)^{-\delta}\sum_{\substack{|J|=2^m|I|\\ J\cap 2I=\varnothing}}|I|^{\frac{1}{2}+\frac{r}{n}}\int_J\frac{dx}{|x-x_I|^{n+r}}$$

$$\leqslant C\sum_{m=1}^{\infty}2^{-m\delta}|I|^{\frac{1}{2}-\delta}|I|^{\frac{r}{n}}\int_{|x-x_I|>Cl(I)}\frac{dx}{|x-x_I|^{n+r}}\leqslant C|I|^{\frac{1}{2}-\delta}.$$

(ii) 当 $|J|>|I|$ $J\cap 2I\neq\Phi$ 时，注意，在这种情况下，对固定 $m\in\mathbb{Z}^+$，满足 $|J|=2^m|I|$ 的 J 的个数被仅依赖于维数的常数控制．这时分两种情形考虑．若 $I\cap J=\Phi$，用引理(4.11)，则

$$C_{IJ}\leqslant C\left(\frac{|I|}{|J|}\right)^{\frac{1}{2}}\log\frac{Cl(J)}{l(I)}. \tag{8}$$

若 $I\cap J\neq\Phi$ 则只能是 $I\subsetneqq J$，不妨设 $J=J_1\bigcup J_2$，$I\subset J_1$，则

$$\beta_J=\beta_1\chi_{J_1}+\beta_2\chi_{J_2}, \quad |\beta_j|\approx|J|^{-\frac{1}{2}}.$$

因此，根据 $T^t(b)=0$，即 $T^t(b\chi_{J_1})=-T^t(b\chi_{J_1^c})$，有

$$|\langle T(b\alpha_I),\beta_1\chi_{J_1}\rangle_b|=|\langle\beta_1T^t(b\chi_{J_1}),\alpha_I\rangle_b|$$

$$=|-\langle\beta_1T^t(b\chi_{J_1^c}),\alpha_I\rangle_b|=|\langle T(b\alpha_I),\beta_1\chi_{J_1^c}\rangle_b|$$

$$=\left|\int_{J_1^c\cap 2I}+\int_{J_1^c\setminus 2I}\right|$$

$$\leqslant C\int_{2I\setminus I}\int_I \frac{|J|^{-\frac{1}{2}}|I|^{-\frac{1}{2}}}{|x-y|^n}dxdy+C|J|^{-\frac{1}{2}}|I|^{\frac{1}{2}+\frac{r}{n}}\int_{J_1^c\setminus 2I}\frac{dx}{|x-x_I|^{n+r}}$$

$$\leqslant C\left(\frac{|I|}{|J|}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{9}$$

由于 $I\cap J_2=\varPhi$，$l(I)\leqslant l(J_2)$ 且 $\mathrm{dist}(I,J_2)\leqslant 2l(J_2)$，有

$$|\langle T(b\alpha_I),\beta_2\chi_{J_2}\rangle_b|\leqslant C\left(\frac{|I|}{|J|}\right)^{\frac{1}{2}}\log\frac{Cl(J)}{l(I)}. \tag{10}$$

组合(8)(9)(10)，相应于不等式(7)的和为

$$\sum\nolimits_{(2)}C_{IJ}|J|^{\frac{1}{2}-\delta}\leqslant C\sum_{m=1}^{\infty}m(2^m|I|)^{\frac{1}{2}-\delta}2^{-\frac{m}{2}}\leqslant C|I|^{\frac{1}{2}-\delta}.$$

(iii) 当 $|J|\leqslant|I|$，$J\cap 2I=\varPhi$ 时．这时，$I\cap 2J=\varPhi$，故

$$C_{IJ}=|\langle T^t(b\beta_J),\alpha_I\rangle_b|$$

$$\leqslant C|J|^{\frac{1}{2}+\frac{r}{n}}|I|^{\frac{1}{2}}|x_I-x_J|^{-n-r}.$$

相应于不等式(7)的和为

$$\sum\nolimits_{(3)}C_{IJ}|J|^{\frac{1}{2}-\delta}\leqslant C\sum_{\substack{|J|=2^{-m}|I|\\ J\cap 2I=\varnothing}}|J|^{\frac{r}{n}-\delta}|I|^{\frac{1}{2}}\int_J\frac{dx}{|x-x_I|^{n+r}}$$

$$\leqslant C\sum_{m=0}^{\infty}2^{-m(\frac{r}{n}-\delta)}|I|^{\frac{1}{2}-\delta}\int_{|x-x_I|\geqslant Cl(I)}\frac{|I|^{\frac{r}{n}}}{|x-x_I|^{n+r}}dx$$

$\leqslant C|I|^{\frac{1}{2}-\delta}$，只要 $0<\delta<\dfrac{r}{n}$．

(iv) 当 $|J|<|I|$，$J\cap 2I\neq\varPhi$ 时．

这时 $J\subset 4I$，记 $b(I)=\mathrm{bd}\,I_1\bigcup \mathrm{bd}\,I_2$，其中 bd I 表示 I 的边界，我们来证明

$$C_{IJ}\leqslant C\left(\frac{|J|}{|I|}\right)^{\frac{1}{2}}\log\frac{Cl(I)}{l(J)}\text{，当 }\mathrm{dist}(x_J,b(I))\leqslant Cl(J)\text{，}\tag{11}$$

$$C_{IJ}\leqslant C\frac{|J|^{\frac{1}{2}+\frac{r}{n}}}{|I|^{\frac{1}{2}}\mathrm{dist}(x_J,b(I))^r}\text{，当 }\mathrm{dist}(x_J,b(I))\geqslant Cl(J)\text{.}\tag{12}$$

先证(11)．如果 $I\bigcap J=\phi$，注意到此时 $l(J)\leqslant l(I)$，dist $(J,I)\leqslant 4l(I)$，那末(11)是引理(4.11)的直接推论．如果 $I\bigcap J\neq\phi$，在 $I=J$ 的情形，(11)等价于说

$$|\langle T(b\alpha_I),\ \beta_I\rangle_b|\leqslant C\text{，}\tag{13}$$

这实际上就是 $q=0$ 的情形的弱有界性．弱有界条件原来要求支于 I 的函数 f，g 具有光滑性，现在的 α_I，β_I 是支于 I 的两个特征函数的线性组合，G．David[9] 已经严格论证这种差别是非本质的．由于叙述过于繁琐，我们在此把它省略．有兴趣的读者可参看原文．在许多具体情况下（例如算子是用反对称核的主值积分定义）直接验证(13)是容易的．

如果 $J\neq I$，这时 $J\subsetneqq I$．设 $I=I_1\bigcup I_2$，$\alpha_I=\alpha_1\chi_{I_1}+\alpha_2\chi_{I_2}$，$|\alpha_j|\approx|I|^{-\frac{1}{2}}$，$J\subset I_1$，则由引理(4.11)，有

$$|\langle T(b\alpha_2\chi_{I_2}),\ \beta_J\rangle_b|\leqslant C\left(\frac{|J|}{|I|}\right)^{\frac{1}{2}}\log\frac{Cl(I)}{l(J)}\text{.}$$

应用 $T(b)=0$，知

$$\left|\langle T(b\alpha_1\chi_{I_1}),\ \beta_J\rangle_b\right|=\left|-\langle T(b\alpha_1\chi_{I_1^c}),\ \beta_J\rangle_b\right|$$

$$=\left|\langle T'(b\beta_J),\ \alpha_1\chi_{I_1^c}\rangle_b\right|=\left|\int_{I_1^c\cap 2J}+\int_{I_1^c-2J}\right|$$

$$\leqslant C\left(\frac{|J|}{|I|}\right)^{\frac{1}{2}}+C|J|^{\frac{1}{2}+\frac{r}{n}}|I|^{-\frac{1}{2}}\int_{|x-x_J|\geqslant Cl(J)}\frac{dx}{|x-x_J|^{n+r}}$$

$$\leqslant C\left(\frac{|J|}{|I|}\right)^{\frac{1}{2}},$$

这就证明了(11).

现在考虑 $\operatorname{dist}(x_J,b(I))\geqslant Cl(J)$的情形．这时仍有两种可能：$I\cap 2J=\Phi$ 与 $J\subsetneqq I$（取 C 充分大）．对前者有

$$\left|\langle T(b\alpha_I),\ \beta_J\rangle_b\right|=\left|\langle T^t(b\beta_J),\ \alpha_I\rangle_b\right|$$

$$\leqslant C|J|^{\frac{1}{2}+\frac{r}{n}}|I|^{-\frac{1}{2}}\int_{|x-x_J|\geqslant\operatorname{dist}(x_J,b(I))}\frac{dx}{|x-x_J|^{n+r}}$$

$$\leqslant\frac{C|J|^{\frac{1}{2}+\frac{r}{n}}|I|^{-\frac{1}{2}}}{\operatorname{dist}(x_J,b(I))^r};\qquad(14)$$

对后者，设 $I=I_1\cup I_2$，$J\subset I_1$．这时

$$|\langle T(b\alpha_I\chi_{I_1}),\ \beta_J\rangle_b|=|\langle T^t(b\beta_J),\ \alpha_I\chi_{I_1^c}\rangle_b|$$

$$\leqslant C|J|^{\frac{1}{2}+\frac{r}{n}}|I|^{-\frac{1}{2}}\int_{|x-x_J|\geqslant\operatorname{dist}(x_J,b(I))}\frac{dx}{|x-x_J|^{n+r}}$$

$$\leqslant C|J|^{\frac{1}{2}+\frac{r}{n}}|I|^{-\frac{1}{2}}/\operatorname{dist}(x_J,b(I))^r.$$

对 $\alpha_2\chi_{I_2}$的估计，可类似于(14)进行．这证明了(12)．

注意满足 $|J|=2^{-m}|I|$，$\operatorname{dist}(x_J,b(I))\leqslant Cl(J)$的那些 J 的数目不超过 $C\,2^{m(1-\frac{1}{n})}$．故不等式(7)左边对应于(11)的项之和

$$\sum_{(4)}C_{IJ}|J|^{\frac{1}{2}-\delta}\leqslant C\sum_{m=0}^{\infty}2^{m(1-\frac{1}{n})}(2^{-m}|I|)^{\frac{1}{2}-\delta}(2^{-m})^{\frac{1}{2}}m$$

$$\leqslant C\sum_{m=0}^{\infty} m2^{-m(\frac{1}{n}-\delta)}|I|^{\frac{1}{2}-\delta}\leqslant C|I|^{\frac{1}{2}-\delta}.$$

不等式(7)左边对应于(12')的项之和

$$\sum_{(5)} C_{IJ}|J|^{\frac{1}{2}-\delta}$$

$$\leqslant C\sum_{m=0}^{\infty}(2^{-m}|I|)^{1-\delta+\frac{r}{n}}|I|^{-\frac{1}{2}}\sum_{J\subset 4I}|J|^{-1}\int_J\frac{dx}{\operatorname{dist}(x,b(I))^r+l(J)^r}$$

$$\leqslant C\sum_{m=0}^{\infty}2^{-m(\frac{r}{n}-\delta)}|I|^{-\frac{1}{2}+\frac{r}{n}-\delta}\int_{4I}\frac{dx}{\operatorname{dist}(x,b(I))^r+(2^{-\frac{m}{n}}l(I))^r}$$

把最后的积分在 q^n 个大小与 I_1(或 I_2)相同区域上估计，其中每个被形如下面的量控制(其中 I 是以 $x=0$ 为心的方体)

$$\sum_{j=1}^{n}\int_I\frac{dx}{(l(I)-|x_j|)^r+(2^{-\frac{m}{n}}l(I))^r}$$

$$\leqslant\begin{cases}C|I|^{\frac{n-1}{n}}l(I)^{1-r}\leqslant C|I|^{1-\frac{r}{n}}, & r<1,\\ C|I|^{\frac{n-1}{n}}\log 2^{\frac{m}{n}}\leqslant Cm|I|^{\frac{n-1}{n}}, & r=1.\end{cases}$$

结果得到

$$\sum_{(5)} C_{I,J}|J|^{\frac{1}{2}-\delta}\leqslant C|I|^{\frac{1}{2}-\delta}.$$

这样我们就证明了不等式(7). 从而在 $b_1=b_2=b$, $T(b)=T'(b)=0$ 的简单情形证明了 $T(b)$定理.

最后考虑 $T(b_1)=\beta_1$, $T'(b_2)=\beta_2$, $\beta_j\in BMO$, $j=1,2$, 的一般情形. 设 $\{\alpha_I^{(j)},\beta_I^{(j)}\}_I$ 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$的适应于 b_j 的拟正交基对, $j=1,2$,则对 $f\in L^2$, 我们有展开

$$b_1 f \sim \sum_I b_1 \alpha_I^{(1)} \langle \beta_I^{(1)}, f \rangle_{b_1},$$

$$T(b_1 f) \sim \sum_J \alpha_J^{(2)} \sum_I \langle \beta_J^{(2)}, T(b_1 \alpha_I^{(1)}) \rangle_{b_2} \langle \beta_I^{(1)}, f \rangle_{b_1}.$$

故 T 的 L^2 有界性便等价于矩阵算子 t（由矩阵 $\{\langle \beta_J^{(2)}, T(b_1 \cdot \alpha_I^{(1)}) \rangle_{b_2}\}_{I,J}$ 生成）的 l^2 有界性，相应的 Schur 估计是

$$\sum_J \{ |\langle \beta_J^{(2)}, T(b_1 \alpha_I^{(1)}) \rangle_{b_2}| + |\langle \beta_I^{(2)}, T(b_1 \alpha_J^{(1)}) \rangle_{b_2}| \} |J|^{\frac{1}{2}-\delta}$$
$$\leqslant C |I|^{\frac{1}{2}-\delta}, \ \forall I.$$

由于每个 $\alpha_I^{(1)}(y)$ 关于测度 $b_1(y)dy$，以及每个 $\beta_J^{(2)}(x)$ 关于测度 $b_2(x)dx$ 的消失矩性质，如果 $T(b_1) = 0 = T'(b_2)$，则前述讨论便可照搬到一般 b_1, b_2 不必相等的情形，因此我们的任务是希望将 $T(b_1) = \beta_1$，$T'(b_2) = \beta_2$，$\beta_j \in BMO$，$j = 1, 2$，的一般情形化到 $T(b_1) = 0 = T'(b_2)$ 的情形．

§5.3 的 2 中介绍过的仿积 Π_b 是一个 CZO，且满足 $\Pi_b(1) = b$，$\Pi_b^*(1) = 0$，它在 $T(1)$ 定理的证明中，可把证明归结为 $T(1) = T'(1) = 0$ 的简单情形，但用于 $T(b)$ 定理，不好验证核的光滑性条件，故我们根据上面关于基的构造，引入离散型的仿积算子，以达到我们的目的．令

$$S_{\beta_i}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Delta_k^{(i')}(\beta_i) E_{k-1}^{(i)}(b_i^{-1} f), \quad i = 1, 2, \ i' = 3 - i. \tag{15}$$

其中 $E_k^{(i)}$，$\Delta_k^{(i)}$ 分别是关于函数 b_i 定义的平均算子与差算子、我们来证明：

(i) $S_{\beta_i}(b_i) = \beta_i$，$S_{\beta_i}^t(b_{i'}) = 0 \quad i = 1, 2$；

(ii) 当 $\beta_i \in BMO$ 时，S_{β_i} 是 L^2 有界的；

(iii) 当 $\beta_i \in BMO$ 时，S_{β_i} 的核满足相应的条件．

如这三点都得到证明，那末考虑

$$R = T - S_{\beta_1} - S_{\beta_2}^{t} .$$

则 R 的核具有标准核的性质，满足 $R(b_1) = R^t(b_2) = 0$，且 $M_{b_2} R M_{b_1}$ 是弱有界的．由已证明的简单情形，知 R 可延拓为 L^2 有界的算子．从而 $T = R + S_{\beta_1} + S_{\beta_2}^{t}$ 也可延拓为 L^2 有界的算子，这就完成了 $T(b)$ 定理的最后证明．

现在我们来证明这里的(i)、(ii)、(iii)．

首先证明(ii)．证明分两步．第一步要证

$$\| S_{\beta_i}(f) \|_2^2 \approx \int_{R^n} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} | E_{k-1}^{(i)}(b_i^{-1} f)|^2 |\Delta_k^{(i)}(\beta_i)|^2 dx . \quad (16)$$

事实上，记 $g_{k-1} = E_{k-1}^{(i)}(b_i^{-1} f)$．显然 $g_{k-1} \in \mathcal{F}_{k-1}$．此时

$$S_{\beta_i}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Delta_k^{(i)}(\beta_i) g_{k-1}$$

当 $k \geq m+1$ 时，根据 E_k 的性质(ii)，(iii)，(iv)，有

$$\begin{aligned} E_m^{(i)}(\Delta_k^{(i)}(\beta_i) g_{k-1}) &= E_m^{(i)}(E_{k-1}^{(i)}[\Delta_k^{(i)}(\beta_i) g_{k-1}]) \\ &= E_m^{(i)}(E_{k-1}^{(i)}[\Delta_k^{(i)}(\beta_i)]\, g_{k-1}) = 0 . \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} E_m^{(i)}(S_{\beta_i} f) &= \sum_{-\infty}^{m} E_m^{(i)}(\Delta_k^{(i)}(\beta_i) g_{k-1}) \\ &= \sum_{-\infty}^{m} \Delta_k^{(i)}(\beta_i) g_{k-1} . \end{aligned}$$

故

$$\Delta_m^{(i)}(S_{\beta} f) = \sum_{-\infty}^{m} - \sum_{-\infty}^{m-1} = \Delta_m^{(i)}(\beta_i) g_{m-1} .$$

这便得到了(16)．下[illegible]步是重复引用[illegible]前面部分的证明(请读者留意其中的[illegible]点小区别[illegible]，要将[illegible])之右端被 $\|f\|_2^2$ 控制，从而(ii)的结论得证．

现在来证明(iii)，不难看出，S_{β_i}的核是

$$K_{\beta_i}(x,y)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{I\in\mathscr{I}_{k-1}}\alpha_I^{(i')}(x)\langle\beta_i,\beta_I^{(i')}\rangle_{b_{i'}}\left(\int_I b_i(z)dz\right)^{-1}$$

$$\cdot\chi_I(y), \tag{17}$$

其中β_i, b_i是给定的BMO函数与强仿增长函数，$\{\alpha_I^{(i)},\beta_I^{(i)}\}_{I\in\mathscr{I}}$是相对$b_i$按照前面的构造所得到的$L^2(\mathbb{R}^n)$的拟正交基对，$i=1,2$. 对$x\neq y$，在(17)中，使$K_{\beta_i}\neq 0$的$x$, y必须属于同一个$I\in\mathscr{I}_{k-1}$. 由于此时$|x-y|\leqslant C2^{-(k-1)}$，故这里的$k$有上界．记$k_{x,y}$为这些$k$中的最大者，$I_k$为包含$x$，$y$的那个$\mathscr{I}_k$中的拟二进方体，则

$$|K_{\beta_i}(x,y)|\leqslant c\sum_{k=-\infty}^{k_{x,y}}|I_{k-1}|^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{|I_{k-1}|}\left|\int_{I_{k-1}}\beta_{I_{k-1}}^{(i')}(y)b_{i'}(y)\right.$$

$$\left.\cdot(\beta_i(y)-(\beta_i)_{I_{k-1}})dy\right|$$

$$\leqslant C\|\beta_i\|_*\sum_{k=-\infty}^{k_{x,y}}|I_{k-1}|^{-1}\leqslant C2^{nk_{x,y}}\leqslant C|x-y|^{-n}.$$

K_{β_i}并不满足标准核的光滑性条件．但我们需要用到这条件的地方，只是为了建立当$x\notin 2J$时

$$|T(b_1\alpha_J^{(1)})(x)|+|T'(b_2\beta_J^{(2)})(x)|\leqslant C|J|^{\frac{1}{2}+\frac{r}{n}}|x-x_J|^{-n-1}.$$

而现在我们甚至可以得到更强的结果

$$|S_{\beta_1}(b_1\alpha_J^{(1)})(x)|+|S'_{\beta_2}(b_1\alpha_J^{(1)})(x)|=0\quad 当x\notin 2J; \tag{18}$$

$$|S_{\beta_2}(b_2\beta_J^{(2)})(x)|+|S'_{\beta_1}(b_2\beta_J^{(2)})(x)|=0\quad 当x\notin 2J. \tag{19}$$

事实上，

$$S_{\beta_1}(b_1\alpha_J^{(1)})(x)=\sum_k\sum_{I\in\mathscr{I}_{k-1}}\alpha_I^{(2)}(x)\langle\beta_1,\beta_I^{(2)}\rangle_{b_2}\left(\int_I b_1dy\right)^{-1}\int_I b_1\alpha_J^{(1)}dy.$$

只有当$I\subsetneqq J$时，积分才不为0．故当$x\notin 2J$时，$x\notin 2I$，此时所有的$\alpha_I^{(2)}(x)=0$，同时

$$S^{t}_{\beta_2}(b_1\alpha_J^{(1)})(y)=\sum_{I\in\mathscr{I}}\int_I b_1\alpha_J^{(1)}\alpha_I^{(1)}dx\ \langle\beta_2\beta_I^{(1)}\rangle_{b_1}\Big(\int_I b_2dy\Big)^{-1}\chi_I(y),$$

其中右边第一个积分仅当 $I=J$ 时不为 0，这可以从 $\alpha_J^{(1)}$ 关于 b_1dx 的消失矩推出，故当 $y\notin 2J$ 时，$y\notin 2I$，此时所有的 $\chi_I(y)=0$，这就证明了(18)．同理可证(19)．从而实际上证得了(iii)．

最后证明(i)，粗略地看这是显然的，这因 $E_{k-1}^{(i)}(1)=1$，同时 $\sum\limits_k\Delta_k^{(i)}$ 是恒等算子，以及 $b_{i'}(x)\alpha_I^{(i')}(x)$的积分为 0．但因我们只证明了 $\sum\limits_k\Delta_k^{(i)}$ 是 L^2 上的恒等算子，所以我们还需要作点解释．从整个证明的需要来看，我们只需要对 $i=1,2$ 定义 $S_{\beta_i}(b_i)$（以及 $S^t_{\beta_i}(b_i)$）在函数集合 $\{b_{i'}\beta_I^{(i')}\}_{I\in\mathscr{I}}$（以及 $\{b_{i'}\alpha_I^{(i')}\}_{I\in\mathscr{I}}$）上的作用，并且证明 $S_{\beta_i}(b_i)$的作用同 β_i 的作用一样，$S^t_{\beta_i}(b_i)$的作用为 0（这种作用就是函数乘积的积分）．而这是容易的，只需自然地定义 $S_{\beta_i}(b_i)$（以及 $S^t_{\beta_i}(b_i)$）在 $b_{i'}\beta_{I_0}^{(i')}$(以及在$b_{i'}\alpha_{I_0}^{(i')}$)上的作用为级数的有限项的和的极限，即设$\{F_j\}$是 $\mathscr{I}$ 的有限子集的满足 $\bigcup F_j=\mathscr{I}$ 的任意递增序列，定义

$$\int_{\mathbb{R}^n}S_{\beta_i}(b_i)(x)b_{i'}(x)\beta_{I_0}^{(i')}(x)dx$$

$$=\lim_{j\to\infty}\sum_{I\in F_j}\int_{\mathbb{R}^n}b_{i'}(x)\beta_{I_0}^{(i')}(x)\alpha_I^{(i')}(x)\langle\beta_I^{(i')},\beta_i\rangle b_{i'}dx,$$

$$\int_{\mathbb{R}^n}S^t_{\beta_i}(b_i)(x)b_{i'}(x)\alpha_{I_0}^{(i')}(x)dx=\lim_{j\to\infty}\sum_{I\in F_j}\int_{\mathbb{R}^n}b_{i'}(x)\alpha_{I_0}^{(i')}(x)$$

$$\cdot\ \chi_I(x)dx\langle\beta_I^{(i')},\beta_i\rangle_{b_i}|I|_{b_i}^{-1}\int_{\mathbb{R}^n}b_{i'}(y)\alpha_I^{(i')}(y)dy.$$

前者的确为$\langle\beta_{I_0}^{(i')},\beta_i\rangle_{b_i}$，后者的确为 0，这便给出了满足要求的定义，完成了(i)的证明．

至此，$T(b)$定理全部证完.

作为$T(1)$定理和$T(b)$定理的应用，我们来验证§5.3遗留下来的几个算子的L^2有界性.

首先看Calderón的交换子：

$$C_m(f)=\mathrm{p.v.}\ \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{A(x)-A(y)}{x-y}\right)^m\frac{f(y)}{x-y}\,dy.$$

当$A'\in L^\infty(\mathbb{R})$时，它的核满足标准估计$(r=1)$.这核是反对称的，故$C_m\in WBP$.为证$C_m$的$L^2$有界性，根据$T(1)$定理，只需证明$T(1)\in BMO$(核的反对称性推出$T'(1)\in BMO$).我们通过归纳法来证明．当$m=0$时，$C_0$是Hilbert变换．因此$C_0$: $L^\infty\to BMO$.考虑$C_1(1)$．为简单起见，我们用$\chi_{[-j,j]}$来逼近1.为看$C_1(\chi_{[-j,j]})$的极限，我们可以减去一个常数

$$\gamma_j=-\int_{1\leqslant|y|\leqslant j}\frac{A(y)}{y^2}\,dy,$$

用分部积分，

$$\int_{-j}^{j}\frac{A(x)-A(y)}{(x-y)^2}\,dy+\int_{1\leqslant|y|\leqslant j}\frac{A(y)}{y^2}\,dy$$

$$=\frac{A(x)-A(y)}{x-y}\Bigg|_{-j}^{j}+\int_{-j}^{j}\frac{A'(y)}{x-y}\,dy$$

$$-\frac{A(y)}{y}\Bigg|_{-j}^{-1}-\frac{A(y)}{y}\Bigg|_{1}^{j}+\int_{1\leqslant|y|\leqslant j}\frac{A'(y)}{y}\,dy$$

$$=\frac{A(x)}{x-j}-\frac{xA(j)}{j(x-j)}-\frac{A(x)}{x+j}+\frac{xA(-j)}{j(x+j)}$$

$$+A(1)+A(-1)+\int_{-j}^{j}\frac{A'(y)}{x-y}dy+\int_{1\leqslant|y|\leqslant j}\frac{A'(y)}{y}dy,$$

令 $j\to+\infty$，等式右边前四项的极限为 0，最后两项的极限，按 Hilbert 变换在 A' 上作用的意义，其值正好是 $C_0(A')$. 故 $C_1(1)=C_0(A')\in BMO$. 这样我们就证明了 $C_1\in CZO$，从而 $C_1:L^\infty\to BMO$ 有界. 用归纳法便可结束定理(3.4)的证明.

下面我们看 Lipschitz 曲线 $z=x+iA(x)$ ($A'\in L^\infty$) 上的 Cauchy 积分算子

$$C_A(f)(x)=\text{p.v.}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(y)dy}{(x-y)+i(A(x)-A(y))}.$$

显然，核满足标准估计，是反对称的. 因此要证 C_A 是 L^2 有界的，用 $T(b)$定理，只需取 $b(x)=1+iA'(x)$. 显然 $\operatorname{Re}b(x)=1>0$，即 b 是增长的. 剩下来是验证 $C_A(b)\in BMO$. 不妨设 $A(0)=0$，取

$$\gamma_j=-\int_{1\leqslant|y|\leqslant j}\frac{b(y)}{y+iA(y)}dy,$$

则

$$\int_{-j}^{j}\frac{b(y)dy}{(x-y)+i(A(x)-A(y))}-\gamma_j$$

$$=-\log\left|\frac{x+iA(x)-(j+iA(j))}{j+iA(j)}\right|+\log\left|\frac{x+iA(x)+j-iA(-j)}{j-iA(-j)}\right|$$

$$+\log\left|\frac{1-iA(1)}{1+iA(1)}\right|.$$

令 $j\to+\infty$，其极限为常数，在 BMO 空间它等价于 0. 由核的

反对称性知 $C'_A(1)=0$．根据 $T(b)$定理．知 C_A 是 L^2 有界的，从而 $C_A\in CZO$．这就完成了定理(3.5)的证明．

最后我们看弦弧曲线 $\Gamma: z=z(s)$上的 Cauchy 积分算子

$$C_\Gamma f(s)=\text{p.v.}\ \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)}{z(s)-z(t)}\,dt\ .$$

由弦弧曲线的定义知，核满足标准核的条件，且是反对称的，取 $b(t)=z'(t)$，则弦弧曲线的条件保证 b 是强仿增长的．类似上面的证明，可知 $C_\Gamma(b)=0$，由 $T(b)$定理知 C_Γ 是 L^2 有界的，从而为 Calderón－Zygmund 算子，这就完成了定理(3.6)的证明．

§5.5　进一步事实、习题与注记

1．设线性算子 T 与平移可交换，即

$T\tau_h=\tau_h T$，其中 $\tau_h f(\cdot)=f(\cdot-h)$，且 T 是 L^∞ 到 BMO 有界的，证明它是 BMO 到 BMO 有界的．

提示：用 BMO 的 Fefferman－Stein 分解．

2．设 $T\in CZO(r)$，若 $T^*(1)=0$，则 T 是 H_1 到 H_1 有界的．若 $T(1)=0$，则 T 是 BMO 到 BMO 有界的．

3．设 $T:\mathscr{D}\to\mathscr{D}'$线性连续，其分布核 $K(x,y)$在 $\Omega=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\setminus\{x=y\}$满足下列条件：$K$ 是 Ω 上 N 阶连续可微函数，其中 N 是非负整数，$0<r\leqslant 1$，且

$$|\partial_x^\alpha K(x,y)|+|\partial_y^\alpha K(x,y)|\leqslant C(x-y)^{-n-|\alpha|},\ \forall\, 0\leqslant|\alpha|\leqslant N,$$

$$|\partial_x^\alpha K(x,y)-\partial_x^\alpha K(x,y')|\leqslant C|y-y'|^r|x-y|^{-n-N-r},$$

$$\forall\,|\alpha|=N,\ |x-y|>2|y-y'|,$$

$$|\partial_y^\alpha K(x,y)-\partial_y^\alpha K(x',y)|\leqslant C|x-x'|^r|x-y|^{-n-N-r},$$

$$\forall\,|\alpha|=N,\ |x-y|>2|x-x'|.$$

如果 T 可延拓为 L^2 有界算子，那末 $T: H_p\to L^p$ 有界，其中

$\frac{n}{n+N+r}<p\leqslant 1$. 如果进一步还有 $T^*(x^\alpha)=0$，则 $T:H_p\to H_p$ 有界，其中 $\frac{n}{n+N+r}<p\leqslant 1$.(参见邓—韩[DH]).

4. 设 $T:\mathcal{S}\to\mathcal{S}'$ 线性连续，其分布核在 Ω 上满足

$$\int_{|x-y|\geqslant 2|y-y'|}|K(x,y)-K(x,y')|dx\leqslant C,$$

$$\int_{|x-y|\geqslant 2|x-x'|}|K(x,y)-K(x',y)|dy\leqslant C,$$

且对任意 $f\in\mathcal{S}$，

$$Tf(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x-y|>\varepsilon}K(x,y)f(y)dy\ \text{a.e.},$$

并且 T 可延拓为 L^2 有界算子，则 T 是弱(1,1)型与 (p,p) 型，$1<p<+\infty$.

5. 若 $T\in CZO$，则存在可测正值函数列 $\varepsilon_j(x)$，满足

$$\lim_{j\to+\infty}\varepsilon_j(x)=0,$$

又存在函数 $m(x)\in L^\infty$，使得对任意 $f\in L^2$，有

$$Tf(x)=m(x)f(x)+\lim_{j\to+\infty}\int_{|x-y|\geqslant\varepsilon_j(x)}K(x,y)f(y)dy,\ \text{a.e.},$$

其中极限按 L^2 意义也是成立的.

这结果补充了定理(2.4)，从另一角度说明 CZO 与用主值定义的奇异积分的关系，它去掉了条件(2)：

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon\leqslant|x-y|\leqslant 1}K(x,y)dy\quad\text{存在}.$$

但结果是用了序列 $\varepsilon_j(x)\to 0$ 代替 $\varepsilon\to 0$，可参见 Y. Meyer 的书[M].

6．考虑仿积的下述变形（P_t，Q_t 的意义如通常）：

$$\widetilde{\Pi}_b(f)=\int_0^{+\infty}Q_t(b)\cdot P_t(f)\frac{dt}{t}\ .$$

证明当 $b\in BMO$ 时，$\widetilde{\Pi}_b\in CZO$．参见 Coifman－Meyer [CM1]

7．对上题中的 P_t，Q_t，我们可用非卷积算子代替．称算子族 $\{P_t\}_{t>0}$ 为 ε 算子族，如果 $P_t(f)$ 由核 $P_t(x,y)$ 定义，即

$$P_t(f)(x)=\int P_t(x,y)f(y)dy\ ,$$

而 $P_t(x,y)$ 满足

$$|P_t(x,y)|\leqslant C\frac{t^{\varepsilon}}{t^{n+\varepsilon}+|x-y|^{n+\varepsilon}}\ ,$$

$$|P_t(x,y)-P_t(x',y)|+|P_t(y,x)-P_t(y,x')|$$

$$\leqslant C\left(\frac{|x-x'|}{t+|x-y|}\right)^{\varepsilon}\frac{t^{\varepsilon}}{t^{n+\varepsilon}+|x-y|^{n+\varepsilon}}\ ,\text{当}\ |x-y|\geqslant 2|x-x'|.$$

设算子族 P_t，Q_t 为 ε 算子族，且 $Q_t(1)=Q_t^*(1)=0$，$P_t(1)=1$，$b\in BMO$，则下述推广的 $\widetilde{\Pi}_b\in CZO$：

$$\widetilde{\Pi}_b(f)=\int_0^{+\infty}Q_t(b)P_t(f)\frac{dt}{t}\ .$$

提示：其 L^2 有界性可以考虑用 $T(b)$ 定理证明．这个结果属于邓东皋－韩永生（见［DH1］）．

8．证明题 6 中的 $\widetilde{\Pi}_b$ 是紧算子当且仅当 $b\in VMO$，即 $b\in BMO$，且满足

$$\lim_{l(Q)\to 0}\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(x)-m_Qf|dx=0\ .$$

9. Calderón 交换子 C_m 是 L^2 有界的，只要 $A' \in L^\infty$（见定理(3.4)）. 关于 C_m 的 L^2 到 L^2 的算子模估计，容易证明：存在常数 $C>0$，使得

$$\| C_m \|_{(L^2, L^2)} \leqslant C^{m+1} \| A' \|_\infty^m .$$

1982 年，Coifman – Mc Intosh – Meyer[CMM] 证明了

$$\| C_m \|_{(L^2, L^2)} \leqslant C(1+m^4) \| A' \|_\infty^m .$$

最好的估计是由 M. Christ 与 J.-L. Journe 于 1987 年得到的：对任意的 $\varepsilon>0$，存在 C_ε，使得

$$\| C_m \|_{(L^2, L^2)} \leqslant C_\varepsilon (1+\| A' \|_\infty)^{1+\varepsilon} .$$

10. 关于 Lipschitz 曲线 $z=x+iA(x)$ 上的 Cauchy 积分 C_A 的 L^2 到 L^2 的算子模估计的结果是

$$\| C_A \|_{(L^2, L^2)} \leqslant C(1+\| A' \|_\infty)^{\frac{1}{2}} .$$

这一结果属于 T. Murai. G. David 证明了这是最好可能的估计.

11. 设 $\Phi \in C^\infty$，$A' \in L^\infty$，证明算子

$$T = \mathrm{p.v.} \int \Phi\left(\frac{A(x)-A(y)}{x-y} \right) \frac{f(y)}{x-y}\, dy$$

是 L^2 有界的. 可以减弱 Φ 的光滑性要求，使结果仍然成立. 但最低的光滑性要求是什么至今仍不清楚. 例如当 $\Phi(x)=|x|$ 时，对应的算子是否 L^2 有界，就是一个尚未解决的问题.

12. 设 $n \geqslant 1$ 与 $m \geqslant 1$ 是两个整数. $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 是 Lipschitz 连续函数，即

$$\| A(x)-A(y) \|_{\mathbb{R}^m} \leqslant C \| x-y \|_{\mathbb{R}^n} ,$$

而 $F: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ 为无穷次可微的奇函数. 证明由反对称核

$$K(x, y) = F\left(\frac{A(x)-A(y)}{x-y} \right) \frac{1}{|x-y|^m}$$

的主值积分定义的算子是 L^2 有界的. 见 Meyer[M].

13. 设 $T\in CZO$，T 联系于标准核 $K(x,y)$，满足 $K(x,y)=-K(y,x)$，$A'\in L^{\infty}$，证明

$$Tf(x)=\text{p.v.}\int K(x,y)\frac{A(x)-A(y)}{x-y}f(y)dy$$

是 L^2 有界的，见 G. David[D].

14. 证明算子

$$T(f)(x)=\text{p.v.}\ \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{A(x)-A(y)}{x-y}f(y)dy$$

是 $L^2(\mathbb{R})$有界，当且仅当 $A\in BMO$. 注意：这里的 T 实际上是 M_A 与 Hilbert 变换的交换子：$T=[M_A,H]$.

15. 设 $\sigma:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，$\sigma\in C^{n+1}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$，且满足

$$\left|\frac{\partial^{\alpha}}{\partial\xi^{\alpha}}\ \frac{\partial^{\beta}}{\partial x^{\beta}}\sigma(x,\xi)\right|\leqslant C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{|\beta|-|\alpha|}$$

对 $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n$，$|\alpha|\leqslant n+2$，$|\beta|\leqslant\inf(1,|\alpha|)$成立，则以 $\sigma(x,\xi)$ 为符号的算子

$$\sigma(x,D)f(x)=\int_{\mathbb{R}^n}e^{2\pi i x\cdot\xi}\sigma(x,\xi)\hat{f}(\xi)d\xi$$

是 Calderón – Zygmund 算子.

注 这样定义的算子是经典伪微分算子 S^0_{11}. 这结果表明：经典伪微分算子 S^0_{11} 是 CZO. 参见 Journé的书[Jou].

16. 作为 15 的一个推论是：设 $\sigma:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，$\sigma\in C^{n+3}(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$，且满足

$$\left|\frac{\partial^{\alpha}}{\partial\xi^{\alpha}}\sigma(\xi)\right|\leqslant C_{\alpha}|\xi|^{-\alpha},\quad\forall|\alpha|\leqslant n+2,$$

则由

$$\sigma(D)f(x)=\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi}\sigma(\xi)\hat{f}(\xi)d\xi$$

定义的算子 $\sigma(D)$是卷积型的 Calderón－Zygmund 算子．

17．存在 $T:\mathscr{S}\to\mathscr{S}'$的线性连续算子．其分布核满足标准估计，且是反对称的，但 T 不能延拓为 L^2 有界的算子．参见 Meyer 的书［M］．

18．证明e^{ix}不是强仿增长的函数．

19．设 T 是弱有界的，其核满足条件

$$|K(x,y)|\leqslant C|x-y|^{-n}.$$

则对任意 $\eta>0$ 存在常数 C，使对任意方体 Q，$f,g\in\mathscr{S}$，$\operatorname{supp} f\subset Q$，$\operatorname{supp} g\subset Q$，有

$$|\langle Tf,g\rangle|\leqslant C|Q|^{1+\frac{2\eta}{n}}\|f\|_\eta\|g\|_\eta,$$

其中

$$\|f\|_\eta=\sup\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\eta}.$$

这结果表明，可以把弱有界的定义推广到 q 为非整数的情形，参见［DJS］．

20．称 $b:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ 为仿增长的(para－accretive)，如果存在 $C>0$，使对任意方体 Q，存在子方体 $I\subset Q$，使得 $|I|\geqslant\delta|Q|$，$\delta>0$ 是固定常数，并且

$$\left|\frac{1}{|Q|}\int_I b(x)dx\right|\geqslant C.$$

下面的结果表明：为保证 $T(b)$定理成立，仿增长性是必要的．设 b_1,b_2是复值函数，如果 b_1 或 b_2 不是仿增长的，则存在线性算子 T，它联系着标准核，使得

(i) $Tb_1\in L^\infty$，

(ii) $T^tb_2\in L^\infty$，

(iii) $M_{b_2}TM_{b_1}$ 弱有界，

但 T 不是 L^2 有界的．这结果属于 Han－Sawyer [HS]．在 $b_1=b_2$ 的情形，上述结果是由 David－Journé－Semmes[DJS] 证明的．

21．在 $T(b)$定理中，核的大小条件实际上是不必要的，也就是说，如果算子 T 联系于核 K，K 满足

$$|K(x,y)-K(x,y')|+|K(y,x)-K(y',x)| \leqslant C|y-y'|^{\varepsilon}|x-y|^{-n-\varepsilon},$$

只要 $|x-y|>2|y-y'|$，$M_{b_1}TM_{b_2}$ 是弱有界的，其中 b_1,b_2 仿增长，则 K 满足

$$|K(x,y)|\leqslant C|x-y|^{-n}.$$

参见 Han－Sawyer [HS]．

22．$T(b)$定理中核的光滑条件能减弱到什么程度，是一个很有意义的问题．到目前为止的最好结果如下，它属于韩永生．我们说核 K 满足条件(A)，如果 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\omega(k)<+\infty$，其中

$$\omega(k)=\sup_{\substack{r>0\\ |u|+|v|\leqslant r}}\left\{\iint_{|x-y|\geqslant 2^k r}|K(x+u,y+v)-K(x,y)|\,dx\right.$$
$$\left.+\int_{|x-y|\geqslant 2^k r}|K(x+u,y+v)-K(x,y)|\,dy\right\}.$$

设 b_1,b_2 是仿增长的，$T:b_1C_0^{\eta}\to(b_2C_0^{\eta})'$（对任意 $\eta>0$），T 联系于核 K，满足(A)以及

$$\langle Tb_1f,b_2g\rangle=\iint g(x)b_2(x)K(x,y)b_1(y)f(y)\,dx\,dy,$$

$\forall f, g\in C_0^{\eta}$，$\operatorname{supp}f\cap\operatorname{supp}g=\phi$．则 T 是 L^2 有界的充要条件是 $Tb_1\in BMO$，$T'b_2\in BMO$，$M_{b_1}TM_{b_2}$ 是弱有界的．其中

$$C_0^\gamma=\{f:f\ 紧支,\ |f(x)-f(y)|\leqslant C|x-y|^\gamma\}.$$

条件(A)是否还可减弱，仍是一个未解决的问题.

23. 考虑如下振荡奇异积分算子

$$Tf(x)=\text{p.v.}\int_{R^n}e^{iP(x,y)}K(x-y)f(y)dy,$$

其中 K 为 $C-Z$ 核，P 为多项式. 由于 $P(x,y)$ 的出现，它不能简单地归入 CZO 类. 这类算子首先由 F. Ricci、E. Stein 讨论，他们在 $K(x)=\dfrac{\Omega(x')}{|x|^n}$，$\Omega(x')\in C^1(S_{n-1})$的条件下建立了 T 的 L^p 有界性结果. 陆善镇—张璞[17] 给出了这类算子 L^p 有界的简易判别准则，同时将 Ricci－Stein 的上述结果中的条件减弱为 $\Omega(x')\in L^q(S_{n-1})$，$1<q\leqslant+\infty$.

注 记

经典奇异积分算子的开创性工作是由A.P.Calderón与A.Zygmund于1952年开始的，见[CZ1]. 这方面的最好参考书是E.M.Stein以及他与G.Weiss合作写的书[St2]，[SW2]. 这是第一代奇异积分算子. 第二代的奇异积分算子是伪微分算子，它的理论是由J.Kohn，L.Nirenberg与L.Hörmander等人于60—70年代建立起来的，有关内容可参看Hörmander[Hö2]. 本章介绍的Calderón－Zygmund算子的概念，是R.Coifman与Y.Meyer于1978年引进的，他们还建立了它的一般理论[CM1]. 在此以前，几个典型的非卷积算子的研究一直是一个活跃的课题. Calderón一阶交换子的L^2有界性是A.P.Calderón于1965年证明的. 高阶交换子的L^2有界性由R.Coifman与Y.Meyer于1974年给出证明. 1977年，A.P.Calderón在$\|A'\|_\infty$小的条件下，证明了Lipschitz曲线$z=x+iA(x)$上的Cauchy积分算子是L^2有界的，所有这些可见[C5]. Calderón用的是十分复杂的复分析方法. 后来，R.Coifman，A.McIntosh与Y.Meyer于1982年把$\|A'\|_\infty$小的条件去掉，在一般的条件下($A'\in L^\infty$)证明了Lipschitz曲线上的Cauchy积分算子的L^2有界性，见[CMM]. 关于Calderón－Zygmund算子这一时期理论的一本好的参考书是Journé的[Jou]. 仿积的概念是J.Bony引进的，其目的是用于非线性方程的线性化.

Coifman 与 Meyer 从调和分析的角度对它进行过深入的研究，见 [CM1]．$T(1)$定理是 1982 年由 G.David 与 J.Journé[DJ]．第一次发现并加以证明的．他们通过仿积，把一般情形化归为 $T(1)=T'(1)=0$ 的简单情形，而对简单情形则是通过 Cotlar－Knapp－Stein 拟正交引理证明的．1984 年 Coifman 与 Meyer 给出了一个简化的证明．$T(1)$定理把 Calderón 交换子的 L^2 有界性归结为简单的分部积分．但它不能用于 Lipschitz 曲线上的 Cauchy 积分算子．1984 年，G.David，J.L.Journé 与 S.Semmes[DJS] 证明了 $T(b)$定理，后来 PH.Tchamitchian 用小波给出了一个新的证明．见 [M]．1988 年，R.Coifman 与 S.Semmes 用改进的 Haar 基，给出了 $\mathbb{R}$ 情形 $T(1)$与 $T(b)$定理的一个比较简明的证明，见 [DJS]．G.David 在南开数学所的讲义中考虑了 $\mathbb{R}^n$ 情形 $T(b)$定理的类似证明，见 [D]．本章应用更简单的，构造性的方法给出了 $L^2(\mathbb{R}^n)$的一个适应于给定 $b(x)$的拟正交基对(它属于龙瑞麟，见 [Lo])，进而给出了 $T(b)$定理的简化证明．这个证明适合于 $\mathbb{R}^n$ 上 Clifford 代数值算子的 $T(b)$定理，从而使 Cauchy 积分算子的高维推广的 L^2 有界性也获得简化证明．Calderón－Zygmund 算子理论促进了小波分析(Wavelets Analysis)的产生．反过来，小波分析又大大简化了 Calderón－Zygmund 算子理论的许多处理．这方面最好的参考书是 Y.Meyer 最近的三卷本著作 [M]，在其中读者可以找到许多 Calderón－Zygmund 算子在偏微分方程和非线性分析中的应用．S.Janson 与 J.Peetre 发展了一个不能概括在 Calderón－Zygmund 纲领里的新领域，名叫仿交换子理论，这方面情形可参见彭立中的博士论文 [Pe]．

第六章　加权模不等式

前面讲述过的 Hardy – Littlewood 极大算子 M 与奇异积分算子 T，都是 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 有界的，$1<p<\infty$. 一个自然的问题是，对什么样的"权函数"$w(x)$，M 或 T 仍是 $L^p(\mathbb{R}^n, w(x)dx)$ 有界的？也就是说，对什么样的 $w(x)$，有加权模不等式(只看 T)

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

对 $1<p<\infty$ 成立？这个问题于 70 年代由 B. Muckenhoupt 等人给出了完满的解答. 这时 $w(x)$所满足的条件就称为 A_p 条件，这样的"权函数"就称为A_p 权函数(或简称 A_p 权). 这种 A_p 权函数不仅是刻划极大算子与奇异积分算子加权模不等式的合适条件，而且本身有很特殊的性质(例如满足反向Hölder 不等式，w 及A_p 性质可以自我改善)，还与其他一些概念，例如极大函数与BMO 等，有密切的联系，并且在复分析、偏微分方程中有重要的应用. 本章主要讲述 A_p 权函数的性质，以及建立加权不等式理论中最早也是最重要的事实，即对A_p 权函数来说，Hardy – Littlewood 极大函数以及 Calderón – Zygmund 奇异积分算子的加权模不等式成立.

§ 6.1　A_p 权函数

我们约定，如果 $w(x)\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$，$w(x)\geqslant 0$, a. e. $x\in\mathbb{R}^n$，那么称 $w(x)$为 $\mathbb{R}^n$ 上的权函数.

我们知道，Hardy – Littlewood 极大函数比较简单，而且在估计奇异积分时也起着重要的作用，因此，我们先研究，对什么

样的权函数 $w(x)$，Hardy－Littlewood 极大函数的加权模不等式成立．说得更准确一些，对什么样的 $w(x)$，有

$$\int_{\mathbb{R}^n}|M(f)(x)|^p w(x)dx \leqslant C^p\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^p w(x)dx \qquad (1)$$

对 $1<p<\infty$ 成立？当 $p=1$ 时，上述不等式自然应该用弱(1,1)型代替．问题化为，对什么样的权函数 $w(x)$，有

$$w(\{x\in\mathbb{R}^n:M(f)(x)>\lambda\}) \leqslant \frac{C}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|w(x)\,dx \qquad (2)$$

成立？ 式(1)，(2)中 C 是不依赖于 f，λ 的常数．

我们首先找出满足(2)的 w 所应满足的必要条件。设(2)成立，$x\in Q_1\subseteq Q_2$，$f=\chi_{Q_1}$ 为 Q_1 的特征函数，其中 Q_1，Q_2 都是方体．如果 $z\in Q_2$，则

$$M(f)(z)=\sup_{z\in Q}\frac{1}{|Q|}\int_Q f(y)dy \geqslant \frac{1}{|Q_2|}\int_{Q_2}\chi_{Q_1}(y)dy$$

$$=\frac{|Q_1|}{|Q_2|}.$$

因此，根据(2)有

$$\int_{Q_2}w(x)dx \leqslant \int_{\left\{x:M(f)(x)\geqslant\frac{|Q_1|}{|Q_2|}\right\}}w(x)dx$$

$$=w\left(\left\{x\in\mathbb{R}^n:M(f)(x)\geqslant\frac{|Q_1|}{|Q_2|}\right\}\right)$$

$$\leqslant C\frac{|Q_2|}{|Q_1|}\int_{Q_1}w(x)dx.$$

应用 Lebesgue 积分的可微分定理，知

$$\frac{1}{|Q_2|}\int_{Q_2} w(y)dy \leqslant C\,w(x)$$

对几乎处处 $x\in Q_2$ 成立，从而知 $M(w)(x)\leqslant Aw(x)$, a. e. $x\in\mathbb{R}^n$.

定义(1.1) 设 w 是权函数．如果存在常数 $C>0$，使得

$$M(w)(x)\leqslant C\,w(x),\ \text{a. e. } x\in\mathbb{R}^n.$$

则称 w 是一个 A_1 权函数，记为 $w\in A_1$，或称 w 满足 A_1 条件.

下面的定理说明 A_1 条件对于(2)来说也是充分的.

定理(1.2) 如果 $w\in A_1$，则 Hardy－Littlewood 极大算子 M 是由 $L^1(w(x)dx)$ 到弱 $L^1(w(x)dx)$ 的有界算子，即(2)成立.

为证明定理(1.2)，我们需要下面的引理.

引理(1.3) 设 $w\in A_1$，则测度 $w(x)dx$ 满足双倍条件，即存在常数 C，使得 $w(2Q)\leqslant C\,w(Q)$ 对任意 Q 成立，其中 $2Q$ 表示与 Q 同心边长为 Q 的二倍的方体．$w(Q)=\int_Q w(x)dx$ 是 Q 的 w 测度(我们也常常记为 $|Q|_w$).

证明 由 $w\in A_1$，知

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)dx\leqslant C\ \operatorname*{ess\,inf}_{x\in Q}\ w(x)$$

对任意 Q 成立，其中"ess inf"表示本性下确界(即不计零测度集合意义下)．这样，

$$w(2Q)\leqslant C|2Q|\ \operatorname*{ess\,inf}_{x\in 2Q}\ w(x)\leqslant C\,|Q|\ \inf_{x\in Q}\ w(x)$$
$$\leqslant C\int_Q w(x)dx=Cw(Q).$$

这就证明了引理.

引理(1.4) 如果 $w\in A_1$，则存在常数 C，使得

$$M(f)(x)\leqslant C\,M_w(f)(x),$$

其中

$$M_w(f)(x) = \sup_{x\in Q} \frac{1}{w(Q)} \int_Q |f(x)| w(x)dx$$

是对测度 $w(x)dx$ 而言的 Hardy – Littlewood 极大函数.

证明 由 $w \in A_1$，显然有

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|dy \leqslant \sup_{x\in Q} \frac{1}{|Q| \operatorname{ess\,inf}_{y\in Q} w(y)} \int_Q |f(y)| w(y)dy$$

$$\leqslant C \sup_{x\in Q} \frac{1}{w(Q)} \int_Q |f(y)| w(y)dy = C\, M_w(f)(x).$$

在不等式左边取 sup，便得引理的结论. 引理证毕.

定理(1.2)的证明 回忆第三章用 Vitali 覆盖定理证明Hardy – Littlewood 极大函数的弱(1,1)型的过程，便会发现，只要 $w(x)dx$ 满足双倍条件，便同样地可以推出

$$w(\{x\in\mathbb{R}^n : M_w(f)(x) > \lambda\}) \leqslant \frac{A}{\lambda} \|f\|_{L^1(w(x)dx)}.$$

再用引理(1.4)，便知

$$w(\{x\in\mathbb{R}^n : M(f)(x) > \lambda\}) \leqslant w(\{x\in\mathbb{R}^n : M_w(f)(x) > c\lambda\})$$

$$\leqslant \frac{C}{\lambda} \|f\|_{L^1(w(x)dx)}.$$

这就是我们要证明的(2). 定理证毕.

至此，我们证明了，$w \in A_1$，当且仅当 H. – L. 极大函数算子是 $L^1(wdx)$ 至弱 $L^1(wdx)$ 有界的.

我们希望把类似的讨论推广到 $1 < p < \infty$ 的情形. 我们从寻找满足(1)式的w 的必要条件入手. 设(1)成立，则对任意 $Q \subset \mathbb{R}^n$,

$$M(f\chi_Q)(x) \geqslant \chi_Q(x)\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)dy = m_Q(|f|)\chi_Q .$$

这里 $m_Q(|f|)$表示 $|f|$ 在 Q 上的积分平均(我们也常常记为 $|f|_Q$).因此

$$w(Q)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|dy\right)^p$$

$$\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} M^p(f\chi_Q)(y)w(y)dy \leqslant C\int_Q |f(y)|^p w(y)dy$$

$$\leqslant C\int_Q |f(y)|^p (w(y)+\varepsilon)dy,$$

其中 $\varepsilon>0$. 取 $f(x)=(w(x)+\varepsilon)^{-\frac{1}{p-1}} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, 有

$$w(Q)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q (w(y)+\varepsilon)^{-\frac{1}{p-1}}dy\right)^p$$

$$\leqslant C\int_Q (w(y)+\varepsilon)^{-\frac{p}{p-1}+1}dy = C\int_Q (w(y)+\varepsilon)^{-\frac{1}{p-1}}dy.$$

故

$$\frac{w(Q)}{|Q|}\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q (w(y)+\varepsilon)^{-\frac{1}{p-1}}dy\right\}^{p-1} \leqslant C.$$

令 $\varepsilon \to 0$, 由 Fatou 引理得

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)dy\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)^{-\frac{1}{p-1}}dy\right)^{p-1} \leqslant C. \quad (3)$$

我们引入下面的定义.

定义(1.5) 设 $w(x)$ 是权函数，$1<p<\infty$，如果存在常数 C，使得(3)对一切 Q 成立，即

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)dy\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)^{-\frac{1}{p-1}}dy\right)^{p-1}<\infty,$$

则称 w 为一个 A_p 权函数，或称 w 满足 A_p 条件，记为 $w\in A_p$.

前面定义的 A_1 条件正好是这里的 A_p 条件当 $p\to 1$ 的极限情形. 这是由于当 $p\to 1$ 时,

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{p-1}\to \operatorname*{ess\,sup}_Q w^{-1},$$

而 A_1 条件等价于

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q wdx\leqslant c\operatorname*{ess\,inf}_Q w=c\left(\operatorname*{ess\,sup}_Q w^{-1}\right)^{-1}.$$

即

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)dx\cdot\operatorname*{ess\,sup}_Q w^{-1}\leqslant c .$$

下面我们的目的是要证明，条件 $w\in A_p$，$1<p<\infty$，对(1)来说也是充分的，为此，必须对 A_p 的性质作比较深入的探讨.

我们先列举 A_p 权函数的一些初等性质.

(a) 若 $p_1<p_2$, $1\leqslant p_1<p_2<\infty$，则 $A_{p_1}\subsetneqq A_{p_2}$.

$p_1\neq 1$ 时，包含关系可从 Hölder 不等式直接推出. $p_1=1$ 时，这是由于

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{p-1}\leqslant \operatorname*{ess\,sup}_Q w^{-1}.$$

另外，只要注意到 $|x|^\alpha\in A_p$，当且仅当 $-n<\alpha<n(p-1)$，便知 $A_{p_1}\neq A_{p_2}$

(b) 若 $w \in A_p$, $1 \leqslant p < \infty$, $0 < \alpha < 1$ 则 $w^\alpha \in A_{\alpha p + 1 - \alpha}$.

这也是 Hölder 不等式的直接结果. 此外, 注意到 $\alpha p + 1 - \alpha \leqslant p$, 便知有 $w^\alpha \in A_p$.

(c) $w \in A_p$ 当且仅当 $w^{-\frac{1}{p-1}} \in A_{p'}$, 其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

这可由定义直接得到.

(d) 若 $w_1, w_2 \in A_p$, $p \geqslant 1$. 则 $w_1^\alpha w_2^{1-\alpha} \in A_p$, 其中 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

这同样是 Hölder 不等式的直接推论.

(e) 若 w_1, $w_2 \in A_1$, $p > 1$, 则 $w = w_1 w_2^{1-p} \in A_p$.

由于

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w_1(y)dy\right)\left(\inf_Q w_1(y)\right)^{-1} \leqslant c_1,$$

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w_2(y)dy\right)\left(\inf_Q w_2(y)\right)^{-1} \leqslant c_2,$$

而

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)dy = \frac{1}{|Q|}\int_Q w_1(y)w_2^{1-p}(y)dy$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w_1(y)dy\right)\left(\inf_Q w_2(y)\right)^{1-p},$$

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}(y)dy\right)^{p-1} \quad \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w_1^{-\frac{1}{p-1}} w_2 dy\right)^{p-1}$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w_2(y)dy\right)^{p-1}\left(\inf_Q w_1(y)\right)^{-1}.$$

这样便得到

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)dy\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)^{-\frac{1}{p-1}}dy\right)^{p-1}\leqslant C_1C_2^{p-1}.$$

后面我们将证明这性质的逆也成立，即对任意 $w\in A_p$，存在分解 $w=w_1w_2^{1-p}$，其中 w_1，$w_2\in A_1$.

(f) 若 $w\in A_p$，则测度 $w(x)dx$ 满足双倍条件.

实际上，我们还可以证明更加一般的命题：设 $w\in A_p$，则如果 $f\in L^p(wdx)$，便有 $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n,dx)$，且

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|dy\leqslant C^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q |f|^p w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{4}$$

事实上，

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|dy=\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|w^{\frac{1}{p}}(y)w^{-\frac{1}{p}}(y)dy$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|^p w(y)dy\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}(y)dy\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|^p w(y)dy\right)^{\frac{1}{p}}\cdot C^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)dy\right)^{-\frac{1}{p}}$$

$$=C^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q |f(y)|^p w(y)dy\right)^{\frac{1}{p}}.$$

在式(4)中取 $f=\chi_{\frac{1}{2}Q}$，便证明了 $w(x)dx$ 满足双倍条件.

(g) 设 w_1，$w_2\in A_p$，则 $w_1+w_2\in A_p$.

事实上，这因

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q (w_1+w_2)dx\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q (w_1+w_2)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{p-1}$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{|Q|} \int_Q w_j dx \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w_j^{-\frac{1}{p-1}} dx \right)^{p-1}.$$

§6.2 反向Hölder 不等式与 A_∞ 条件

Hölder 不等式的一种特殊情形是，当 $q>1$ 时，有

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy \leqslant \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|^q dy \right)^{\frac{1}{q}}.$$

这不等式的反向一般是不成立的，但对 A_p 权函数来说，却有这种反向的不等式成立．这是A_p 权函数最重要的特征之一．

定理(2.1) 若 $w \in A_p$ ，$p \geqslant 1$，则存在常数 $c>0$, $\delta>0$，使得对任意 $Q \subset \mathbb{R}^n$，有

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{1+\delta} dx \leqslant c \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w dx \right)^{1+\delta}. \qquad (1)$$

为证明此定理，需要下面的引理．

引理(2.2) 设 $w \in A_p$，则对任意$\alpha(0<\alpha<1)$，存在 $c_0<1$，使得只要 $|A|/|Q|<\alpha$，就有 $\dfrac{w(A)}{w(Q)} < c_0$，对一切可测集$A \subset Q$ 成立．

证明 由于 $|A|<\alpha|Q|$，有 $M(\chi_{Q \setminus A})(x) > 1-\alpha$ 对所有 $x \in Q$ 成立．根据 §6.1 的(4)知

$$M(\chi_{Q \setminus A})(x) \leqslant c^{\frac{1}{p}} M_w(\chi_{Q \setminus A}^p)^{\frac{1}{p}}(x).$$

因此

$$w(Q) \leqslant w(\{x \in \mathbb{R}^n : M(\chi_{Q \setminus A})(x) > 1-\alpha\})$$

$$\leqslant w(\{x \in \mathbb{R}^n : M_w(\chi_{Q \setminus A})(x) > c(1-\alpha)^p\}).$$

再由$w(x)dx$满足双倍条件以及极大函数 M_w 的弱(1,1)型，知(下面常数 c 是泛指的)

$$w(Q)\leqslant \frac{c}{(1-\alpha)^p}\int_{\mathbb{R}^n}\chi_{Q\setminus A}(x)w(x)dx=\frac{cw(Q\setminus A)}{(1-\alpha)^p},$$

$$=\frac{c}{(1-\alpha)^p}(w(Q)-w(A)).$$

显然 $\frac{c}{(1-\alpha)^p}>1$，由此便得 $w(A)\leqslant c_0w(Q)$，其中 $c_0<1$.

引理证毕

定理(2.1)的证明 固定 Q，对 $\alpha_k=2^{(n+1)k}\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)dy$ 在 Q 内进行 Calderón－Zygmund 分解，其中 k 是任意正整数. 这就是说，把 Q 等分成 2^n 个小方体，记 Q' 为其中的一个，如果

$$\frac{1}{|Q'|}\int_{Q'}w(y)dy>\alpha_k,$$

我们就保留 Q'，否则对 Q' 再 2^n 等分并重复下去。这样，我们得到 $\{Q_j^k\}$，满足

(i). $$2^{(n+1)k}\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)dy\leqslant\frac{1}{|Q_j^k|}\int_{Q_j^k}w(y)dy$$

$$\leqslant\frac{1}{2^{-n}|\widetilde{Q}_j^{(k)}|}\int_{\widetilde{Q}_j^k}w(y)dy\leqslant 2^n\cdot 2^{(n+1)k}\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)dy$$

$$\leqslant 2^{(n+1)(k+1)}\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)dy,$$

其中 $\widetilde{Q}_j^k$ 表示 Q_j^k 的上一代“母方体”.

(ii). 对几乎处处 $x\in D_k^c=Q\setminus D_k$，$D_k=\bigcup_j Q_j^k$，有

$$w(x)\leqslant\alpha_k=2^{(n+1)k}\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)dy.$$

由分解的程序很容易看出，$D_{k+1}\subset D_k$. 由于所有的方体都是由逐次 2^n 等分得到的，因此，对每个 Q_j^{k+1}，一定存在某个 Q_i^k，使得 $Q_j^{k+1}\subseteq Q_i^k$. 记 $D'=Q_i^k\cap D_{k+1}$，则

$$2^{(n+1)(k+1)}\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)dy \leqslant \frac{1}{|D_i^k|}\int_{D} w(y)dy$$

$$\leqslant \frac{|Q_i^k|}{|D_i^k|}\ \frac{1}{|Q_i^k|}\int_{Q_i^k} w(y)dy$$

$$\leqslant \frac{|Q_i^k|}{|D_i^k|}\ 2^{(n+1)k}\,2^n\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)dy.$$

因此 $|D_i^k|\leqslant \frac{1}{2}|Q_i^k|$. 对 i 求并，得到$|D_{k+1}|\leqslant \frac{1}{2}|D_k|$. 由引理(2.2)，知存在 $c<1$，使得 $w(D_i^k)\leqslant cw(Q_i^k)$. 对$i$ 求和得到 $w(D_{k+1})\leqslant cw(D_k)$，从而

$$w(D_{k+1})\leqslant cw(D_k)\leqslant\cdots\leqslant c^{k+1}w(D_0).$$

故对待定的 $\delta>0$ 有

$$\int_Q w^{1+\delta}(y)dy$$

$$\leqslant \int_{Q\setminus D_0} w^{1+\delta}(y)dy+\sum_{k=0}^{\infty}\int_{D_k\setminus D_{k+1}} w(y)dy\,2^{(n+1)(k+1)\delta}$$

$$\cdot\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)dy\right)^{\delta}$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)dy\right)^{1+\delta}|Q\setminus D_0|$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}2^{(n+1)(k+1)\delta}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)dy\right)^{\delta}w(D_k)$$

$$\leqslant c\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)dy\right)^{1+\delta}\left(|Q\setminus D_0|+|Q|\sum_{k=0}^{\infty}2^{(n+1)(k+1)\delta}c^{k}\right)$$

由于 $c<1$，只需取 δ 充分小，便有

$$\int_Q w^{1+\delta}\,dy \leqslant c\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\,dy\right)^{1+\delta}|Q|.$$

这就完成了定理(2.1)的证明.

定理(2.1)的证明的关键是引理(2.2). 换句话说，只要 w 满足引理(2.2)结论所刻划的性质，则 w 就满足反向Hölder 不等式. 下面的定义与定理，将把 A_p 条件与反向Hölder 不等式的关系完全刻划清楚.

定义(2.3) 记 $A_\infty=\bigcup\limits_{p\geqslant 1}A_p$，即 $w\in A_\infty$ 当且仅当存在 p，$1\leqslant p<\infty$，$w\in A_p$.

定理(2.4) 以下的命题都是等价的.

(a) $w\in A_\infty$；

(b) 存在与 Q 无关的常数 $c>0$ 与 $\delta>0$，使得对任意可测集 $E\subset Q$，都有

$$\frac{w(E)}{w(Q)}\leqslant c\left(\frac{|E|}{|Q|}\right)^{\delta};$$

(c) 存在与 Q 无关的常数 $c>0$ 与 $\delta>0$，使得对任意可测集 $E\subset Q$，有

$$\frac{|E|}{|Q|}\leqslant c\left(\frac{w(E)}{w(Q)}\right)^{\delta};$$

(d) 存在与 Q 无关的常数 $\alpha,\beta\in(0,1)$，使得对任意可测集 $E\subset Q$，只要 $\dfrac{|E|}{|Q|}<\alpha$，就有

$$\frac{w(E)}{w(Q)}\leqslant\beta;$$

(e) 存在与 Q 无关的常数 $\alpha,\beta\in(0,1)$，使得对任意可测集 $E\subset Q$，只要 $\dfrac{w(E)}{w(Q)}<\alpha$，就有

$$\frac{|E|}{|Q|} \leqslant \beta ;$$

(f) 存在某个 $\delta>0, c>0$, 使得

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{1+\delta} dx \leqslant c \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w dx \right)^{1+\delta}, \forall \text{方体 } Q.$$

这里的(d)正是引理(2.2)结论所刻划的性质. 定理(2.4)说明, 这性质等价于反向 Hölder 不等式成立, 也等价于 w 属于某个 A_p. 定理(2.4)中的(b)、(c)、(d)、(e)从不同角度刻划了 A_∞ 中的 w 与Lebesgue 测度的某种"可比较性".

定理(2.1)实际上已证明了(a)$\Longrightarrow$(f). 为证明(f)$\Longrightarrow$(a), 需要下面的引理.

引理(2.5) 如果 w 满足(f), 即 w 满足反向Hölder不等式, 则 $w(x)dx$ 满足双倍条件, 即存在正常数 c_1 与 c_2, 使得

$$w(c_1 Q) \leqslant c_2 w(Q).$$

证明 取 $E \subset Q$, 记 $1+\delta=q$, 则

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q \chi_E(x) w(x) dx \leqslant \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{|E|}{|Q|} \right)^{\frac{1}{q'}}$$

$$\leqslant c \frac{w(Q)}{|Q|} \left(\frac{|E|}{|Q|} \right)^{\frac{1}{q'}},$$

因此

$$\frac{w(E)}{w(Q)} \leqslant c \left(\frac{|E|}{|Q|} \right)^{\frac{1}{q'}}.$$

取 F 为与Q 同心的子方体, $E=Q \setminus F$, 且满足 $c \left(\frac{|E|}{|Q|} \right)^{\frac{1}{q'}} = \frac{1}{2}$,

并记 $Q=\lambda F, \lambda>1$，则 λ 仅依赖于 c 与 q 而与 Q 无关，且

$$1-\frac{w(F)}{w(\lambda F)}=\frac{w(E)}{w(Q)}\leqslant\frac{1}{2},$$

从而得到 $w(\lambda F)\leqslant 2w(F)$. 这完成了引理的证明.

引理(2.6) 如果 w 满足(f)，$1+\delta=q$，则 $w_1=w^{-1}\in A_{q'}(w(x)dx)$，其中 $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$，$A_{q'}(w(x)dx)$表示在 $A_{q'}$ 条件中 dx 用测度 $w(x)dx$ 代替.

证明 因为 $\frac{1}{q'-1}+1=q$，所以

$$\left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q w^{-1}wdx\right)\left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q (w^{-1})^{-\frac{1}{q'-1}}wdx\right)^{q'-1}$$

$$=\frac{|Q|}{w(Q)}\left(\frac{|Q|}{w(Q)}\right)^{q'-1}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^q dx\right)^{q'-1}$$

$$\leqslant c\left(\frac{|Q|}{w(Q)}\right)^{q'}\left(\frac{w(Q)}{|Q|}\right)^{(q'-1)q}=c\quad.$$

引理证毕.

现在证明(f)$\Longrightarrow$(a). 由引理(2.6)知 $w^{-1}\in A_{q'}(wdx)$，由于 wdx 满足双倍条件，于是 w^{-1} 满足反向 Hölder 不等式(对于测度 wdx 而言，其证明完全与定理(2.1)的证明平行)，即

$$\frac{1}{w(Q)}\int_Q w^{-p}wdx\leqslant c\left(\frac{|Q|}{w(Q)}\right)^p$$

对某个 $p>1$ 成立，故

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1-p}dx\leqslant c\left(\frac{|Q|}{w(Q)}\right)^{p-1},$$

这等价于 $w\in A_{p'}$，因为 $1-p=-\frac{1}{p'-1}$. 从而 $w\in A_\infty$. 这完成了(f)$\Longrightarrow$(a)的证明 .

5 定理(2.1)蕴含$(d)\Rightarrow(f)$. 现在证明$(f)\Rightarrow(d)$. 在引理(2.5)的证明过程中，已得到

$$\frac{w(E)}{w(Q)}\leqslant c\left(\frac{|E|}{|Q|}\right)^{\frac{1}{q'}}.$$

取 α 充分小，$0<\alpha<1$，使得 $c\alpha^{\frac{1}{q'}}=\beta<1$，则对$E\subset Q$,只要$\frac{|E|}{|Q|}<\alpha$,就有$\frac{w(E)}{w(Q)}<\beta$.这证明了$(f)\Rightarrow(d)$.

现在证$(d)\Rightarrow(e)$，设(d)成立，令$\alpha_0=1-\beta,\beta_0=(1-\alpha)$，则$\alpha_0$, $\beta_0\in(0,1)$. 若$\frac{w(E)}{w(Q)}<\alpha_0$,则

$$\frac{w(Q)-w(Q\setminus E)}{w(Q)}<1-\beta,$$

即

$$\frac{w(Q\setminus E)}{w(Q)}>\beta.$$

由(d)知$\frac{|Q\setminus E|}{|Q|}\geqslant\alpha$,即$\frac{|Q|-|E|}{|Q|}\geqslant\alpha$.因此

$$\frac{|E|}{|Q|}\leqslant 1-\alpha=\beta_0.$$

用类似的方法可以证明$(e)\Rightarrow(d)$.

至此我们完成了$(d)\Leftrightarrow(e)\Leftrightarrow(f)\Leftrightarrow(a)$的证明. 还剩下$(b)\Leftrightarrow(a)$与$(f)\Leftrightarrow(c)$的证明. $(b)\Rightarrow(d)$与$(c)\Rightarrow(f)$的证明是一样的. 并且是简单的.例如看$(b)\Rightarrow(d)$.令$\alpha=\frac{1}{2}\min(1,c^{-\frac{1}{\delta}})$,则只要$E\subset Q$. $\frac{|E|}{|Q|}<\alpha$,就有$c\left(\frac{|E|}{|Q|}\right)^{\delta}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\delta}$.取$\beta=\left(\frac{1}{2}\right)^{\delta}$.便得到

$$\frac{w(E)}{w(Q)} \leqslant c\left(\frac{|E|}{|Q|}\right)^{\delta}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\delta}=\beta.$$

现在证$(f) \Longrightarrow (c)$. 由(f)知 $w^{-1}\in A_q(wdx)$, 其中 $q=1+\delta$. 故 w^{-1}满足反向 Hölder 不等式

$$\frac{1}{w(Q)}\int_Q (w^{-1})^{1+\delta'} wdx \leqslant c\left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q w^{-1}wdx\right)^{1+\delta'}$$

$$=c\left(\frac{|Q|}{w(Q)}\right)^{1+\delta'}.$$

于是

$$\begin{aligned}|E| &= \int_Q \chi_E dx = \int_Q \chi_E w^{-1} wdx\\ &\leqslant \left(\int_Q (w^{-1})^{1+\delta'} wdx\right)^{\frac{1}{1+\delta'}} \left(\int_Q \chi_E wdx\right)^{\frac{\delta'}{1+\delta'}}\\ &\leqslant c\,(w(Q))^{\frac{1}{1+\delta'}} w(Q)^{-1}|Q|(w(E))^{\frac{\delta'}{1+\delta'}}\\ &= c\,|Q|\left(\frac{w(E)}{w(Q)}\right)^{\frac{\delta'}{1+\delta'}}.\end{aligned}$$

剩下来证明$(d) \Longrightarrow (b)$, 为此需要下面的引理.

引理(2.7) 若$0<\alpha<1$, $E_0\subset Q$, $|E_0|\leqslant \frac{\alpha}{2^n}|Q|$, 则存在互不重叠的方体$\{Q_j\}$, 使得 $E_0\subset E_1=\bigcup_j Q_j$, 并且对每个$j$,

$$\frac{\alpha}{2^n} < \frac{|E_0 \cap Q_j|}{|Q_j|} \leqslant \alpha. \tag{2}$$

证明 只需对函数 χ_{E_0} 以及 $\frac{\alpha}{2^n}$ 在 Q 作 Calderón－Zygmund 分解，便得到 $\{Q_j\}$，满足

(i) $\frac{\alpha}{2^n} < \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}\chi_{E_0}dx \leqslant \alpha$,

(ii) $\chi_{E_0}(x) \leqslant \frac{\alpha}{2^n}$，a. e. $x \in Q \setminus \bigcup_j Q_j$.

这便证明了引理.

由引理可得(在(2)中对 j 求和)

$$\frac{\alpha}{2^n}|E_1| < |E_0| \leqslant \alpha |E_1| .$$

回到 $(d) \Rightarrow (b)$ 的证明. 设 $E_0 \subset Q$. 如果 $\frac{|E_0|}{|Q|} > \frac{\alpha}{2^n}$，则

$$\frac{w(E_0)}{w(Q)} \leqslant 1 = \frac{\alpha}{2^n} \cdot \frac{2^n}{\alpha} \leqslant \frac{2^n}{\alpha}\left(\frac{|E_0|}{|Q|}\right)^{\delta}$$

对 $0 < \delta < 1$ 成立. 设 $\frac{|E_0|}{|Q|} \leqslant \frac{\alpha}{2^n}$，令 $k \geqslant 1$ 为正整数，使得

$$\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)^{k+1} < \frac{|E_0|}{|Q|} \leqslant \left(\frac{\alpha}{2^n}\right)^{k}.$$

由引理(2.7)知存在 $\{Q_j\}$，使得 $E_0 \subset E_1 = \bigcup_j Q_j$，且

$$\frac{\alpha}{2^n} < \frac{|E_0 \cap Q_j|}{|Q_j|} \leqslant \alpha.$$

由此我们可以得到

$$w(E_0 \cap Q_j) \leqslant \beta w(Q_j),\quad w(E_0) \leqslant \beta w(E_1), \tag{3}$$

以及

$$\frac{|E_1|}{|Q|} \leqslant \frac{2^n}{\alpha} \frac{|E_0|}{|Q|} \leqslant \left(\frac{\alpha}{2^n}\right)^{k-1}; \tag{4}$$

用 $E_1 \subset Q$ 代替 E_0 再用一次引理 2.7 得到 $E_2 = \bigcup_j Q_j$ 满足(2),(3),(4)的类似. 即

$$\frac{\alpha}{2^n} < \frac{|E_1 \cap Q_j|}{|Q_j|} \leqslant \alpha, \tag{5}$$

$$w(E_1) \leqslant \beta w(E_2), \tag{6}$$

$$\frac{|E_2|}{|Q|} \leqslant \left(\frac{\alpha}{2^n}\right)^{k-2}. \tag{7}$$

重复上面的推理, 便得到 $E_0, E_1, \cdots E_k$, 满足

$$w(E_{j-1}) \leqslant \beta w(E_j),\quad j = 1, \cdots, k,$$

$$\frac{|E_j|}{|Q|} \leqslant \left(\frac{\alpha}{2^n}\right)^{k-j}, j = 1, \cdots, k,$$

注意$k+1 > \dfrac{|\log(|E_0|/|Q|)|}{|\log \alpha/2^n|}$, 并令$\delta = \dfrac{|\log\beta|}{\left|\log \dfrac{\alpha}{2^n}\right|}$, 最后得

$$\frac{w(E_0)}{w(Q)} \leqslant \frac{w(E_0)}{w(E_1)}\ \frac{w(E_1)}{w(E_2)} \cdots \frac{w(E_k)}{w(Q)} \leqslant \beta^k = \frac{1}{\beta} \cdot \beta^{k+1}$$

$$\leqslant \frac{1}{\beta}\left(\frac{|E_0|}{|Q|}\right)^{\delta}.$$

至此，定理(2.4)全部证完.

§6.3 Hardy－Littlewood 极大函数的加权模不等式

现在我们可以证明 Hardy－Littlewood 极大函数的加权模不等式(1.1)了.

定理(3.1) 若 $w \in A_p$，$1<p<\infty$，则 $f \to M(f)$ 是 $L^p(wdx)$ 上的有界算子.

为证明此定理，需要反向 Hölder 不等式的一个推论，我们把它写成一个引理.

引理(3.2) 若 $w \in A_p$，$p>1$，则存在 $\varepsilon>0$，使得 $w \in A_{p-\varepsilon}$，$p-\varepsilon>1$.

证明 对 $w^{-\frac{1}{p-1}} \in A_p$ 应用反向 Hölder 不等式，有

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-\frac{1+\delta}{p-1}}dx\right)^{\frac{p-1}{1+\delta}} \leqslant c^{p-1}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1}.$$

两边乘以 $\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q wdx\right)$，得

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q wdx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-\frac{1+\delta}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{1+\delta}} \leqslant c^{p-1}.$$

注意 $\dfrac{1+\delta}{p-1} = \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{p-1}{1+\delta}\right)-1}$，则上式表明 $w \in A_{1+\frac{p-1}{1+\delta}}$.

由于$\delta>0$，有$1+\dfrac{p-1}{1+\delta}<p$，引理(3.2)得证.

定理(3.1)的证明 记

$$M_w(f)(x)=\sup_{x\in Q}\frac{1}{w(Q)}\int_Q|f(y)|w(y)dy.$$

在§6.1的(4)中，我们证明了

$$M(f)\leqslant c^{\frac{1}{p}}[M_w(|f|^p)(x)]^{\frac{1}{p}}.$$

如果$f\in L^{p_1}(wdx)$，$p_1>p$，则$f\in L^p_{loc}(wdx)$，且$|f|^p\in L^{p_1/p}(wdx)$.

利用$f\to M_w(f)$在$L^{p_1/p}(wdx)$的有界性，$\dfrac{p_1}{p}>1$，(便得)

$$\int_{\mathbb{R}^n}[M_w(|f|^p)]^{\frac{p_1}{p}}wdx\leqslant c\||f|^p\|_{L^{p_1/p}(wdx)}$$

$$=c\int_{\mathbb{R}^n}|f|^{p_1}wdx.$$

从而

$$\int_{\mathbb{R}^n}M(f)^{p_1}wdx\leqslant c\int_{\mathbb{R}^n}|f|^{p_1}wdx.$$

这样，我们已经证明了，当$w\in A_p$时，$f\to M(f)$是在$L^{p_1}(wdx)$有界的，只要$p_1>p$. 应用引理(3.2)，$w\in A_p$蕴含了$w\in A_{p-\varepsilon}$，$p-\varepsilon<p$，便得到$f\to M(f)$是$L^p(wdx)$上的有界算子.

注 鉴于本定理的重要性，我们给出A_p条件充分性的另外一个更初等的证明，它无需绕道反向Hölder不等式，因而适用的范围更宽. 此外，这个新证明有方法上的独立意义，稍嫌不足的是，这个证明的思想没有原来的那么清楚.

设$w\in A_p$，则如我们已指出的，(应用Hölder不等式与A_p条

件)有

$$\frac{|I|_w}{|E|_w} \leqslant c\left(\frac{|I|}{|w|}\right)^p, \quad \forall I,\ \forall \text{可测集 } E \subset I. \tag{1}$$

这里 $|I|_w$ 表示 I 的 w 测度，它特别推出了 w 的双倍条件. 现记 $\sigma = w^{-\frac{1}{p-1}}$，则

$$w \in A_p \iff \sigma \in A_{p'},\ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 .$$

既然对任意满足双倍条件的测度 μ 定义的极大算子 M_μ 总是 $L^r(\mu)$ 有界的，$1 < r \leqslant \infty$. 故由 $w \in A_p$ 知

$$M_w \text{ 是 } L^{p'}(w) \text{ 有界的}, \quad M_\sigma \text{ 是 } L^p(\sigma) \text{ 有界的}. \tag{2}$$

现任给 $f \in L^p(w)$，$\forall k \in \mathbb{Z}$，取包含在 $\{2^k < Mf \leqslant 2^{k+1}\}$ 中的任意紧集 K_k，对每个 $x \in K_k$，$\exists Q_x \ni x$ 使

$$\frac{1}{|Q_x|}\int_{Q_x} |f|dy > 2^k.$$

从覆盖 K_k 的族 $\{Q_x\}_{x\in K_k}$ 中挑出有限覆盖 $\{Q_j^{(k)}\}$. 令

$$E_1^{(k)} = Q_1^{(k)} \cap K_k,\ E_j^{(k)} = (Q_j^{(k)} - \bigcup_{i<j} Q_i^{(k)}) \cap K_k,\ j > 1, \tag{3}$$

则 $\{E_j^{(k)}\}$ 对 k 固定是关于 j 不交的族，且 $K_k = \bigcup_j E_j^{(k)}$，这样，得

$$\begin{aligned}\int_{\bigcup_k K_k} |Mf|^p\, w dx &\leqslant c\sum_{k,j} 2^{kp}|E_j^{(k)}|_w \\ &\leqslant c\sum_{k,j} |E_j^{(k)}|_w\left(\frac{1}{|Q_j^{(k)}|}\int_{Q_j^{(k)}} |f|dx\right)^p \\ &= c\sum_{k,j}|E_j^{(k)}|_w\left(\frac{|Q_j^{(k)}|_\sigma}{|Q_j^{(k)}|}\right)^p\left(\frac{1}{|Q_j^{(k)}|_\sigma}\int_{Q_j^{(k)}} |f|\sigma^{-1}\sigma dx\right)^p. \end{aligned} \tag{4}$$

现在 $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_+$ 上定义测度 μ，

$$\mu:(k,j)\to\mu_{k,j}=|E_j^{(k)}|_w\left(\frac{|Q_j^{(k)}|_\sigma}{|Q_j^{(k)}|}\right)^p. \tag{5}$$

记

$$\Gamma(\lambda)=\left\{(k,j):\left(\frac{1}{|Q_j^{(k)}|_\sigma}\int_{Q_j^{(k)}}|f|\sigma^{-1}\sigma dx\right)^p>\lambda\right\},\ \forall\lambda>0, \tag{6}$$

$$G(\lambda)=\bigcup\{Q_j^{(k)}:(k,j)\in\Gamma(\lambda)\}. \tag{7}$$

注意 $w\in A_p$（或 $\sigma\in A_{p'}$）等价于

$$\sup_Q\left(\frac{|Q|_\sigma}{|Q|}\right)^p\left(\frac{|Q|_w}{|Q|}\right)^{p'}\approx c. \tag{8}$$

这样我们得到

$$\begin{aligned}\mu_{k,j}&=|E_j^{(k)}|_w\left(\frac{|Q_j^{(k)}|_\sigma}{|Q_j^{(k)}|}\right)^p\leqslant c\,|E_j^{(k)}|_w\left(\frac{|Q_j^{(k)}|}{|Q_j^{(k)}|_w}\right)^{p'}\\&\leqslant c\,|E_j^{(k)}|_w\left(\frac{1}{|Q_j^{(k)}|_w}\int_{Q_j^{(k)}}w^{-1}wdx\right)^{p'}\\&\leqslant c\,|E_j^{(k)}|_w\inf_{x\in Q_j^{(k)}}M_w(w^{-1}\chi_{Q_j^{(k)}})^{p'}(x)\\&\leqslant c\int_{E_j^{(k)}}M_w(w^{-1}\chi_{Q_j^{(k)}})^{p'}(x)w(x)dx.\end{aligned}$$

应用 M_w 是 $L^{p'}(w)$ 有界的这一事实，我们得

$$\mu(\Gamma(\lambda))=\sum_{(k,j)\in\Gamma(\lambda)}\mu_{k,j}\leqslant c\sum_{(k,j)\in\Gamma(\lambda)}\int_{E_j^{(k)}}M_w(w^{-1}\chi_{G(\lambda)})^{p'}wdx$$

$$\leqslant c\int_{G(\lambda)}M_{\sigma}(w^{-1}\chi_{G(\lambda)})^{p'}wdx$$

$$\leqslant c\int_{G(\lambda)}w^{1-p'}dx=|G(\lambda)|_{\sigma}. \tag{9}$$

再注意

$$\left(\frac{1}{|Q|_{\sigma}}\int_{Q}|f|\sigma^{-1}\sigma dx\right)^{p}>\lambda$$

$$\Rightarrow\ (M_{\sigma}(f\sigma^{-1}))^{p}>\lambda,\text{a. e. 于 }Q. \tag{10}$$

则得

$$G(\lambda)\subset\{(M_{\sigma}(f\sigma^{-1}))^{p}>\lambda\},$$

$$|G(\lambda)|_{\sigma}\leqslant|\{(M_{\sigma}(f\sigma^{-1}))^{p}>\lambda\}|_{\sigma}.$$

既然式(4)最右边离散和可以解释为 $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_{+}$ 上关于测度 μ 的一个积分，用分布函数来表示，它应是

$$\int_{0}^{\infty}\mu(\Gamma(\lambda))d\lambda\leqslant c\int_{0}^{\infty}|G(\lambda)|_{\sigma}d\lambda\leqslant c\int_{0}^{\infty}|\{(M_{\sigma}(f\sigma^{-1}))^{p}>\lambda\}|_{\sigma}d\lambda$$

$$=c\int_{\mathbb{R}^{n}}(M_{\sigma}(f\sigma^{-1}))^{p}\sigma dx\leqslant c\int_{\mathbb{R}^{n}}|f|^{p}\sigma^{1-p}dx$$

$$=c\int_{\mathbb{R}^{n}}|f|^{p}wdx.$$

这便完成了 $\int_{\mathbb{R}^{n}}(Mf)^{p}wdx\leqslant c\int_{\mathbb{R}^{n}}|f|^{p}wdx$ 的证明.

综合定理(3.1)与(定义 1.4)前面的讨论，我们实际上证明了

定理(3.3) 设 $1<p<\infty$，则以下命题是等价的

(a) $w\in A_{p}$；

(b) $f\to M(f)$是强$(L^p(wdx),\ L^p(wdx))$型;

(c) $f\to M(f)$是强$(L^{p-\varepsilon}(wdx),\ L^{p-\varepsilon}(wdx))$型，对某个$\varepsilon>0$;

(d) $f\to M(f)$是弱$(L^p(wdx),\ L^p(wdx))$型.

我们在这里证明的 Hardy－Littlewood 极大函数的加权模不等式，即§6.1的(1)，不等式左右两边的权函数 w 是相同的. 一个自然的问题是，如果不等式两边的权函数不同，是否有类似的结果. 也就是说，设$1\leqslant p<\infty$，对什么样的权函数对(u,v)，$f\to M(f)$是$L^p(\mathbb{R}^n,vdx)$到弱(或强)$L^p(\mathbb{R}^n,udx)$的有界算子? 先看弱型的情况. 问题化为，对什么样的权函数对(u,v)，存在常数$c>0$，对任意$\lambda>0$与$f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n,dx)\bigcap L^p(\mathbb{R}^n,vdx)$，有

$$\int_{\{x\in\mathbb{R}^n:\ M(f)(x)>\lambda\}}u(x)dx\leqslant\frac{c}{\lambda^p}\int_{\mathbb{R}^n}|f|^pvdx. \tag{11}$$

考虑$1<p<\infty$，并且 udx 满足双倍条件的情形. 此时有一个与单权完全类似的充分必要条件，这就是

$$\sup_Q\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q udx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q v^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{p-1}<\infty. \tag{12}$$

我们称这样的$(u,v)\in A_p$.

先从(11)推出(12). 设 Q 是任意方体，$\varepsilon>0$，在(11)中，取

$$f=(v+\varepsilon)^{-\frac{1}{p-1}}\chi_Q,\ \lambda=\frac{1}{|Q|}\int_Q(v+\varepsilon)^{-\frac{1}{p-1}}dx,$$

则 $Q\subseteq\{x\in\mathbb{R}^n:\ M(f)(x)>\lambda\}$. 因此

$$\begin{aligned}\int_Q udx&\leqslant c\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q(v+\varepsilon)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{-p}\int_Q(v+\varepsilon)^{1-\frac{p}{p-1}}dx\\&=c\,|Q|^p\left(\int_Q(v+\varepsilon)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{1-p}.\end{aligned}$$

由 ε 的任意性，知(u,v)满足(12).

反过来，设(12)成立. 令

$$M_{u,v}(f)(x)=\sup_{r>0}\frac{1}{u(Q(x,r))}\int_{Q(x,r)}|f|v\,dy,$$

其中 $Q(x,r)$ 表示以 x 为中心，r 为边长的方体. 用类似于证明 $M(f)$的弱(1,1)型的方法，可以证明 $M_{u,v}(f)$是 $L^1(v\,dx)$到弱 $L^1(u\,dx)$有界的. 因此(11)将由下面的不等式得到

$$M(f)(x)\leqslant c\,(M_{u,v}(|f|^p)(x))^{\frac{1}{p}}. \tag{13}$$

现在来证明(13). 记 Q 为任意方体，$f=(fv^{\frac{1}{p}})v^{-\frac{1}{p}}$，应用 Hölder 不等式，有

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q|f|dx\leqslant\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q|f|^pv\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q v^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

由(12)便知

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q|f|dx\leqslant c\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q u\,dx\right)^{-\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q|f|^pv\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

取sup 即得(13).

关于双权的强型结果，我们只叙述下面的定理. 由于其复杂性，我们省略了它的证明.

定理(3.4) 设 u,v 是 $\mathbb{R}^n$ 的两个权函数，$1<p<\infty$，则下面两个命题是等价的:

(a)存在常数 $c_p>0$ 使得

$$\int_{\mathbb{R}^n}M(f)^pu\,dx\leqslant c_p\int_{\mathbb{R}^n}|f|^pv\,dx\,;$$

(b)对任意方体 Q, 有

$$\int_Q |M(v^{-\frac{1}{p-1}}\chi_Q)|^p u dx \leqslant c\int_Q v^{-\frac{1}{p-1}} dx < \infty .$$

§6.4 Calderón－Zygmund 算子的加权模不等式

在上一章中，我们引入了 Calderón－Zygmund 算子，并且证明了，它永远是在 $L^p(\mathbb{R}^n, dx)$ 有界的，$1<p<\infty$. 在这一节中，我们将证明本章最重要的结果之一，这就是，当 $w\in A_p$ 时，Calderón－Zygmund 算子永远在 $L^p(wdx)$ 是有界的，其中 $1<p<\infty$，而且，在一定的意义下，这结果的逆也是正确的。这就完全回答了本章序言中所提出的问题.

定理(4.1) 设 $1<p<\infty$，$w\in A_p$. 若 $T\in CZO$，则 T 在 $L^p(wdx)$ 是有界的.

为证明此定理，我们需要一些引理.

引理(4.2) (Fefferman－Stein 不等式) 若 T 是 CZO，$1<p<\infty$，则对于 $f\in L^\infty_{00}(\mathbb{R}^n)$ (紧支集有界函数的空间)，有

$$(Tf)^{\#}(x)\leqslant c\,[M(|f|^p)(x)]^{\frac{1}{p}},$$

其中 c 仅依赖于 p 与 T，而与 f 无关.

证明 设 $f\in L^\infty_{00}(\mathbb{R}^n)$，$Q$ 是以 x_0 为中心的方体. 记 $f_1=f\chi_{\widetilde{Q}}$，$f_2=f-f_1$，其中 $\widetilde{Q}$ 表示与 Q 同心边长为 Q 的 2 倍的方体，这时

$$\begin{aligned}&\frac{1}{|Q|}\int_Q |Tf(x)-T(f_2)(x_0)|dx\\ \leqslant\ &\frac{1}{|Q|}\int_Q |T(f_1)(x)|\,dx+\frac{1}{|Q|}\int_Q |T(f_2)(x)-T(f_2)(x_0)|dx\\ =\ &\mathrm{I}+\mathrm{II}.\end{aligned}$$

应用 Hölder 不等式，并注意 T 是 $L^p(\mathbb{R}^n, dx)$ 有界的，则

$$
1 \leqslant \left[\frac{1}{|Q|} \int_Q |T(f_1)(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}
$$

$$
\leqslant c \left(\frac{1}{|Q|} \int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}
$$

$$
= c \left(\frac{1}{|Q|} \int_{\tilde{Q}} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.
$$

$$
\leqslant c \left[M(|f|^p)(x_0) \right]^{\frac{1}{p}}.
$$

注意，当 $x, x_0 \in Q$ 时，

$$
|T(f_2)(x) - T(f_2)(x_0)| = \left| \int_{\tilde{Q}} c[K(x,y) - K(x_0,y)] f(y) dy \right|
$$

$$
\leqslant c \int_{\tilde{Q}^c} \frac{|x - x_0|^r}{|y - x_0|^{n+r}} |f(y)| dy
$$

$$
= c \sum_{k=1}^{\infty} \int_{2^k |x - x_0| \leqslant |y - x_0| \leqslant 2^{k+1} |x - x_0|} \frac{|x - x_0|^r}{|y - x_0|^{n+r}} |f(y)| dy
$$

$$
\leqslant c \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x - x_0|^r}{(2^k |x - x_0|)^{n+r}} \int_{|y - x_0| \leqslant 2^{k+1} |x - x_0|} |f(y)| dy.
$$

$$
\leqslant c \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-kr} M(f)(x_0)
$$

$$
\leqslant c\, M(f)(x_0) \leqslant c[M(|f|^p)(x_0)]^{\frac{1}{p}}.
$$

再对不等式左边取 sup，便证明了引理(4.2)。

引理(4.3) 设 $w \in A_\infty$，$1 < p < \infty$，$f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. 如果 $\forall N > 0$，

$\inf(N, M(f)(x)) \in L^p(wdx)$，则

$$\int_{\mathbb{R}^n} M_d(f)^p w dx \leqslant c \int_{\mathbb{R}^n} f_d^{\#p} w dx \quad , \tag{1}$$

其中 $M_d(f)$, $f_d^{\#}$ 分别表示f的二进Hardy－Littlewood 极大函数与二进 Sharp 函数.

这引理在 Lebesgue 测度的情形($w\equiv 1$)，我们曾经在第三章中证明过. 这里的证明，本质上与那里的证明是一样的，为了完整起见，我们在这里也写出来.

需要加以说明的是，引理(4.3)对非二进极大函数与 Sharp 函数来说也是正确的. 我们在这里将用二进情形，只是为了证明简单，且对我们的目的已经够用了. 实际上，我们需要的是下面的引理.

引理(4.4) 设 $w\in A_p$, $1<p<\infty$, $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$，使得 $\forall N>0$, $\inf(N, Mf(x))\in L^p(wdx)$，则

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p w dx \leqslant c \int_{\mathbb{R}^n} f^{\#p} w dx \ .$$

用引理(4.3)推出引理(4.4)是显然的，因为 $f_d^{\#}(x)\leqslant f^{\#}(x)$，而由 lebesgue 的积分可微分定理，也显然有 $|f(x)|\leqslant M_d(f)(x)$, a. e.

引理(4.3)的证明 我们用好λ不等式的方法证明. 根据好λ不等式的原理，为证引理 4.3 的结论，只需证明

$$w(\{M_d(f)>2\lambda, f_d^{\#}<r\lambda\})\leqslant \gamma_p w(\{M_d(f)>\lambda\}), \tag{2}$$

其中 $2^p\gamma_p<1$. 先假设 $f\in L^p(wdx)$, $\lambda>0$给定. 对 f 与 λ 作 Calderón－Zygmund 分解，可以将开集$\Omega_\lambda=\{M_d(f)>\lambda\}$表示为极大二进方体的不交并 $\bigcup\limits_j Q_j$. 极大的意思是说对任意包含 $Q=Q_j$ 的二进方体 $\widetilde{Q}$ 都有$m_{\widetilde{Q}}(|f|)\leqslant\lambda$.

现在只需对每一个这样的极大二进方体 Q 与 $r>0$, 证明

$$|\{x\in Q: M_d(f)(x)>2\lambda, f_d^{\#}(x)<r\lambda\}|\leqslant 2^n r|Q|. \qquad (3)$$

一旦得证, 则由条件 $w\in A_\infty$ 便可由(3)得到(2). 现证(3). 由 Q 的极大性, 对 $x\in Q$, 性质 $M_d(f)(x)>2\lambda$ 蕴含了 $M_d(f\chi_{\tilde{Q}})(x)>2\lambda$, 进而蕴含了

$$M_d((f-m_{\tilde{Q}}f)\chi_Q)(x)>\lambda .$$

根据 M_d 的弱(1,1)型, 有

$$\begin{aligned}
&|\{M_d((f-m_{\tilde{Q}}f)\chi_Q)(x)>\lambda\}| \\
\leqslant\ & \frac{1}{\lambda}\int_Q|f-m_{\tilde{Q}}f|\,dx \\
\leqslant\ & \frac{2^n|Q|}{\lambda}\ \frac{1}{|\tilde{Q}|}\int_{\tilde{Q}}|f-m_{\tilde{Q}}f|\,dx \\
\leqslant\ & \frac{2^n|Q|}{\lambda}\ \inf_{x\in Q}\ f_d^{\#}(x).
\end{aligned}$$

如果 $\inf\limits_{x\in Q} f_d^{\#}(x)<r\lambda$, 则(3)显然成立; 否则由 $\inf\limits_{x\in Q} f_d^{\#}(x)>r\lambda$, 不等式(3)左边为0, (3)当然成立. 这就证明了(3). 由(2)在条件 $f\in L^p(wdx)$(从而 $Mf\in L^p(wdx)$)下推出引理4.3是显然的.

下面去掉 $f\in L^p(wdx)$ 的假定. 考虑

$$f_N=\begin{cases} f, & \text{当 } |f|\leqslant N, \\ N\operatorname{sgn} f, & \text{当 } |f|>N, \end{cases}$$

由条件 $\inf(N, M(f))\in L^p(w)$ 知, f_N 属于 $L^p(wdx)$. 这时, 根据已经证明的, 对 f_N, 引理(4.3)的结果成立. 令 $N\to\infty$ 取极限,

便证得引理(4.3)的结果.

引理(4.5) 设 $w\in A_p$, $1<p<\infty$, $f\in L_{00}^{\infty}$(具有紧支集的 L^{∞} 函数的空间)，则 $M(Tf)\in L^p(wdx)$.

这引理是为了我们能使用引理(4.4)而设的.我们先承认它来证明定理(4.1). 后面再给出引理(4.5)本身的证明.

定理(4.1)的证明 设 $f\in L_{00}^{\infty}$. 而 $w\in A_p$. 这时存在 $r>1$, 使 $w\in A_{\frac{p}{r}}$. 应用引理(4.4)与引理(4.2)，以及 M 在 $L^{\frac{p}{r}}(wdx)$的有界性，有

$$\|Tf\|_{L^p(wdx)}\leqslant c\,\|(Tf)^{\#}\|_{L^p(wdx)}$$

$$\leqslant c\,\|[M(|f|^r)(x)]^{\frac{1}{r}}\|_{L^p(wdx)}$$

$$\leqslant c\,\|M(|f|^r)\|^{\frac{1}{r}}_{L^{\frac{p}{r}}(wdx)}$$

$$\leqslant c\,\|\,|f|^r\|^{\frac{1}{r}}_{L^{\frac{p}{r}}(wdx)}\leqslant c\,\|f\|_{L^p(wdx)}.$$

定理(4.1)证完.

引理(4.5)的证明 设 $f\in L_{00}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. 显然 $Tf\in L^q(\mathbb{R}^n)$, $\forall q>1$, 并且当 $|x|$ 充分大时 $|Tf(x)|\leqslant c|x|^{-n}$. 这样 $M(Tf)\in L^q(\mathbb{R}^n)$, $\forall q>1$. 我们还要估计$M(Tf)$当 $|x|$ 充分大时的阶. 设$R>1$使得$|Tf(x)|\leqslant c|x|^{-n}$成立，并且使 $r>R$ 上的函数 $r^{-n}\log r$ 是 r 的降函数. 设$|x|>2R$, $B(x,r)$是以 x 为心、r 为半径的球，则当 $r<\dfrac{|x|}{2}$ 时，

$$\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|Tf(y)|dy\leqslant c\,|x|^{-n};\tag{4}$$

而当 $r\geqslant\dfrac{|x|}{2}$ 时，

$$\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|Tf(y)|dy\leqslant\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(0,4r)}|Tf(y)|dy$$

$$\leqslant \frac{c}{r^n}\int_{B(0,R)}|Tf(y)|dy+\frac{c}{r^n}\int_{R<|y|\leqslant 4r}\frac{1}{|y|^n}dy$$

$$\leqslant \frac{c}{r^n}+\frac{c\log r}{r^n}\leqslant \frac{c\log|x|}{|x|^n}, \tag{5}$$

其中常数 c 虽然可以依赖于 f,但无关大局. 对 r 在上式中取上确界, 便得到

$$M(Tf)(x)\leqslant \frac{c\log|x|}{|x|^n}, |x|>2R(\text{无妨仍记为 }|x|>R). \tag{6}$$

现设 $w\in A_p$, $1<p<\infty$. 设 $\varepsilon>0$ 使得 $w^{1+\varepsilon}\in A_p$ 以及 $w\in A_{p-\varepsilon}$,这由引理 5.9 以及引理 3.2 知是可能的. 则对 $f\in L_{00}^{\infty}$ 有

$$\int_{\mathbb{R}^n}M(Tf)^p(x)w(x)dx\leqslant\left(\int_{|x|\leqslant R}(M(Tf)(x))^{\frac{(1+\varepsilon)p}{\varepsilon}}dx\right)^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}$$

$$\cdot\left(\int_{|x|\leqslant R}w^{1+\varepsilon}(x)dx\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}+c\int_{|x|\geqslant R}\left(\frac{\log|x|}{|x|^n}\right)^p w(x)dx<\infty, \tag{7}$$

这里第二项之所以有限用到了如下事实(见 §6.6 习题 3): 设 $1<p<\infty$, $w\in A_p$, 则

$$\int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|)^{-np}w(x)dx<\infty. \tag{8}$$

引理(4.5)获证.

利用 Cotlar 不等式(见 §5.2 定理 2.1), 还可以把定理(4.1)推广到奇异积分的极大算子情形.

定理(4.6) 设 $w\in A_p$, $1<p<\infty$, $T\in CZO$. 则

$$f\to T^*(f)(x)=\sup_{\varepsilon>0}\left|\int_{|x-y|>\varepsilon}K(x,y)f(y)dy\right|$$

是 $L^p(wdx)$ 的有界算子.

证明 根据 Cotlar 不等式，当 $q>1$ 时，有

$$T^*(f)\leqslant cM(Tf)(x)+c_q(M(|f|^q)(x))^{\frac{1}{q}}.$$

取 q 满足 $1<q<p$ 使得 $w\in A_{\frac{p}{q}}$. 这样，当 $f\in L^p(wdx)$时，有 $f\in L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$，从而

$$\begin{aligned}\|T^*f\|_{L^p(wdx)}&\leqslant c\|M(Tf)\|_{L^p(wdx)}+c_q\|M(|f|^q)^{\frac{1}{q}}\|_{L^p(wdx)}\\&\leqslant c\|f\|_{L^p(wdx)}.\end{aligned}$$

这里用到了算子 M是$L^{\frac{p}{q}}(wdx)$有界的，T是 $L^p(wdx)$有界的这两个事实. 定理证毕.

把定理(4.1)应用到上一章我们已知的 Calderón－Zygmund 算子的例子上，我们便知所有那些算子都是 $L^p(wdx)$有界的，只要 $w\in A_p$，$1<p<\infty$. 特别地 Hilbert 变换 H(在一维的情形)与 Riesz 变换 R_j ($j=1,2\cdots n$, 在 n 维的情形，$n>1$)都是 $L^p(wdx)$有界的，只要 $w\in A_p$, $1<p<\infty$.

我们现在来考察定理(4.1)的逆. 如果把问题提成，设 $1<p<\infty$，若权函数 w 使得一切 CZO 都是 $L^p(wdx)$有界的，则 $w\in A_p$. 我们将看到，这结果是正确的. 但它的意义不大，因为前提要求太多了. 我们希望得到的是，权函数 w 对什么样 的奇异积分算子T，使得T 的 $L^p(wdx)$有界性蕴含了 $w\in A_p$. 这问题十分复杂，我们只有部分的结果，下面叙述的是一个比较一般的结果.

定理(4.7) 设 w 是$\mathbb{R}^n$ 上的权函数，$1<p<\infty$，如果某个 Riesz 变换 R_j ($1\leqslant j\leqslant n$)在 $L^p(\mathbb{R}^n, w(x)dx)$ 弱有界，则 $w\in A_p$.

证明 设 Q 是$\mathbb{R}^n$ 的方体，Q'是 Q 沿 x_j 轴平移使其心相距两倍于边长的方体，则对任意$x\in Q'$，$y\in Q$，x_j-y_j 不变号，且 $|x_j-y_j|\approx|x-y|$. 这样，$\forall f\in L^1(Q)$，$\operatorname{supp}f\subset Q$, $f\geqslant 0$, 当 $x\in Q'$，有

$$|R_jf(x)|=c\int_Q\frac{|x_j-y_j|}{|x-y|^{n+1}}f(y)dy$$

$$\geqslant c \int_Q \frac{f(y)}{|x-y|^n} \, dy \geqslant c\, m_Q(f), \tag{9}$$

其中 $c>0$. 由弱有界假设知

$$c^p \int_Q w(x)dx \cdot (m_Q(f))^p \leqslant w(\{|R_j f| > \lambda\})$$

$$\leqslant c \int_Q |f(x)|^p w(x)dx.$$

取 $f=\chi_Q$, 就得到 $w(Q')\leqslant cw(Q)$. 同理也有 $w(Q)\leqslant cw(Q')$. 因此

$$w(Q)(m_Q(f))^p \leqslant c\, w(Q')(m_Q(f))^p$$

$$\leqslant c \int_Q f(x)^p w(x)dx,$$

即

$$m_Q(f) \leqslant c\left(\frac{1}{w(Q)} \int_Q f(x)^p w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

取 $f=w^{-\frac{1}{p-1}}\chi_Q$, 代入便得.

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}} dx\right)^{p-1} \leqslant c,$$

即 $w\in A_p$. 这完成了定理的证明.

类似这里的讨论, 在 $p=1$ 时, 可以得到 $w\in A_1$ 与 c C－Z算子从 $L^1(wdx)$ 到弱 $L^1(wdx)$ 的有界性之间的关系, 我们把这些讨论留给读者作为练习.

§6.5 A_p 权函数性质的进一步研究

A_p 权函数与本书前面研究过的Hardy－Littlewood 极大函数,

BMO 等都有密切的关系. 另外，A_p 与 A_1 之间也有着紧密的联系. 本节将进一步讨论 A_p 权函数这些方面的性质.

我们先从 A_1 权函数与H . L. 极大函数的关系入手.

定理(5.1) 设$f(x)\geqslant 0$, $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $0<\delta<1$, 则$(M(f))^\delta\in A_1$.

证明 记 $w(x)=M(f)^\delta(x)$. 我们来证明，存在常数 c 与f 无关，使得对任意方体Q, 有

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)dy\leqslant c\ \ \operatorname*{essinf}_{x\in Q}\ w(x).$$

事实上，由于 H. - L. 极大函数是弱(1,1)型的，我们可以对 δ 应用 Kolmogorov 不等式(它是 §7.2 定理 2.2 的特殊情形)，得到

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)dy=\frac{1}{|Q|}\int_Q M(f)^\delta dy\leqslant\frac{c_\delta}{|Q|}|Q|^{1-\delta}\|f\|_1^\delta$$

$$=c_\delta\left(\frac{1}{|Q|}\int_{\mathbb{R}^n}f(y)dy\right)^\delta.$$

如果能将上式右边积分中的 $\mathbb{R}^n$ 换成 Q, 便得到，当 $x\in Q$ 时，

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)dy\right)\leqslant c_\delta\ \ \inf_{x\in Q}\ \ M(f)^\delta(x)\leqslant c_\delta w(x).$$

但这并不是显然的，需要我们采取一些技巧. 一个自然的想法是把 f 分解为$f=f_1+f_2$, 其中 $f_1=\chi_{\widetilde{Q}}$,$\widetilde{Q}=3Q$. 对 f_1 我们上面的推理可以使用，需要解决的是如何处理 f_2 的那部分.

事实上，由 $M(f)(x)\leqslant M(f_1)(x)+M(f_2)(x)$, $0<\delta<1$, 知

$$M(f)^\delta(x)\leqslant M(f_1)^\delta(x)+M(f_2)^\delta(x).$$

由 Kolmogorov 不等式，当 $x\in Q$ 时，有

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q M(f_1)^\delta dx\leqslant c_\delta\left(\frac{1}{|Q|}\int_{\widetilde{Q}}|f_1(y)|dy\right)^\delta$$

$$\leqslant c_\delta\left(\frac{1}{|\widetilde{Q}|}\int_{\widetilde{Q}}|f(y)|\,dy\right)^\delta\leqslant c_\delta\inf_{x\in Q}M(f)^\delta(x).$$

对于f_2，我们来证明，存在c与f, Q无关，使得当x、$z\in Q$时，

$$M(f_2)(x)\leqslant cM(f_2)(z). \tag{1}$$

事实上，设Q'是包含x的任意方体，考虑

$$\frac{1}{|Q'|}\int_{Q'}|f_2(y)|dy.$$

只有当$Q'\cap(\widetilde{Q})^c\neq\emptyset$时它才不为0. 这说明$Q'$的边长比$Q$的边长的适当倍数大，故$z\in cQ'$. 因此

$$\frac{1}{|Q'|}\int_{Q'}|f_2(y)|dy\leqslant cM(f_2)(z).$$

对Q'取sup，这证明了(1). 由(1)知，只要$x\in Q$，有

$$M(f_2)^\delta(x)\leqslant c\inf_{z\in Q}M(f_2)^\delta(z)\leqslant c\inf_{z\in Q}M(f)^\delta(z).$$

从而

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q M(f_2)^\delta dx\leqslant c\inf_{z\in Q}M(f)^\delta(z).$$

结合f_1, f_2的讨论，便得

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q(M(f))^\delta dx\leqslant c\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q(M(f_1))^\delta+\frac{1}{|Q|}\int_Q(M(f_2))^\delta dx\right)$$

$$\leqslant c\inf_{x\in Q}M(f)^\delta(x).$$

定理(5.1)证完.

下面的定理在某种意义下可以作为定理(5.1)的逆.

定理(5.2) 设 $w \in A_1$，则存在非负且局部可积的函数 f 与常数 c，$\delta > 0$，使得

$$w(x) \leqslant M(f)^{\delta}(x) \leqslant cw(x).$$

证明 因为 $w \in A_1$，所以 $w \in A_p$，$1<p<\infty$. 从而 w 满足反向Hölder 不等式，即存在 $c_0>0$，$\delta_0>0$，使得对所有方体 Q，

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1+\delta_0}dx\right)^{\frac{1}{1+\delta_0}} \leqslant c_0\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q wdx\right).$$

取 Q_x 为包含x 的方体，则

$$\left(\frac{1}{|Q_x|}\int_{Q_x} w^{1+\delta_0}dy\right)^{\frac{1}{1+\delta_0}} \leqslant c_0\left(\frac{1}{|Q_x|}\int_{Q_x} wdy\right).$$

故

$$w(x) \leqslant [M(w^{1+\delta_0})(x)]^{\frac{1}{1+\delta_0}} \leqslant cM(w)(x) \leqslant cw(x).$$

取 $f = w^{1+\delta_0}$，$\delta = \dfrac{1}{1+\delta_0}$，即得定理所要求的结论. 定理证毕.

下面我们看 A_p 权函数与BMO 函数的关系.

定理(5.3) 若 $w \in A_p$，$1 \leqslant p \leqslant \infty$，则 $\varphi(x) = \log w(x) \in BMO$

证明 由于

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{p-1} \leqslant c,$$

记 $m_Q(\varphi) = \dfrac{1}{|Q|}\displaystyle\int_Q \varphi(x)dx$，则

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q e^{\varphi - m_Q(\varphi)}dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q e^{-\frac{\varphi - m_Q(\varphi)}{p-1}}dx\right)^{p-1} \leqslant c.$$

既然 e^u, e^{-u} 是凸函数，由 Jensen 不等式，上式左边每一个因子均不小于 1，于是每一个因子均不能大于 c，这样，

$$
\begin{cases}
\sup\limits_{Q} \dfrac{1}{|Q|}\displaystyle\int_Q e^{\varphi(x)-m_Q(\varphi)}dx<\infty\ ; \\[2ex]
\sup\limits_{Q} \dfrac{1}{|Q|}\displaystyle\int_Q e^{-\frac{\varphi(x)-m_Q(\varphi)}{p-1}}dx<\infty\ .
\end{cases}
$$

因此

$$
\sup_{Q} \frac{1}{|Q|}\int_Q|\varphi(x)-m_Q(\varphi)|dx<\infty,
$$

即 $\varphi\in BMO$. 定理证毕.

推论(5.4) 若 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$，$M(f)(x)\neq\infty$, a.e., 则 $\log M(f)(x)\in BMO$.

证明 用定理(5.1)，$M(f)^\delta\in A_1$，其中 $0<\delta<1$. 再用定理(5.3)，知 $\delta\log M(f)\in BMO$. 推论获证.

对于 $\varphi\in A_1$，我们有比定理(5.3)更精确的结果. 我们在 §4.9 题 39 中曾引入 BLO 的概念. 回忆一下，实值函数 $\varphi\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 称为属于 BLO，如果

$$
\sup_{Q}\ m_Q(\varphi)-\operatorname*{essinf}_{x\in Q}\ \varphi(x)<\infty, \tag{2}
$$

其中 $m_Q(\varphi)=\dfrac{1}{|Q|}\displaystyle\int_Q\varphi dx$, BLO 函数的意思是有界下振动函数 (Bounded Lower Oscillation).

显然，$BLO\subset BMO$. 事实上，注意

$$
\frac{1}{|Q|}\int_Q(m_Q(f)-f(x))dx=0,
$$

即得

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q|\varphi(x)-m_Q(\varphi)|dx=\frac{2}{|Q|}\int_Q(m_Q\varphi-\varphi(x))\chi_{\{m_Q(\varphi)\geqslant\varphi(x)\}}dx$$

$$\leqslant 2\,(m_Q(\varphi)-\operatorname*{essinf}_Q\varphi).$$

BLO 不是向量空间，它在负实数乘法下是不封闭的. 实际上有 $BLO\bigcap(-BLO)=L^\infty$. 这是因为，如果 φ 与 $-\varphi$ 同时属于 BLO,则

$$m_Q(\varphi)-\operatorname*{essinf}_Q\ \varphi\leqslant c\ ,$$

$$-m_Q(\varphi)+\operatorname*{esssup}_Q\ \varphi\leqslant c\ ,$$

从而得到

$$\operatorname*{esssup}_Q\ \varphi-\operatorname*{essinf}_Q\ \varphi\leqslant c\ ,$$

其中 c 与 Q 无关.

定理(5.5) 若 $w\in A_1$，则 $\varphi(x)=\log w(x)\in BLO$.

证明 由 A_1 定义，对任意 Q, 有

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q e^{\varphi(x)}dx\leqslant ce^{\varphi(x)},\text{a. e. } x\in Q\ ,$$

即

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q e^{\varphi(x)}dx\right)\operatorname*{esssup}_Q\ e^{-\varphi(x)}\leqslant c\ .$$

但 $\operatorname*{esssup}_Q\ e^{-\varphi(x)}=\exp(-\operatorname{essinf}\varphi(x))$，此外，用 Jensen 不等式得

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q e^{\varphi(x)}dx\geqslant e^{m_Q(\varphi)}.$$

因此

$$e^{m_Q(\varphi)-\underset{Q}{\operatorname{essinf}}\varphi(x)}\leqslant c,$$

从而

$$m_Q(\varphi)-\underset{Q}{\operatorname{essinf}}\ \varphi(x)\leqslant c.$$

这证明了定理.

下面的定理，可以看作上述定理(5.5)的逆.

定理(5.6) 若 $\varphi\in BLO$，则存在正数 ε，使得$e^{\varepsilon\varphi}\in A_1$.

证明 由 $\varphi\in BLO\subset BMO$，根据 John－Nirenberg 不等式(§4.2 定理 2.4)，有

$$c\geqslant\frac{1}{|Q|}\int_Q e^{\varepsilon|\varphi(x)-m_Q(\varphi)|}dx\geqslant\frac{1}{|Q|}\int_Q e^{\varepsilon(\varphi(x)-m_Q(\varphi))}dx,$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q|}\int_Q e^{\varepsilon\varphi(x)}dx&\leqslant c\,e^{\varepsilon m_Q(\varphi)}\\&\leqslant ce^{\varepsilon(c+\underset{Q}{\operatorname{essinf}}\varphi)}\\&\leqslant c\ \underset{Q}{\operatorname{essinf}}\,e^{\varepsilon\varphi}.\end{aligned}$$

即 $e^{\varepsilon\varphi}\in A_1$. 定理证毕.

综合定理(5.5)与定理(5.6)，我们得到

$$BLO=\{\alpha\log w:\alpha\geqslant0,\ w\in A_1\}.\tag{3}$$

定理(5.3)的逆，一般来说是不正确的，即由 $\varphi\in BMO$ 并不能保证 $e^{\varphi}\in A_p$. 但我们却有下面的结果.

定理(5.7) 设 $b\in BMO(\mathbb{R}^n)$，则存在 ε，使得$e^{\varepsilon b}\in A_2$.

证明 根据 John－Nirenberg 不等式，存在ε与c，使得

$$e^{-\varepsilon m_Q(b)}\frac{1}{|Q|}\int_Q e^{\varepsilon b}dx=\frac{1}{|Q|}\int_Q e^{\varepsilon(b-m_Q(b))}dx\leqslant c,$$

以及

$$e^{\varepsilon m_Q(b)}\frac{1}{|Q|}\int_Q e^{-\varepsilon b}dx=\frac{1}{|Q|}\int_Q e^{-\varepsilon(b-m_Q(b))}dx\leqslant c\ .$$

因此

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q e^{\varepsilon b}dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q e^{-\varepsilon b}dx\right)\leqslant c\ ,$$

即 $e^{\varepsilon b}\in A_2$.定理获证.

A_p 权函数对应于式(3)的结果是:

定理(5.8)　设 $1<p<\infty$，定义

$$\mathscr{U}_p=\{b\in BMO:\ e^b\in A_p\}$$

则 $\mathscr{U}_p$ 是 BMO 的一个开子集.

为证明定理，需要一个引理，它是反向 Hölder 不等式的一个简单推论.

引理(5.9)　若 $w\in A_p, p>1$，则存在$\alpha>1$，使得 $w^\alpha\in A_p$.

证明　由 $w\in A_p$ 与$w^{-\frac{1}{p-1}}\in A_{p'}$ 以及反向Hölder 不等式，知存在 $\delta'>0$，使得

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1+\delta'}dx\leqslant c\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q wdx\right)^{1+\delta'},$$

以及

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}(1+\delta')}dx\leqslant c\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{1+\delta'}.$$

这里的公共的 δ'的存在，还由于下面的显然事实，如果对 w 来说其指标为$1+\delta$ 的反向 Hölder 不等式成立，则根据 Hölder 不等式知，其指标为 $1+\delta'$的反向 Hölder 不等式也成立，只要 $0<\delta'<\delta$.

因此

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1+\delta}\,dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q (w^{1+\delta})^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{p-1}$$

$$\leqslant c\left\{\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{p-1}\right\}^{1+\delta'}$$

$$\leqslant c$$

这就证明了 $w^{1+\delta'}\in A_p$.引理证毕 .

定理(5.8)的证明 设 $w\in A_p$,显然只需证明，当b 的BMO模 $\|b\|_*$充分小时，有$we^b\in A_p$就够了. 事实上，由引理知 $w^{1+\varepsilon}\in A_p$. 再用Hölder 不等式便得

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q we^b dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q (we^b)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{p-1}$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1+\varepsilon}dx\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q (w^{1+\varepsilon})^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{\frac{p-1}{1+\varepsilon}}$$

$$\times\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q e^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}b}dx\right)^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q e^{-\frac{1}{p-1}\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}b}dx\right)^{\frac{\varepsilon(p-1)}{1+\varepsilon}}.$$

上式右端前两个因子被常数控制是由于 $w^{1+\varepsilon}\in A_p$. 如果我们乘以 $e^{-m_Q(b)}e^{m_Q(b)}$于后两个因子并对 b （当 b 的BMO模 $\|b\|_*$充分小）应用John－Nirenberg 不等式，则知它们也被常数控制. 定理(5.8)证完.

现在叙述 A_p 的一个分解定理，它深刻揭露了 A_p 权与A_1 权之间的关系.

定理(5.10) 设 $1<p<\infty$ ，则$w\in A_p$ 的充分必要条件是 $w=w_1w_2^{1-p}$, 其中 $w_1, w_2\in A_1$.

证明 在§6.1讨论 A_p 权函数初等性质时，已证明了充分性．现在我们来证明必要性．

先设 $1<p\leqslant 2$．记 $s=q-1$，其中 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，取 $u_0\in L^q(\mathbb{R}^n, w(x)dx)$，且 $u_0>0$，令

$$u_{j+1}=[M(u_j^s)(x)]^{\frac{1}{s}}+w^{-1}M(u_jw)(x). \tag{4}$$

我们断言：

(a) 存在常数 c，使得

$$\|u_{j+1}\|_{L^q(wdx)}\leqslant c\|u_j\|_{L^q(wdx)}.$$

(b) 取 $k>c$，并令 $v=\sum_{j=0}^{\infty}k^{-j}u_j$，则 $vw\in A_1$，$v^s\in A_1$．

事实上，

$$\begin{aligned}\|u_{j+1}\|^q_{L^q(wdx)}&\leqslant c\int[M(u_j^s)(x)]^{\frac{q}{s}}wdx+c\int[w^{-1}M(u_jw)(x)]^qwdx\\&=c\int[M(u_j^{\frac{q}{p}})(x)]^pw(x)dx+c\int[M(u_jw)(x)]^qw^{1-q}dx\\&\leqslant c\int u_j^qwdx+c\int(u_jw)^qw^{1-q}dx\\&=c\int u_j^q\,wdx.\end{aligned}$$

这就是(a)．推理中我们用到了 $w^{1-q}\in A_q$ 这个基本事实以及 H.-L.极大函数的加权模不等式．

另外，

$$M(vw)(x)\leqslant\sum_{j=0}^{\infty}k^{-j}M(u_jw)(x)\leqslant k\sum_{j=0}^{\infty}k^{-(j+1)}u_{j+1}w$$

$$= k\sum_{j=1}^{\infty}k^{-j}u_j w \leqslant kvw(x),$$

这就证明了 $vw \in A_1$.而

$$\begin{aligned} M(v^s)(x)^{\frac{1}{s}} &= \{M(\sum_{j=0}^{\infty}k^{-j}u_j)^s\}^{\frac{1}{s}} \\ &\leqslant \sum_{j=0}^{\infty}k^{-j}\{M(u_j^s)(x)\}^{\frac{1}{s}} \leqslant \sum_{j=0}^{\infty}k^{-j}u_{j+1} \\ &= k\sum_{j=1}^{\infty}k^{-j}u_j \leqslant kv, \end{aligned}$$

即 $v^s \in A_1$.

写出

$$\begin{aligned} w &= (vw)v^{-1} = (vw)(v^s)^{-\frac{1}{s}} = (vw)(v^s)^{-\frac{p}{q}} \\ &= (vw)(v^s)^{1-p}, \end{aligned} \tag{5}$$

取 $w_1 = vw$, $w_2 = v^s$, 由(b)便得定理所要结论.

当 $2 \leqslant p < \infty$ 时, 对 $w^{1-p'} \in A_{p'}$, $1 < p' \leqslant 2$, 用上面已证的结果, 便得到所要的 w 的分解. 定理(5.10)至此全部证完.

作为定理(5.10)的应用, 我们有下面的推论.

推论(5.11) (a) 设 w 是 $\mathbb{R}^n$ 上的权函数, 则 $w \in A_p$, 当且仅当有分解式

$$w(x) = k(x)[M(f)(x)]^{\alpha}[M(g)(x)]^{\beta(1-p)}, \tag{6}$$

其中 $f, g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $0 < \alpha, \beta < 1$, $k(x)$满足

$$0 < \frac{1}{c} \leqslant k(x) \leqslant c \tag{7}$$

(b)存在 c_1, c_2 仅与维数有关, 使得对任意 $\varphi \in BMO$,有表达式

$$\varphi(x) = b(x) + \gamma\log Mf(x) - \eta\log Mg(x), \tag{8}$$

其中$f, g \in L^1$, $\gamma, \eta > 0$, 且

$$\|b\|_\infty + \gamma + \eta \leqslant c_1 \|\varphi\|_* . \tag{9}$$

反之，每个可以表成(8)式的 φ 都是 BMO 函数. 满足

$$\|\varphi\|_* \leqslant c_2(\|b\|_\infty + \gamma + \eta).$$

(c) 对每个 $\varphi \in BLO$, 有表达式

$$\varphi(x) = b(x) + \gamma \log Mf(x), \quad b \in L^\infty, \tag{10}$$

反之，形如上式的 φ 都属于 BLO .

(d) 每个函数 $\varphi \in BMO$, 都可以表成两个 BLO 函数之差, 即$BMO \subset BLO - BLO$.

证明 (a) 当分解式成立时, $M(f)^\alpha \cdot M(g)^\beta \in A_1$(见定理(5.1)), 从而得到 $w \in A_p$.

反之, $w \in A_p$,有$w = w_1 w_2^{1-p}$, 其中 $w_1, w_2 \in A_1$. 对w_1 与w_2 应用定理(5.2), 便得所要求的结论.

(b)如果表达式(8)成立, 根据推论(5.4), $\log M(f)$, $\log M(g) \in BMO$, 故$\varphi \in BMO$. 推论(5.4)的证明过程表明, 相应的控制成立.

反过来, 如果 $\varphi \in BMO$, 则由定理(5.7)知, 存在 λ, 使得 $w(x) = e^{\lambda \varphi(x)} \in A_2$. 由定理(5.7)的证明知, λ 可以取为 $c/\|\varphi\|_*$, 其中 c 是绝对常数. 应用(a)的结果于 $w(x)$, 便得

$$\log w(x) = \log k(x) + \alpha \log M(f)(x) - \beta \log M(g)(x),$$

即

$$\varphi(x) = \lambda^{-1} \log k(x) + \frac{\alpha}{\lambda} \log M(f)(x) - \frac{\beta}{\lambda} \log M(g)(x)$$

由于 $\log k(x)$的上、下界与φ 无关, 而 $\lambda = c/\|\varphi\|_*$,故

$$\|b\|_\infty + \gamma + \eta \leqslant c\|\varphi\|_* .$$

(*c*) 如果 φ 有表达式(10)，则由定理(5.1)知 $M(f)^{\gamma}\in A_1$，再由定理(5.5)知 $\gamma\log M(f)\in BLO$. 而 $b\in L^{\infty}$，从而得到 $\varphi\in BLO$.

反之，由定理(5.6)知，当 $\varphi\in BLO$ 时，对充分小的 λ，$w(x)=e^{\lambda\varphi(x)}\in A_1$. 再用(*a*)的分解即得式(10)，注意此时 $\eta=0$.

(*d*) 是(*b*)、(*c*)的明显推论.

推论(5.11)全部证完.

推论(5.11)把 A_p 权的结构与极大函数、BMO、BLO 之间的关系，清楚地揭示了出来.

§6.6 进一步事实、习题与注记

1. 设 $\mathbb{R}^n$ 上非负Borel 测度μ 满足二倍条件，证明

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\mu=\infty.$$

2. 定义在 $\mathbb{R}^n$ 上函数空间上的次线性算子T 称为限制弱$(L^p(wdx),\ L^p(wdx))$型，其中 $1\leqslant p<\infty$，如果

$$w(\{|T\chi_E|>\lambda\})\leqslant\frac{c}{\lambda^p}w(E),\quad\forall\text{可测集 }E,\ \forall\lambda>0.$$

证明 Hardy－Littlewood 极大算子 M 是限制弱$(L^p(wdx),\ L^p(wdx))$型的，当且仅当

$$\frac{|E|}{|I|}\leqslant c\left(\frac{w(E)}{w(I)}\right)^{\frac{1}{p}},\ \forall\text{方体 }I,\ \forall\text{可测子集 }E\subset I.$$

3. 设 $1\leqslant p<\infty$，$w\in A_p$，证明

$$\int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|)^{-np}w(x)dx\leqslant c\,w(I_0),\ I_0\text{ 是 }\mathbb{R}^n\text{ 中单位方体.}$$

4. 设 μ 是局部有限的非负 Borel 正规测度，满足

$$\mu(\{Mf>\lambda\})\leqslant \frac{c}{\lambda^p}\|f\|_{L^p(d\mu)},\quad \forall\lambda>0,1\leqslant p<\infty$$

证明 μ 绝对连续，$d\mu=wdx$；$w\in A_p$.

5. 设 $-n<\alpha\leqslant 0$，证明 $|x|^\alpha\in A_1$. 设 $1<p<\infty$，证明 $|x|^\alpha\in A_p$ 当且仅当 $-n<\alpha<n(p-1)$.

提示：利用 $p=1$ 时的结果与 A_p 权的因子分解定理.

6. 利用 A_p 权的因子分解定理证明Garnett－Jones(见 [GJ]) 关于 BMO 函数与L^∞ 的距离的下述结果： $\forall\varphi\in BMO$，

$$\inf_{g\in L^\infty}\|\varphi-g\|_*\approx\frac{1}{\alpha_\varphi},$$

其中

$$\alpha_\varphi=\sup\left\{\alpha:\ \sup_I\frac{1}{|I|}\int_I e^{\alpha|\varphi-\varphi_I|}dx<\infty\right\}.$$

7. 证明权函数 $w\in A_\infty$ 当且仅当

$$w_I\exp\left(\frac{1}{|I|}\int_I\log\frac{1}{w(x)}dx\right)\leqslant c,\forall I,\text{其中 } w_I=\frac{1}{|I|}\int_I wdx.$$

既然 $\lim\limits_{p\to\infty}\left(\frac{1}{|I|}\int_I w^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{p-1}=\exp(\frac{1}{|I|}\int_I\log\frac{1}{w(x)}dx)$，这说明$A_\infty$ 条件粗略地说是A_p 条件当$p\to\infty$ 时的极限.

8. 设权函数 w 满足p 指标的反向Hölder 不等式，即

$$\left(\frac{1}{|I|}\int_I w^pdx\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant c\frac{1}{|I|}\int_I wdx,\forall I,1<p<\infty.$$

证明存在 $\varepsilon>0$，使 $\forall r,p\leqslant r<p+\varepsilon$，$w$ 满足 r 指标的反向Hölder 不等式. 这个结果属于 Gehring[Ge].

9. 设 v是权函数，$1<p<\infty$. 则存在非负 a. e. 不为 0 函数 w 使

$$\int_{\mathbb{R}^n}(Mf)^p w dx \leqslant c\int_{\mathbb{R}^n}|f|^p v dx\ ,\ \forall f$$

当且仅当

$$v^{-\frac{1}{p-1}}\in L^1,\ 且\ \overline{\lim_{r\to\infty}}\ |B_r|^{-p'}\int_{B_r} v^{-\frac{1}{p-1}}dx<\infty\ ,$$

其中 B_r 为以0 为中心，r 为半径的球．这个结果属J. L. Rubio de Francia.

10．设 w 是权函数，$1<p<\infty$，则存在非负a. e. 有限的函数 v 使

$$\int_{\mathbb{R}^n}(Mf)^p w dx \leqslant c\int_{\mathbb{R}^n}|f|^p v dx\ ,\ \forall f$$

当且仅当

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{w(x)}{(1+|x|^n)^p}dx<\infty\ .$$

这个结果属于 W. S. Young.

11．设 $0<\eta\leqslant 1$, $1<p<\infty$，$w\in A_p$, p' 表示 p 的相伴数．设 $g\in L^{\frac{p'}{\eta}}(\mathbb{R}^n, wdx)$．简记 $\|g\|_{L^{\frac{p'}{\eta}}(wdx)}$ 为 $\|g\|_{\frac{p'}{\eta}(w)}$，令 $G(x)=(w^{-1}M(g^{\frac{1}{\eta}}w))^{\eta}$. 证明

$$\|G\|_{\frac{p'}{\eta}(w)}\leqslant c\|g\|_{\frac{p'}{\eta}(w)},$$

$$(gw, Gw)\in A_q\ ,\ q=\eta+p(1-\eta)<p\ ,$$

且其中所含的常数只与 A_p 条件中的系数有关．这可改述为：设 $1\leqslant p_0<p$, $w\in A_p$，$r=\left(\dfrac{p}{p_0}\right)'$，则对 $L^r(wdx)$ 中每个非负 g 存在

G，使

$$G \geqslant g\ ,\|G\|_{r(w)} \leqslant c\|g\|_{r(w)},\ (gw, Gw) \in A_{p_0}.$$

12．上题中的结论$(gw, Gw) \in A_{p_0}$ 可以改进为$Gw \in A_{p_0}$．

13．对于 $1<p<p_0$ 情形，对应的结果如下：设$1<p<p_0$，$w \in A_p$，$r=\dfrac{p}{p_0-p}$．则对 $L^r(wdx)$中每个非负 g，存在$G \geqslant g^*$，使得

$$\|G\|_{r(w)} \leqslant c\|g\|_{r(w)},\quad \frac{w}{G} \in A_{p_0},$$

且其中所含系数只依赖于 w 的A_p 系数．

14．现在可以得到 J. L. Rudio de Francia [R] 的如下算子外推定理．设T 是次线性算子．对某p_0，$1 \leqslant p_0<\infty$，使对所有 $w \in A_{p_0}$，有

$$\|Tf\|_{p_0(w)} \leqslant c\|f\|_{p_0(w)},\quad \forall f,$$

其中 c 只依赖于w 的 A_{p_0} 系数．则 $\forall p, 1<p<\infty$，$\forall w \in A_p$，有

$$\|Tf\|_{p(w)} \leqslant c\|f\|_{p(w)},\quad \forall f,$$

且系数只依赖于 w 的A_p 系数．

提示：当 $1 \leqslant p_0<p$，对 $w \in A_p$，$f \in L^p(wdx)$，有

$$\|Tf\|_{p(w)}^{p_0} \leqslant \sup_g\left\{\int_{R^n}|Tf|^{p_0} g w dx: \|g\|_{\left(\frac{p}{p_0}\right)'} \leqslant 1\right\}$$

$$\leqslant \sup_g\left\{\int_{R^n}|Tf|^{p_0} G w dx: \|g\|_{\left(\frac{p}{p_0}\right)'} \leqslant 1\right\}.$$

然后应用 Hölder 不等式以及$Gw \in A_{p_0}$ 当 $1<p<p_0$，对$w \in A_p$，$f \in L^p(wdx)$，令

$$g(x)=\begin{cases}\|f\|_{p(w)}^{p-p_0}|f|^{p_0-p}, & 若 f\neq 0;\\ 0, & 若 f=0.\end{cases}$$

则 $\|g\|_{\frac{p}{p_0-p}(w)}=1$. 由题 13 得到 G. 这样由

$$\|Tf\|_{p(w)}^{p_0}=\int_{\mathbb{R}^n}|Tf|^p G^{-\frac{p}{p_0}}G^{\frac{p}{p_0}}w\,dx,$$

应用 Hölder 不等式以及 $\frac{w}{G}\in A_{p_0}$ 即得. 这方面的进一步情况可参看 Garcia－Cuerva; J. Rubio de Francca, J. L. [GR] 与 Torchinsky[T].

15. 设 T 是第五章考虑的奇异积分算子, w 是一个权函数, $s>1$, 定义 $A_s(w)=(M(w^s))^{\frac{1}{s}}$, M 是 Hardy－Littlewood 极大函数算子, 证明

$$\int_{\mathbb{R}^n}|Tf|^p w\,dx\leqslant c_{p,s}\int_{\mathbb{R}^n}|f|^p A(w)\,dx,\quad \forall f.$$

提示: 应用事实 $w\leqslant A_s(w)$, $A_s(w)\in A_1$, 以及 (T^*f, Mf) 满足好 λ 不等式, 其中 T_* 是 T 的极大算子, 即得. 如果不应用好 λ 不等式, 而代之以 $(f)^{\#}\leqslant c_r\{M(|f|^r)\}^{\frac{1}{r}}$, $1<r<\infty$, 再利用事实

$$\int_{\mathbb{R}^n}(Tf)^p A_s(w)\,dx\leqslant c\int_{\mathbb{R}^n}(Tf)^{\#p}A_s(w)\,dx,\forall f,$$

(因 $A_s(w)\in A_\infty$)

$$\int_{\mathbb{R}^n}(M(|f|^r))^{\frac{p}{r}}A_s(w)\,dx\leqslant c\int_{\mathbb{R}^n}|f|^p M(A_s(w))\,dx,\forall f,$$

也可以得到

16. 对 $0\leqslant\alpha<1$, 分数次极大算子 $M^{(\alpha)}$ 定义为

$$M^{(\alpha)}f(x)=\sup_{Q\ni x}|Q|^{-1+\alpha}\int_Q|f(y)|dy.$$

设(u,v)是两个权函数的对，且udx满足双倍条件. 则 $M^{(\alpha)}$是弱$(L^p(vdx),\ L^q(udx))$型的，$1<p\leqslant q<\infty$，当且仅当

$$\left(\int_Q udx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_Q v^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{\frac{1}{p'}}\leqslant c|Q|^{1-\alpha},\ \forall Q.$$

当$u=v$时，这个条件也是$M^{(\alpha)}$是强$(L^q(vdx),\ L^q(udx))$型的必要充分条件. 两权时$M^{(\alpha)}$的强$(L^p(vdx),\ L^q(udx))$型也有一个类似于$\alpha=0$时的必要充分条件，即

$$\left(\int_Q(M^{(\alpha)}(v^{-\frac{1}{p-1}}\chi_Q))^q udx\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant c\left(\int_Q v^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{\frac{1}{p}},\ \forall Q.$$

单权时的强型结果属于 Muckenhoupt－Wheeden[MW]，双权时的强型结果属于E. Sawyer[Sa1]. 注意既然

$$M^{(\alpha)}(v^{-\frac{1}{p-1}}\chi_Q)|_Q\geqslant|Q|^{-1+\alpha}\int_Q v^{-\frac{1}{p-1}}dx,$$

故双权时的强型充要条件明显地不弱于弱型充要条件. 事实上，前者真正地强于后者.

17. 设$0\leqslant\alpha<1$，我们在第一章遇到过的分数次积分算子I_α被定义为

$$I_\alpha f(x)=\int\frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha n}}dy.$$

I_α的加权模不等式单权时的结果属于 Muckenhoupt－Wheeden 见[MW]，它可由$M^{(\alpha)}$的相应结果或者通过好λ不等式，或者通过如下点态估计而得到:

$$(I_\alpha f)^{\#}_{\frac{1}{2}}(x)\leqslant cM^{(\alpha)}f(x),\quad\forall x,$$

其中 $g^{\#}_{\frac{1}{2}}(x)$ 定义为(见 §3.4)

$$g^{\#}_{\frac{1}{2}}(x)=\sup_{Q}\inf_{c\in\mathbb{C}}\left(\frac{1}{|Q|}\int_{Q}|g(y)-c|^{\frac{1}{2}}dy\right)^{2}.$$

双权时 E. Sawyer [Sa2]得到了弱型充要条件，此即

I_α 是弱型$(L^{p}(vdx),\ L^{q}(udx))$，当且仅当

$$\left(\int_{Q}I_{\alpha}(u\chi_{Q})^{p'}v^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{\frac{1}{p'}}\leqslant C\left(\int_{Q}udx\right)^{\frac{1}{q'}},\forall Q.$$

既然按对偶原理，I_α 是$(L^{p}(vdx),\ L^{q}(udx))$型的，当且仅当 I_α 是$(L^{q'}(u^{-\frac{1}{q-1}}dx),\ L^{p'}(v^{-\frac{1}{p-1}}dx))$型的，上述条件相当于 I_α 局限于函数族$\{u\chi_Q\}_Q$上是$(L^{q'}(u^{-\frac{1}{q-1}}dx),\ L^{p'}(v^{-\frac{1}{p-1}}dx))$有界的. E. Sawyer 也得到了 I_α 的强$(L^{p}(vdx),\ L^{q}(udx))$型的充要条件，但比较复杂.

18. 对 $\mathbb{R}^n$ 上光滑函数f，用f的微商的积分模控制f 自己的积分模的一类不等式称为Sobolev 型不等式. 下面的加权 Sobolev 不等式是这类不等式的一个典型代表，

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f|^{q}vdx\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant c\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla f|^{p}udx\right)^{\frac{1}{p}},\ \forall f\in C^{1}_{*}(\mathbb{R}^n),$$

其中 $C^{1}_{*}(\mathbb{R}^n)=\{f\in C^{1}(\mathbb{R}^n):\ \lim\limits_{|x|\to\infty}f(x)=0\}$，龙瑞麟、聂伏生[LN] 得到了如下充分条件：设 $1<p\leqslant q<\infty$，(u,v)是权函数对，使得 I_1 是弱$(L^{p}(vdx),\ L^{q}(udx))$型的，则上述加权 Sobolev 不等式成立. 特别由题 16 知，如下条件是充分的：

$$\left(\int_{Q}I_{1}(u\chi_{Q})^{p'}v^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{\frac{1}{p'}}\leqslant c\left(\int_{Q}udx\right)^{\frac{1}{q'}},\ \forall Q.$$

19. 加权不等式在微分方程中的一个典型应用如下：设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中一个Lipschitz 区域，∂D 是其边界，设 $f\in C(\partial D)$，则 Dirichlet 边值问题

$$\Delta u=0 \text{ 于} D \text{ 中}，u|_{\partial D}=f$$

有解.并且由调和函数的极大模原理，知 $|u(x)|\leqslant\|f\|_\infty$，$\forall x\in D$. 这说明对每个$x\in D$固定，$f\to u(x)$是 $C(\partial D)$ 上的一个有界线性泛函. 故由Riesz 表示定理知存在∂D 上唯一非负Borel 测度w^x使得

$$u(x)=\int_{\partial D}f(y)dw^x(y).$$

称 w^x 是∂D 在点 x 的一个调和测度. 对任意两点x_1, x_2，w^{x_1}，w^{x_2}是互相绝对连续的. 通常任取一点 x_0,并记 w^{x_0}为 w. 调和测度与调和函数的边值存在性密切相关.已知 Lipschitz 域D 内正调和函数u关于调和测度w 是几乎处处有非切向边值的,当区域是$C^{1+\varepsilon}$时(即边界的表示函数一次连续可微,且一次导数满足ε－Hölder 条件),调和测度 w 与面测度σ 可以互相被常数倍控制,因而本质上是一样的.但对C^1域,当然还有更宽一些的Lipschitz 域,则w 与σ 不一样. B. E. J. Dahlberg 指出Radon－Nikodym导数

$$k(Q)=\frac{dw(Q)}{d\sigma(Q)}$$

满足反向 Hölder 不等式：

设 D 是 Lipschitz 域，则

$$\left(\frac{1}{\sigma(\Delta)}\int_\Delta k^2d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\frac{c}{\sigma(\Delta)}\int_\Delta kd\sigma，\Delta=\partial D\cap B，B \text{ 是 } \mathbb{R}^n \text{ 中}$$

球；设D 是 C^1 域，则

$$\left(\frac{1}{\sigma(\Delta)}\int_\Delta k^pd\sigma\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\frac{c}{\sigma(\Delta)}\int_\Delta kd\sigma，1<p<\infty.$$

利用k的这个性质可得Lipschitz域D内Dirichlet边值问题在L^p中可解的下述结果，对$2\leqslant p<\infty$：设D是Lipschitz域，则存在$\varepsilon=\varepsilon(D)>0$使对$p, 2-\varepsilon<p<\infty$，以及$f\in L^p(\partial D, d\sigma)$，$u(x)=\int_{\partial D} f(Q)\,dw^x(R)$是$D$内调和函数，且$\lim_{x\to Q} u(x)=f(Q)$，非切向几乎处处与$L^p$中成立，且$u$的非切向极大函数在$L^p$中被$f$控制.

20. Fourier变换的加权模不等式是一个待发展的领域，迄今只有零星的(对函数类加限制条件)一些结果，例如考虑径向函数类的Fourier变换的加权模不等式等等. 下述关于紧支集函数的Fourier变换的加权模不等式的意义在于它与解析数论中著名的大筛法不等式的联系. 设K是$\mathbb{R}^n$中紧集，考虑$L^2(K)=\{f\in L^2(\mathbb{R}^n):\operatorname{supp} f\subset K\}$，设$d\mu$是$\mathbb{R}^n$上非负Borel测度. T是$L^2(\mathbb{R}^n)$上定义的一个有界，非负，次可加且与平移可交换的算子. 则

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T\hat{f}(t)|^2 d\mu(t)\leqslant C_{T,K,\mu}\int_K |f|^2 dx, \forall f\in L^2(K),$$

其中

$$C_{T,K,\mu}=c\|T\|^2\sup_{\tau}\int_{U+\tau} d\mu(t)|U|^{-1},$$

这里U是以原点为心的且包含在开集$\{t: |e^{ix\cdot t}-1|<\frac{1}{2}, \forall x\in K\}$内的任意球. 上述不等式可以推广为$(p,p')$型，$1\leqslant p\leqslant 2$，以及多参数情形. T可以是恒等算子，H.－L.极大算子(以及其他类似算子). 当$d\mu$是离散测度时，这不等式就化为大筛法，与极大的大筛法不等式. 这个结果属于龙瑞麟，刘政权，见[LL].

21. 考虑$\mathbb{R}^n$上Bochner－Riesz求和算子$\{BR_R^\delta\}$的收敛表现，其中

$$BR_R^\delta: f\to BR_R^\delta(f),\ (BR_R^\delta(f))^\wedge(\xi)=\left(1-\frac{|\xi|^2}{R^2}\right)^\delta \hat{f}(\xi),$$

$$0 < \delta \leqslant \frac{n-1}{2}.$$

一个著名的猜测说：$BR_R^\delta(f)$在 L^p 中收敛于f，当且仅当

$$p_\delta{}' = \frac{2n}{n+1+2\delta} < p < \frac{2n}{n-1-2\delta} = p_\delta.$$

当 $n>2$ 时，这个猜测尚待解决. 进一步猜测上述 L^p 中收敛可以改为几乎处处收敛，但这似乎更难. 迄今较好的结果是Carbery－Rubio－Vega [CRV]的下述结果：

$$\text{当 } 2 \leqslant p < p_\delta \text{ 时，} \lim_{R\to\infty} BR^\delta_R(f,x) = f(x),\ \text{a. e.}.$$

他们的方法是使用下述幂权不等式：设 $0<\delta\leqslant \dfrac{n-1}{2}$. $0\leqslant\alpha<1+2\delta$, $BR^\delta_*(f,x)=\sup\limits_{R>0}|BR^\delta_R(f,x)|$，则

$$\int_{R^n} BR^\delta_*(f,x)^2|x|^{-\alpha}dx \leqslant c_{\delta,\alpha}\int_{R^n}|f(x)|^2|x|^{-\alpha}dx.$$

当 $\delta=0$ 时，若考虑$\{BR_{R_j}\}$，其中$R_{j+1}\geqslant qR_j$, $q>1, \forall j$，则

$$\lim_{j\to\infty} BR^0_{R_j}(f,x)=f(x),\ \text{a. e. 当 } 2\leqslant p<\infty.$$

它由相应的极大求和算子 $BR^0_{**}(f,x)=\sup\limits_j |BR^0_{R_j}(f,x)|$ 的幂权不等式得到

$$\int_{R^n} BR^0_{**}(f,x)^q|x|^{-\alpha}dx \leqslant c\int_{R^n}|f|^2|x|^{-\alpha}dx,\ 0\leqslant\alpha<1.$$

这一结果也属于[CRV]，刘和平—陆善镇—马柏林也独立地得到了这一结果.

22. 设 $n\geqslant 2$, S_{n-1} 为 $\mathbb{R}^n$ 中单位球面, $d\sigma$ 为其上 Lebesgue 测度, $g\in L^2(S_{n-1})$, $a>1$. 证明

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{S_{n-1}} g(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\sigma(\xi)\right|^2\frac{dx}{|x|^a}\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant C_a\left(\int_{S_{n-1}}|g(\xi)|^2d\sigma(\xi)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

这个结果属于王斯雷S.L.Wang[W3]. 用这个结果可以证明下述Schrödinger 方程的解的极大函数的幂权不等式

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(u^*(x)\right)^2\frac{dx}{(1+|x|)^a}\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant c\,\|f\|_{H_2^s(\mathbb{R}^n)}.$$

其中$a>1, s>\dfrac{a}{2}$, H_2^s 为Bessel 位势空间,

$$u(x,t)=\int_{\mathbb{R}^n} e^{it|\xi|^2}e^{ix\cdot\xi}\hat{f}(\xi)d\xi\ , x\in\mathbb{R}^n, t\in\mathbb{R},$$

$$u^*(x)=\sup_{t>0}|u(x,t)|.$$

注意 $u(x,t)$是下述带初始值f 的 Schrödinger 方程的解

$$\Delta u=i\frac{\partial u}{\partial t}\ , t\in\mathbb{R}, u(x,0)=f(x).$$

注　记

A_p 权概念是Muckenhoupt [Mu]引进的, 定理(1.1)和(3.1)属于他, 定理(3.1)后的注中给出的另一证明属于 Jawerth[Ja], 其思想借鉴于 Sawyer[Sa1]处理极大函数 M的双权模不等式的证明. 定理(3.4)属于[Sa1]. 书中给出的定理(3.1)的证明, 以及为此而引进的 A_∞ 概念, 反向Hölder 不等式概念等属于 Coifman－Fefferman[CF]. 关于极大函数的 log与A_1 权的关系的定理(5.1)与(5.2)属于 Coifman－Rochberg [CR]. A_p 权与BMO (以及 A_1 权

与 BLO)的关系似乎为大家所熟知. 关于 A_p 权的因子分解的定理(5.10)属于Jones [Jo2],这里给出的证明属于Rubio de Francia [R].

第七章　算子内插与内插空间

线性算子如果把线性空间 $\mathscr{A}$ 映入另一线性空间 $\mathscr{B}$，且它又是 A_j 到 B_j 有界的，$j=0,1$，其中 A_j，B_j 分别是 $\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$ 的 Banach 子空间，则经常可以证明，存在无穷多个"中间"*Banach* 空间对 (A,B)，$A\subset\mathscr{A}$，$B\subset\mathscr{B}$，使得算子也是从 A 到 B 有界的．这便是线性算子的内插．本章的目的，一方面对一些具体空间叙述这样的内插定理，另一方面是"寻找"这些保持线性算子有界的"中间空间"（称为内插空间），并对一些具体空间，把它们的内插空间描述出来．这样，不仅提供了研究算子有界性的工具，还同时提供了一个研究函数空间的工具．这对许多分析问题的研究是十分重要的．本章第一节对 § 3.5 开始的算子内插作进一步的补充．第二节介绍 A．Calderón 关于算子的弱型有界的处理及其在算子内插中的应用．第三节、第四节则分别讲述构造"内插空间"的两种方法—— 实方法与复方法，第五节是内插空间举例．最后一节如其它章一样是进一步的事实、习题与注记．

§ 7.1　算子内插理论的补充

我们在 § 3.5 已对算子内插进行过初步讨论，那里我们已经给出过算子内插理论中两个最基本的定理，即 Riesz－Thorin 定理与 Marcinkiewicz 定理．算子内插还有很多推广，例如一个算子的内插可以推广到一个算子族的内插；对于固定测度的 Lebesgue 空间的算子内插可以推广为对于变化测度的 Lebesgue 空间的算子内插（这是指那样的内插定理．它由 T 是 $L^{p_i}(X, d\mu_i)$ 到 $L^{q_i}(Y, d\nu_i)$，$i=1,2$，有界的，可以推出 T 是 $L^p(X, d\mu)$ 到 $L^q(Y, d\nu)$ 有界的，其中 μ_1 与 μ_2，以及 ν_1 与 ν_2 不必一样）．由

于篇幅的限制，本节只打算对 Marcinkiewicz 定理作一些补充：首先是其中的指标尽可能一般，其次是 Hardy 空间 H_1 将作为端点空间之一．与此密切相关的，Lorentz 空间需要作一个简单的介绍．

首先简单介绍 Lorentz 空间，它同 Orlicz 空间分别从不同的角度对 Lebesgue 空间作出了推广与补充．设$(X,\mathscr{F},\mu)$是一般测度空间．

定义(1.1) 设 $0<p<\infty$，$0<q\leqslant\infty$，f 是$(X,\mathscr{F},\mu)$上可测函数，令

$$L^{p,q}=\left\{f:\|f\|_{p,q}=\left(\frac{q}{p}\int_0^{\infty}\left(t^{\frac{1}{p}}f^*(t)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}<\infty\right\},\tag{1}$$

这里 $0<p<\infty$，$0<q<\infty$．当 $0<p<\infty$，$q=\infty$，时，令

$$L^{p,\infty}=\{f:\|f\|_{p,\infty}=\sup_t t^{\frac{1}{p}}f^*(t)<\infty\},\tag{2}$$

其中$f^*(t)$是f的非增重排函数．当 $p=\infty$，只对 $q=\infty$ 定义 $L^{\infty,\infty}=L^{\infty}$．$L^{p,q}$ 称为 Lorentz 空间．

我们把 Lorentz 空间的最基本的性质收集在下面定理中．

定理(1.2) 如下断言成立

(a)设 $0<p<\infty$，$0<q\leqslant\infty$，则用分布函数来描述，有

$$\|f\|_{p,q}=\left(q\int_0^{\infty}\lambda^{q-1}\sigma^{\frac{q}{p}}(\lambda)d\lambda\right)^{\frac{1}{q}},\tag{3}$$

$$\|f\|_{p,\infty}=\sup_{\lambda}\lambda\,\sigma^{\frac{1}{p}}(\lambda).\tag{4}$$

(b)设$0<p<\infty$，$0<q\leqslant r\leqslant\infty$，则 $L^{p,q}\subset L^{p,r}$．

(c)设 $0<p<\infty$，$0<q<\infty$，则简单函数类 S 在 $L^{p,q}$中稠密．

(*d*) 设 $1<p<\infty$，$1\leqslant q\leqslant\infty$，则 $L^{p,q}$ 在如下等价模下成 Banach 空间，

$$\|f\|_{p,q}^{*}=\left(\frac{q}{p}\int_0^{\infty}(t^{\frac{1}{p}}f^{**}(t))^{q}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}},\ 1<p<\infty,\ 1\leqslant q<\infty, \tag{5}$$

$$\|f\|_{p,q}^{*}=\sup_{t} t^{\frac{1}{p}}f^{**}(t),\ 1<p<\infty,\ q=\infty, \tag{6}$$

其中 $f^{**}(t)$ 是 f 的平均重排函数(见 § 3.2).

证明 (*a*) 式(3)由 §3.2 定理 2.4 中给出的积分通过分布函数与非增重排函数表示的公式推得. 现证式(4)，对给定的 t，令 $\lambda=f^{*}(t)$(不妨设 $0<f^{*}(t)<\infty$，否则是容易处理的). 则 $\sigma(\lambda)\leqslant t\leqslant\sigma(\lambda-0)$. 对任意 $\varepsilon>0$，有

$$\begin{aligned} t^{\frac{1}{p}}f^{*}(t) &\leqslant (\lambda-\varepsilon)\sigma^{\frac{1}{p}}(\lambda-\varepsilon)+\varepsilon\sigma^{\frac{1}{p}}(\lambda-\varepsilon) \\ &\leqslant \sup_{\lambda}\lambda\,\sigma^{\frac{1}{p}}(\lambda)+o_{\varepsilon}(1). \end{aligned}$$

令 $\varepsilon\to 0$，即得

$$\sup_{t} t^{\frac{1}{p}}f^{*}(t)\leqslant\sup_{\lambda}\lambda\,\sigma^{\frac{1}{p}}(\lambda).$$

反向不等式可类似证明.

(*b*) $r=\infty$ 时，由

$$t^{\frac{1}{p}}f^{*}(t)\leqslant\left(\frac{q}{p}\int_0^{t}(u^{\frac{1}{p}}f^{*}(u))^{q}\frac{du}{u}\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant\|f\|_{p,q},$$

$$0<p<\infty,\ 0<q\leqslant\infty, \tag{7}$$

即知. $r<\infty$ 时有

$$\|f\|_{p,r}^{r}=\frac{r}{p}\int_0^{\infty}f^{*}(t)^{q}(t^{\frac{1}{p}}f^{*}(t))^{r-q}\,t^{\frac{r}{p}-1-\frac{r-q}{p}}\,dt$$

$$\leqslant \frac{r}{p}\|f\|_{p,q}^{r}. \tag{8}$$

(c) 设 $f\in L^{p,q}$, $q<\infty$, 不妨设 $f\geqslant 0$, $\forall t, f^*(t)<\infty$. 设$\{f_n\}$是简单函数列, $f_n\leqslant f$, $\{f_n\}$依测度收敛于f. 由 §3.2 定理(2.6)知 $(f_n-f)^*(t)\to 0$, 此外$(f_n-f)^*(t)\leqslant 2f^*\left(\frac{t}{2}\right)$. 故由控制收敛定理得

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_{p,q}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{q}{p}\int_0^\infty\left(t^{\frac{1}{p}}(f_n-f)^*(t)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}=0.$$

这证明了 S 在 $L^{p,q}$ 中的稠密性.

(d) 既然 $f^*(t)\leqslant f^{**}(t)$, 有 $\|f\|_{p,q}\leqslant\|f\|_{p,q}^*$. 要证

$$\|f\|_{p,q}^*\leqslant p'\|f\|_{p,q}. \tag{9}$$

当 $q<\infty$ 时只需注意到$\int_0^t f^*(u)du\leqslant tf^*(t)$. $q=\infty$ 时有

$$t^{\frac{1}{p}}f^{**}(t)\leqslant t^{\frac{1}{p}-1}\int_0^t f^*(u)du$$

$$\leqslant t^{\frac{1}{p}-1}\sup_u\left(u^{\frac{1}{p}}f^*(u)\right)\int_0^t u^{-\frac{1}{p}}du=p'\|f\|_{p,\infty}.$$

这证明了 $\|f\|_{p,q}^*$ 与 $\|f\|_{p,q}$ 等价. 既然平均重排算子 $**$ 对f是次线性的, 故 $\|f\|_{p,q}^*$ 满足三角不等式, 从而 $\|\cdot\|_{p,q}^*$ 的确是一个范数. 现证完备性, 设 $\{f_n\}$是 $L^{p,q}$ 中的 Cauchy 序列. 式(7)说明对任意 $\varepsilon>0$, 存在 N_ε, 使当 $n, m\geqslant N_\varepsilon$ 时, 有

$$t^{\frac{1}{p}}(f_n-f_m)^*(t)\leqslant\varepsilon, \forall t>0.$$

这说明$\{f_n\}$是在依测度收敛意义下的基本序列, 故有子列(不妨设$\{f_n\}$自己)依测度收敛于某个 f. 这样$\{f_n-f_{N_\varepsilon}\}$依测度收敛于

$f-f_{N_\varepsilon}$. 故

$$\lim_{n\to\infty}(f_n-f_{N_\varepsilon})^*(t)=(f-f_{N_\varepsilon})^*(t).$$

故当 $q=\infty$ 时有

$$t^{\frac{1}{p}}(f-f_{N_\varepsilon})^*(t)=\lim_{n\to\infty}t^{\frac{1}{p}}(f_n-f_{N_\varepsilon})^*(t)$$

$$\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\|f_n-f_{N_\varepsilon}\|_{p,\infty}\leqslant\varepsilon.$$

当 $q<\infty$ 时由 Fatou 引理有

$$\|f-f_{N_\varepsilon}\|_{p,q}\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\|f_n-f_{N_\varepsilon}\|_{p,q}\leqslant\varepsilon.$$

这证明了 $L^{p,q}$ 的完备性. 定理至此证毕.

Lorentz 空间的比较深入一些的性质有下述对偶定理，我们略去其证明.

定理(1.3) 设 $1<p<\infty$, $1\leqslant q<\infty$. 则$(L^{p,q})^*=L^{p',q'}$.

现在我们给出一般指标情形下的 Marcinkiewicz 算子内插定理，记号及术语同§3.5.

定理(1.4) (Marcinkiewicz) 设 $0<p_i\leqslant q_i\leqslant\infty$, $i=0,1$. $p_0<p_1$, $q_0\neq q_1$. 设拟线性算子 T 同时是弱(p_i,q_i)型的, $i=0,1$, 则 T 也是(p,q)型的，其中

$$\frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1},\ \frac{1}{q}=\frac{1-\theta}{q_0}+\frac{\theta}{q_1}. \tag{10}$$

证明 用 σ 表示 $\mathbb{R}^2$ 上连接$\left(\frac{1}{p_0},\frac{1}{q_0}\right)$与$\left(\frac{1}{p_1},\frac{1}{q_1}\right)$的线段的斜率. 由于$\left(\frac{1}{p},\frac{1}{q}\right)$在该线段上，便有

$$\sigma=\frac{\frac{1}{q_0}-\frac{1}{q}}{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p}}=\frac{\frac{1}{q}-\frac{1}{q_1}}{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}}.$$

对任意 $t>0$，分解函数 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ 如下：

$$f=f^t+f_t,$$

其中

$$f^t(x)=\begin{cases} f(x), & \text{当 } |f(x)|>f^*(t^\sigma), \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

其中 $f^*(t)$ 是 f 的非增重排函数. 容易推出

$$(f^t)^*(\tau)\leqslant f^*(\tau), \quad \text{当 } 0\leqslant\tau\leqslant t^\sigma,$$
$$(f^t)^*(\tau)=0 \qquad \text{当 } \tau>t^\sigma.$$

而

$$(f_t)^*(\tau)\leqslant f^*(t^\sigma), \text{当 } \tau\leqslant t^\sigma,$$
$$(f_t)^*(\tau)\leqslant f^*(\tau), \quad \text{当 } \tau>t^\sigma.$$

利用非增重排函数的弱次可加性以及 T 是弱 (p_j, q_j) 型的条件，有

$$(Tf)^*(t)\leqslant(Tf^t)^*\left(\frac{t}{2}\right)+(Tf_t)^*\left(\frac{t}{2}\right)$$
$$\leqslant A_0\left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{q_0}}\|f^t\|_{p_0}+A_1\left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{q_1}}\|f_t\|_{p_1}.$$

由于 $p_j\leqslant q_j$，有 $p\leqslant q$，应用 Minkowski 不等式与定理(1.2)的(b)，知

$$\|Tf\|_q=\|(Tf)^*\|_q=\left\{\int_0^\infty\left[t^{\frac{1}{q}}(Tf)^*(t)\right]^q\frac{dt}{t}\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant A\left\{\int_0^{\infty}\left[t^{\frac{1}{q}}(Tf)^*(t)\right]^p\frac{dt}{t}\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant A_0\left(\int_0^{\infty}\left[t^{\frac{1}{q}-\frac{1}{q_0}}\|f^t\|_{p_0}\right]^p\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+A_1\left(\int_0^{\infty}\left[t^{\frac{1}{q}-\frac{1}{q_1}}\|f_t\|_{p_1}\right]^p\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\ \mathrm{I}+\mathrm{II}.$$

但由式(8)，有

$$\|f^t\|_{p_0}=\left(\int_0^{\infty}\left[\tau^{\frac{1}{p_0}}(f^t)^*(\tau)\right]^{p_0}\frac{d\tau}{\tau}\right)^{\frac{1}{p_0}}.$$

$$\leqslant c\int_0^{\infty}\tau^{\frac{1}{p_0}}(f^t)^*(\tau)\frac{d\tau}{\tau}$$

$$=c\int_0^{t^{\sigma}}\tau^{\frac{1}{p_0}}f^*(\tau)\frac{d\tau}{\tau}.$$

把这代人 I，作变量替换并应用 Hardy不等式(见 §3 .2 定理 2 .14)，注意 $\frac{1}{q}-\frac{1}{q_0}<0<\frac{1}{q}-\frac{1}{q_1}$，使得到

$$\mathrm{I}\leqslant c\left\{\int_0^{\infty}t^{\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{q_0}\right)p}\left(\int_0^{t^{\sigma}}\tau^{\frac{1}{p_0}}f^*(\tau)\frac{d\tau}{\tau}\right)^p\frac{dt}{t}\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant c\left\{\int_0^{\infty}t^{\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{q_0}\right)\frac{p}{\sigma}}\left(\int_0^{t}\tau^{\frac{1}{p_0}}f^*(\tau)\frac{d\tau}{\tau}\right)^p\frac{dt}{t}\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant c\left\{\int_0^\infty (\tau^{\frac{1}{p_0}} f^*(\tau))^p \tau^{p(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_0})} \frac{d\tau}{\tau}\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$= c\left(\int_0^\infty f^*(\tau)^p\, d\tau\right)^{\frac{1}{p}} = c\|f\|_p .$$

同理可证 $\mathrm{II} \leqslant c\|f\|_p$. 定理(1.4)证完.

通过完全同样的证明可以得到更强一些的结果，即在相同的条件下，T 是 $L^{p,r}$ 到 $L^{q,r}$ 内有界的，其中 p，q 如式(10)所示，$0<r\leqslant\infty$.(读者如有兴趣，请自行补充证明.)利用这个事实知 Hausdortf－Young 关于 Fourier 变换的不等式可以加强为

$$\|\hat{f}\|_{p';p} \leqslant c\|f\|_p . \tag{11}$$

这因由刚叙述的加强形式的 Marcinkiewicz 定理知 Fourier 变换是 $L^{p;r}$ 到 $L^{p',r}$ 有界的，令 $r=p$ 即得式(11). 既然 $1\leqslant p\leqslant 2\leqslant p'\leqslant\infty$，且 $L^{p,q}$ 对 q 是单调增的空间族，式(11)比由 Riesz－Thorin 定理所得到的

$$\|\hat{f}\|_{p'} \leqslant c\|f\|_p$$

要好(因 $\|\hat{f}\|_{p'} = \|\hat{f}\|_{p';p'} \leqslant c\|\hat{f}\|_{p';p}$).

注 指标 p，q 间的大小关系限制 $p\leqslant q$ 是本质的. 下面的例子说明我们不能在 $q<p$ 情形应用 Marcinkiewicz 定理. 设 $\alpha>0$，定义 T 为算子 $f\to \dfrac{1}{x^{1+\alpha}}\displaystyle\int_0^x f(t)dt$. 则它是弱 (p,q) 型，其中 $1\leqslant p<\infty$，$\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{p}+\alpha$. 这因为

$$|Tf(x)| \leqslant x^{-1-\alpha+\frac{1}{p'}}\|f\|_p = x^{-\frac{1}{q}}\|f\|_p,\ 1\leqslant p<\infty,$$

但它不是强(p,q)型的. 因为若令 $f(x)=x^{-\frac{1}{p}}\chi_{[1,N]}(x)$，$N>0$，则

$$\|f\|_p \approx (\log N)^{\frac{1}{p}}, \quad Tf(x) \geqslant c\, x^{-\frac{1}{q}} \chi_{[1,N]}.$$

$$\frac{\|Tf\|_q}{\|f\|_p} \geqslant c(\log N)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \to \infty .$$

这说明 T 不可能是 (p,q)型的．

现在讨论涉及到 H_1 的算子内插．在进行算子在 L^p 空间上的内插时，常常需要将 H_1 作为端点空间之一．此时是否还能进行所希望的内插呢？回答是肯定的，现在我们来建立这样的内插定理．我们需要把 Calderón－Zygmund 分解改述成一种与 H_1 的原子分解可以类比的形式．

定理(1.5) 设 $f\in L^p$，$1<p<p_2\leqslant\infty$．则对任意 $\alpha>0$，存在 f 的一个分解 $f(x)=g(x)+b(x)$，使得 $g\in L^{p_2}(\mathbb{R}^n)$，$b\in H_1(\mathbb{R}^n)$，且满足

$$\|g\|_{p_2}^{p_2} \leqslant c\alpha^{p_2-p}\|f\|_p^p,$$

$$\|b\|_{H_1} \leqslant c\,\alpha^{1-p}\|f\|_p^p.$$

证明 对 $|f|^p (f\in L^p)$ 与 $\alpha^p>0$ 作 Calderón－Zygmund 分解，我们得到

i）$\mathbb{R}^n=\Omega\bigcup F$，$\Omega\bigcap F=\phi$；

ii）$\Omega=\bigcup\limits_j Q_j$，$Q_j$ 是互不重叠的方体，满足

$$|\Omega|=\sum_j |Q_j| \leqslant \alpha^{-p}\|f\|_p^p;$$

iii）对每个 Q_j，有

$$\alpha<\left(\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant 2^{\frac{n}{p}}\alpha;$$

iv）$|f(x)|\leqslant c\alpha$，a.e. $x\in F$．

令

$$g(x)=\begin{cases} f(x), & \text{当 } x\in F, \\ f_{Q_j}(x)=\dfrac{1}{|Q_j|}\displaystyle\int_{Q_j} f dx, & \text{当 } x\in Q_j, \end{cases}$$

令 $b(x)=f(x)-g(x)=\sum\limits_j[f(x)-f_{Q_j}]\chi_{Q_j}(x)$. 这样便有

$$\|g\|_{p_2}^{p_2}=\int_F |g(x)|^{p_2}dx+\int_\Omega |g(x)|^{p_2}dx$$

$$\leqslant c\alpha^{p_2-p}\|f\|_p^p+c\sum_j\left(\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|f(x)|dx\right)^{p_2}|Q_j|$$

$$\leqslant c\alpha^{p_2-p}\|f\|_p^p+c\sum_j\left(\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|f(x)|^p dx\right)^{\frac{p_2}{p}}|Q_j|$$

$$\leqslant c\alpha^{p_2-p}\|f\|_p^p+c\sum_j\alpha^{p_2}|Q_j|$$

$$\leqslant c\alpha^{p_2-p}\|f\|_p^p+c\alpha^{p_2}|\Omega|$$

$$\leqslant c\alpha^{p_2-p}\|f\|_p^p .$$

为证明 $b\in H_1(\mathbb{R}^n)$，先证明 $a_j(x)=(c\alpha)^{-1}|Q_j|^{-1}(f(x)-f_{Q_j})\cdot\chi_{Q_j}(x)$是一个$(1,p)$原子. 事实上，支集条件与消失矩条件是明显的，只须验证大小条件：

$$\left(\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|a_j(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=(c\alpha)^{-1}|Q_j|^{-1}\left(\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|f(x)-f_{Q_j}|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant(c\alpha)^{-1}|Q_j|^{-1}\left[\left(\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+|f_{Q_j}|\right]$$

$$\leqslant (c\alpha)^{-1}|Q_j|^{-1}\left[\left(\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}+c\,\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|f(x)|\,dx\right]$$

$$\leqslant c\alpha^{-1}|Q_j|^{-1}\left(\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant c\,|Q_j|^{-1}.$$

而 b 中原子系数的和为

$$\sum_j (c\alpha|Q_j|)=c\alpha\sum_j|Q_j|\leqslant c\alpha|\Omega|\leqslant c\alpha^{1-p}\|f\|_p^p.$$

这就证明了 $\|b\|_{H_1}\leqslant c\alpha^{1-p}\|f\|_p^p$.定理证毕.

定理(1.6) 设 $1<p_2<\infty$，T 是映 $H_1+L^{p_2}$ 到 $\mathbb{R}^n$ 上可测函数的次线性算子．若 T 是弱 $(H_1,1)$型与弱 (p_2,p_2)型的，则对 $1<p<p_2$，T 是 L^p 有界的．

这里弱 $(H_1,1)$型的定义类似于弱 (p_1,p_1)型，只是在弱型定义的不等式右边，用 H_1 范数代替 L^1 范数．

证明 根据定理(1.5)，作分解 $f=g+b$，其中

$$\|g\|_{p_2}^{p_2}\leqslant c\alpha^{p_2-p}\|f\|_p^p,$$

$$\|b\|_{H_1}\leqslant c\alpha^{1-p}\|f\|_p^p.$$

因此

$$|\{x\in\mathbb{R}^n:|Tf(x)|>\alpha\}|$$

$$\leqslant\left|\left\{x\in\mathbb{R}^n:|Tg(x)|>\frac{\alpha}{2}\right\}\right|+\left|\left\{x\in\mathbb{R}^n:|Tb(x)|>\frac{\alpha}{2}\right\}\right|$$

$$\leqslant c\alpha^{-p_2}\|g\|_{p_2}^{p_2}+c\,\alpha^{-1}\|b\|_{H_1}$$

$$\leqslant c\alpha^{-p}\|f\|_p^p.$$

这说明，对任意$p>1$，T 是弱(p,p)型的，用 Marcinkiewicz 内插定理，知 T 是(p,p)型的，只要 $1<p<p_2$. 证毕.

差不多用同样的证明可将上述定理推广到指标不必一致的空间对的情形. 如下所示.

命 题(1.7) 设 $1=p_0<p_1\leqslant\infty$，$1\leqslant r_0<\infty$，$p_1\leqslant r_1$，且 $\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_0}=\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_0}$. 设次线性算子 T 同时是弱(H_1,L^{r_0})型与强(L^{p_1},L^{r_1})型. 则对 $p_0<p<p_1$，r 满足 $\frac{1}{p}-\frac{1}{r}=\frac{1}{p_1}-\frac{1}{r_1}$，$T$ 也是(L^p,L^r)型.

§7.2 算子的弱型有界的进一步讨论

Marcinkiewicz 内插定理，以及其他一些事实(例如算子序列的极大算子的弱型有界推出算子序列的收敛)，说明算子的弱型有界表现是一很重要的概念. 本节首先给出弱型有界与强型有界的关系的一个简单事实，然后介绍 A. Calderón 给出的弱有界概念的一种变形以及它在算子内插中带来的一个小的推广. 我们本节的对象是定义在一般测度空间(X,μ)上某些函数空间取值于(Y,v)上可测函数的拟线性算子.

定义(2.1) 设 $0<p\leqslant\infty$，$0<r<q<\infty$，$0<a\leqslant\infty$，称拟线性算子 T 是弱$(p,q)_a$型的，如果

$$\begin{aligned}\|Tf\|_{L_a^{q,\infty}}&=\sup_{\lambda>0,\,E\subset\{|Tf|>\lambda\},|E|\leqslant a}\{\lambda|E|^{\frac{1}{q}}\}\\&\leqslant c_{p,\cdot}^{q,\infty}\|f\|_p,\end{aligned}\tag{1}$$

$$\|Tf\|_{(L^p,WL^q)_a}=\inf\{c_{p,q,a}:(1)\text{成立}\}.\tag{2}$$

定理(2.2) 设 T 是弱$(p,q)_a$型，则 $\forall r<q$，$\forall E\subset Y$，

$|E|\leqslant a$，有

$$\left(\int_E |Tf|^r\,dv\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant K_{p,q,r,a}|E|^{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}}\|f\|_p, \tag{3}$$

且 $K_{p,q,r,a}\leqslant c_{q,r}\|T\|_{(L^p,\,WL^q)_a}$．反之，当式(3)对某 $r<q$，$\forall E\subset Y,|E|\leqslant a$ 成立时，T是弱$(p,q)_a$型的，且 $\|T\|_{(L^p,\,WL^q)_a}\leqslant K_{p,q,r,a}$．

证明 设式(1)成立，简记式(1)，(3)中系数分别为 c,k．则(待定θ)

$$\begin{aligned}\int_E |Tf|^r\,dv &= r\int_0^\theta |E\cap\{|Tf|>\lambda\}|\lambda^{r-1}\,d\lambda \\ &\quad + r\int_\theta^\infty |E\cap\{|Tf|>\lambda\}|\lambda^{r-1}\,d\lambda \\ &\leqslant |E|\theta^r + c^q r\int_\theta^\infty \lambda^{r-1-q}\|f\|_p^q\,d\lambda \\ &= |E|\theta^r + \frac{r}{q-r}c^q\|f\|_p^q\theta^{r-q} \\ &= 2\left(\frac{r}{q-1}\right)^{\frac{r}{q}}c^r|E|^{1-\frac{r}{q}}\|f\|_p^r,\end{aligned}$$

这里我们已选 $\theta=\left(\frac{r}{q-1}\right)^{\frac{1}{q}}c|E|^{-\frac{1}{q}}\|f\|_p$.这样我们已证明了

$$\left(\int_E |Tf|^r\,dv\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant C_{q,r}\|T\|_{L_a^{q,\infty}}\|f\|_p$$

反之，任取 $E\subset\{|Tf|>\lambda\}$,且 $|E|\leqslant a$，则

$$\lambda|E|^{\frac{1}{r}}\leqslant\left(\int_E|Tf|^r d\mu\right)^{\frac{1}{r}}\leqslant K|E|^{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}}\|f\|_p,$$

$$\lambda|E|^{\frac{1}{q}}\leqslant K\|f\|_p,\ \|T\|_{(L^p,\,WL^q)_a}\leqslant K.$$

定理证毕.

注 当 $E=X=Y$, $|E|=1$, $p=q=1$时,形如(3)的不等式通常称为 Kolmogorov 不等式.

下面讨论 A. P. Calderón 关于弱型有界概念的一个变形. 设(X,μ)与(Y,ν)是两个一般测度空间. $0<p_1<p_2\leqslant\infty$, $0<q_1$, $q_2\leqslant\infty$, $q_1\neq q_2$. 设 σ 是平面上的以 $\left(\frac{1}{p_i},\frac{1}{q_i}\right)$, $i=1,2$,为端点的线段, η 为其斜率,即

$$\eta=\frac{1}{q_2}-\frac{1}{q_1}\bigg/\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1}\right).$$

设 $\left(\frac{1}{p},\frac{1}{q}\right)$ 为线段上的任意内点. 设 T 是定义于 $L^{p_1,1}(X)+L^{p_2,1}(X)$上的 $\mathscr{M}(Y)$中取值的拟线性算子. A. Calderón 对(X,μ)上可测函数定义了如下拟线性算子

$$S_\sigma(f,t)=\int_0^\infty\varphi(t,s)f^*(s)\frac{ds}{s},\ t\in\mathbb{R}_+,\tag{4}$$

其中

$$\varphi(t,s)=\min\left(s^{\frac{1}{p_1}}t^{-\frac{1}{q_1}},s^{\frac{1}{p_2}}t^{-\frac{1}{q_2}}\right)=\begin{cases}t^{-\frac{1}{q_1}}\ s^{\frac{1}{p_1}}, & s\leqslant t^\eta,\\ t^{-\frac{1}{q_2}}\ s^{\frac{1}{p_2}}, & s>t^\eta,\end{cases}\tag{5}$$

定义(2.3) 设p_i, q_i,以及拟线性算子 T 如上. 称 T 是$(p_1,q_1;p_2,q_2)$型的,如果

$$(Tf)^*(t)\leqslant c\,S_\sigma(f,t),\quad\forall f\in S(X),\tag{6}$$

其中 $S(X)$ 如通常那样表示 (X,μ) 上简单函数空间.

我们要指出这个新概念比旧的弱型有界概念要弱. 确切而言, 当 $p_i<\infty$ 时, T 的限制弱 (p_i,q_i) 型, $i=1,2$(它就是下面引理中出现的 $L^{p_i,1}$ 到 $L^{q_i,\infty}$ 的有界性, 见 §7.6 习题 3)推出 T 是 $(p_1,q_1;p_2,q_2)$ 型.

引理(2.4) 设 $0<p_1<p_2<\infty$, $0<q_1,q_2\leqslant\infty$, T 是定义于 $L^{p_1,1}(X)+L^{p_2,1}(X)$ 上取值于 $\mathscr{M}(Y)$ 内的拟线性算子, 且 T 同时是 $L^{p_i,1}(X)$ 到 $L^{q_i,\infty}(Y)$ 内有界的, 则存在仅依赖于线段 σ 与 T 的两个算子范数的常数 c 使

$$(Tf)^*(t)\leqslant c\,S_\sigma(f,t),\quad \forall t>0, \forall f\in L^{p_1,1}(X)+L^{p_2,1}(X). \tag{7}$$

证明 设 $f\in L^{p_1,1}(X)+L^{p_2,1}(X)$, $t>0$ 任给. 令

$$f_1=\left(f(x)-\frac{f(x)}{|f(x)|}f^*(t^\eta)\right)\chi_E,\ f_2=f-f_1,$$

$$E=\{|f|>f^*(t^\eta)\}.$$

则由 $|f_1|=(|f|-f^*(t^\eta))\chi_E$, $|E|=t_-^\eta$ (t_-^η 表示 $f^*(s)$ 取值 $f^*(t^\eta)$ 的那个区间的左端点), 知

$$f_1^*(\tau)=f^*(\tau)-f^*(t^\eta),\ \tau\leqslant t_-^\eta;\ f_1^*(\tau)=0,\ \tau>t_-^\eta.$$

此外也有

$$f_2^*(\tau)=\begin{cases} f^*(t^\eta), & \tau\leqslant t_-^\eta,\\ f^*(\tau), & \tau>t_-^\eta.\end{cases}$$

这样 $f^*(\tau)=f_1^*(\tau)+f_2^*(\tau)$. (这个分解的优点在于 f 的非增重排函数与 f_1,f_2 的非增重排函数有如此简单的关系. 我们下面讨论 L^p 的内插空间时还会用到这个分解.) 注意 $f_i\in L^{p_i,1}$, 则有

$$(Tf)^*(t)\leqslant c(Tf_1)^*\left(\frac{t}{2}\right)+c(Tf_2)^*\left(\frac{t}{2}\right),$$

$$(Tf_1)^*\left(\frac{t}{2}\right)\leqslant c\,t^{-\frac{1}{q_1}}\|f_1\|_{p_1,1}=c\,t^{-\frac{1}{q_1}}\int_0^{t^\eta}s^{\frac{1}{p_1}}f_1^*(s)\frac{ds}{s}$$

$$\leqslant c\,S_\sigma(f_1,t).$$

$$(Tf_2)^*\left(\frac{t}{2}\right)\leqslant c\,t^{-\frac{1}{q_2}}\|f_2\|_{p_2,1}$$

$$=c\,t^{-\frac{1}{q_2}}\left\{\int_0^{t^\eta}s^{\frac{1}{p_2}}f^*(t^\eta)\frac{ds}{s}+\int_{t^\eta}^{\infty}s^{\frac{1}{p_2}}f_2^*(s)\frac{ds}{s}\right\}.$$

但因（注意 $p_i\neq\infty$）

$$p_2\int_0^{t^\eta}t^{-\frac{1}{q_2}}s^{\frac{1}{p_2}-1}ds=t^{-\frac{1}{q_2}+\frac{\eta}{p_2}}=t^{-\frac{1}{q_1}+\frac{\eta}{p_1}}=p_1\int_0^{t^\eta}t^{-\frac{1}{q_1}}s^{\frac{1}{p_1}-1}ds,$$

故得

$$(Tf_2)^*\left(\frac{t}{2}\right)\leqslant c\int_0^{t^\eta}t^{-\frac{1}{q_1}}s^{\frac{1}{p_1}}f^*(t^\eta)\frac{ds}{s}$$

$$+c\int_{t^\eta}^{\infty}t^{-\frac{1}{q_2}}s^{\frac{1}{p_2}}f_2^*(s)\frac{ds}{s}\leqslant c\,S_\sigma(f_2,t).$$

于是

$$(Tf)^*(t)\leqslant c\,S_\sigma(f_1+f_2,t)=c\,S_\sigma(f,t).$$

引理得证．

下面讨论借助于这个 S_σ 算子，我们能得到什么内插结果．先讨论 S_σ 算子本身．

引理（2.5） 设 $0<p_1<p_2\leqslant\infty$，$0<q_1,q_2\leqslant\infty$，则 S_σ 是定义在 $L^{p_1,1}(\mathbb{R}_+)+L^{p_2,1}(\mathbb{R}_+)$ 上的拟线性算子，是 $L^{p_i,1}(\mathbb{R}_+)$ 到 $L^{q_i,\infty}(\mathbb{R}_+)$ 内有界的，也是 $L^{p,r}(\mathbb{R}_+)$ 到 $L^{q,r}(\mathbb{R}_+)$ 有界的，$0<r\leqslant\infty$，$\left(\frac{1}{p},\frac{1}{q}\right)\in\sigma$．

证明 注意 $\varphi(t,s)$是 t 的下降函数，故

$$S_\sigma(f)^*(t)=S_\sigma(f^*,t)=\int_0^\infty \varphi(t,s)f^*(s)\frac{ds}{s}.$$

现设 $0<r\leqslant\infty$，$(\frac{1}{p},\frac{1}{q})\in\sigma$，有

$$(S_\sigma f)^*(t)=t^{-\frac{1}{q_1}}\int_0^{t^\eta}s^{\frac{1}{p_1}}f^*(s)\frac{ds}{s}+t^{-\frac{1}{q_2}}\int_{t^\eta}^\infty s^{\frac{1}{p_2}}f^*(s)\frac{ds}{s},$$

$$\left(\int_0^\infty\left(t^{\frac{1}{q}}(S_\sigma f)^*(t)\right)^r\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$\leqslant c\left(\int_0^\infty\left(t^{(\frac{1}{q}-\frac{1}{q_1})\frac{1}{\eta}}\int_0^t s^{\frac{1}{p_1}}f^*(s)\frac{ds}{s}\right)^r\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$+c\left(\int_0^\infty\left(t^{(\frac{1}{q}-\frac{1}{q_2})\frac{1}{\eta}}\int_t^\infty s^{\frac{1}{p_2}}f^*(s)\frac{ds}{s}\right)^r\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

注意到 $\frac{1}{\eta}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{q_i}\right)=\frac{1}{p}-\frac{1}{p_i}$，$i=1,2$，以及 $\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}<0$，$\frac{1}{p}-\frac{1}{p_2}>0$，应用 Hardy 不等式(见§3.2 定理2.14)即得

$$\|S_\sigma f\|_{L^{q,r}}\leqslant c\left(\int_0^\infty\left(t^{\frac{1}{p}}f^*(t)\right)^r\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{r}}=c\|f\|_{L^{p,r}}.$$

这就证明了引理.

下面是借助 S_σ 所得到的 Marcinkiewicz 定理的推广.

定理(2.6) 设 $0<p_1<p_2<\infty$，$0<q_1,q_2\leqslant\infty$，T 是 $L^{p_1}(X)$

到 $L^{q,\infty}(\mathscr{X})$ 内有界的拟线性算子，则对 $\left(\frac{1}{p},\frac{1}{q}\right)\in\sigma$，$0<r\leqslant\infty$，有

$$\|Tf\|_{L^{q,r}}\leqslant c\|f\|_{L^{p,r}},\ \forall f. \tag{8}$$

证明 这是两个引理的直接推论．事实上，我们有

$$\|Tf\|_{L^{q,r}}\leqslant c\|S_\sigma(f)\|_{L^{q,r}}\leqslant c\|f\|_{L^{p,r}}.$$

注 与§7.1所得到的Marcinkiewicz定理比较一下，这里唯一不足的是要求 $p_2<\infty$，其它方面略有改进．这里实质上是由算子 T 的限制弱 (p_i,q_i) 型推出式(8)．这里的处理还有一个优点是引理2.5允许 $p_2=\infty$，而这本身就是算子内插的一个新结果．它说明从拟线性算子的 $(p_0,q_0;\infty,q_2)$ 型可以插出它从 $L^{p,r}$ 到 $L^{q,r}$ 有界，特别地Hilbert变换可以作为 $(1,1;\infty,\infty)$ 型的例子．

§7.3 内插空间的实方法

内插空间与算子内插研究的是同一类问题，只是角度不同罢了．内插空间问题的一般的提法是，给定两个线性拟赋范空间对 (A_0,A_1)，(B_0,B_1)，我们要寻找 A_0 与 A_1，B_0 与 B_1 的"中间空间" A，B，使得 A_0+A_1 到 B_0+B_1 内的线性算子 T，只要在 A_j 到 B_j 是有界的，$j=0,1$，则它必是 A 到 B 有界的．这种空间就称为内插空间．内插空间理论的目的就是把这些中间空间刻划出来．

我们从内插空间的一般概念开始．称拓扑向量空间 A_0 与 A_1 是相容的，如果存在Hausdorff空间 $\mathscr{A}$，使得 A_0 与 A_1 都是 $\mathscr{A}$ 的子空间．如果 A_0 与 A_1 是相容的空间对，那末可以定义它们的和与交

$$A_0+A_1=\{a:a=a_0+a_1,a_0\in A_0,a_1\in A_1\}, \tag{1}$$

$$A_0\cap A_1=\{a:a\in A_0,\ a\in A_1\}. \tag{2}$$

下面我们主要考虑拟赋范空间，除非特别申明，空间两字就指这样的空间．线性空间 A 称为拟赋范的空间，如果其中定义了一个拟范数．所谓拟范数与范数的差别，仅仅是范数的次可加性（对应于距离的三角不等式）换为如下弱次可加性：

$$\|x+y\| \leqslant c\ (\|x\|+\|y\|),\quad \forall x, y.$$

对相容的空间对 A_0, A_1，

$$\|a\|_{A_0\cap A_1} = \max(\|a\|_{A_0}, \|a\|_{A_1}), \tag{3}$$

$$\|a\|_{A_0+A_1} = \inf_{\substack{a=a_0+a_1\\ a_0\in A_0, a_1\in A_1}} (\|a_0\|_{A_0} + \|a_1\|_{A_1}), \tag{4}$$

分别定义了 $A_0\cap A_1$ 与 A_0+A_1 的拟范数．当 A_0 与 A_1 是完备拟赋范或是 Banach 空间时，$A_0\cap A_1$ 与 A_0+A_1 也是完备拟赋范或 Banach 空间．下面我们常记相容空间对 (A_0, A_1) 为 $\overline{A}$，类似地 $\overline{B}=(B_0, B_1)$．

我们称 T 是 $\overline{A}$ 到 $\overline{B}$ 有界的，如果 T 分别在 A_0, A_1 的限制 $T_{A_0}: A_0\to B_0$；$T_{A_1}: A_1\to B_1$ 是有界的．此外通常用 $\|T\|_{\overline{A},\overline{B}}$ 记 $T:\overline{A}\to\overline{B}$ 的算子范数．显然

$$\begin{aligned} &\|T\|_{A_0+A_1, B_0+B_1} \leqslant \max(\|T\|_{A_0,B_0}, \|T\|_{A_1,B_1}),\\ &\|T\|_{A_0\cap A_1, B_0\cap B_1} \leqslant \max(\|T\|_{A_0,B_0}, \|T\|_{A_1,B_1}). \end{aligned} \tag{5}$$

定义（3.1） 设 $\overline{A}=(A_0, A_1)$ 是相容空间对．称空间 A 为 $\overline{A}$ 的中间空间，如果

$$\Delta(\overline{A}) \subset A \subset \sum(\overline{A}), \tag{6}$$

其中 $\Delta(\overline{A})=A_0\cap A_1$，$\sum(\overline{A})=A_0+A_1$．称 A 为 $\overline{A}$ 的内插空间，如果 A 是 $\overline{A}$ 的中间空间，且当 $T:\overline{A}\to\overline{A}$ 有界时（即 T 限制在 A_i 上是有界的，$i=0,1$），必有 $T: A\to A$ 有界．称 A 与 B 是 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 的内插空间，如果 A，B 分别是 $\overline{A}$，$\overline{B}$ 的中间空间，且当 $T:\overline{A}\to\overline{B}$ 有界时（即 T 限制在 A_i 上是到 B_i 内有界的，$i=0,1$），

必有 $T: A \to B$ 有界．称为型 θ 的 $0 \leqslant \theta \leqslant 1$，如果

$$\|T\|_{A,B} \leqslant c\|T\|_{A_0,B_0}^{1-\theta} \cdot \|T\|_{A_1,B_1}^{\theta}.$$

式(5)说明 $\Sigma(\overline{A})$ 与 $\Sigma(\overline{B})$（以及 $\Delta(\overline{A})$ 与 $\Delta(\overline{B})$ 就是 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 的内插空间．此外我们提请注意，当 A 与 B 是 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 的内插空间时，并不意味着 A，B 分别是 $\overline{A}$，$\overline{B}$ 的内插空间．

本节将介绍实内插方法中的 K 方法与 J 方法. 首先定义 K 泛函及其决定的空间．

定义(3.2) 设 $\overline{A}=(A_0, A_1)$ 是相容空间对，$0<t<\infty$，则 K 泛函定义为

$$K(t,a)=k(t,a;\overline{A})$$

$$=\inf\{\|a_0\|_{A_0}+t\|a_1\|_{A_1}: a=a_0+a_1, a_i \in A_i, i=0,1\}. \quad (7)$$

易知对每个 $t>0$ 固定，$K(t,a)$ 是 $\Sigma(\overline{A})$ 的一个等价拟范数．对固定 $a \in A_0+A_1$，$K(t,a)$ 是 t 的连续增加凹函数，且

$$\min(1,t)\|a\|_{A_0+A_1} \leqslant K(t,a) \leqslant \max(1,t)\|a\|_{A_0+A_1}. \quad (8)$$

且当 $a \in A_0 \cap A_1$ 时，有

$$K(t,a) \leqslant \min(1,t)\|a\|_{A_0 \cap A_1}. \quad (9)$$

这些可如下得出．设 $t_1<t_2$，则对 a 的任一分解 $a=a_0+a_1$，有

$$K(t_1,a) \leqslant \|a_0\|_{A_0}+t_1\|a_1\|_{A_1}<\|a_0\|_{A_0}+t_2\|a_1\|_{A_1},$$

这说明 $K(t,a)$ 单调增加，设 $t_1<t<t_2$，则

$$\frac{t_2-t}{t_2-t_1}(\|a_0\|_{A_0}+t_1\|a_1\|_{A_1})+\frac{t-t_1}{t_2-t_1}(\|a_0\|_{A_0}+t_2\|a_1\|_{A_1})$$
$$=\|a_0\|_{A_0}+t\|a_1\|_{A_1},$$

对所有分解两边取 inf 即得

$$\frac{t_2-t}{t_2-t_1}K(t_1,a)+\frac{t-t_1}{t_2-t_1}K(t_2,a) \leqslant K(t,a).$$

这说明 $K(t,a)$是凹的，因而也自动是连续的．

既然 $\forall a\in A_0\cap A_1$，a 有分解 $a=0+a=a+0$，故

$$K(t,a)\leqslant \min(\|a_0\|_{A_0},t\|a_1\|_{A_1})\leqslant \min(1,t)\max(\|a_0\|_{A_0},\|a_1\|_{A_1}).$$

这证明了式(9)，断言证毕．

现设 $\theta\in\mathbb{R}$，$0<q\leqslant\infty$．我们由 $K(t,a)$定义出如下空间．

定义(3.3) 设$\overline{A}=(A_0,A_1)$是相容空间对，θ,q 如上．定义

$$(A_0,A_1)_{\theta,q,K}=\{a\in A_0+A_1:\|a\|_{\theta,q,K}=$$
$$\|t^{-\theta}K(t,a)\|_{\widetilde{L}_q}<\infty\},\qquad(10)$$

$$\widetilde{L}_q=L^q\left((0,\infty),\ \frac{dt}{t}\right),\ 0<q\leqslant\infty.\qquad(11)$$

简记$(A_0,A_1)_{\theta,q,K}$ 为 $K_{\theta,q}(\overline{A})$．

我们先给出空间 $K_{\theta,q}(\overline{A})$的一些初等性质．

定理(3.4) $K_{\theta,q}(\overline{A})$有如下的初等性质

(a) 当 $q<\infty$，$\theta\notin(0,1)$，或 $q=\infty$，$\theta\notin[0,1]$，则 $K_{\theta,q}(\overline{A})$仅由零元构成．

(b) $(A_0,A_1)_{\theta,q,K}=(A_1,A_0)_{1-\theta,q,K}$．

(c) $A_0\cap A_1\subset(A_0,A_1)_{\theta,q,K}\subset A_0+A_1$，特别当 $A_0=A_1$，$(A_0,A_1)_{\theta,q,K}=A_0=A_1$．

(d) 存在 $c=c_{\theta,q}$，使 $\forall a\in(A_0,A_1)_{\theta,q,K}$，$\forall t$，有

$$K(t,a)\leqslant ct^{-\theta}\|a\|_{\theta,q,K}.$$

(e) 当 $0<\theta<1$，$0<p\leqslant q\leqslant\infty$ 则

$$(A_0,A_1)_{\theta,p,K}\subset(A_0,A_1)_{\theta,q,K}.$$

(f) 设 $A_0\subset A_1$，$0<\theta<\delta<1$，$0<p,q\leqslant\infty$，则

$$(A_0,A_1)_{\theta,q,K}\subset(A_0,A_1)_{\delta,p,K}.$$

证明 (a)由下式推出

$$\|a\|_{A_0+A_1}\|t^{-\theta}\min(1,t)\|_{\tilde{L}_q}\leqslant\|a\|_{\theta,q,K},\tag{12}$$

显然在(a)中所述指标范围内，对非零元 a，左边为 ∞ .

(b) 由 $K(t,a;A_0,A_1)=t\,K(t^{-1},a;A_1,A_0)$得 .

(c) 式(8)即说明 $K_{\theta,q}(\overline{A})\subset A_0+A_1$,式(9)即说明 $A_0\bigcap A_1\subset K_{\theta,q}(\overline{A})$.

(d) $q=\infty$ 时是显然的；$q<\infty$ 时有

$$\begin{aligned}t^{-\theta}K(t,a)&=c\,K(t,a)\left(\int_t^{\infty}s^{-\theta q}\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{q}}\\&\leqslant c_{\theta,q}\left(\int_0^{\infty}(t^{-\theta}K(t,a))^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}.\\&=c_{\theta q}\|a\|_{Q,q,K}.\end{aligned}$$

(e) $p<q=\infty$ 时的断言已蕴含在断言(d)中，设 $q<\infty$,有

$$\begin{aligned}\|a\|_{\theta,q,K}&\leqslant\sup_{t>0}(t^{-\theta}K(t,a))^{\frac{q-p}{q}}\left(\int_0^{\infty}(t^{-\theta}K(t,a))^p\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}\\&\leqslant c_{\theta,q}\|a\|_{\theta,p,K}.\end{aligned}$$

(f) 设 $A_0\subset A_1$,则 $\forall a\in A_1$，有 $K(t,a)\leqslant t\|a\|_{A_1}$,故

$$\|a\|_{A_0+A_1}=K(1,f)\leqslant\|a\|_{A_1}.$$

此外存在 a 的适当分解使 $\|a_0\|_{A_0}+\|a_1\|_{A_1}\leqslant c\|a\|_{A_0+A_1}$,从而

$$\begin{aligned}\|a\|_{A_1}\leqslant k_{A_1}(\|a_0\|_{A_1}+\|a_1\|_{A_1})&\leqslant k_{A_1}(c_{A_0,A_1}\|a_0\|_{A_0}+\|a_1\|_{A_1})\\&\leqslant c\|a\|_{A_0+A_1}.\end{aligned}$$

这说明 $A_1=A_0+A_1$.现设 $a\in(A_0,A_1)_{\theta,\infty}$,则(记 $c=c_{\delta,\theta,p,q}$)

$$\|a\|_{\delta,p,K}=\left(\int_0^1 (t^{-\delta}K(t,a))^p\frac{dt}{t}+\int_1^\infty (t^{-\delta}K(t,a))^p\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant c\|a\|_{A_1}\left(\int_0^1 t^{(1-\delta)p-1}\,dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+c\sup_{t>0}(t^{-\theta}K(t,a))\left(\int_1^\infty t^{(\theta-\delta)p-1}\,dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant c\|a\|_{A_0+A_1}+c\|a\|_{\theta,\infty,K}\leqslant c\|a\|_{\theta,\infty,K}\leqslant c\|a\|_{\theta,q,K}.$$

这证完了定理．

我们已经设计了一个实内插方法，所谓 K 方法．现在我们证明这个方法满足作为一种内插方法的基本要求：即对于每个从 A_0+A_1 到 B_0+B_1 内的线性算子，当 T 是 A_i 到 B_i 内有界时，一定也是 $K_{\theta,q}(\overline{A})$ 到 $K_{\theta,q}(\overline{B})$ 内有界的，按前面的术语，即 $K_{\theta,q}(\overline{A})$ 与 $K_{\theta,q}(\overline{B})$ 是 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 的内插空间．

定理（3.5） 设 $\overline{A}=(A_0,A_1)$，$\overline{B}=(B_0,B_1)$ 是两个相容空间对，θ,q 是允许指标，则 $K_{\theta,q}(\overline{A})$ 与 $K_{\theta,q}(\overline{B})$ 是 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 的型为 θ 的内插空间．

证明 首先 $K_{\theta,q}(\overline{A})$，$K_{\theta,q}(\overline{B})$ 分别是 $\overline{A}$，$\overline{B}$ 的中间空间，这由定理(3.4)的(c)知．现设 T 是 $\overline{A}$ 到 $\overline{B}$ 内的线性有界算子（即 T 是 A_0+A_1 到 B_0+B_1 内线性的，且限制在 A_i 上是到 B_i 内的有界算子 $i=0,1$）．我们要证 T 限制在 $K_{\theta,q}(\overline{A})$ 上是到 $K_{\theta,q}(\overline{B})$ 内有界的．设 $a\in A_0+A_1$，$a=a_0+a_1$，是其任一分解，则 $Ta=Ta_0+Ta_1$ 便是 Ta 的一个在 B_0+B_1 内的分解．现要估计 $K(t,Ta:\overline{B})$ 我们有

$$K(t,Ta;\overline{B})=\inf_{Ta=b_0+b_1}(\|b_0\|_{B_0}+t\|b_1\|_{B_1})$$

$$\leqslant\inf_{a=a_0+a_1}(\|Ta_0\|_{B_0}+t\|Ta_1\|_{B_1})$$

$$\leqslant \inf_{a=a_0+a_1} (M_0 \| a_0 \|_{A_0} + t M_1 \| a_1 \|_{A_1})$$

$$= M_0 K \left(\frac{M_1}{M_0} t , a , \overline{A} \right), \tag{13}$$

$$\| Ta \|_{\theta,q,K} = \left(\int_0^\infty (t^{-\theta} K(t, Ta; \overline{B}))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant M_0 \left(\int_0^\infty \left(t^{-\theta} K\left(\frac{M_1}{M_0} t , a ; \overline{A} \right)\right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= c M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \| a \|_{\theta,q,K} .$$

这就证明了定理 .

注 定理中考虑的 T 是线性算子 . 但实际应用中遇到许多拟线性算子 . 定理对如下一类拟线性算子 T 是适用的 . 记 $\mathscr{L}(\overline{A}, \overline{B})$为 A_0+A_1 到 B_0+B_1 内的所有那些拟线性算子 T 的集合，他们满足

(a) T 是 A_i 到 B_i 内有界的，界为 M_i , $i=0,1$,

(b) 对 $a \in A_0+A_1$ 的任一分解 $a=a_0+a_1$,存在 Ta 在 B_0+B_1 中的对应分解 $Ta=b_0+b_1$,使得 $\| b_i \|_{B_i} \leqslant c_T M_i \| a_i \|_{A_i}$, $i=0,1$.

则本定理中的算子 T 可以是 $\mathscr{L}(\overline{A}, \overline{B})$中的算子 . 这因为式(13)的推导仍然有效，只是不等式将是

$$K(t, Ta; \overline{B}) \leqslant c_T M_0 K \left(\frac{M_1}{M_0} t , a ; \overline{A} \right), \ \forall t>0 . \tag{14}$$

这样的算子类 $\mathscr{L}(\overline{A}, \overline{B})$有下述例子 . 设 B_j, $j=0,1$,是同一测度空间(Y, ν)上由可测函数构成的拟赋范空间 . 其拟范数满足“次序保持”性质，即

$$|f(y)| \leqslant |g(y)| \Rightarrow \|f\|_{B_i} \leqslant \|g\|_{B_i}, \ i=0,1 .$$

则 $\mathscr{L}(\overline{A},\overline{B})$就是所有那些 A_0+A_1 到 B_0+B_1 内的拟线性的，且限制在 A_i 上是到 B_i 内有界的，算子$i=0,1$，我们来验证上述(b)中所要求的性质．设 $a=a_0+a_1$ 是 $a\in A_0+A_1$ 的任一分解，T 是 A_0+A_1 到 B_0+B_1 内的拟线性的且限制在 A_i 上是到 B_i 内有界的算子，记 $\widetilde{T}a=|Ta|$，则

$$\widetilde{T}(a_0+a_1)=\frac{\widetilde{T}(a_0+a_1)}{\widetilde{T}(a_0)+\widetilde{T}(a_1)}\widetilde{T}(a_0)+\frac{\widetilde{T}(a_0+a_1)}{\widetilde{T}(a_0)+\widetilde{T}(a_1)}\widetilde{T}(a_1)$$
$$=b_0+b_1.$$

注意由 $\widetilde{T}(a_i)\in B_i$，以及 B_i 的“次序保持”性质，以及

$$\widetilde{T}(a_0+a_1)(\widetilde{T}(a_0)+\widetilde{T}(a_1))^{-1}\leqslant c_T(T\text{ 的拟线性})$$

可知
$$b_i=\frac{\widetilde{T}(a_0+a_1)}{\widetilde{T}(a_0)+\widetilde{T}(a_1)}\widetilde{T}(a_i)\in B_i,i=0,1,$$

且

$$\|b_i\|_{B_i}\leqslant c_T\|T(a_i)\|_{B_i}\leqslant G\,M_i\|a_i\|_{A_i},i=0,1.$$

这样 $T(a_0+a_1)=e^{i\theta(y)}b_0(y)+e^{i\theta(y)}b_1(y)$便是$\mathscr{L}$ 中算子所要求的分解．

下面还有两个有关 $K_{\theta,q}(\overline{A})$的简单事实．

定理 3.6 设$\overline{A}$ 是完备的拟赋范（或 Banach）空间对，θ,q 在允许范围（对 Banach 空间情形，$1\leqslant q\leqslant\infty$）．则 $K_{\theta,q}(\overline{A})$也是完备拟赋范（或 Banach）空间.

证明 $\|\cdot\|_{\theta,q,K}$ 成为拟范数（或在 Banach 空间与 $1\leqslant q\leqslant\infty$ 情形为范数）是显然的，只需证完备性．设$\{a_n\}$是 $K_{\theta,q}(\overline{A})$中 Cauchy 序列，则也是 A_0+A_1 中 Cauchy 序列，故有 A_0+A_1 中的极限 a．对任意 $\delta>0$，存在 n_δ 使当 $n,m\geqslant n_\delta$ 时有 $\|a_n-a_m\|_{\theta,q,K}\leqslant\delta$．而对 ε，N 固定有

$$\left(\int_a^N (t^{-\theta}K(t,a-a_n))^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant c\|a_n-a_m\|_{\theta,q,K}+c\left(\int_\delta^N (t^{-\theta}K(t,a-a_m))^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}},$$

由式(8)知上式右边第二项当 $m\to\infty$ 时极限为 0．故

$$\left(\int_\delta^N (t^{-\theta}K(t,a-a_n))^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant c\delta,\forall\varepsilon,N,\forall n\geqslant n_\delta\,.$$

这证明了 $\|a-a_n\|_{\theta,q,K}\to 0$，当 $n\to\infty$ 时．定理获证．

定理(3.7) 设 θ,q 在允许范围，$\overline{A}$ 是相容空间对，则

$$\|a\|_{\theta,q,K}\leqslant c_{\theta,q}\|a\|_{A_0}^{1-\theta}\|a\|_{A_1}^{\theta},\forall a\in A_0\bigcap A_1\,. \tag{15}$$

证明 考虑$(\mathbb{C},\mathbb{C})$这一相容空间对，根据定理(3.4)的(c)知它与 $\mathbb{C}$ 等价(范数的等价系数依赖于 θ,q)．每个 $a\in A_0\bigcap A_1$ 定义了 $\mathbb{C}$ 到A_j 内的有界线性算子 $T(\lambda)=\lambda a$、$\lambda\in\mathbb{C}$，范数为 $M_j=\|a\|_{A_j}$．由定理(3.5)知 T 也是$(\mathbb{C},\mathbb{C})_{\theta,q,K}$ 到$(A_0,A_1)_{\theta,q,K}$ 内有界的，界不大于 $cM_0^{1-\theta}M_1^{\theta}$．但 T 作为 $\mathbb{C}$ 到 $(A_0,A_1)_{\theta,q,K}$ 内的算子的范数即 $\|a\|_{\theta,q,K}$．这证明了定理．

下面我们讨论 J 方法．它也可以对拟赋范空间进行，且定义空间的指标 θ，q 的范围与 K 方法相同，只不过对拟赋范空间与 $q<1$ 情形讨论要麻烦些．这因为我们要对无穷和(或积分)的拟范数进行估计，这时要用到范数的次可加性，这对拟范数是不行的．因此必须对拟赋范空间改赋一个等价的 r 范数，即满足次可加性，但只是 r 齐次的范数 $\|\cdot\|$，即

$$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|,\ \|\lambda x\|=|\lambda|^r\|x\|,$$

然后才能平行地对拟赋范空间以及 $q<1$ 情形讨论 J 方法，见

J. Bergh 与 J. Lofström 的书 [BL]. 为了简单起见，下面我们仅考虑赋范空间的相容对 $\overline{A}=(A_0, A_1)$，以及 $\theta\in\mathbb{R}$（事实上 $\theta\in[0,1]$），$1\leqslant q\leqslant\infty$ 情形.

设 $\overline{A}=(A_0, A_1)$ 是相容的赋范空间对，$0<t<\infty$，定义 J 泛函为

$$J(t,a)=J(t,a;\overline{A})=\max(\|a\|_{A_0}, t\|a\|_{A_1}), \tag{16}$$

其中 $a\in\Delta(\overline{A})$.

显然，对固定的 t，$J(t,a)$ 是 $\Delta(\overline{A})$ 的等价范数. $J(t,a)$ 是 t 的正的，增加的凸函数，且对 $t,s\in\mathbb{R}^+$ 有

$$J(t,a)\leqslant\max(1,t/s)J(s,a), \tag{17}$$

$$K(t,a)\leqslant\min(1,t/s)J(s,a). \tag{18}$$

定义(3.8) 设 $\overline{A}=(A_0, A_1)$ 如上，$0\leqslant\theta\leqslant1$，$1\leqslant q\leqslant\infty$，定义

$$(A_0,A_1)_{\theta,q,J}=\{a\in\Sigma(\overline{A}):\|a\|_{\theta,q,J}<\infty\},$$

其中 a 可以表为 $a=\int_0^\infty u(t)\frac{dt}{t}$（积分在 $\Sigma(\overline{A})$ 中收敛），$u(t)\in\Delta(\overline{A})$，对 t 可测，同时

$$\|a\|_{\theta,q,J}=\inf\|t^{-\theta}J(t,u(t))\|_{\tilde{L}_q}, \tag{19}$$

下确界是对一切表达式 $a=\int_0^\infty u(t)\frac{dt}{t}$ 而取的.

类似于 K 方法，记 $J_{\theta,q}(\overline{A})=(A_0,A_1)_{\theta,q,J}$. 我们有

定理(3.9) 设 $0<\theta<1$，$1\leqslant q\leqslant\infty$，$T$ 是 A_0+A_1 到 B_0+B_1 的线性算子，$\|T\|_{A_i,B_i}=M_i$，$i=0,1$，则 T 是 $J_{\theta,q}(\overline{A})$ 到 $J_{\theta,q}(\overline{B})$ 内有界的，且其界 $\leqslant M_0^{1-\theta}M_1^\theta$. 且当 $a\in\Delta(\overline{A})$ 时，有

$$\|a\|_{\theta,q,J}\leqslant cs^{-\theta}J(s,a;\overline{A}). \tag{20}$$

证明 显然，$\|a\|_{\theta,q,J}$是范数．对$a\in(A_0,A_1)_{\theta,q,J}$，由于$T$：$\Sigma(\overline{A})\to\Sigma(\overline{B})$有界线性，有

$$Ta=T\left(\int_0^\infty u(t)\frac{dt}{t}\right)=\int_0^\infty Tu(t)\frac{dt}{t}$$

在$\Sigma(\overline{B})$收敛，而

$$\begin{aligned}J(t,Tu(t))&=\max(\|Tu(t)\|_{B_0},t\|Tu(t)\|_{B_1})\\&\leqslant M_0\max\left(\|u(t)\|_{A_0},t\frac{M_1}{M_0}\|u(t)\|_{A_1}\right)\\&\leqslant M_0J\left(\frac{M_1}{M_0}t,u(t)\right),\end{aligned}\tag{21}$$

经换元，对$u(t)$取下确界，便得

$$\|Ta\|_{\theta,q,J}\leqslant M_0^{1-\theta}M_1^\theta\|a\|_{\theta,q,J}.$$

注意到当$a\in\Delta(\overline{A})$时，有

$$a=\frac{1}{\log 2}\int_1^2 a\frac{dt}{t}=\frac{1}{\log 2}\int_0^\infty a\chi_{[1,2]}(t)\frac{dt}{t},$$

由(17)便可推出(20)．定理(3.9)证完．

下面我们要证明关于K泛函与J泛函的一个等价定理．为此，我们需要$(A_0,A_1)_{\theta,q,K}$，$(A_0,A_1)_{\theta,q,J}$范数的离散刻划．

记序列空间$\lambda^{\theta,q}$为

$$\lambda^{\theta,q}=\left\{(\alpha_\nu)_{-\infty}^\infty:\|(\alpha_\nu)\|_{\lambda^{\theta,q}}=\left(\sum_{-\infty}^\infty(2^{-\nu\theta}|\alpha_\nu|)^q\right)^{\frac{1}{q}}<\infty\right\}.\tag{22}$$

引理(3.10) 设$a\in\Sigma(\overline{A})$，$\alpha_\nu=K(2^\nu,a;\overline{A})$，则$a\in(A_0,A_1)_{\theta,q,K}$当且仅当$(\alpha_\nu)\in\lambda^{\theta,q}$，且

$$2^{-\theta}\log 2\,\|(\alpha_\nu)\|_{\lambda^{\theta,q}} \leqslant \|a\|_{\theta,q,K} \leqslant 2\log 2\,\|(\alpha_\nu)\|_{\lambda^{\theta,q}}.$$

证明 由于

$$\|a\|_{\theta,q,K}=\left(\sum_{-\infty}^{\infty}\int_{2^\nu}^{2^{\nu+1}}[t^{-\theta}K(t,a)]^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}$$

以及

$$K(2^\nu,a)\leqslant K(t,a)\leqslant 2K(2^\nu,a),\ 2^\nu\leqslant t\leqslant 2^{\nu+1},$$

便得

$$2^{-\theta}2^{-\nu\theta}\alpha_\nu\leqslant t^{-\theta}K(t,a)\leqslant 2\cdot 2^{-\nu\theta}\alpha_\nu,2^\nu\leqslant t\leqslant 2^{\nu+1}.$$

由此便得引理(3.10)的结论.

引理(3.11) $a\in(A_0,A_1)_{\theta,q,J}$ 当且仅当存在 $u_\nu\in\Delta(\overline{A})$, $-\infty<\nu<\infty$,使

$$a=\Sigma_\nu u_\nu(\text{在}\ \Sigma(\overline{A})\ \text{中收敛}),$$

且 $(J(2^\nu,u_\nu))\in\lambda^{\theta,q}$.进而

$$\|a\|_{\theta,q,J}\approx\inf_{u_\nu}\|(J(2^\nu,u_\nu))\|_{\lambda^{\theta,q}}. \tag{23}$$

证明 设 $a\in(A_0,A_1)_{\theta,q,J}$,则有 $a=\int_0^\infty u(t)\frac{dt}{t}$.记 $u_\nu=\int_{2^\nu}^{2^{\nu+1}}u(t)\frac{dt}{t}$,则 $a=\sum_\nu u_\nu$.由(17)知

$$\|(J(2^\nu,u_\nu))\|_{\lambda^{\theta,q}}^q=\sum_\nu(2^{-\nu\theta}J(2^\nu,u_\nu))^q$$

$$\leqslant c\sum_\nu\int_{2^\nu}^{2^{\nu+1}}[t^{-\theta}J(t,u(t))]^q\frac{dt}{t}$$

$$=c\int_0^\infty[t^{-\theta}J(t,u(t))]^q\frac{dt}{t}.$$

因此

$$\inf_{u_\nu} \|(J(2^\nu, u_\nu))\|_{\lambda^{\theta,q}} \leqslant c\|a\|_{\theta,q,J}.$$

反过来，设 $a=\sum\limits_\nu u_\nu$，使得$(J(2^\nu, u_\nu))\in\lambda^{\theta,q}$. 定义 $u(t)=u_\nu \log 2$，当$2^\nu\leqslant t<2^{\nu+1}$，则 $a=\int_0^\infty u(t)\dfrac{dt}{t}$.

这时

$$\int_0^\infty [t^{-\theta}J(t,u(t))]^q \frac{dt}{t}=\sum_\nu \int_{2^\nu}^{2^{\nu+1}} [t^{-\theta}J(t,u(t))]^q \frac{dt}{t}$$

$$\leqslant c\sum_\nu [2^{-\nu\theta}J(2^\nu,u_\nu)]^q,$$

从而

$$\|a\|_{\theta,q,J} \leqslant c\inf_{u_\nu}\|(J(2^\nu,u_\nu))\|_{\lambda^{\theta,q}}.$$

引理证毕.

引理(3.12) (内插论基本引理)设 $\min\left(1,\dfrac{1}{t}\right)K(t,a)\to 0$，当 $t\to 0$ 或 $t\to\infty$，则对任意 $\varepsilon>0$，存在表示

$$a=\sum_\nu u_\nu(\text{在} \sum(\overline{A})\text{收敛}),$$

使得

$$J(2^\nu,u_\nu)\leqslant (r+\varepsilon)K(2^\nu,a),$$

其中 $r\leqslant 3$ 是万有常数.

证明 对任意 ν，存在分解 $a=a_{0,\nu}+a_{1,\nu}$，使

$$\|a_{0,\nu}\|_{A_0}+2^\nu\|a_{1,\nu}\|_{A_1}\leqslant(1+\varepsilon)K(2^\nu,a).$$

因此

$$\|a_{0,\nu}\|_{A_0}\to 0,\text{当 } \nu\to -\infty,$$

$$\|a_{1,\nu}\|_{A_1} \to 0\text{，当 } \nu \to +\infty .$$

记

$$u_\nu = a_{0,\nu} - a_{0,\nu-1} = a_{1,\nu-1} - a_{1,\nu} .$$

则 $u_\nu \in \Delta(\overline{A})$，且

$$a - \sum_{-N}^{M} u_\nu = a - a_{0,M} + a_{0,-N-1} = a_{0,-N-1} + a_{1,M} .$$

故

$$K\left(1, a - \sum_{-N}^{M} u_\nu\right) \leqslant \|a_{0,-N-1}\|_{A_0} + \|a_{1,M}\|_{A_1} .$$

令 $N, M \to \infty$，便得

$$a = \sum_{-\infty}^{+\infty} u_\nu (\text{在}\Sigma(\overline{A})\text{中收敛}),$$

并且

$$J(2^\nu, u_\nu) \leqslant \max(\|a_{0,\nu}\|_{A_0} + \|a_{0,\nu-1}\|_{A_0}, 2^\nu(\|a_{1,\nu-1}\|_{A_1} + \|a_{1,\nu}\|_{A_1}))$$

$$\leqslant 2(1+\varepsilon)K(2^\nu, a) .$$

引理(3.12)获证．

定理(3.13) (等价定理)若 $0<\theta<1$，$1\leqslant q\leqslant\infty$，则 $(A_0, A_1)_{\theta,q,K} = (A_0, A_1)_{\theta,q,J}$，且范数等价．

证明 设 $a \in (A_0, A_1)_{\theta,q,J}$，$a = \int_0^\infty u(t)\frac{dt}{t}$，由(18)知

$$K(t,a) \leqslant \int_0^\infty K(t, u(s))\frac{ds}{s} \leqslant \int_0^\infty \min(1, t/s) J(s, u(s))\frac{ds}{s}$$

$$= \int_0^\infty \min(1, s^{-1}) J(ts, u(ts))\frac{ds}{s} .$$

因此

$$\left(\int_0^\infty [t^{-\theta}K(t,a)]^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant \left(\int_0^\infty [t^{-\theta}J(t,u(t))]^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \int_0^\infty s^\theta \min(1,s^{-1}) \frac{ds}{s}$$

$$= c\left(\int_0^\infty [t^{-\theta}J(t,u(t))]^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

为证反向不等式，由 $K(t,a) \leqslant c_{\theta,q} t^\theta \|a\|_{\theta,q,K}$ 知 $\min(1,\frac{1}{t})K(t,a) \to 0$，当 $t \to 0$ 或 $t \to \infty$．由引理(3.12)，存在表示 $a=\sum_\nu u_\nu$，使得

$$J(2^\nu,u_\nu) \leqslant (r+\varepsilon)K(2^\nu,a).$$

故

$$\|J(2^\nu,u_\nu)\|_{\lambda^{\theta,q}} \leqslant (r+\varepsilon)\|K(2^\nu,a)\|_{\lambda^{\theta,q}}.$$

再用引理(3.10)，(3.11)便得

$$\|a\|_{\theta,q,J} \leqslant c\|a\|_{\theta,q,K}.$$

证毕．

有了等价定理，我们便可以使用记号 $(A_0,A_1)_{\theta,q}$ 与范数 $\|\cdot\|_{\theta,q}$，而无需标明它们来至 K 方法还是 J 方法．

下面将要证明的叠代(又称稳定性)定理表明，重复使用内插所得到的结果是合乎人们的愿望的，这与通常线性插值的结果相同．

定义(3.14) 设 $\overline{A}$ 是赋范空间相容对，X 是 $\overline{A}$ 的中间空间．

(i) 称 $X \in \mathscr{C}_K(\theta,\overline{A})$，如果 $K(t,a;\overline{A}) \leqslant c\, t^\theta \|a\|_X$；

(ii) 称 $X \in \mathscr{C}_J(\theta;\overline{A})$，如果 $\|a\|_X \leqslant c\, t^{-\theta}J(t,a;\overline{A})$，其中 $0 \leqslant \theta \leqslant 1$．如果 $X \in \mathscr{C}_J(\theta;\overline{A}) \cap \mathscr{C}_K(\theta;\overline{A})$，则记 $X \in \mathscr{C}(\theta;\overline{A})$．

定理 3.4(d) 与定理 3.9 表明，$(A_0,A_1)_{\theta,q} \in \mathscr{C}(\theta;\overline{A})$，只要

$0<\theta<1$．从定义容易看出，$A_0\in\mathscr{C}(0;\overline{A})$，$A_1\in\mathscr{C}(1;\overline{A})$．

定理(3.15) **(叠代定理)** 设$\overline{A}=(A_0,A_1)$，$\overline{X}=(X_0,X_1)$是赋范空间相容对，且 X_j 完备，且 $X_j\in\mathscr{L}(\theta_j;\overline{A})$，$0\leqslant\theta_j\leqslant 1$，$j=0,1$，$\theta_0\neq\theta_1$，

$$\theta=(1-\eta)\theta_0+\eta\theta_1,\quad (0<\eta<1). \tag{24}$$

则对任意$1\leqslant q\leqslant\infty$，有

$$(X_0,X_1)_{\eta,q}=(A_0,A_1)_{\theta,q}.$$

特别地，如果$0<\theta_j<1$，$(A_0,A_1)_{\theta_j,q_j}$完备，则

$$((A_0,A_1)_{\theta_0,q_0},(A_0,A_1)_{\theta_1,q_1})_{\eta,q}=(A_0,A_1)_{\theta,q}.$$

这里空间的相等蕴含了范数的等价．

证明 设 $a=a_0+a_1\in(X_0,X_1)_{\eta,q}$，$a_j\in X_j$，$j=0,1$．由 $X_j\in\mathscr{C}(\theta_j;\overline{A})$，有

$$K(t,a;\overline{A})\leqslant K(t,a_0;\overline{A})+K(t,a_1;\overline{A})$$
$$\leqslant c(t^{\theta_0}\|a\|_{X_0}+t^{\theta_1}\|a\|_{X_1}),$$

换元，并注意到$\eta=\dfrac{\theta-\theta_0}{\theta_1-\theta_0}$，得

$$K(t,a;\overline{A})\leqslant c\,t^{\theta_0}K(t^{\theta_1-\theta_0},a;\overline{X}),$$

$$\left(\int_0^\infty[t^{-\theta}K(t,a;\overline{A})]^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant c\left(\int_0^\infty[t^{-(\theta-\theta_0)}K(t^{\theta_1-\theta_0},a;\overline{X})]^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=c_1\|a\|_{(X_0,X_1)_{\eta,q}}.$$

反过来，设 $a\in(A_0,A_1)_{\theta,q}$.注意到 $\theta-\theta_0=\eta(\theta_1-\theta_0)$，我们有

$$\|a\|^q_{(X_0,X_1)_{\eta,q}}=c\int_0^\infty[t^{-(\theta-\theta_0)}K(t^{\theta_1-\theta_0},a;\overline{X})]^q\frac{dt}{t}. \quad (25)$$

为估计被积函数，考虑表示 $a=\int_0^\infty u(t)\frac{dt}{t}$，应有(18)得

$$t^{\theta_0}K(t^{\theta_1-\theta_0},a;\overline{X})\leqslant\int_0^\infty t^{\theta_0}K(t^{\theta_1-\theta_0},u(s);\overline{X})\frac{ds}{s}$$

$$\leqslant\int_0^\infty t^{\theta_0}\min\left(1,\left(\frac{t}{s}\right)^{\theta_1-\theta_0}\right)J(s^{\theta_1-\theta_0},u(s);\overline{X})\frac{ds}{s}.$$

类似于前面的讨论，条件 $X_j\in\mathscr{L}(\theta_j,\overline{A})$也推出

$$J(s^{\theta_1-\theta_0},u(s),\overline{X})\leqslant cs^{-\theta_0}J(s,u(s),\overline{A}).$$

这样便得

$$t^{\theta_0}K(t^{\theta_1-\theta_0},a;\overline{X})\leqslant c\int_0^\infty\min\left(\left(\frac{t}{s}\right)^{\theta_0},\left(\frac{t}{s}\right)^{\theta_1}\right)J(s,u(s);\overline{A})\frac{ds}{s}.$$

代入式(25)，换元，便得

$$\|a\|_{(X_0,X_1)_{\eta,q}}\leqslant c\int_0^\infty\sigma^\theta\min(\sigma^{-\theta_0},\sigma^{-\theta_1})\frac{d\sigma}{\sigma}$$

$$\cdot\left(\int_0^\infty[s^{-\theta}J(s,u(s);\overline{A})]^q\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

对 $u(s)$取下确界，有

$$\|a\|_{(X_0,X_1)_{\eta,q}}\leqslant c\|a\|_{(A_0,A_1)_{\theta,q}}.$$

定理(3.15)证毕.

我们上面已在赋范空间的范围内，以及 $q\geqslant 1$ 情况下结合运用 K 方法与 J 方法而得到了实方法内插的叠代定理. 正如我们指出的，由于 J 方法可以突破空间范围与指标范围的上述限制，因此叠代定理事实上也在拟赋范空间与 $0<q\leqslant\infty$ 情形成立，有关进一步事实参见 §7.6.

下面我们考虑对偶空间，这个问题一般而言只能在 Banach 空间范围内讨论.

定理(3.16) 设 (A_0,A_1) 是 Banach 空间的容许对，$\Delta(\overline{A})$ 在 A_0,A_1 内稠密，则 $\Delta(\overline{A}^*)=\Sigma(\overline{A}^*)$, $(\Sigma(\overline{A}))^*=\Delta(\overline{A}^*)$, 其中 $\overline{A}^*=(A_0^*,A_1^*)$, A^* 表示 A 的对偶空间. 进一步，有

$$\|a^*\|_{\Sigma(\overline{A}^*)}=\sup_{a\in\Delta(\overline{A})}\frac{|\langle a^*,a\rangle|}{\|a\|_{\Delta(\overline{A})}},$$

$$\|a^*\|_{\Delta(\overline{A}^*)}=\sup_{a\in\Sigma(\overline{A})}\frac{|\langle a^*,a\rangle|}{\|a\|_{\Sigma(\overline{A})}}.$$

证明 我们只证明第一个公式，第二个的证明完全类似. 设 $a^*\in\Sigma(\overline{A}^*)$, 且 $a^*=a_0^*+a_1^*$, $a_j^*\in A_j^*$, 则对 $a\in\Delta(\overline{A})$, 有

$$|\langle a^*,a\rangle|\leqslant|\langle a_0^*,a\rangle|+|\langle a_1^*,a\rangle|$$

$$\leqslant(\|a_0^*\|_{A_0^*}+\|a_1^*\|_{A_1^*})\max(\|a\|_{A_0},\|a\|_{A_1}),$$

因此 $a^*\in\Delta(\overline{A})^*$, 且 $\|a^*\|_{\Delta(\overline{A})^*}\leqslant\|a^*\|_{\Sigma(\overline{A}^*)}$.

反过来，设 $l^*\in\Delta(\overline{A})^*$, 即对任意 $a\in\Delta(\overline{A})$; 有

$$|l(a)|\leqslant\|l\|_{\Delta(\overline{A})^*}\|a\|_{\Delta(\overline{A})}.$$

考虑双线性形式

$$\lambda:(a_0,a_1)\to l\left(\frac{a_0+a_1}{2}\right),$$

它定义在 $E=\{(a_0,a_1)\in A_0\oplus A_1:\ a_0=a_1\}$，它对 $A_0\oplus A_1$ 的范数 $\max(\|a_0\|_{A_0},\|a_1\|_{A_1})$ 是连续的，用 Hahn－Banach 定理，存在 $(a_0^*,a_1^*)\in A_0^*\oplus A_1^*$，使得

$$\|a_0^*\|_{A_0^*}+\|a_1^*\|_{A_1^*}\leqslant\|l\|_{\Delta(\overline{A})^*},$$

并且

$$\lambda(a_0,a_1)=\langle a_0^*,a_0\rangle+\langle a_1^*,a_1\rangle,\ \forall(a_0,a_1)\in E.$$

取 $a_0=a_1=a$，便得到

$$l(a)=\langle a_0^*,a\rangle+\langle a_1^*,a\rangle=\langle a_0^*+a_1^*,a\rangle,a\in\Delta(\overline{A}).$$

令 $l=a_0^*+a_1^*$，便推出 $l\in\Sigma(\overline{A^*})$，且 $\|l\|_{\Sigma(\overline{A^*})}\leqslant\|l\|_{\Delta(\overline{A})^*}$. 定理(3.16)证完.

由定理(3.16)可知

$$K(t,a^*;A_0^*,A_1^*)=\sup_{a\in\Delta(\overline{A})}\frac{|\langle a^*,a\rangle|}{J(t^{-1},a;A_0,A_1)},\qquad(26)$$

$$J(t,a^*;A_0^*,A_1^*)=\sup_{a\in\Delta(\overline{A})}\frac{|\langle a^*,a\rangle|}{K(t^{-1},a;A_0,A_1)}.\qquad(27)$$

引理(3.17) 当 $q<\infty$，$0<\theta<1$ 时，$\Delta(\overline{A})$ 在 $(A_0,A_1)_{\theta,q}$ 中稠密.

证明 设 $a\in(A_0,A_1)_{\theta,q}$. 这时有表达式 $a=\sum\limits_\nu u_\nu$，其中 $u_\nu\in\Delta=(\overline{A})$，使得

$$[\sum_\nu(2^{-\nu\theta}J(2^\nu,u_\nu))^q]^{\frac{1}{q}}<\infty.$$

因此

$$\|a-\sum_{-N}^{N}u_\nu\|_{\theta,q}\leqslant[\sum_{|\nu|>N}(2^{-\nu\theta}J(2^\nu,u_\nu))^q]^{\frac{1}{q}}\to 0,\text{当 } N\to\infty.$$

引理(3.17)得证.

定理(3.18) 设$\overline{A}$是Banach空间相容对,$\Delta(\overline{A})$在A_0,A_1中稠密,$0<\theta<1$,$1\leqslant q<\infty$.则

$$(A_0,A_1)^*_{\theta,q}=(A_0^*,A_1^*)_{\theta,q'},$$

其中 $\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{q'}=1$.

证明 我们将证明

$$(A_0,A_1)^*_{\theta,q,J}\subset(A_1^*,A_0^*)_{1-\theta,q',K},\tag{28}$$

$$(A_0,A_1)^*_{\theta,q,K}\supset(A_1^*,A_0^*)_{1-\theta,q',J},\tag{29}$$

应有等价定理与定理(3.3)的(b),便得定理所要证的结论.

先证(28).取$a^*\in(A_0,A_1)^*_{\theta,q,J}$.由于$a^*\in\Delta(\overline{A})^*=\Sigma(\overline{A^*})$,应用公式(26).对任意$\varepsilon>0$,存在$b_\nu\in\Delta(\overline{A})$,使得$b_\nu\neq0$,

$$K(2^{-\nu},a^*;A_0^*,A_1^*)-\varepsilon\min(1,2^{-\nu})$$
$$\leqslant(J(2^\nu,b_\nu;A_0,A_1))^{-1}\langle a^*,b_\nu\rangle.$$

考虑任意非负序列$(\alpha_\nu)\in\lambda^{\theta,q}$,并令

$$a_\alpha=\sum_\nu(J(2^\nu,b_\nu;A_0,A_1))^{-1}\alpha_\nu b_\nu.$$

则 $a_\alpha\in(A_0,A_1)_{\theta,q,J}$,此外,

$$\langle a^*,a_\alpha\rangle\geqslant\sum_\nu[K(2^{-\nu},a^*;A_0^*,A_1^*)-\varepsilon\min(1,2^{-\nu})]\alpha_\nu,$$

注意到$\|a_\alpha\|_{\theta,q,J}\leqslant c\|(\alpha_\nu)\|_{\lambda^{\theta,q}}$,有

$$\langle a^*,a_\alpha\rangle\leqslant c\|(\alpha_\nu)\|_{\lambda^{\theta,q}}\|a^*\|_{(A_0,A_1)^*_{\theta,q,J}}.$$

由于$K(2^{-\nu},a^*;A_0^*,A_1^*)=2^{-\nu}K(2^\nu,a^*;A_1^*,A_0^*)$,便得到

$$\sum_\nu 2^{-\nu}\alpha_\nu[K(2^\nu,a^*;A_1^*,A_0^*)-\varepsilon\min(1,2^\nu)]$$
$$\leqslant c\|(\alpha_\nu)\|_{\lambda^{\theta,q}}\|a^*\|_{(A_0,A_1)^*_{\theta,q,J}}.$$

已知按照 $\langle \alpha,\beta \rangle = \sum\limits_{\nu} 2^{-\nu}\alpha_\nu \cdot \beta_\nu$，$\lambda^{\theta,q}_{\ }$是$\lambda^{1-\theta,q}$的对偶空间，再根据 ε 的任意性，有

$$K(2^\nu, a^*; A_1^*, A_0^*) \in \lambda^{1-\theta,q'},$$

这就证明了(28).

为了证明(29)，取 $a^* \in (A_1^*, A_0^*)_{1-\theta,q',J}$. 记

$$a^* = \sum_\nu a_\nu^*, \text{（在 } \Sigma(\overline{A^*}) = \Delta(\overline{A})^* \text{ 中收敛）}$$

因此，$\forall a \in (A_0, A_1)_{\theta,q,K}$ 有

$$\begin{aligned} |\langle a^*, a\rangle| &\leqslant \sum_\nu |\langle a_\nu^*, a\rangle| \\ &\leqslant \sum_\nu J(2^{-\nu}, a_\nu^*; A_0^*, A_1^*)\, K(2^\nu, a; A_0, A_1). \end{aligned}$$

由于

$$J(2^{-\nu}, a_\nu^*; A_0^*, A_1^*) = 2^{-\nu} J(2^\nu, a_\nu^*; A_1^*, A_0^*),$$

有

$$|\langle a^*, a\rangle| \leqslant \sum_\nu 2^{-\nu} J(2^\nu, a_\nu^*; A_1^*, A_0^*)\, K(2^\nu, a; A_0, A_1),$$

这就推出(29)，定理(3.18)证完.

§7.4 内插空间的复方法

给定 Banach 空间对$\overline{A} = (A_0, A_1)$. 考虑定义在

$$\overline{S} = \{ z \in \mathbb{C} : 0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1 \}$$

上取值于$\Sigma(\overline{A})$内的函数f，它在 $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$解析，在$\overline{S}$ 有界连续，且 $t \to f(j+it)$ $(j=0,1)$是 $\mathbb{R}$ 到 A_j 的连续映射，并且$f(j+it) \to 0$，当 $t \to \infty$. 全体这样的函数记为$\mathscr{F}(\overline{A})$. 这是一线性空间. 定义范数

$$\|f\|_{\mathscr{F}} = \max\left(\sup_t \|f(it)\|_{A_0}, \sup_t \|f(1+it)\|_{A_1}\right). \qquad (1)$$

引理 (4.1) 若A_0, A_1是 Banach 空间，则$\mathscr{F}(\overline{A})$是 Banach 空间.

证明 设$\sum_n \|f_n\|_{\mathscr{F}} < \infty$. 由$f_n(z)$在$\Sigma(\overline{A})$有界，知

$$\|f_n(z)\|_{\Sigma(\overline{A})} \leqslant \max\left(\sup_t \|f_n(it)\|_{\Sigma(\overline{A})}, \sup_t \|f_n(1+it)\|_{\Sigma(\overline{A})}\right),$$

而$A_j \subset \Sigma(\overline{A})$，故

$$\|f_n(z)\|_{\Sigma(\overline{A})} \leqslant \max\left(\sup_t \|f_n(it)\|_{A_0}, \sup_t \|f_n(1+it)\|_{A_1}\right),$$

$$\leqslant \|f_n\|_{\mathscr{F}}.$$

已知$\Sigma(\overline{A})$是 Banach 空间，上述不等式说明，$\sum_n f_n$ 在$\overline{S}$上按$\Sigma(\overline{A})$的范数一致收敛于某个f，同时f在$\overline{S}$连续有界，在S解析. 进一步，由$\|f_n(j+it)\|_{A_j} \leqslant \|f_n\|_{\mathscr{F}}$ 知，$\sum_n f_n(j+it)$在A_j对t一致收敛到f. 因此$f(j+it) \in A_j$. 于是Σf_n在$\mathscr{F}$中收敛到f，且

$$\|f\|_{\mathscr{F}} \leqslant \sum_n \|f_n\|_{\mathscr{F}} < \infty.$$

定理 (4.1)证完.

定义 (4.2) 设$\overline{A} = (A_0, A_1)$是 Banach 空间对，对$0 \leqslant \theta \leqslant 1$，定义

$$[A_0, A_1]_\theta = \{f \in \Sigma(\overline{A}):\ 存在 F \in \mathscr{F}(\overline{A}),\ 使得\ F(\theta) = f\}. \quad (2)$$

并定义

$$\|f\|_{[A_0, A_1]_\theta} = \inf\{\|F\|_{\mathscr{F}} : F \in \mathscr{F},\ 且 F(\theta) = f\}. \quad (3)$$

定理(4.3) $[A_0, A_1]_\theta$ 是 Banach 空间，同时也是一型θ的内插空间.

证明 由于$\|F(\theta)\|_{\Sigma(\overline{A})} \leqslant \|F\|_{\mathscr{F}}$，线性映射$F \to F(\theta)$是由$\mathscr{F}(\overline{A})$到$\Sigma(\overline{A})$上的连续映射. 令$N_\theta = \{F: F \in \mathscr{F}(\overline{A}),\ F(\theta) = 0\}$，则$[A_0, A_1]_\theta$ 与商空间$\mathscr{F}(\overline{A})/N_\theta$等距同构. 由$N_\theta$是闭的推出$[A_0, A_1]_\theta$是 Banach 空间. 根据$\|f\|_{\Sigma(\overline{A})} = \|F(\theta)\|_{\Sigma(\overline{A})} \leqslant \|F\|_{\mathscr{F}}$，

可得 $[A_0,A_1]_\theta\subset\Sigma(\overline{A})$. 另外，取 $F(z)=e^{\delta(z-\theta)^2}f$,则 $F(\theta)=f$,且 $\|f\|_{[A_0,A_1]_\theta}\leqslant\|F\|_{\mathscr{F}}\leqslant c\|f\|_{\Delta(\overline{A})}$, 因此 $\Delta(\overline{A})\subset[A_0,A_1]_\theta$. 这就证明了 $[A_0,A_1]_\theta$ 是 A_0,A_1 的中间空间.

我们来证明 $[A_0,A_1]_\theta$ 是 $\overline{A}$ 的型 θ 的内插空间，设 T 是由 A_j 到 A_j 的线性算子，且 $\|Tf\|_{A_j}\leqslant M_j\|f\|_{A_j}$. $j=0,1$. 设 $f\in[A_0,A_1]_\theta$, $\varepsilon>0$，则存在 $F\in\mathscr{F}(\overline{A})$，使得 $F(\theta)=f$, 且 $\|F\|_{\mathscr{F}}\leqslant\|f\|_{[A_0,A_1]_\theta}+\varepsilon$. 令 $G(z)=M_0^{z-1}M_1^{-z}T(F(z))$,则 $G\in\mathscr{F}(\overline{A})$且

$$\|G\|_{\mathscr{F}}\leqslant\|F\|_{\mathscr{F}}\leqslant\|f\|_\theta+\varepsilon.\ 由于\ G(\theta)=M_0^{\theta-1}M_1^{-\theta}T(f),$$

$$\|Tf\|_{[A_0,A_1]_\theta}\leqslant M_0^{1-\theta}M_1^\theta\|G\|_{\mathscr{F}}\leqslant M_0^{1-\theta}M_1^\theta\|f\|_{[A_0,A_1]_\theta}+\varepsilon',$$

其中 $\varepsilon'=M_0^{1-\theta}M_1^\theta\varepsilon$. 注意到 $\varepsilon>0$ 的任意性，便得

$$\|Tf\|_{[A_0,A_1]_\theta}\leqslant M_0^{1-\theta}M_1^\theta\|f\|_{[A_0,A_1]_\theta}.$$

定理(4.3)证完.

注　从定理(4.3)的证明可以看出，如果 $\overline{A},\overline{B}$ 是两个 Banach 空间对，则 $[A_0,A_1]_\theta$ 与 $[B_0,B_1]_\theta$ 是 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 的内插空间，即对任意线性算子 T,如果 T 是 $\overline{A}$ 到 $\overline{B}$ 有界，则 T 是 $[A_0,A_1]_\theta$ 到 $[B_0,B_1]_\theta$ 有界的.

§7.5　内插空间举例

我们主要考虑 L^p 空间的内插空间. 为简单起见，我们只叙述复值函数的结果. 事实上，我们的推理对 Banach 空间值的函数也成立.

先看复方法所定义的内插空间.

定理(5.1)　设 $p_0\geqslant1$, $p_1\geqslant1$, $0<\theta<1$,则

$$[L^{p_0},L^{p_1}]_\theta=L^p,$$

其中 $\dfrac{1}{p}=\dfrac{1-\theta}{p_0}+\dfrac{\theta}{p_1}$.

证明 用 Riesz－Thorin 定理的证明思想，充分地，只要证明对每个具有紧支集的有界函数，有

$$\|f\|_{[A_0,A_1]_\theta}=\|f\|_{L_p}.$$

不妨设 $\|f\|_p=1$，令

$$F(z)=e^{\varepsilon z^2-\varepsilon\theta^2}|f(x)|^{\frac{p}{p(z)}-1}f(x),$$

其中 $\dfrac{1}{p(z)}=\dfrac{1-z}{p_0}+\dfrac{z}{p_1}$. 这时 $F\in\mathscr{F}$，且 $\|F\|_{\mathscr{F}}\leqslant e^{\varepsilon}$. 由 $F(\theta)=f$，知 $\|f\|_{[A_0,A_1]_\theta}\leqslant e^{\varepsilon}$，故 $\|f\|_{[A_0,A_1]_\theta}\leqslant\|f\|_p$.

反过来，对任意 $g\in L^{p'}$，$\|g\|_{p'}\leqslant 1$，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$，记

$$G(z)=e^{\varepsilon(z^2-\theta^2)}|g(x)|^{\frac{p'}{p'(z)}-1}g(x),$$

其中 $\dfrac{1}{p'(z)}=\dfrac{1-z}{p_0'}+\dfrac{z}{p_1'}$. 这时

$$h(z)=\langle F(z),G(z)\rangle$$

在 S 解析，在 $\overline{S}$ 连续有界，且 $|h(it)|\leqslant e^{2\varepsilon}$，$|h(1+it)|\leqslant e^{2\varepsilon}$. 用复变函数论中的三直线定理得 $|\langle f,g\rangle|=|h(\theta)|\leqslant e^{2\varepsilon}$. 对 $\|g\|_{p'}\leqslant 1$ 取上确界，便证明了 $\|f\|_p\leqslant\|f\|_{[A_0,A_1]_\theta}$.

下面的定理表明，用实方法给出的 L^p 的内插空间，正好是 Lorentz 空间. 为简单起见，我们只对复值函数加以证明，实际上，结果对取值于 Banach 空间的函数也是正确的.

定理(5.2) 设 $0<p_0<p_1\leqslant\infty$，$0<\theta<1$，$0<q\leqslant\infty$ 则

$$(L^{p_0},L^{p_1})_{\theta,q}=L^{p,q},$$

其中 $\frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1}$.特别地,取 $q=p$,有 $(L^{p_0},L^{p_1})_{\theta,p}=L^p$.

证明的关键在于给出 K 泛函通过重排函数的表示.

定理(5.3) 设 $f\in L^p+L^\infty, 0<p<\infty$,则

$$K(t,f;L^p,L^\infty)\approx\left\{\int_0^{t^p}(f^*(s))^p ds\right\}^{\frac{1}{p}}. \tag{1}$$

当 $p=1$ 时,上式为等式.

先用定理(5.3)证明定理(5.2),然后再给出定理(5.3)的证明.

定理(5.2)的证明 先设 $p_1=\infty$,应用定理(5.3)与§3.2定理2.14中的Hardy不等式得

$$\begin{aligned}\|f\|_{(L^{p_0},L^\infty)_{\theta,q}}&=\left(\int_0^\infty [t^{-\theta}K(t,f;L^{p_0},L^\infty)]^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}\\&\leqslant c\left(\int_0^\infty [t^{-\theta p_0}\int_0^{t^{p_0}}(f^*(s))^{p_0}ds]^{\frac{q}{p_0}}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}\\&=c\left(\int_0^\infty t^{-\theta\frac{q}{p_0}}\left(\int_0^t(f^*(s))^{p_0}ds\right)^{\frac{q}{p_0}}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}.\\&\leqslant c\left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}}f^*(t))^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

反过来,由于 f^* 非负递减,有

$$\begin{aligned}\|f\|_{(L^{p_0},L^\infty)_{\theta,q}}&\geqslant c\left(\int_0^\infty [t^{-\theta p_0+p_0}(f^*(t^{p_0}))^{p_0}]^{\frac{q}{p_0}}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}\\&\geqslant c\|f\|_{L^{p,q}}.\end{aligned}$$

当 $p_1<\infty$ 时,取 $0<r<p_0$,用叠代定理,得

$$(L^{p_0},L^{p_1})_{\theta,q}=((L^r,L^\infty)_{\theta_0,p_0},(L^r,L^\infty)_{\theta_1,p_1})_{\theta,q}$$
$$=(L^r,L^\infty)_{\eta,q}=L^{p,q},$$

其中 θ_0,θ_1,η 满足 $\theta=(1-\eta)\theta_0+\eta\theta_1, 0<\eta<1$．定理(5.2)得证．

定理(5.3)的证明 取

$$f_0(x)=\begin{cases} f(x)-f^*(t^p)f(x)/|f(x)|, & \text{当 } |f(x)|>f^*(t^p), \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

$f_1=f-f_0$．令 $E=\{x: f_0(x)\neq 0\}$．则 $\mu(E)\leqslant t^p$，并且由于 $f^*(s)$ 在 $[\mu(E),t^p]$ 是常数，还有

$$K(t,f;L^p,L^\infty)\leqslant \|f_0\|_{p_1}+t\|f_1\|_\infty$$

$$=\left(\int_E [|f(x)|-f^*(t^p)]^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}+tf^*(t^p)$$

$$=\left\{\int_0^{\mu(E)}(f^*(s)-f^*(t^p))^p ds\right\}^{\frac{1}{p}}+\left(\int_0^{t^p}[f^*(t^p)]^p ds\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left(\int_0^{t^p}(f^*(s)-f^*(t^p))^p ds\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_0^{t^p}(f^*(t^p))^p ds\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant c\left(\int_0^{t^p}(f^*(s))^p ds\right)^{\frac{1}{p}}.$$

当 $p=1$ 时，$c=1$．

为了证明反向控制，设 $f=f_0+f_1, f_0\in L^p, f_1\in L^\infty$．则

$$f^*(s)\leqslant f_0^*((1-\varepsilon)s)+f_1^*(\varepsilon s),\quad 0<\varepsilon<1.$$

因此

$$\left[\int_0^{t^p}(f^*(s))^p\,ds\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant c\left\{\left(\int_0^{t^p}(f_0^*((1-\varepsilon)s))^p\,ds\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_0^{t^p}(f_1^*(\varepsilon s))^p ds\right)^{\frac{1}{p}}\right\}$$

$$\leqslant c\left\{\left(\int_0^{\infty}(f_0^*((1-\varepsilon)s))^p\,ds\right)^{\frac{1}{p}}+t f_1^*(0)\right\}$$

$$\leqslant c\left\{(1-\varepsilon)^{-\frac{1}{p}}\|f_0\|_p+t\|f_1\|_\infty\right\}.$$

由 ε 的任意性便得反向估计．注意，当 $p\geqslant 1$ 时，$c=1$．定理 (5.3) 获证．

定理 (5.4) 设 $0<p_0,p_1,q_0,q_1,q\leqslant\infty$，且

$\dfrac{1}{p}=\dfrac{1-\eta}{p_0}+\dfrac{\eta}{p_1}$，$0<\eta<1$．则当 $p_0\neq p_1$ 时，

$$\left(L^{p_0,q_0},L^{p_1,q_1}\right)_{\eta,q}=L^{p,q}.$$

当 $p_0=p_1=p$ 时，上述等式仍然成立．只要 $\dfrac{1}{q}=\dfrac{1-\eta}{q_0}+\dfrac{\eta}{q_1}$．

证明 当 $p_0\neq p_1$ 时，用定理 (5.2) 及叠代定理．取 $0<r<\min(p_0,p_1)$，$\dfrac{1}{p_j}=(1-\theta_j)/r$，$\theta=(1-\eta)\theta_0+\eta\theta_1$．注意到 $\dfrac{1}{p}=(1-\theta)/r$，有

$$\left(L^{p_0,q_0},L^{p_1,q_1}\right)_{\eta,q}=\left((L^r,L^\infty)_{\theta_0,q_0},(L^r,L^\infty)_{\theta_1,q_1}\right)_{\eta,q}$$

$$=(L_r, L_\infty)_{\theta,q}=L^{p,q}.$$

当$p_0=p_1=p$时，定理的结论是下列另一个叠代定理的明显推论．

定理(5.5) 设A_0, A_1是Banach空间，$0<q_0, q_1\leqslant\infty$，则

$$\left((A_0, A_1)_{\theta,q_0}, (A_0, A_1)_{\theta,q_1}\right)_{\eta,q}=(A_0, A_1)_{\theta,q}, \tag{2}$$

其中$\dfrac{1}{q}=\dfrac{1-\eta}{q_0}+\dfrac{\eta}{q_1}$，$0<\eta<1$．

证明 把定理(5.2)用到序列(α_ν)上，其中测度$d\mu=\sum\limits_\nu 2^{-\nu\theta}\delta_\nu$，则有

$$(\lambda^{\theta,q_0}, \lambda^{\theta,q_1})_{\eta,q}=\lambda^{\theta,q}.$$

记$X_j=(A_0, A_1)_{\theta,q_j}$．由引理(3.10)知，只需证明

$$\|a\|_{(X_0,X_1)_{\eta,q}}\approx\|(K(2^\nu, a; A_0, A_1))\|_{(\lambda^{\theta,q_0};\lambda^{\theta,q_1})_{\eta,q}} \tag{3}$$

就够了，因为后者等价于

$$\|(K(2^\nu, a; A_0, A_1))\|_{\lambda^{\theta,q}}\approx\|a\|_{(A_0,A_1)_{\theta,q}}.$$

为了证明(3)，先设$a\in(X_0, X_1)_{\eta,q}$．取$a=\sum\limits_\nu u_\nu$，使得

$$\|(J(2^\mu, u_\mu; X_0, X_1))\|_{\lambda^{\eta,q}}\leqslant c\|a\|_{(X_0,X_1)_{\eta,q}}.$$

这样

$$\|(K(2^\nu, a; A_0, A_1))\|_{(\lambda^{\theta,q_0},\lambda^{\theta,q_1})_{\eta,q}}$$

$$\leqslant\left\|\left(\sum_\mu K(2^\nu, u_\mu; A_0, A_1)\right)\right\|_{(\lambda^{\theta,q_0},\lambda^{\theta,q_1})_{\eta,q}}$$

$$\leqslant c\left\{\sum_{\mu}\left[2^{-\mu\eta}J\left(2^{\mu},(K(2^{\nu},u_{\mu};A_0,A_1))_{\nu};\lambda^{\theta,q_0},\lambda^{\theta,q_1}\right)\right]^{q}\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$=c\left\{\sum_{\mu}\left[2^{-\mu\eta}J(2^{\mu},u_{\mu};X_0,X_1)\right]^{q}\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant c\|a\|_{(X_0,X_1)_{\eta,q}}.$$

反过来，设$(K(2^{\nu}a;A_0,A_1))_{\nu}\in(\lambda^{\theta,q_0},\lambda^{\theta,q_1})_{\eta,q}$. 由基本引理(3.12)，存在$a=\sum_{\nu}u_{\nu}$，使得

$$J(2^{\nu},u_{\nu};A_0,A_1)\leqslant cK(2^{\nu},a;A_0,A_1).$$

设$J(2^{\nu},u_{\nu};A_0,A_1)=\alpha_{0\nu}+\alpha_{1\nu}$，其中$(\alpha_{j\nu})\in\lambda^{\theta,q_j}$. 令

$$a_j=\sum_{\nu}J(2^{\nu},u_{\nu};A_0,A_1)^{-1}\alpha_{j\nu}u_{\nu},$$

则 $a_0+a_1=a$，且

$$\|a_j\|_{X_j}\leqslant c\left[\sum_{\nu}\left(2^{-\nu\theta}J(2^{\nu},J(2^{\nu},u_{\nu};A_0,A_1)^{-1}\alpha_{j\nu}u_{\nu};A_0,A_1)\right)^{q_j}\right]^{\frac{1}{q_j}}$$

$$\leqslant c\left[\sum_{\nu}(2^{-\nu\theta}|\alpha_{j\nu}|)^{q_j}\right]^{\frac{1}{q_j}}=c\|(\alpha_{j\nu})_{\nu}\|_{\lambda^{\theta,q_j}}.$$

因此

$$K(t,a;X_0,X_1)\leqslant cK(t,(J(2^{\nu},u_{\nu};A_0,A_1))_{\nu};\lambda^{\theta,q_0},\lambda^{\theta,q_1}).$$

由此可得

$$\|a\|_{(X_0,X_1)_{\eta,q}}\leqslant c\|(K(2^{\nu},a;A_0,A_1))_{\nu}\|_{(\lambda^{\theta,q_0},\lambda^{\theta,q_1})_{\eta,q}}.$$

这就完成了定理(5.5)的证明.

作为定理(5.4)的推论，我们得到，如果线性算子

$$T:L^{p_j,r_j}\to L^{q_j,s_j},\ j=0,1,$$

有界，则

$$T: L^{p,r} \to L^{q,s}$$

有界，其中 $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\theta}{p_0} + \dfrac{\theta}{p_1}$，$\dfrac{1}{q} = \dfrac{1-\theta}{q_0} + \dfrac{\theta}{q_1}$

$p_0 \neq p_1$，$q_0 \neq q_1$，且 $0 < r \leqslant s \leqslant \infty$．特别地，便有

定理（5.6） 设 $\rho_j > 0$，且

$$T: L^{p_j, \rho_j} \to L^{q_j, \infty}, j = 0, 1$$

有界，则

$$T: L^{p,r} \to L^{q,s}$$

有界，只要 $r \leqslant s$ 且 $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\theta}{p_0} + \dfrac{\theta}{p_1}$，$\dfrac{1}{q} = \dfrac{1-\theta}{q_0} + \dfrac{\theta}{q_1}$，$0 < \theta < 1$，$p_0 \neq p_1$，$q_0 \neq q_1$．

取 $\rho_j = p_j$，$r = p$，$s = q$．定理化归 Marcinkiewicz 内插定理．因此，定理（3.7）可以看作 Marcinkiewicz 定理的推广．

我们已在前面遇到过涉及到 L^p 与 BMO 的算子的内插（例如 §3.5 讨论 g 函数算子的有界性），这一般比较容易，简单地用 # 函数过度就可以．下面我们将讨论空间对 (L^p, BMO) 的内插空间．这比较复杂一些，先求 K 泛函．

引理（5.7） 设 $0 < r < p < \infty$，则 $\forall f \in L^p + BMO$，有

$$\int_0^{t^p} (f_r^{\#})^{*p}(\tau) d\tau \leqslant c K(t, f; L^p, BMO), \ t > 0, \qquad (4)$$

其中 $f_r^{\#}$ 是对指标 r 定义的 # 函数，$(f_r^{\#})^*$ 是它的非增重排．

证明 设 $f \in L^p + BMO$，$t > 0$，$f = f_0 + f_1$ 是 f 在 $L^p + BMO$ 中的任一分解．有

$$f_r^{\#}(x) \leqslant c(f_{0,r}^{\#}(x) + f_{1,r}^{\#}(x)) \leqslant c(f_{0,r}^{\#}(x) + \|f_1\|_{BMO}),$$

$$f_r^{\#*}(t) \leqslant c(f_{0,r}^{\#*}(t) + \|f_1\|_{BMO}).$$

因$p>r$，$f_0\in L^p$，故 $\|M_r(f_0)\|_p\leqslant c\|f_0\|_p$，

$$\int_0^{t^p} f_r^{\#*p}(\tau)d\tau\leqslant c\left(\int_0^{t^p} f_{0,r}^{\#*p}(\tau)d\tau+t^p\|f_1\|_{BMO}^p\right)$$

$$\leqslant c(\|f_0\|_p^p+t^p\|f_1\|_{BMO}^p).$$

对所有可能的分解取 inf 即得式(4)，证毕.

现在可以求出内插空间了.

定理(5.8) 设 $0<\theta<1$，$0<p<\infty$，$0<q\leqslant\infty$. 则对

$$r=\frac{p}{1-\theta},$$

$$(L^p,BMO)_{\theta,q}=L^{r,q}/\mathbb{C}$$

$$=\left\{f:\|f\|_{L^{r,q}/\mathbb{C}}=\inf_{c\in\mathbb{C}}\|f-c\|_{r,q}<\infty\right\}. \qquad (5)$$

证明 先对 θ_1，p_1，其中 $0<\theta_1<1$，$p_1=\dfrac{p}{1-\theta_1}$ 来证明断言. 注意 $\|f\|_*\leqslant\inf\limits_{c\in\mathbb{C}}\|f-c\|_\infty$，$\forall f\in L^\infty$. 这说明 $L^\infty/\mathbb{C}\subset BMO$. 故亦有 $(L^p,L^\infty/\mathbb{C})_{\theta_1,p_1}\subset(L^p,BMO)_{\theta_1,p_1}$. 现证

$$L^{p_1}/\mathbb{C}\subset(L^p,L^\infty/\mathbb{C})_{\theta_1,p_1}.$$

设 $f\in L^{p_1}/\mathbb{C}$，则 $\exists c$，使得 $f-c\in L^{p_1}$，故存在 $f-c$ 在 L^p+L^∞ 中的分解 $f-c=f_0+f_1$ 使

$$\|f_0\|_p+t\|f_1\|_\infty\leqslant c\left(\int_0^{t^{p_1}}(f-c)^{*p_1}(\tau)d\tau\right)^{\frac{1}{p_1}},$$

从而

$$K(t,f;L^p,L^\infty/\mathbb{C})=\inf(\|f_0\|_p+t\|f_0\|_{L^\infty/\mathbb{C}})$$

$$\leqslant c\left(\int_0^{t^{p_1}}(f-c)^{*p_1}(\tau)d\tau\right)^{\frac{1}{p_1}}.$$

由此推出

$$\|f\|_{(L^p,L^\infty/\mathbb{C})_{\theta_1,p_1}}\leqslant c\|f-c\|_{p_1}=c\|f\|_{L^{p_1}/\mathbb{C}}.$$

现证 $(L^p,BMO)_{\theta_1,p_1}\subset L^{p_1}/\mathbb{C}$. 从而结合刚证明的，就有

$$L^{p_1}/\mathbb{C}=(L^\infty,L^\infty/\mathbb{C})_{\theta_1,p_1}=(L^p,BMO)_{\theta_1,p_1}.$$

现设 $f\in L^p+BMO$，由引理(5.7)知对 $0<r<p$，有

$$\int_0^{t^p}(f_r^{\#})^{*p}(\tau)d\tau\leqslant cK(t,f;L^p,BMO)^p,\forall t>0.$$

设 c_f 是使下式成立的复数(见§3.4 定理 4.14)，

$$\int_{R^n}|f-c_f|^{p_1}dx\leqslant c\int_{R^n}f_r^{\#p_1}dx, \tag{6}$$

要证

$$\|f-c_f\|_{p_1}\leqslant c\|f\|_{(L^p,BMO)_{\theta_1,p_1}}, \tag{7}$$

它正是要证的 $(L^p,BMO)_{\theta_1,p_1}\subset L^{p_1}/\mathbb{C}$. 事实上，我们有

$$\|f\|_{(L^p,BMO)_{\theta_1,p_1}}=c\left(\int_0^\infty(t^{-\theta_1}K(t,f))^{p_1}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p_1}}$$

$$\geqslant c\left(\int_0^\infty(t^{-\theta_1}tf_r^{\#*}(t^p))^{p_1}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p_1}}$$

$$=c\left(\int_0^\infty(t^{\frac{1-\theta_1}{p}}f_r^{\#*}(t))^{p_1}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p_1}}=c\|f_r^{\#}\|_{p_1}$$

$$\geqslant c\|f-c_f\|_{p_1}.$$

这完成了对特殊指标 θ_1 ,p_1 的式(5)的证明.

现任取 θ_i ,$0<\theta_0<\theta<\theta_1<1$,$p_i=\dfrac{p}{1-\theta_i}$,$i=0,1$.则因 $L^{p_i}/\mathbb{C}=(L^p,BMO)_{\theta_i,p_i}$,故由叠代定理知存在 δ,使 $\theta=(1-\delta)\theta_0+\delta\theta_1$,并且使得 $(L^p,BMO)_{\theta,q}=(L^{p_0}/\mathbb{C},L^{p_1}/\mathbb{C})_{\delta,q}$.但已知$(L^{p_0}/\mathbb{C},L^{p_1}/\mathbb{C})_{\delta,q}=L^{s,q}/\mathbb{C}$,其中 $\dfrac{1}{s}=\dfrac{1-\delta}{p_0}+\dfrac{\delta}{p_1}$.这样由于

$$p_i=p(1-\theta_i)^{-1},s^{-1}=(1-\delta)p_0^{-1}+\delta p_1^{-1},\theta=(1-\delta)_{\theta_0}+\delta\theta_1,$$

即得

$$s^{-1}=(1-\delta)(1-\theta_0)p^{-1}+\delta(1-\theta_1)p^{-1}=(1-\theta)p^{-1}.$$

这完成了$(L^p,BMO)_{\theta,q}=L^{\frac{p}{1-\theta},q}/\mathbb{C}$ 的证明.定理证毕.

至于由 Hardy 空间与 Lebesgue 空间构成的相容空间对的内插空间的描述就更麻烦一些,有兴趣的读者可以参考有关H_p 的专著.

§7.6 进一步事实、习题与注记

1.举例说明可以有 $L^{p,1}\subsetneqq L^p\subsetneqq L^{p,\infty}$,$0<p<\infty$,以及简单函数类 S 可以在 $L^{p,\infty}$ 中不稠密.

2.设(X,μ)是任意一般测度空间,$\|\cdot\|$ 是一个定义在简单函数空间S上的一个保持次序的范数(即 $|f(x)|\leqslant|g(x)|$,a.e.推出 $\|f\|\leqslant\|g\|$),则

(a) 如果 $\|\chi_E\|\leqslant|E|^{\frac{1}{p}}$,$\forall$可测集 E,则 $\|f\|\leqslant\|f\|_{p,1}$,$\forall f\in S$.

(b) 如果 $|E|^{\frac{1}{p}}\leqslant\|\chi_E\|$,$\forall$可测集 E,则 $\|f\|_{p,\infty}\leqslant\|f\|$,

$\forall f\in S$.

提示：对(a)，只须考虑$f=\Sigma_1^N c_j\chi_{E_j}, c_1>c_2>\cdots>c_n>c_{n+1}=0$，令$f_k=b_k\chi_{F_k}, F_k=\bigcup_{j=1}^k E_j, b_k=c_k-c_{k+1}$.对$(b)$，对$f=\Sigma_1^N c_j\chi_{E_j}$如上，有$\|f\|_{p,\infty}=\sup_j d_j^{\frac{1}{p}}c_j$，其中$d_j=|F_j|$.设$\|f\|_{p,\infty}$在$j=k$取到.令$g=c_k\chi_{F_k}$，则$0\leqslant g\leqslant f$，故

$$\|f\|_{p,\infty}=d_k^{\frac{1}{p}}c_k=c_k|F_k|^{\frac{1}{p}}\leqslant c_k\|\chi_{F_k}\|=\|g\|\leqslant\|f\|.$$

3．设$S(X)$是一般测度空间(X,μ)上的简单函数空间，$\mathscr{M}(y)$是一般测度空间(Y,v)上的可测函数空间，T是由$S(X)$到$\mathscr{M}(Y)$内的次线性算子，$0<p<\infty, 1<q\leqslant\infty$.证明$T$是限制弱$(p,q)$型的，即

$$\lambda|\{|T\chi_E|>\lambda\}|_v^{\frac{1}{q}}\leqslant c|E|_\mu^{\frac{1}{p}}, \forall \text{可测集 } E, \forall\lambda>0,$$

当且仅当T是$(L^{p,1}(d\mu), L^{q,\infty}(dv))$有界的，即

$$\lambda|\{|Tf|>\lambda\}|_v^{\frac{1}{q}}\leqslant c\int_0^\infty t^{\frac{1}{p}}f^*(t)\frac{dt}{t}, \forall f\in S(x), \forall\lambda>0.$$

提示：$(L^{p,1}, L^{q,\infty})$有界性显然推出限制弱(p,q)型.反之，设$f=\Sigma_1^n c_j\chi_{E_j}$非负.则如题2提示中指出的，若令$f_k=b_k\chi_{F_k}$，则得分解$f=\Sigma_1^n f_k$，使得$f^*(t)=\Sigma_1^n f_k^*(t)$.这样，由$T$是限制弱$(p,q)$型的，以及弱$L^q$模的等价表示$\|g\|_{WL^q}\approx\sup_t t^{\frac{1}{q}}g^{**}(t)$，其中$g^{**}(t)$为$g$的平均重排函数，则得

$$\|Tf\|_{q,\infty}\leqslant c\sup_t t^{\frac{1}{q}}(Tf)^{**}(t)\leqslant c\Sigma_1^n\sup_t t^{\frac{1}{q}}(Tf_k)^{**}(t)$$

$$\leqslant c\Sigma_1^n b_k|F_k|_\mu^{\frac{1}{p}}=c\Sigma_1^n\int_0^\infty t^{\frac{1}{p}}f_k^*(t)\frac{dt}{t}$$

$$= c\int_0^{\infty} t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\frac{dt}{t} = c\|f\|_{p,1}.$$

4. 设 $(X, d\mu)$, $(Y, d\nu)$ 是两个一般测度空间, $S(X)$, $S(Y)$, $\mathscr{M}(X)$, $\mathscr{M}(Y)$ 意义如通常, S 表示开带形 $\{z : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$, $\overline{S}$ 表示它的闭包. 设 $\{T_z\}_{z\in\overline{S}}$ 是定义于 $S(X)$ 取值于 $\mathscr{M}(Y)$ 内的线性算子族. 关于族 $\{T_z\}$ 的算子内插有如下结果. 算子族 $\{T_z\}$ 称为容许族, 如果 $\forall f\in S(X)$, $g\in S(Y)$, $T_z f\cdot g\in L^1(Y, d\nu)$, 且 $\int_Y T_z f\cdot g\,d\nu$ 是 $z\in S$ 的解析函数, 在 $\overline{S}$ 内连续, 且

$$e^{-a|y|}\log\left|\int_Y T_z f\cdot g\,d\nu\right| \leqslant c, \forall z\in S,$$

其中 $z = x + iy$, $0\leqslant a < \pi$ 是某个常数. 则关于允许族 $\{T_z\}_{z\in\overline{S}}$ 的算子内插定理如下: 假设 $1\leqslant p_j, q_j\leqslant\infty$, 且

$$\|T_{iy} f\|_{q_0}\leqslant M_0(y)\|f\|_{p_0},\ \|T_{1+iy} f\|_{q_1}\leqslant M_1(y)\|f\|_{p_1},$$

$$\forall f\in S(X),$$

其中 M_j 满足

$$e^{-b|y|}\log M_j(y)\leqslant c, \forall y\in\mathbb{R},$$

其中 b 也是小于 π 的非负常数. 则对 $0\leqslant t\leqslant 1$, 有

$$\|T_t f\|_{q_t}\leqslant M_t\|f\|_{p_t}, \forall f\in S(X),$$

其中 $\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}$, $\frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}$. 这个结果属于 E. M. Stein, 见 [BL].

5. 设 (X, dx), (Y, dy) 是两个一般测度空间, $d\mu_i = \mu_i(x)dx$,

$dv_i=v_i(y)dy$，$i=0,1$，是绝对连续测度．$S(\cdot)$，$\mathscr{M}(\cdot)$分别表示简单函数与可测函数的空间，T 是 $S(X)$到$\mathscr{M}(Y)$内的线性算子，$1\leqslant p_i,q_i\leqslant\infty$，$i=0,1$，满足

$$\|Tf\|_{L^{q_i}(dv_i)}\leqslant M_i\|f\|_{L^{p_i}(d\mu_i)},\ \forall f\in S(X),\ i=0,1.$$

则对 $p,q,d\mu,dv$，其中

$$\frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1},\ \frac{1}{q}=\frac{1-\theta}{q_0}+\frac{\theta}{q_1},\ 0\leqslant\theta\leqslant 1,$$

$$\mu=\mu_0^{\frac{p}{p_0}(1-\theta)}\mu_1^{\frac{p}{p_1}\theta}\quad v=v_0^{\frac{q}{q_0}(1-\theta)}v_1^{\frac{q}{q_1}\theta},$$

我们有

$$\|Tf\|_{L^q(dv)}\leqslant M_0^{1-\theta}M_1^{\theta}\|f\|_{L^p(d\mu)},\ \forall f\in S(X).$$

(这个结果属于 E.M.Stein，G.Weiss (见[BL])．

提示：平行于§3.5 中 Riesz－Thorin 定理的证明，设 $f\in S(X)$，$g\in S(Y)$使得$\|f\|_{L^p(d\mu)}=\|g\|_{L^{q'}(dv)}=1$，其中$'$表示相伴数，定义

$$\varphi(z)=\varphi(x,z)$$

$$=|f(x)|^{\frac{p}{p(z)}}\frac{f(x)}{|f(x)|}\mu(x)^{\frac{1}{p(z)}}\mu_0(x)^{-\frac{1-z}{p_0}}\mu_1(x)^{-\frac{z}{p_1}},$$

$$\psi(z)=\psi(y,z)$$

$$=|g(y)|^{\frac{q'}{q'(z)}}\frac{g(y)}{|g(y)|}v(y)^{\frac{1}{q'(z)}}v_0(y)^{-\frac{1-z}{q_0'}}v_1(y)^{-\frac{z}{q_1'}}$$

其中

$$\frac{1}{p(z)}=\frac{1-z}{p_0}+\frac{z}{p_1},\ \frac{1}{q'(z)}=\frac{1-z}{q_0'}+\frac{z}{q_1'},$$

$$0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1 .$$

考虑带形 $0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1$ 上定义的函数

$$F(z)=\int_{Y} T\varphi(z)\psi(z)dv(y,z),$$

其中

$$v(y,z)=v_0(y)^{\frac{q(z)(1-z)}{q_0}} v_1(y)^{\frac{q(z)z}{q_1}},$$

对它利用复变函数论三直线定理即得.

6. 设 $\overline{A}=(A_0,A_1)$, $\overline{B}=(B_0,B_1)$是两个拟赋范空间的容许对, A 与 B 是$\overline{A}$ 与$\overline{B}$ 的内插空间,且对所有由 A_0+A_1 到 B_0+B_1 内的线性算子 T,有

$$\|T\|_{A,B} \leqslant c\max(\|T\|_{A_0,B_0},\|T\|_{A_1,B_1}).$$

设 $b\in B_0\bigcap B_1$, $a\in A$ 对某 $t>0$ 满足

$$J(t,b)\leqslant K(t,a)$$

证明 $b\in B$,且 $\|b\|_B \leqslant c\|a\|_A$.

提示:考虑 A_0+A_1 上的线性泛函 $f(x)$满足 $f(a)=1$,且 $|f(x)|\leqslant \dfrac{K(t,x)}{K(t,a)}$, $\forall x\in A_0+A_1$.(其存在性由 Hahn – Banach 定理保证)考虑 A_0+A_1 到 B_0+B_1 内的线性算子 $T: x\to f(x)b$. 则 $t^i\|Tx\|_{B_i}\leqslant t^i\|x\|_{A_i}$, $i=0,1$. 从而 $\|Tx\|_B\leqslant c\|x\|_A$. 特别令 $x=a$ 即得.

7. 设 A, B 如题 6 中那样, $w(t)$是 $\mathbb{R}_+$ 到 $\mathbb{R}_+$ 内的函数,满足 $w(t)\approx w(2t)$, $\int_0^\infty \dfrac{w(t)}{t}dt<\infty$. 设 $a\in A$, $b\in B_0+B_1$ 满足

$$K(t,b;\overline{B})\leqslant w(t)K(t,a;\overline{A}),\quad \forall t>0.$$

证明 $b\in B$，且 $\|b\|_B\leqslant c\|a\|_A$.

提示：由内插基本引理知存在 b 的分解 $b=\sum_{-\infty}^{+\infty} b_j$，使 $J(2^j,b_j)\leqslant 4K(2^j,b)$，$\forall j\in\mathbb{Z}$. 既然 $b_j(4w(2^j))^{-1}$ 满足

$$J(2^j,b_j(4w(2^j))^{-1})\leqslant(4w(2^j))^{-1}K(2^j,b)\leqslant K(2^j,a),$$

由题 6 知 $\|b_j w(2^j)^{-1}\|_B\leqslant c\|a\|_A$. 这推出

$$\|b\|_B\leqslant\sum_{-\infty}^{+\infty} w(2^j)\|a\|_A\leqslant c\|a\|_A.$$

8. 实内插 K 方法的叠代定理可以有一个无须通过 J 方法的自封证明. K 方法的叠代定理叙述为：设 (A_0,A_1) 是拟赋范空间的容许对，$0\leqslant\theta_0<\theta_1\leqslant 1$，$0<\delta<1$，$0<q_0,q_1,q\leqslant\infty$，$\theta=(1-\delta)\theta_0+\delta\theta_1$，$X_i=(A_0,A_1)_{\theta_i,q_i,K}$，$i=0,1$. 则 $(X_0,X_1)_{\delta,q,K}=(A_0,A_1)_{\theta,q,K}$. 它的证明概述如下. 我们在 §7.3 定理 (3.15) 的证明中已经看到，只要 $X_i\subset(A_0,A_1)_{\theta_i,\infty,K}$ (即 $K(t,a)\leqslant c\,t^{\theta_i}\|a\|_{X_i}$)，$i=0,1$，就有

$$(X_0,X_1)_{\delta,q,K}\subset(A_0,A_1)_{\theta,q,K}.$$

并且这一步比较容易. 反向包含关系的证明比较复杂一些，它用到 $K(t,a;\overline{X})$ 的下述等价 (记 $\eta=\theta_1-\theta_0$，$K(s)=K(s,a;\overline{A})$)

$$K(t,a;\overline{X})\approx\left(\int_0^{t^{\frac{1}{\eta}}}(s^{-\theta_0}K(s))^{q_0}\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{q_0}}$$

$$+t\left(\int_{t^{\frac{1}{\eta}}}^{\infty}(s^{-\theta_1}K(s))^{q_1}\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{q_1}},\quad\forall a\in\Sigma(\overline{X}).$$

应用它以及 Hardy 不等式(见 §3.2 定理 2.14)立即得到

$$\|a\|_{(X_0,X_1)_{\delta,q,K}} \leqslant c\|a\|_{(A_0,A_1)_{\theta,q,K}}, \ \forall a \in \Sigma(\overline{X}).$$

此即

$$(A_0,A_1)_{\theta,q,K} \subset (X_0,X_1)_{\delta,q,K}.$$

至于 $K(t,a;\overline{X})$的上述估计式也主要是 Hardy 不等式的结果. K 方法的叠代定理的这个证明属于 T.Holmstedt,见[BL].

9. 设 A 是一个拟赋范空间,$\|\cdot\|$ 是它上面的拟范数,$\rho>0$,则 $\|\cdot\|^\rho$ 也是一个拟范数. 记$(A)^\rho$ 为A 赋拟范数 $\|\cdot\|^\rho$ 而成的拟赋范空间. 实内插方法中有如下幂定理. 设 $0<\eta<1$,$0<r\leqslant\infty$,ρ_0,ρ_1 是两个给定的正数,令 $\rho=(1-\eta)\rho_0+\eta\rho_1$,$\theta=\dfrac{\eta\rho_1}{\rho}$,$q=\rho r$,则

$$((A_0)^{\rho_0},(A_1)^{\rho_1})_{\eta,r}=((A_0,A_1)_{\theta,q})^\rho.$$

提示:在 A_0+A_1 上引进一个与 $K(t,a)$等价的泛函

$$K_\infty(t,a)=K_\infty(t,a;\overline{A})=\inf_{a=a_0+a_1}\max(\|a_0\|_{A_0},t\|a_1\|_{A_1}).$$

则 $K_\infty(t,a;(A_0)^{\rho_0},(A_1)^{\rho_1})$与 $K_\infty(t,a;A_0,A_1)$有如下关系

$$K_\infty(s,a;(A_0)^{\rho_0},(A_1)^{\rho_1})=K_\infty(t,a;A_0,A_1)^{\rho_0}=K_\infty(t)^{\rho_0},$$

其中 $s=t^{\rho_1}K_\infty(t,a;A_0,A_1)^{\rho_0-\rho_1}$,这只需用到事实

$$1=\inf_{a=a_0+a_1}\max\left(\left(\frac{\|a_0\|_{A_0}}{K_\infty(t)}\right)^{\rho_0},\left(\frac{t\|a_1\|_{A_1}}{K_\infty(t)}\right)^{\rho_1}\right).$$

利用这个关系,变量代换即得(只看 $r<\infty$ 的情形)

$$\| a \|^r_{((A_0)^{\rho_0},(A_1)^{\rho_1})_{\eta,r}} = \int_0^\infty (s^{-\eta} K_\infty(s,a;(A_0)^{\rho_0},(A_1)^{\rho_1}))^r \frac{ds}{s}$$

$$\approx \int_0^\infty t^{-\theta q} K_\infty(t)^q \frac{dt}{t} = \| a \|^q_{(A_0,A_1)_{\theta,q}} = \| a \|^r_{((A_0,A_1)_{\theta,q})^\rho}.$$

10．利用题9中幂定理证明，若 T 是 A_i 到 B_i 有界的线性算子，界为 M_i，$i=0,1$，则对 $\rho_0,\rho_1>0$，$0<\eta<1$，$0<r\leqslant\infty$，T 是 $((A_0)^{\rho_0},(A_1)^{\rho_1})_{\eta,r}$ 到 $((B_0)^{\rho_0},(B_1)^{\rho_1})_{\eta,r}$ 有界的，界 $M\leqslant M_0^{(1-\eta)\rho_0} M_1^{\eta\rho_1}$.

11．设 $0<p_0<p_1<\infty$，$0<\eta<1$，$p=(1-\eta)p_0+\eta p_1$．考虑一般测度空间$(\Omega,\mathscr{S},\mu)$上的 Lebesgue 空间．直接证明（即不利用 L^p 空间的内插以及内插幂定理）

$$((L^{p_0})^{p_0},(L^{p_1})^{p_1})_{\eta,1}=(L^p)^p.$$

提示：记 $L(t,f)=K(t,f;(L^{p_0})^{p_0},(L^{p_1})^{p_1})$．则

$$L(t,f)=\int_\Omega |f(x)|^{p_0} F(t|f(x)|^{p_1-p_0})d\mu,$$

其中

$$F(s)=\inf_{y_0+y_1=1}(|y_0|^{p_0}+s|y_1|^{p_1})\approx\min(1,s).$$

12．设(X,dx)是一般测度空间，$0<p\leqslant\infty$，$0<\theta<1$，$w_0(x)$，$w_1(x)$是两个权函数．令 $w(x)=w_0^{1-\theta}(x)w_1^\theta(x)$．证明$(L^p(w_0dx),L^p(w_1dx))_{\theta,p}=L^p(wdx)$．此外，若$(Y,dy)$是另一个一般测度空间，$\widetilde{w}_i$，$i=0,1$，与 $\widetilde{w}$ 是类似的(Y,dy)上的权函数．设次线性算子 T 是 $L^p(w_i dx)$到 $L^p(\widetilde{w}_i dy)$有界的，界为 M_i，$i=0,1$，则 T 也是 $L^p(wdx)$到

$L^p(\widetilde{w}yy)$有界的，界 $M \leqslant M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$. 这个结果属于 E. M. Stein，G. Weiss 见 [BL].

13. 记号同题 12. 但设 $0<p_0, p_1<\infty$，$p_0 \neq p_1$. 则

$$(L^{p_0}(w_0 dx), L^{p_1}(w_1 dx))_{\theta,p} = L^p(w, dx), 0<\theta<1,$$

其中 $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\theta}{p_0} + \dfrac{\theta}{p_1}$，且

$$w = w_0^{\frac{p}{p_0}(1-\theta)} w_1^{\frac{p}{p_1}\theta}.$$

作为它的推论的算子内插结果如下：设 $0<p_i, q_i<\infty$，$i=0,1$，T 是次线性算子，同时是 $L^{p_i}(w_i dx)$到 $L^{q_i}(\widetilde{w}_i dy)$有界的，界为 M_i，$i=0,1$. 则对 p, q，

$$\frac{1}{p} = \frac{(1-\theta)}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}, p \leqslant q,$$

$$w = w_0^{\frac{p}{p_0}(1-\theta)} w_1^{\frac{p}{p_1}\theta}, \widetilde{w} = \widetilde{w}_0^{\frac{q}{q_0}(1-\theta)} \widetilde{w}_1^{\frac{q}{q_1}\theta},$$

T 也是 $L^p(wdx)$到 $L^q(\widetilde{w}dy)$有界的，界 $M \leqslant c M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$. 这个结果也属于 E. M. Stein，G. Weiss，见 [BL].

14. 内插理论与逼近论有很密切的联系，这种联系是通过如下 E 泛函来实现的. 设 $\overline{A} = (A_0, A_1)$是拟赋范空间的容许对. 对 $a \in A_0 + A_1$ 与 $t>0$，定义

$$E(t, a) = E(t, a; \overline{A}) = \inf_{\|a_0\|_{A_0} \leqslant t} \|a - a_0\|_{A_1}.$$

这是一个来自于逼近论的量. 它虽然不具有拟范数的性质，但有如下次可加性：设 A_j 是带系数 c_j 的拟赋范空间（即 $\|a+b\|_{A_j} \leqslant c_j(\|a\|_{A_j} + \|b\|_{A_j})$）$j=0,1$. 则对任意 $0<\varepsilon<1$，$\forall a, b \in A_0 + A_1$，有

$$E(t,a+b)\leqslant c_1\left(E\left(\frac{\varepsilon t}{c_0},a\right)+E\left(\frac{(1-\varepsilon)t}{c_0},b\right)\right).$$

这是容易直接验证的. E 泛函有比 K 泛函更直观的几何解释. 对每个 $a\in A_0+A_1$, 我们联系一个(x_0,x_1)平面上的集合 $\Gamma(a)$ (称为 Gagliardo 集)如下:

$$\Gamma(a)=\{(x_0,x_1):\text{存在分解 } a=a_0+a_1 \text{ 使 } \|a_j\|_{A_j}\leqslant x_j,\ j=0,1\}$$

显然, 若 x,y 使得 $x_j\leqslant y_j, j=0,1$, 且 $x=(x_0,x_1)\in\Gamma(a)$, 则 $y=(y_0,y_1)\in\Gamma(a)$. 这说明 $\Gamma(a)$是由 $\mathbb{R}^2$ 上第一象限中的某条曲线及其右上方部分所构成的集合. 当 $A_j, j=0,1$, 赋范时, 这条曲线, 它就是边界 $\partial\Gamma(a)$, 是一条凸曲线. 一般拟赋范时, 它不必仍是凸的, 但作为 x_0 的函数的图象仍是一条非增(可能有间断)的曲线(请证明非增性). E 泛函的几何意义就是, 这条曲线就是 $E(t,a)$当把 x_0 看成 t 时的函数图象. 这是因为, 根据定义,

$$E(t,a)=\inf_{x_0\leqslant t,\,x\in\partial\Gamma(a)} x_1=\inf_{x_0\leqslant t,\,x\in\Gamma(a)} x_1.$$

而根据图象的非增性, 知

$$E(t,a)=\{x_1:(t,x_1)\in\partial\Gamma(a)\}.$$

这完成了 $E(t,a)$的几何意义的证明. 现在来看 $E(t,a)$与 $K(t,a)$的关系. $K(t,a)$有如下等价

$$K_p(t,a;\overline{A})=\inf_{a=a_0+a_1}(\|a_0\|_{A_0}^p+t^p\|a_1\|_{A_1}^p)^{\frac{1}{p}},\ 0<p\leqslant\infty.$$

显然, 我们也有

$$K_p(t,a)=\inf_{x\in\partial\Gamma(a)}(x_0^p+t^px_1^p)^{\frac{1}{p}}=\inf_{x\in\Gamma(a)}(x_0^p+t^px_1^p)^{\frac{1}{p}},$$

$$0<p\leqslant\infty.$$

我们主要关心$p=\infty$的情形．现在断言，$K_\infty(t)$本质上是$t(E(t))^{-1}$的反函数．更确切而言，设$K_\infty(s,a)=t$，则

$$E(t+0,a)\leqslant t/s\leqslant E(t-0,a).$$

这因

$$t=K_\infty(s)=\max(x_0,sx_1),\ (x_0,x_1)\in\partial\Gamma(a).$$

既然$x_0\leqslant t$，$sx_1\leqslant t$，故

$$E(t+0)=E(t)=\inf_{x_0\leqslant t}x_1\leqslant\frac{t}{s}.$$

而当$x_0<t$时，必有$sx_1=t$，这正说明$E(t-0)\geqslant\frac{t}{s}$．现定义逼近空间，并讨论逼近空间与内插空间的关系．设$\overline{A}=(A_0,A_1)$是拟赋范空间的容许对，$0<\alpha<\infty$，$0<q\leqslant\infty$或$0\leqslant\alpha<\infty$，$q=\infty$．对$a\in A_0+A_1$，令

$$\|a\|_{\alpha,q,E}=\left(\int_0^\infty(t^\alpha E(t,a))^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}},0<q<\infty,$$

$$\|a\|_{\alpha,\infty,E}=\sup_t\{t^\alpha E(t,a)\},\quad q=\infty,$$

$$E_{\alpha,q}(\overline{A})=\{a\in A_0+A_1:\|a\|_{\alpha,q,E}<\infty\}.$$

则$E_{\alpha,q}(\overline{A})$是拟赋范空间．利用上面给出的$E$泛函与$K_\infty$泛函的关系可证

$$(E_{\alpha,r}(\overline{A}))^\theta=K_{\theta,q}(\overline{A}),$$

其中$\theta=\frac{1}{1+\alpha}$，$r=\theta q$．（详细讨论见[BL]．）

15．实内插方法可以不必局限于拟赋范空间的范畴内进行讨论，因拟范数的齐次性$\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$实际上是没有用到的．

现设 A 是一个交换群，群运算用 $+$，a 的逆元为 $-a$，零元记为 0．A 上的一个拟范数 $\|\cdot\|_A$ 是满足如下性质的实值函数，

$$\|a\|_A \geqslant 0,\ \|a\|_A = 0\text{、当且仅当 } a = 0,$$

$$\|-a\|_A = \|a\|_A,$$

$$\|a+b\|_A \leqslant c(\|a\|_A + \|b\|_A),\ c \geqslant 1.$$

这样的 A 称为一个 c 赋范交换群．任何 c 赋范交换群均可修改为一个 1 赋范交换群，相应的 c 范数 $\|\cdot\|_A$，与 1 范数 $\|\cdot\|_A^*$ 满足

$$\|a\|_A^* \leqslant \|a\|_A^p \leqslant 2\|a\|_A^*.$$

其中 p 满足 $(2c)^p = 2$．任何 1 赋范交换群都是距离交换群．我们有兴趣的 c 赋范交换群事实上都是向量空间，它区别于拟赋范空间的地方仅仅在于前者中的 c 范数不是齐次的．我们将在下面两个习题中看到 c 赋范交换群的例子．

16．设 (Ω, μ) 是一般测度空间，定义

$$L^0 = \{f \text{ 可测：使 } \|f\|_{L^0} = \mu(\mathrm{supp} f) = |\mathrm{supp} f| < \infty\}.$$

所谓 $\mathrm{supp}\, f$ 是模零测集意义下的集合 E，满足 $f \neq 0$ 于 E，$f = 0$ 于 E 外，a.e. 成立．

注意 $\|\cdot\|_{L^0}$ 是 L^0 上的一个作为向量空间不满足齐次性的 1 范数，但根据定义正是 L^0 作为交换群的 1 范数．现在我们考虑相容对 (L^0, L^∞)（对交换群的相容性是同样定义的），同样定义 E 泛函，证明

$$E(t, a; L^0, L^\infty) = f^*(t).$$

其中 $f^*(t)$ 是 f 的非增重排函数．由此可以推出

$$E_{\frac{1}{p}, q}(L^0, L^\infty) = L^{p,q},\ 0 < p,\ q \leqslant \infty.$$

此外，若令 $\theta=\dfrac{p}{p+1}$，$r=\theta q$，则得到有关内插 K 空间的下述结果．

$$K_{\theta,q}(L^0,L^\infty)=(L^{p,r})^\theta.$$

17．类似于题 16，考虑 Banach 空间 A，B．记 $l_\infty(A,B)$为由 A 到 B 内的所有有界线性算子所成的空间，$l_0(A,B)$表示所有由 A 到 B 内的有限秩线性算子所成的空间．$l_\infty(A,B)$内用通常的算子范数，而对 $l_0(A,B)$，我们把它看成交换群，定义

$$\|T\|_{l_0(A,B)}=\text{rank } T=\dim_B T(A),$$

它正是一个 1 范数．定义 E 泛函

$$E(t,T)=\inf\ \{\|T-s\|_{l_\infty(A,B)}:\text{rank } s\leqslant t\}.$$

定义

$$l_p(A,B)=\left\{T:\left(\int_0^\infty E(t,T)^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}<\infty\right\},\ 0<p<\infty.$$

证明，当 $\theta=\dfrac{p}{p+1}$，有实内插 K 空间的下述刻划

$$(l_0(A,B),l_\infty(A,B))_{\theta,\frac{p}{\theta}}=(l_p(A,B))^\theta,$$

以及当 $\dfrac{1}{p}=\dfrac{1-\theta}{p_0}+\dfrac{\theta}{p_1}$，有

$$(l_{p_0}(A,B),l_{p_1}(A,B))_{\theta,p}=l_p(A,B).$$

提示：将 $l_p(A,B)$看成某个 $E_{\gamma,r}(\overline{A})$，$\overline{A}=(l_0(A,B),l_\infty(A,B))$，然后应用 E 空间与 K 空间的关系．

18．设 $1\leqslant p\leqslant\infty$，$\hat{}$ 表示 Fourier 变换．令

$$\varepsilon_p=\{f\in L^p(\mathbb{R}^n):\operatorname{supp}\hat{f}\ 紧\},$$

$$\|f\|_e=\sup\{|\xi|:\hat{f}(\xi)\neq 0\},$$

$$\|f\|_{e_p}=\|f\|_p+\|f\|_e.$$

设 $\hat{k}$ 是无穷次可微函数，满足

$$\hat{K}(\xi)=\begin{cases}1, 当\ |\xi|<1/2;\\ 0, 当|\xi|>1.\end{cases}$$

令 $k_\lambda(x)=\lambda^n k(\lambda x)$, $x\in\mathbb{R}^n$, $\lambda\in\mathbb{R}_+$，证明

$$E(\lambda,f;\varepsilon_p,L^p)=O(\lambda^{-s}),\ \lambda\to\infty,$$

当且仅当

$$\|k_\lambda*f-f\|_p=O(\lambda^{-s}),\ \lambda\to\infty.$$

注　记

Lorentz 空间是 50 年代由 G．G．Lorentz 引进的．R．A．Hunt1964 年将 Marcinkiewicz 定理推广到 Lorentz 空间，这揭示了 L^p 的实内插空间与 Lorentz 空间的联系，线性内插的概念始于本世纪初 J．Schur 的工作．1926 年 M．Riesz 给出了算子内插的关键的一步，他证明了 $p\leqslant q$ 时 §3.5 所述的 Riesz－Thorin 定理，并首先利用内插思想给出了 Hausdorff－Young 定理的另一个证明（这是Fourier 分析中的一个著名定理，首先由 W．H．Young 于 1912 年证明了当 p' 是偶整数时有

$$\|\hat{f}\|_{p'}\leqslant c\|f\|_{L^p(\ )}.$$

1923 年，F．Hausdorff 对一般 $1\leqslant p\leqslant 2$ 证明了这个结果．）G．O．Thorin 于 1938 年利用复方法去掉了 Riesz 定理中的限制 $p\leqslant q$ 而完成了 Riesz－Thorin 定理．J．Marcinkiewicz 在 1939 年的一篇短文中没有证明地给出了 Marcinkiewicz 定理．A．Zygmund1956 年给出了这个定理的证明以及某些不能由 Riesz－Thorin 定理得到的应用．R．A．Hunt1964 年指出 Marcinkiewicz

定理中限制$p\leqslant q$是本质的．我们在§3.5 与§7.1 中对上述提到的某些都作了介绍．算子内插的其他一些推广，还在§7.6 被提到．§7.2 中除定理 2.2 属于 S. Koizumi[Ko] 外，其它都属于 A.P. Calderón，见 [C3]．在§7.3，§7.4，§7.5 中对空间内插所作的介绍主要取材于参考书[BL]．空间内插的实，复两大类方法分别是由 Marcinkiewicz 定理与 Riesz－Thorin 定理诱发而产生的，它们主要属于 J.L.Lions，J. Peetre，A. P. Calderón 等人涉及到 Hardy 空间的算子内插可以追溯到 1948 年，G.O. Thorin 与 R. Salem－A.Zygmund 的工作，以及 S. Igari [I] 1963 年的工作．应用原子分解的语言来叙述 Calderón－Zygmund 分解，并将它应用于涉及到 H_p 的算子内插似乎为专家们所熟知．对应于§7.1 中定理 1.5 的多参数情形的结果属于 A. S. Y. Chang－R.Fefferman，见 [CF2]．将内插理论应用于逼近论是J.Peetre 于 1963 年指出的．

参考文献

[BK] Bagby, R. J., Kurtz, D. S., A rearranged good λ-inequality, *Trans. A. M. S.* **293** (1986), 71—81.

[BS] Bennett, C., Sharpley, R., Weak type inequalities for H_p and *BMO*. *Proc. Symp. Pure Math.* **35** (1979), 201—229.

[BL] Bergh, J., Löfström, J., *Interpolation spaces, An introduction*, Springer -Verlag, Berlin Heidelberg, New York, (1976).

[B] Burkholder, D. L., Distribution function inequalities for martingales, *Ann. of Prob.* **1** (1973). 19—42.

[BGS] Burkholder, D. L., Gundy, R. F., Silverstein, M. L., A maximal function characterization of the class H_p, *Trans. A. M. S.* **157** (1971), 137—153.

[C1] Calderón, A. P., On the behavior of harmonic functions near the boundary, *Trans. A. M. S.* **68** (1950), 47—54.

[C2] ——, Intermediate spaces and interpolation - the complex method, *Studia Math.* **24** (1964), 113—190.

[C3] —, Spaces between L^1 and L^∞, and the theorem of Marcinkiewicz, *Studia Math.* **26**(1966). 273—299.

[C4] ——, An atomic decomposition of distribution in parabolic H_p spaces, *Adv. in Math.* **25**(1977), 216—225.

[C5] ——, Commutators, Singular integrals on Lipschitz curves and applications, *Proc. Inter. Congress of Math. Helsinki*, (1978), 85—96.

[CZ1] Calderón, A. P., Zygmund, A., On the existence of certain singular integrals, *Acta Math.* **88** (1952), 85—139.

[CZ2] ——, On higher gradients of harmonic functions, *Studia Math.*, **24** (1964), 211—226.

[CRV] Carbery, A., Rubio de Francia, J. L., Vega, L., Almost everywhere summability of Fourier integrals, *J. London Math. Soc.* **38** (1988), 513 — 524.

[Ca1] Carleson, L., Interpolation by bounded analytic functions and the corona problem, *Ann. of Math.* **76** (1962), 547 — 559.

[Ca2] ——, On convergence and growth of partial sums of Fourier series, *Acta Math.* **116** (1966), 135 — 157.

[CS] Carleson, L., Sjölin, P., Oscillatory integrals and multiplier problem for the disc, *Studia Math.*, **44** (1972), 287— 299.

[Ch] Chang, S. Y. A., Carleson measure on the bidisc, *Ann of Math.* **109** (1979), 613 — 620.

[CF1] Chang, S. Y. A., Fefferman, R., A continuous version of duality of H_1 with *BMO* on the bidisc, *Ann. of Math.*, **112** (1980), 179 — 201.

[CF2] ——, The Calderón – Zygmund decomposition on product domain, *Amer. J. of Math.*, **104** (1982), 455 — 468.

[CF3] ——, Some recent developments in Fourier analysis and H_p theory on product domains, *Bull. of A. M. S.* **12** (1985), 1 — 43.

[CC1] Cheng, M. T. (程民德), Chen, Y. H. (陈永和), 多元函数的三角多项式逼近, 北京大学学报(自然科学), **1** (1956), 411 — 428.

[CC2] ——, 多元函数的非整数次积分与三角多项式逼近, 北京大学学报(自然科学), **2** (1957), 259 — 282.

[Co] Coifman, R., A real variable characterization of H_p, *Studia Math.* **51** (1974), 269 — 274.

[CDM] Coifman, R., Deng, D. G. (邓东皋), Meyer, Y., Domaine de la racine carrée de certains opérateurs differentiels acrétifs, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, **33** (1983), 123 — 134.

[CF] Coifman, R., Fefferman, C., Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals, *Studia Math.* **51** (1974), 241 — 250.

[CJR] Coifman, R., Jones, P., Rubio de Francia, J. L., Constructive decomposition of *BMO* functions and fractorization of A_p weights, *Proc. A. M. S.* **87** (1983), 675 — 576.

[CJS] Coifman, R., Jones, P., Semmes, S., Two elementary proofs of the L^2 boundedness of Cauchy integrals on Lipschitz curves, *Jour. A. M. S.* **2** (1989), 553 — 564.

[CMM] Coifman, R., McIntosh, A., Meyer, Y., L' integrale de Cauchy définit un opérateur borné sur L^2 pour les courbes Lipschitziennes, *Ann. of Math*. **116** (1982), 361 — 388.

[CM1] Coifman, R., Meyer, Y., *Au delà des opérateurs pseudo-différentiels*, *Astérisque* **57** (1978).

[CM2] ——, Nonlinear harmonic analysis, operator theory and P. D. E., Beijing Lect. *on Harmonic Analysis* (1986), 3 — 45, Ed. E. Stein, Pub. Princeton Univ. Press.

[CMS1] Coifman, R., Meyer, Y., Stein, E., Un nouvel espace fonctionnel adapté à l'étude des opérateurs définis par des intégrales singulières, *Proc. Conf. on Harmonic Analysis*, Cortona, *Lect. Notes in Math*. **992** (1983), 1 — 15.

[CMS2] ——, Some new function spaces and their applications to harmonic analysis, *Jour. Functional Analysis*, **62** (1985), 304 — 335.

[CR] Coifman, R., Rochberg, R., Another characterization of *BMO*, *Proc. A. M. S.* **79** (1980), 249 — 254.

[CW1] Coifman, R., Weiss, G., *Analyse harmonique noncommutative sur certain espaces homogénes*, *Lect. Notes in Math.*, Springer-Verlag, **242** (1971).

[CW2] ——, Extensions of Hardy spaces and their use in Analysis, *Bull. A. M. S.*, **83** (1977), 569 — 645.

[D] David, G., Wavelets, *Calderón-Zygmund operators, and singular integrals, on curves and surfaces*, *Lect. Notes in Math.*, Springer-Verlag, **1465** (1991).

[DJ] David, G., Journé, J. L., A boundedness criterion for generalized Calderón-Zygmund operators, *Ann. of Math.*, **120** (1984), 371 — 397.

[DJS] David, G., Journé, J. L., Semmes, S., Operátewrs de Calderón

–Zygmund, fonctions para–accrétives et interpalation, *Revista Math. Iberoamericana*, **1** (1985), 1—56.

[DG] de Guzmán, M., *Real variable methods in Fourier Analysis*, *Math. Studies* **46**, North Holland (1981).

[DL] de Leeuw, K., On L^p multipliers, *Ann. of Math*, **81** (1965), 364—379.

[De] Deng, D. G. (邓东皋), On a generalized Carleson inequality, *Studia Math.*, **78** (1984), 245—251.

[DH1] Deng, D. G. (邓东皋), Han, Y. S. (韩永生), Besov 空间与 Triebel–Lizorkin 空间的刻划与 ε 算子族，北京大学学报(自然科学), **26** (1990), 268—279.

[DH2] —— H^p 空间论，北京大学出版社，(1992).

[Do] Donoghue, W. F., *Distributions and Fourier transforms*, Academic Press, Inc., (1969).

[DS] Dunford, N., Schwartz, J., *Linear Operators*, I, New, York, Interscience Publishers, (1958).

[Du] Duren, P. L., *Theory of H_p spaces*, Academic Press, New York, (1970).

[EG] Edwards, R. E., Gaudry, G. I., *Littlewood–Paley and Multiplier Theory*, *Erg*. 90, Springer–Verlag, (1977),

[E] Evans, L. C., *Weak convergence methods for non–linear partial differential equations*, *Regional Conference Series in Math*. **74** (1989), Amer. Math. Soc.

[F1] Fefferman, C., Inequalities for strong singular convolution operators, *Acta Math*. **124** (1970), 9—36.

[F2] ——, The multiplier problem for the ball, *Ann. of Math.*, **94** (1972), 330—336.

[FS1] Fefferman, C., Stein, E., Some maximal inequalities, *Amer. J. of Math*. **93** (1971), 107—115.

[FS2] ——, H_p spaces of several variables, *Acta Math*. **129** (1972), 137—193.

[Fe] Fefferman, R., Function of bounded mean oscillation of the bidisc, *Ann of Math*. **110** (1979), 395 — 406.

[Fo] Folland, G. B., *Real Analysis, Modern techniques and their applications*, John Wiley & Sons (1984).

[G] García-Cuerva, J., Rubio de Francia, J. L., *Weighted norm inequalities and related topics*, North Holland (1985).

[G] Garnett, B., *Bounded analytic functions*, Acad. Press, New York (1981).

[GJ1] Garnett, B., Jones, P. W., The distance in *BMO* to L^∞, *Ann. of Math*., **108** (1978), 373 — 393.

[GJ2] —, *BMO* from duadic *BMO*, *Pacific J. Math*., **99** (1982) 351 — 371.

[Ge] Gehring, F. W., The L^p inequality of the partial derivatives of a quasiconformal mapping, *Acta Math*., **130** (1973), 265 — 277.

[H] Hahn, L. S., On multipliers of p-integrable functions, *Trans, A. M. S*. **128** (1967), 321 — 335.

[Ha] Han, Y. S. (韩永生), A note on T(b) theorem of David-Journé-Semmes, *Approximation Th. and its Applications*, **9**(1993).

[HS] Han, Y. S. (韩永生), Sawyer, E., Paraaccretive functions, the weak boundedness property and the T(b) theorem, *Revista Math. Iberoamericana*, **6** (1990), 17 — 41.

[He1] Herz, C., On the mean inversion of Fourier and Hankel transforms, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A*., **40** (1954), 996 — 999.

[He2] —, Bounded mean oscillation and regulated martingales, *Trans. A. M. S*. **193** (1974), 199 — 215.

[He3] —, H_p spaces of martingales, $0<p\leq 1$, *Zeit Wah*. **28** (1974), 189 — 205.

[HS] Hewitt, H., Strömberg, K., *Real and Abstract Analysis*, Springer-Verlag, Berlin Heidberg New York (1965).

[Hö1] Hörmander, L., Estimate for translation invariant operators in L^p spaces, *Acta Math*. **104** (1960), 93 — 139.

[Hö2] —, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, I, II.

Ⅲ, Springer-Verlag, New York, (1983—1985).

[Hu] Hunt, R. A., On $L(p, q)$ Spaces, *L' Enseignement Math*. **12** (1966), 249—276.

[I] Igari, S., An extension of the interpolation theorem of Marcinkiewicz Ⅱ, *Tôhoku Math. J*. **15** (1963), 343—358.

[J] Janson, S., Characterization of H_1 by singular integral transforms on martingales and $\mathbb{R}^n$, *Math. Scand*. **41** (1977), 140—152.

[Ja] Jawerth, B., weighted inequalvties for maximal operators: linearization, localization and factorization, *Amer. J. of Math.*, **108** (1986), 361—414.

[JLL] Jiang, Y. S., Liu, H. P., S. Z. Lu.(江寅生、刘和平、陆善镇) Some properties of elliptic Riesz means at critical index on $H_p(\mathbb{T}^n)$, *App. Theory and its Appl*. **6** (1990), 28—37.

[JN] John, F., Nirenberg, L. On functions of bounded mean oscillation, *Comm. Pure and Appl. Math*. **14** (1961), 415—426.

[Jo1] Jones, P. W., Carleson measures and the Fefferman-Stein decomposition of $BMO(\mathbb{R})$, *Ann. of Math*. **111** (1980), 197—208.

[Jo2] ——, Factorization of A_p Weight, *Ann. of Math*. **111** (1980), 511—530.

[Jou] Journé, J. L., *Calderón-Zygmund operators, pseudo-differential operators and the Cauchy integral of Calderón*, *Lect. Notes in Math.*, *Springer-Verlag* **994** (1983).

[K] Kahane, J. P., *Séries de Fourier absolument convergentes*, *Ergebnisse der Math.*, 50, Springer-Verlag, (1970).

[Ka] Katznelson, Y., *An introduction to Harmonic Analysis*, 2 Ed. Dover Publications, Inc., New York (1976).

[Ke] Kenig, C., *Elliptic boundary value problems on Lipschitz domains*, *Beijing Lectures on Harmonic Analysis*, 131—184 (1986), Ed. E. Stein, Pub. Princeton Univ. Press.

[Ko] Koizumi, S., On singular integrals Ⅰ, *Proc. Japan Academy*, **34** (1958), 193—198.

[Koo1] Koosis, P., Sommabilité de la fonction maximale et appartenance à H_1, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A*. **28** (1978).

[Koo2] ——, *Lectures on H_p spaces*, *London Math. Soc. Lect. Notes*, London, (1980).

[L] Larsen, R. *The Multiplier Problem, Lect. Notes in Math.*, Spring-Verlag, Berlin, **105** (1969).

[La] Latter, R. H., A decomposition of $H_p(\mathbb{R}^n)$ in terms of atoms, *Studia Math*. **62** (1977), 92—101.

[Lo] Long, R. L., (龙瑞麟) Martingale proof of Clifford valued $T(b)$ theorem on $\mathbb{R}^d$, *Bull. Sci. Math.*

[LL] Long, R. L. (龙瑞麟), Liu, Z. Q (刘政权), On maximal large sieve inequality, *Scientia Sinica, series A*, **36** (1993).

[LN] Long, R. L., (龙瑞麟), Nie, F. S. (聂伏生), On weighted Sobolev's inequality, *Chinese Science Bulletin* **37** (1992), 278—280.

[LSY] Long, R. L., (龙瑞麟), Shen, Z. W. (申仲伟), Yang, Y. D. (杨宇地), Weighted inequalities concerning maximal operator and # -operator on spaces of homogeneous type *App. Theory & its Appl.* **1** (1985), 53—72.

[LTW] Lu, S. Z. (陆善镇), Taibleson, M. H., Weiss, G., *Spaces generated by blocks*, Publishing House of Beijing Normal University (1989).

[LW] Lu, S. Z. (陆善镇), Wang, Q. Y. (王昆阳), Bochner-Riesz 平均, 北京师范大学现代数学丛书, 北京师范大学出版社, (1988).

[LZ] Lu, S. Z. (陆善镇), Zhang, Y. (张严), Criterion of L^p boundedness for a class of oscillatory singular integrals with rough kernel, *Revista Math. Iberoamericana* **8** (1992), 201—219.

[M] Meyer, Y., *Ondelettes et opératours*, Ⅰ, Ⅱ, Hermann et Cie, Paris (1990).

[MTW] Meyer, Y., Taibleson, M. H., Weiss, G., Some functional analytic properties of the spaces B_q generated by blocks, *Ind. U. M. J*. **34** (1985), 493—515.

[Mr] Mrtrinovic, D. S., *Analytic Inequalities*, Springer-Verlag, Berlin

New York (1970).

[Mu] Muckenhoupt, *B*., Weighted norm inequalities for the Hardy maximal functions, *Trans. A. M. S.* **165** (1972), 207—226.

[MW] Muckenhoupt, B., Wheeden, R. L., Weighted norm inequalities for fractional integrals, *Trans. A. M. S.* **192** (1974), 251—275.

[P] Peetre, J., *New thought of Besov spaces*, Duke Univ. Press (1976).

[Pe] Peng, L. Z. (彭立中), *Contributions to certain problems in paracommutators (including the compactress of paraproduct, of paracommutators, and S_p estimates, $o<p<1$)*, Doctoral Dissertation, Stockholm University (1986).

[R] Rubio de Francia, J. L., Factorization and extrapolation of weights, *Bull. A. M. S.* **7** (1982), 393—395.

[Ru1] Rudin, W., *Fourier Analysis on groups*, Interscience Publishers (1962).

[Ru2] ——, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill Book Company, New York (1966).

[Ru3] ——, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, series in higher mathematics, New York (1973).

[S] Sarason, D., Functions of vanishing mean oscillation, *Trans. A. M. S.* **207** (1975), 391—405.

[Sa1] Sawyer, E., A characterization of a two-weight inequality for maximal operators, *Studia Math.* **75** (1982), 1—11.

[Sa2] ——, A two-weight weak type inequality for fractional integrals. *Trans. A. M. S.* **281** (1984), 339—345.

[Sh1] Shi, X. L. (施咸亮), On ΛBMV functions with some applications to theory of Fourier series, *Scientia Sinica* (英), *A*, **28** (1985), 147—158.

[Sh2] ——, Some remarks on singular integrals, *Indiana U. M. J.* **35** (1986), 103—116.

[St1] Stein, E. M., On limits of sequences of operators, *Ann. of*

Math.,**74** (1961), 140—170.

[St2] ——, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Univ. Press (1970), 中译本, 北京大学出版社 (1986).

[SW1] Stein, E. M., Weiss, G., On the theory of harmonic functions of several variables, I, The theory of H_p spaces, *Acta Math*. **103** (1960), 26—62.

[SW2] —— *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, Princeton Univ. Press (1971), 中译本, 上海科技出版社 (1987).

[Str] Strömberg, J. O., Bounded mean oscillation with Orlicz noms and duality of Hardy spaces, *Indiana U. M. J*. **28** (1979), 511—544.

[ST] Strömberg, J. O., Torchinsky, A., *Weighted Hardy Spaces*, *Lect. Notes in Math*., Springer-Verlag, **1381** (1989).

[TW1] Taibleson, M., Weiss, G., *The molecular characterization of certain Hardy spaces*, *Asterisque* 57 (1978).

[TW2] ——, Certain function spaces connected with almost everywhere convergence of Fourier series, *Proc of Conf. on Harmonic Analysis*, Univ. of Chicago (1981), 95—113.

[T] Torchinsky, A., *Real variable method in Harmonic Analysis*, Acad. Press (1986).

[Tr] Triebel, H., *Theory of function spaces*, Birkhauser Verlag, Basel, Boston, Stuttgart (1983).

[U1] Uchiyama, A., A constructive proof of the Fefferman-Stein decomposition of $BMO(\mathbb{R}^n)$, *Acta Math*. **148** (1982), 215—241.

[U2] ——, Extension of the Hardy-Littlewood-Fefferman-Stein inequality, *Pacific J. M*. **120** (1985), 229—255.

[V] Varopoulos, N. Th., *BMO* function and the $\bar{\partial}$ equation, *Pacific J. M*. **71** (1977), 221—271.

[W1] Wang, S. L. (王斯雷), Fourier series for the class of *BMO* functions *J. Hangzhou Univ*. **10** (1983), 18—29.

[W2] ——, Some properties of Littlewood − Paley's g − functions, *Scientia Sinica* (英), *A*, **28** (1985), 252 — 262.

[W3] ——, On the weighted estimate of the solution associated with Schrödinger equation, *Proc. Amer. M. S.* **113** (1991), 87 — 92.

[We] Weiss, G., Some problems in the theory of Hardy spaces, *Proc. Symp. Pure Math*. 35, Part 1 (1979), 189 — 200.

[Wi1] Wilson, J. M., A simple proof of the atomic decomposition for $H_p(\mathbb{R}^n)$, $0<p\leqslant 1$, *Studia Math*. **74** (1982), 25 — 33.

[Wi2] —— On, the atomic decomposition for Hardy spaces, *Pacific J. M*. **116** (1985), 201 — 207.

[Y] Yano, S., An extrapolation theorem, *J. Math. Soc. Japan*. **3** (1951), 296 — 305.

[Yo] Yosida, K., *Functional Analysis, Grundlehren Math. Wiss*. 123, 5 th Edition, Springer − Verlag (1978).

[Z] Zaanen, A. C., *Linear Analysis*, North Holland (1953).

[ZL] Zhang, G. Q. (张恭庆), Lin, Y. Q. (林源渠), 泛函分析讲义，上册，北京大学出版社 (1987).

[Zy] Zygmund, A., *Trigonometric Series*, Ⅰ、Ⅱ, 2nd Edition, Cambridge (1968).

索　　引

索引分中文开头与西文开头两类，分别按笔划与字母顺序排列，括号中数码表示该条在书中主要出现的章、节，例如 1.3 表示第一章第三节，余类推.

按中文笔划顺序

按拉丁字母顺序