目　录

第一章 H 鞅论的概率论基础

本章可视为对鞅论的一个入门准备. 将鞅论所需要的最基本的概率论基础, 如条件期望、停止时间、以及鞅的收敛与分解等基本知识收集在一起, 这对不太熟悉概率论的读者或许是方便的.

1.1 条件期望

设$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$是一完备概率空间, $\mathscr{F}_1$ 是$\mathscr{F}$的一个完备子 σ-代数. 则对每个 $f \in L^1$,

$$\nu(F) = \int_F f d\mu, \quad \forall F \in \mathscr{F}_1$$

定义了 $\mathscr{F}_1$ 上的一个关于 $\mu|_{\mathscr{F}_1}$ 绝对连续的测度. 根据 Radon-Nikodym 定理, 存在唯一的关于 $\mathscr{F}_1$ 可测、关于$\mu|_{\mathscr{F}_1}$可积的函数, 记为$E_{\mathscr{F}_1}(f)$或 $E(f|\mathscr{F}_1)$, 使得

$$\int_F E(f|\mathscr{F}_1) d\mu = \int_F f d\mu, \quad \forall F \in \mathscr{F}_1. \tag{1}$$

定义 1 对 $f \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$, 上述唯一存在的 $E_{\mathscr{F}_1}(f)$称为f的关于子 σ-代数 $\mathscr{F}_1$ 的条件期望; 对 $F \in \mathscr{F}$, $E_{\mathscr{F}_1}(\mathrm{II}(F))$称为$F$关于 $\mathscr{F}_1$ 的条件概率, 其中 $\mathrm{II}(F)$表示F的指示(也称特征)函数.

例 1 设 $\mathscr{F}_1$ 是由Ω的有限剖分 $\{F_k\}_1^n$ 生成的子 σ-代数(F_k 都称为 $\mathscr{F}_1$ 的原子①), 则对所有 $f \in L^1$,

$$E_{\mathscr{F}_1}(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|F_i|} \int_{F_i} f d\mu \mathrm{II}(F_i) ②. \tag{2}$$

---

① 所谓$(\mathscr{F}, \mu)$的原子是 $\mathscr{F}$ 中那些正测集 A, 它们不包含子集 $B \in \mathscr{F}$, 使得 $0 < |B| < |A|$.

② 当出现的测度不引起混淆时, $|F|$表示可测集F的测度.

这因为，既然 $E_{\mathscr{F}_1}(f)$ 是关于 $\mathscr{F}_1$ 可测的，则它在每个原子 F_i 上应为常数，故

$$E_{\mathscr{F}_1}(f)=\sum_{i=1}^{n}c_i\mathrm{II}(F_i).$$

将上式两边在 F_i 上积分，利用式(1)，即得

$$c_i=\frac{1}{|F_i|}\int_{F_i}fd\mu.$$

例 2 特别设 $G\in\mathscr{F}$，$\mathscr{F}_1$ 由原子 G, G'① 生成．则对 $F\in\mathscr{F}$，有

$$\begin{aligned}E(\mathrm{II}(F)|\mathscr{F}_1)&=\frac{1}{|G|}\int_G\mathrm{II}(F)d\mu\mathrm{II}(G)\\&\quad+\frac{1}{|G'|}\int_{G'}\mathrm{II}(F)d\mu\mathrm{II}(G')\\&=\frac{1}{|G|}|F\cap G|\mathrm{II}(G)+\frac{1}{|G'|}|F\cap G'|\mathrm{II}(G').\end{aligned}$$

其中 $|G|^{-1}|F\cap G|$ 正是古典意义下事件 F 在事件 G 出现时的条件概率．这验证了“条件期望(概率)”名称的由来．

现在讨论条件期望的基本性质．

a) $E_{\mathscr{F}_1}$ 是一个(复)线性算子．从而 $E_{\mathscr{F}_1}$ 与复共轭运算可交换，即 $\overline{E_{\mathscr{F}_1}}(f)=E_{\mathscr{F}_1}(\bar{f})$．(显然．)

b) $E_{\mathscr{F}_1}$ 是一个正算子，意即 $f\geqslant 0\Rightarrow E_{\mathscr{F}_1}(f)\geqslant 0$．(这只需考察集合 $\{E_{\mathscr{F}_1}(f)<0\}\in\mathscr{F}_1$，利用式(1)即得 $|\{E_{\mathscr{F}_1}(f)<0\}|=0$．)

c) $E_{\mathscr{F}_1}(1)=1$．(显然．)

d) 对一切 $f\in L^1$，

$$|E_{\mathscr{F}_1}(f)|\leqslant E_{\mathscr{F}_1}(|f|),\ \text{a. e.}. \tag{3}$$

这是下面的 Hölder 不等式的特殊情况，也可直接给出证明．

---

① 本书中“$'$”，对于集合它表示补集；对于拓扑线性空间它表示对偶空间；对于实数 p 它表示相伴数，即 p 与 p' 满足下述关系：

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1.$$

先考虑实函数 f. 记 $F=\{E_{\mathscr{F}_1}(f)>E_{\mathscr{F}_1}(|f|)\}$. 则 $F\in\mathscr{F}_1$, 且由

$$\int_F E_{\mathscr{F}_1}(f)d\mu=\int_F fd\mu\leqslant\int_F|f|d\mu$$
$$=\int_F E_{\mathscr{F}_1}(|f|)d\mu,$$

知 $|F|=0$. 类似地, 记 $F=\{E_{\mathscr{F}_1}(f)<-E_{\mathscr{F}_1}(|f|)\}$, 则也有 $|F|=0$. 这证明了实函数 f 时的断言. 当 f 为复函数时, 存在关于 $\mathscr{F}_1$ 可测的 $\theta(\omega)$, 使

$$E_{\mathscr{F}_1}(f)e^{i\theta(\omega)}=|E_{\mathscr{F}_1}(f)|.$$

利用下面的性质 f), 此即

$$E_{\mathscr{F}_1}(fe^{i\theta(\omega)})=|E_{\mathscr{F}_1}(f)|.$$

于是利用对实函数的式(3)得

$$|E_{\mathscr{F}_1}(f)|=E_{\mathscr{F}_1}(\mathrm{Re}(fe^{i\theta(\omega)}))$$
$$\leqslant E_{\mathscr{F}_1}(|\mathrm{Re}(fe^{i\theta(\omega)})|)\leqslant E_{\mathscr{F}_1}(|f|).$$

e) 我们有

$$\|E_{\mathscr{F}_1}(f)\|_p\leqslant\|f\|_p,\quad 1\leqslant p\leqslant\infty. \tag{4}$$

这因, 若考虑所有那样的

$$g=\sum_{i=1}^{n}c_i\mathrm{II}(F_i),\quad F_i\in\mathscr{F}_1,$$

其中 n, $\{c_i\}$, 与 $\{F_i\}$ 都是任意的, 则

$$\|E_{\mathscr{F}_1}(f)\|_p=\sup_{g:\|g\|_{p'}\leqslant 1}|E(E_{\mathscr{F}_1}(f)g)|$$
$$=\sup_{g:\|g\|_{p'}\leqslant 1}|E(fg)|\leqslant\|f\|_p.$$

f) 设 $f\in L^p$, $g\in L^{p'}$, 且 g 关于 $\mathscr{F}_1$ 可测, $1\leqslant p\leqslant\infty$, 则

$$E_{\mathscr{F}_1}(fg)=gE_{\mathscr{F}_1}(f). \tag{5}$$

找 $\mathscr{F}_1$-简单函数序列 $\{g_n\}$, 使 $g_n\to g$ 在 $L^{p'}$ 中. 则对每个 n, 显然有

$$E_{\mathscr{F}_1}(fg_n)=g_nE_{\mathscr{F}_1}(f).$$

而因等式两边在 L^1 中分别有极限 $E_{\mathscr{F}_1}(fg)$ 与 $gE_{\mathscr{F}_1}(f)$，这就证明了式(5).

g) 軼性质. 设 $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2$ 是 $\mathscr{F}$ 的子 σ-代数，且 $\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2$. 则

$$E_{\mathscr{F}_1}(E_{\mathscr{F}_2}(f)) = E_{\mathscr{F}_1}(f), \quad \forall f \in L^1. \tag{6}$$

既然上式两边均关于 $\mathscr{F}_1$ 可测，故只需证明式(1). 事实上，因 $\forall F \in \mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2$，我们有

$$\begin{aligned}\int_F E_{\mathscr{F}_1}(E_{\mathscr{F}_2}(f))\, d\mu &= \int_F E_{\mathscr{F}_2}(f)\, d\mu \\ &= \int_F f\, d\mu = \int_F E_{\mathscr{F}_1}(f)\, d\mu.\end{aligned}$$

h) Parseval 关系. $\forall f \in L^p,\ g \in L^{p'},\ 1 \leqslant p \leqslant \infty$，有

$$E(E_{\mathscr{F}_1}(f)g) = E(fE_{\mathscr{F}_1}(g)). \tag{7}$$

这因式(7)的两边都等于 $E(E_{\mathscr{F}_1}(f)E_{\mathscr{F}_1}(g))$. 事实上，只看上式左端，有

$$\begin{aligned}E(E_{\mathscr{F}_1}(f)g) &= E(E_{\mathscr{F}_1}(E_{\mathscr{F}_1}(f)g)) \\ &= E(E_{\mathscr{F}_1}(f)E_{\mathscr{F}_1}(g)).\end{aligned}$$

i) Hölder 不等式. $\forall f \in L^p,\ g \in L^{p'},\ 1 \leqslant p \leqslant \infty$，有

$$|E_{\mathscr{F}_1}(fg)| \leqslant E_{\mathscr{F}_1}(|f|^p)^{1/p} E_{\mathscr{F}_1}(|g|^{p'})^{1/p'}. \tag{8}$$

事实上，若记 $F = \{E_{\mathscr{F}_1}(|f|^p) > 0,\ E_{\mathscr{F}_1}(|g|^{p'}) > 0\}$. 则在 F 上，

$$\begin{aligned}&\frac{|f|}{E_{\mathscr{F}_1}(|f|^p)^{1/p}} \frac{|g|}{E_{\mathscr{F}_1}(|g|^{p'})^{1/p'}} \\ &\qquad \leqslant \frac{1}{p} \frac{|f|^p}{E_{\mathscr{F}_1}(|f|^p)} + \frac{1}{p'} \frac{|g|^{p'}}{E_{\mathscr{F}_1}(|g|^{p'})}.\end{aligned}$$

既然 $F \in \mathscr{F}_1$，则

$$\begin{aligned}&E_{\mathscr{F}_1}\left(\frac{|f|}{E_{\mathscr{F}_1}(|f|^p)^{1/p}} \frac{|g|}{E_{\mathscr{F}_1}(|g|^{p'})^{1/p'}}\right) \mathrm{II}(F) \\ &\quad = E_{\mathscr{F}_1}\left(\frac{|f|}{E_{\mathscr{F}_1}(|f|^p)^{1/p}} \frac{|g|}{E_{\mathscr{F}_1}(|g|^{p'})^{1/p'}} \mathrm{II}(F)\right)\end{aligned}$$

$$\leqslant E_{\mathscr{F}_1}\left(\frac{1}{p}\frac{|f|^p}{E_{\mathscr{F}_1}(|f|^p)}\text{II}(F)+\frac{1}{p'}\frac{|g|^{p'}}{E_{\mathscr{F}_1}(|g|^{p'})}\text{II}(F)\right)$$

$$\leqslant\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1.$$

此即

$$E_{\mathscr{F}_1}(|f||g|)\text{II}(F)\leqslant E_{\mathscr{F}_1}(|f|^p)^{1/p}E_{\mathscr{F}_1}(|g|^{p'})^{1/p'}.$$

但在 $F_f=\{E_{\mathscr{F}_1}(|f|^p)=0\}$ 上，f 必须为 0. 因

$$\int_{F_f}|f|^p d\mu=\int_{F_f}E_{\mathscr{F}_1}(|f|^p)d\mu=0.$$

类似地，在 $F_g=\{E_{\mathscr{F}_1}(|g|^{p'})=0\}$ 上，g 也为 0. 故 fg 在 $F_f\cup F_g$ 上为 0. 既然 $\Omega=F_f\cup F_g\cup F$，从而证明了式(8).

在讲述条件期望算子的其他性质以前，先对条件期望的定义作一个平凡的推广. 前面已对一切 $f\in L^1$ 定义了条件期望算子. 但是由于条件期望算子的正性(从而有单调性)，对一切非负可测函数 f 也可以定义条件期望算子如下.

设 $f\geqslant 0$ 可测. 记

$$f^{(N)}=\begin{cases}f, & f\leqslant N,\\ N, & f>N.\end{cases}$$

则对任意的子 σ-代数 $\mathscr{F}_1$ 取定，$E_{\mathscr{F}_1}(f^{(N)})$ 为单调增加的，故有关于 $\mathscr{F}_1$ 可测的极限存在，记之为 $E_{\mathscr{F}_1}(f)$.

这样定义的 $E_{\mathscr{F}_1}(f)$ 关于 $\mathscr{F}_1$ 可测，对一切 $F\in\mathscr{F}_1$，有

$$\int_F f d\mu=\int_F E_{\mathscr{F}_1}(f)d\mu,$$

并且当 $f\leqslant g$ 时，也有 $E_{\mathscr{F}_1}(f)\leqslant E_{\mathscr{F}_1}(g)$，等等，所不同的只是此时 $E_{\mathscr{F}_1}(f)$ 不必是 a. e. 有限的. 此外，对这样推广定义的条件期望算子，还有 Lebesgue 单调收敛定理、Fatou 引理等. 由单调收敛定理可附带地推出 $E_{\mathscr{F}_1}(\cdot)$ 定义中的单调增加收敛序列的选取可以是任意的.

j）单调收敛定理．设非负 f_n 单调增加地 a. e. 收敛于 f. 则

$$\lim_n E(f_n|\mathscr{F}_1)=E(f|\mathscr{F}_1),\quad \text{a. e.}\ .$$

这因，由单调性，$E(f_n|\mathscr{F}_1)$ 有关于 $\mathscr{F}_1$ 可测的极限 $h(\omega)$，且

$$h\leqslant E(f|\mathscr{F}_1),\quad \text{a. e.}\ .$$

于是，$\forall F\in\mathscr{F}_1$，我们有

$$\begin{aligned}\int_F h d\mu&=\int_F \lim_n E(f_n|\mathscr{F}_1)d\mu\\&=\lim_n\int_F E(f_n|\mathscr{F}_1)d\mu\\&=\lim_n\int_F f_n d\mu=\int_F f d\mu\\&=\int_F E(f|\mathscr{F}_1)d\mu.\end{aligned}$$

由此即知 $h=E(f|\mathscr{F}_1)$.

k）Fatou 引理．设 f_n 非负可测，则

$$E(\underline{\lim}\, f_n|\mathscr{F}_1)\leqslant \underline{\lim}\, E(f_n|\mathscr{F}_1).$$

记 $g_n=\inf\limits_{m\geqslant n} f_m$. 则 g_n 非负单调增加地收敛于 $\underline{\lim}\, f_n$. 故

$$\begin{aligned}E(\underline{\lim} f_n|\mathscr{F}_1)&=E(\lim g_n|\mathscr{F}_1)\\&=\lim E(g_n|\mathscr{F}_1)\leqslant\underline{\lim} E(f_n|\mathscr{F}_1).\end{aligned}$$

l）控制收敛定理．设 $f_n\in L^1$, $f_n\to f$, a. e.，且 $|f_n|\leqslant g$, $g\in L^1$. 则

$$\lim_n E(f_n|\mathscr{F}_1)=E(f|\mathscr{F}_1).$$

记 $h_n=\sup\limits_{m\geqslant n}|f-f_m|$，则 h_n 非负单调下降于 0，且有控制函数 $2g$，故 $E(h_n)\to 0$. 同时，$E(h_n|\mathscr{F}_1)$ 也单调下降，故有点态极限 $h\geqslant 0$. 但

$$|E(f|\mathscr{F}_1)-E(f_n|\mathscr{F}_1)|\leqslant E(|f-f_n||\mathscr{F}_1)\leqslant E(h_n|\mathscr{F}_1),$$

以及由 Fatou 引理，

$$E(h)=E(\lim E(h_n|\mathscr{F}_1))$$

$$\leqslant\varliminf_n E(E(h_n|\mathscr{F}_1))=\lim_n E(h_n)=0,$$

这说明 $h=0$, 从而 $E(f_n|\mathscr{F}_1)\to E(f|\mathscr{F}_1)$.

m) Jenser 不等式. 设 $\varphi(u)$ 是定义于 (a,b) 上的凸函数, 实函数 $f\in L^1$, 其值域含于 (a,b) (当然只要求 a.e.), 并使 $\varphi(f)$ 可积, 或 $\varphi(f)$ 非负. 则

$$\varphi(E(f|\mathscr{F}_1))\leqslant E(\varphi(f)|\mathscr{F}_1). \tag{9}$$

注意凸函数有如下初等性质: 设 φ 凸于 (a,b), $\varphi'(\lambda)$ 存在, 则 $\forall u\in(a,b)$,

$$\varphi(u)-\varphi(\lambda)\geqslant\varphi'(\lambda)(u-\lambda).$$

现固定 $\lambda\in(a,b)$ 使 $\varphi'(\lambda)$ 存在(只有 (a,b) 的一个可列子集可能是例外集). 取 $u=f(w)$, 对上式两端取条件期望, 则得

$$E_{\mathscr{F}_1}(\varphi(f))\geqslant\varphi'(\lambda)(E_{\mathscr{F}_1}(f)-\lambda)+\varphi(\lambda). \tag{10}$$

既然除去一零测集有 $a<E_{\mathscr{F}_1}(f)<b$, 在 $v=E_{\mathscr{F}_1}(f)(\omega)\in(a,\ b)$ 处取收敛于 v 的 λ 的一个序列, 则

$$\varphi(E_{\mathscr{F}_1}(f))=\varphi(v)=\lim_{\lambda\to v}\{\varphi'(\lambda)(v-\lambda)+\varphi(\lambda)\}$$

$$=\lim_{\lambda\to v}\{\varphi'(\lambda)(E_{\mathscr{F}_1}(f)-\lambda)+\varphi(\lambda)\}. \tag{10$'$}$$

比较式(10)与(10)$'$, 即证明了式(9).

注 1 条件期望的单调收敛定理与 Fatou 引理中的非负性条件, 当然都可以用 $f_n\geqslant g$ 代替, 以及控制收敛定理中的控制条件也可以用 $h\geqslant f_n\geqslant g$ 代替, 这里 $g,h\in L^1$.

注 2 条件期望算子可以被几个简单性质刻划. Neveu[1]指出: 设 T 是 $L^p(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ $(1\leqslant p<\infty)$ 上定义的一个线性的、正的、幂等的, 以及压缩范数, 且使 $T1=1$ 的算子, 则存在一个完备子 σ-代数 $\mathscr{F}_1$, 使 T 是 $L^p(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ 到 $L^p(\Omega,\mathscr{F}_1,\mu|_{\mathscr{F}_1})$ 上的条件

期望算子.（当 $p\neq 2$ 时，条件中的正性还可以除掉.）Rao[3] 也有关于条件期望算子的刻划的类似讨论.

1.2 停止时间

定义 2 设 $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ 是一概率空间，$\{\mathscr{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ 是一个增加的子 σ-代数的族，使得 $\mathscr{F}=\bigvee\limits_n \mathscr{F}_n$（即 $\mathscr{F}$ 由所有 $\mathscr{F}_n$ 生成）. 一个由 Ω 到 $\mathbf{Z}^+\cup\{\infty\}$ 内的映射 T 称为一个关于 $\{\mathscr{F}_n\}$ 的停止时间，如果 $\{\omega: T(\omega)=n\}\in\mathscr{F}_n$, $\forall n$（或等价地 $\{T\leqslant n\}\in\mathscr{F}_n$, $\forall n$）.

例 设 $\{f_n\}_{n\geqslant 0}$ 是一个适应于 $\{\mathscr{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ 的随机过程，意即 $\forall n$, f_n 关于 $\mathscr{F}_n$ 可测. 设 B 是复平面内的任意一个 Borel 集. 则

$$T=\inf\{n: f_n\in B\}$$

便是一个停止时间. 因

$$\{\omega: T=n\}=\{\omega: f_j\overline{\in}B, \forall j<n, f_n\in B\}\in\mathscr{F}_n.$$

定义 3 设 T 是任一停止时间，记

$$\mathscr{F}_T=\{F\in\mathscr{F}: F\cap\{T\leqslant n\}\in\mathscr{F}_n, \forall n\}$$

（或 $\{T\leqslant n\}$ 用 $\{T=n\}$ 代）.

则 $\mathscr{F}_T$ 是一子 σ-代数，称为 T 前 σ-代数.

现在讨论停止时间及 T 前 σ-代数的性质（相对于固定的子 σ-代数增加族 $\{\mathscr{F}_n\}_{n\geqslant 0}$）.

a) 设 T 是任一停止时间，则集合 $A\in\mathscr{F}_T \Longleftrightarrow A\in\mathscr{F}$, 且

$$T_A=\begin{cases} T, & \omega\in A, \\ \infty, & \omega\overline{\in}A \end{cases}$$

是一停止时间.

这是因为 $\{T_A\leqslant n\}=A\cap\{T\leqslant n\}$.

b) 设 S 是一停止时间，T 是 $\mathscr{F}_S$ 可测的整值函数，且 $S\leqslant T$,

则 T 也是一停止时间.

这是因为 $\{T\leqslant n\}=\{S\leqslant n\}\cap\{T\leqslant n\}$. 特别, 由此知对整常数 $n\geqslant 0$, $S+n$ 都是停止时间.

c) 设 T, S 是两个停止时间, 则 $T\vee S=\max(T,S)$ 与 $T\wedge S=\min(T,S)$ 都是停止时间. 进一步, 设 $\{T_k\}$ 是停止时间的一个序列, 则 $T=\sup\limits_k T_k$ 与 $S=\inf\limits_k T_k$ 都是停止时间.

这是因为 $\{T\leqslant n\}=\bigcap\limits_k\{T_k\leqslant n\}$ 以及 $\{S\geqslant n+1\}=\bigcap\limits_k\{T_k\geqslant n+1\}$(注意 $\{S\geqslant n+1\}=\{S\leqslant n\}'$).

d) 设 T, S 是两个停止时间, 则 $\{T\leqslant S\}$, $\{S<T\}$, $\{S\leqslant T\}$, $\{S>T\}$, $\{T=S\}$ 都属于 $\mathscr{F}_T\cap\mathscr{F}_S$.

充分地只需证 $\{T\leqslant S\}\in\mathscr{F}_T\cap\mathscr{F}_S$. 因为

$$\{T\leqslant S\}\cap\{S=n\}=\bigcup_{m\leqslant n}\{T=m\}\cap\{S=n\}\in\mathscr{F}_n,$$

$$\{T\leqslant S\}\cap\{T=n\}=\{S\geqslant n\}\cap\{T=n\}\in\mathscr{F}_n.$$

e) 设 T, S 是任意两个停止时间; $A\subset\{T\leqslant S\}$ 且 $A\in\mathscr{F}_S$(或 $A\subset\{T=S\}$, $A\in\mathscr{F}_T\cap\mathscr{F}_S$). 则 $A\cap\mathscr{F}_T\subset A\cap\mathscr{F}_S$(或 $A\cap\mathscr{F}_T=A\cap\mathscr{F}_S$). 特别, 若 $T\leqslant S$, 则 $\mathscr{F}_T\subset\mathscr{F}_S$.

因设 $B\in\mathscr{F}_T$ 为任意的, 则

$$A\cap B\cap\{S\leqslant n\}=A\cap\{S\leqslant n\}\cap B\cap\{T\leqslant n\}\in\mathscr{F}_n.$$

这说明

$$A\cap B\in\mathscr{F}_S,\quad A\cap B\in A\cap\mathscr{F}_S.$$

于是, $A\cap\mathscr{F}_T\subset A\cap\mathscr{F}_S$ 获证. 至于第二个结论是因上述过程可以逆转.

f) 设 $A\subset\{T=S\}$, $A\in\mathscr{F}_S\cap\mathscr{F}_T$, 则 $\forall f\in L^1$, 有

$$E(f\mid\mathscr{F}_S)\mathrm{I}(A)=E(f\mid\mathscr{F}_T)\mathrm{I}(A). \tag{11}$$

这是因为 $E(f\mathrm{I}(A)\mid\mathscr{F}_S)=E(f\mathrm{I}(A)\mid\mathscr{F}_T)$.

g) 设 $A\subset\{T\leqslant S\}$, $A\in\mathscr{F}_S$. 则 $\forall f\in L^1$, 有

$$E(f\mathrm{I}(A)\mid\mathscr{F}_T)=E(E(f\mathrm{I}(A)\mid\mathscr{F}_S)\mid\mathscr{F}_T). \tag{12}$$

这是因为 $\forall B\in\mathscr{F}_T$, 既然 $A\cap B\in\mathscr{F}_S$, 有

$$\begin{aligned}\int_B E(f\mathrm{I}(A)\mid\mathscr{F}_T)d\mu&=\int_{A\cap B}fd\mu\\&=\int_{A\cap B}E(f\mid\mathscr{F}_S)d\mu=\int_B E(f\mathrm{I}(A)\mid\mathscr{F}_S)d\mu\\&=\int_B E(E(f\mathrm{I}(A)\mid\mathscr{F}_S)\mid\mathscr{F}_T)d\mu.\end{aligned}$$

从而式(12)获证.

h) 设 T 是任意的停止时间. 则对一切的 $f\in L^1$, f_T 关于 $\mathscr{F}_T$ 可测、可积, 且

$$f_T=E(f\mid\mathscr{F}_T), \tag{13}$$

其中 f_T 为在过程 $(f_n)_{n\geqslant0}(f_n=E(f\mid\mathscr{F}_n))$ 中用 $T(\omega)$ 代替指标 n.

注意

$$f_{T(\omega)}(\omega)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(\omega)\mathrm{I}(\{T=n\})+f(\omega)\mathrm{I}(\{T=\infty\}).$$

这样对复平面的任意 Borel 集 B, 有

$$f_T^{-1}(B)\cap\{T\leqslant m\}=\bigcup_{n\leqslant m}(f_n^{-1}(B)\cap\{T=n\})\in\mathscr{F}_m.$$

这证明了 f_T 关于 $\mathscr{F}_T$ 可测. 其可积性由

$$\int_{\{T=n\}}|f_n|d\mu\leqslant\int_{\{T=n\}}|f|d\mu$$

而知. 至于式(13)的证明, 是因对任意的 $F\in\mathscr{F}_T$, 有

$$\begin{aligned}\int_F f_Td\mu&=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{F\cap\{T=n\}}f_nd\mu+\int_{F\cap\{T=\infty\}}fd\mu\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{F\cap\{T=n\}}fd\mu+\int_{F\cap\{T=\infty\}}fd\mu\end{aligned}$$

$$=\int_F f d\mu=\int_F E(f\mid \mathscr{F}_T)d\mu.$$

i) 设 T, S 是任意的两个停止时间. 则 $\forall f\in L^1$ 有

$$(f_T)_S=f_{T\wedge S}. \tag{14}$$

这因若记 $A=\{T\leqslant S\}, A'=\{T>S\}$. 则 $A, A'\in\mathscr{F}_T\cap\mathscr{F}_S$, 且

$$\begin{aligned}(f_T)_S&=E(E(f\mid\mathscr{F}_T)\mid\mathscr{F}_S)(\text{II}(A)+\text{II}(A'))\\&=E(E(f\text{II}(A)\mid\mathscr{F}_T)\mid\mathscr{F}_S)\\&\quad+E(E(f\text{II}(A')\mid\mathscr{F}_T)\mid\mathscr{F}_S)\\&=f_T\text{II}(A)+f_S\text{II}(A')=f_{T\wedge S}.\end{aligned}$$

于是证明了式(14), 其中用到了式(12).

j) 设 S 是一停止时间. 记 $\mathscr{G}_n=\mathscr{F}_{S+n}$, $n\geqslant 0$. 设 T 是 $\mathscr{F}$ 可测的非负整值函数. 则 $U=T+S$ 是一个关于 $\{\mathscr{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ 的停止时间, 当且仅当 T 是一个关于 $\{\mathscr{G}_n\}_{n\geqslant 0}$ 的停止时间.

证明 $\Leftarrow$: 我们有

$$\{T+S\leqslant n\}=\bigcup_{m\leqslant n}(\{T\leqslant m\}\cap\{S+m\leqslant n\}).$$

既然 $S+m$ 是一停止时间, 且 $\{T\leqslant m\}\in\mathscr{G}_m=\mathscr{F}_{S+m}$, 故

$$\{T\leqslant m\}\cap\{S+m\leqslant n\}\in\mathscr{F}_n.$$

这证明了 $T+S$ 是一个关于 $\{\mathscr{F}_n\}$ 的停止时间.

$\Rightarrow$: 注意 $\{T\leqslant n\}=\{S+T\leqslant S+n\}$. 既然 $S+T$ 与 $S+n$ 都是停止时间, 由上面的性质 e) 知

$$\{S+T\leqslant S+n\}\in\mathscr{F}_{S+n}=\mathscr{G}_n.$$

这证明了 T 是一个关于 $\{\mathscr{G}_n\}$ 的停止时间. ▌

虽然本书不考虑连续时间参变量 t 的情形, 但我们愿意指出此时通常还需假定族 $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个右连续族. 这时的停止时间 T 与 T 前 σ-代数 $\mathscr{F}_T$ 的定义及其性质是与离散时间情形类似的. 同时还需要引进另一个重要的子 σ-代数 $\mathscr{F}_{T-}$.

定义 4 设T是停止时间. 定义$\mathscr{F}_{T-}$是由$\mathscr{F}_0$中的集与形如$A\cap\{T>t\}$, $\forall t$, $\forall A\in\mathscr{F}_t$的集合生成的$\sigma$-代数.

引进这个σ-代数的意义在于$\mathscr{F}_{T-}\subset\mathscr{F}_T$. 关于$\mathscr{F}_{T-}$的可测性是一个比$\mathscr{F}_T$可测更强的性质, 同时许多与$T$联系的对象却是关于$\mathscr{F}_{T-}$-可测的. 如: T总是关于$\mathscr{F}_{T-}$-可测的(因$\{T>t\}=\Omega\cap\{T>t\}\in\mathscr{F}_{T-}$); $\{T<S\}\in\mathscr{F}_{S-}$ (因$\{T<S\}=\bigcup\limits_{r}(\{T<r\}\cap\{S>r\}$, r有理数); 以及$\{T=\infty\}$的任何一个$\mathscr{F}$可测子集$A\in\mathscr{F}_{T-}$. (因对任意的t, 及$F\in\mathscr{F}_t$,

$$F\cap\{T=\infty\}=\bigcap_{n\geq t}(F\cap\{T>n\})\in\mathscr{F}_{T-},$$

这说明$\mathscr{F}_t\cap\{T=\infty\}\subset\mathscr{F}_{T-}$, $\forall t$, 故$\mathscr{F}\cap\{T=\infty\}\subset\mathscr{F}_{T-}$. 此即$\{T=\infty\}$的任意$\mathscr{F}$可测子集属于$\mathscr{F}_{T-}$.)

1.3 鞅、上(下)鞅

本节叙述有关鞅的几个基本概念及几个在今后讨论鞅的各种空间时要用到的基本性质, 主要指鞅、上(下)鞅的分解, 鞅、上(下)鞅的收敛等.

设$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$是一个完备概率空间, $\{\mathscr{F}_n\}_{n\geq 0}$是$\mathscr{F}$的完备子$\sigma$-代数的一个增加族, 满足$\mathscr{F}=\bigvee\limits_n\mathscr{F}_n$. 一个随机过程$Q=(Q_n)_{n\geq 0}$称为适应的, 如$Q_n$关于$\mathscr{F}_n$可测, $\forall n$. 过程Q称为可预报的(狭义), 如Q_n关于$\mathscr{F}_{(n-1)\vee 0}$可测, $\forall n=0, 1, \cdots$.

定义 5 一个关于$\{\mathscr{F}_n\}_{n\geq 0}$适应的过程$f=(f_n)_{n\geq 0}$称为一个(关于$\{\mathscr{F}_n\}_{n\geq 0}$的)鞅, 如每个$f_n$可积, 且

$$f_n=E(f_{n+1}|\mathscr{F}_n),\quad n=0, 1, \cdots; \tag{15}$$

称为一个上鞅, 如式(15)换为

$$f_n \geqslant E(f_{n+1} | \mathscr{F}_n), \quad n=0, 1, \cdots; \tag{15)'$$

称为一个下鞅，如式(15)换为

$$f_n \leqslant E(f_{n+1} | \mathscr{F}_n), \quad n=0, 1, \cdots. \tag{15)''$$

显然，$f=(f_n)$是上鞅，当且仅当$-f=(-f_n)_{n\geqslant 0}$是下鞅.

例1 对$f\in L^1$定义$f_n=E(f|\mathscr{F}_n)$，则由条件期望的鞅性质，知$f=(f_n)_{n\geqslant 0}$是一个鞅. 设$(d_k)_{k\geqslant 0}$是一个过程使得d_k关于$\mathscr{F}_k$可测，$\forall k=0, 1, \cdots$，以及$E(d_k|\mathscr{F}_{k-1})=0$，$\forall k=1, 2, \cdots$. 则过程$f=(f_n)_{n\geqslant 0}\left(\text{其中} f_n=\sum\limits_{k=0}^{n} d_k\right)$便是一个鞅. 这因

$$E(f_n | \mathscr{F}_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} d_k + E(d_n | \mathscr{F}_{n-1}) = f_{n-1}.$$

反之，每个鞅$f=(f_n)_{n\geqslant 0}$都是如此产生的. 事实上

$$d_k = \Delta f_k = f_k - f_{k-1}$$

便满足上述条件，并使

$$f_n = \sum_{k=0}^{n} d_k.$$

注意当$f\in L^2$时，$\{d_k\}$是L^2中正交系. 因如设$k>l$，则有

$$E(d_k \bar{d}_l) = E(E(\bar{d}_l d_k | \mathscr{F}_{k-1})) = E(\bar{d}_l E(d_k | \mathscr{F}_{k-1})) = 0.$$

所以，每个L^2中的鞅(定义见后)形式上是一个正交级数.

现看上(下)鞅的例子. 设$f=(f_n)_{n\geqslant 0}$是任何一个鞅，则对$1\leqslant p<\infty$，$(|f_n|^p)_{n\geqslant 0}$是一下鞅. 因

$$|f_n|^p \leqslant |E(f_{n+1} | \mathscr{F}_n)|^p \leqslant E(|f_{n+1}|^p | \mathscr{F}_n).$$

设$f=(f_n)_{n\geqslant 0}$是任意上鞅，$\varphi(u)$是任意一个增加凹函数，则$(\varphi(f_n))_{n\geqslant 0}$仍为上鞅. 事实上，若记$\psi(v)$为$\varphi(u)$的逆函数，则$\psi(v)$是凸函数. 由 Jensen 不等式，有

$$E(f_{n+1} | \mathscr{F}_n) = E(\psi(\varphi(f_{n+1})) | \mathscr{F}_n) \geqslant \psi(E(\varphi(f_{n+1}) | \mathscr{F}_n)).$$

既然 $\varphi(u)$ 是增加的，故

$$\varphi(f_n)\geqslant\varphi(E(f_{n+1}|\mathscr{F}_n))\geqslant\varphi\circ\psi(E(\varphi(f_{n+1})|\mathscr{F}_n))$$
$$=E(\varphi(f_{n+1})|\mathscr{F}_n).$$

于是证明了 $(\varphi(f_n))_{n\geqslant0}$ 是一上鞅.

设 $f=(f_n)_{n\geqslant0}$ 是任意下鞅，$\varphi(u)$ 是任意的增加凸函数，则 $(\varphi(f_n))_{n\geqslant0}$ 仍为下鞅. 这只需同上一样(但更直接)，仍应用Jensen不等式.

注 下鞅对增加的凸函数封闭，增加两字不能去掉. 如设 (f_n) 是一非负上鞅，则 $(-f_n)$ 是下鞅，它对凸函数 $\varphi(u)=|u|$ 可以不封闭. 类似地，上鞅对凹函数也可以不封闭. 但对鞅 $f=(f_n)_{n\geqslant0}$ 而言，对一切凸函数 $\varphi(u)$，$(\varphi(f_n))_{n\geqslant0}$ 是下鞅；对一切凹函数 $\psi(u)$，$(\psi(f_n))_{n\geqslant0}$ 是上鞅，无需增加性. 这只需应用Jensen不等式，并注意 ψ 为凹函数，当且仅当 $-\psi$ 为凸函数.

例 2 考虑概率空间 $([0,1),\mathscr{B},dx)$ ($\mathscr{B}$ 是 Borel 集合系，dx 是 Lebesgue 测度)，以及子 σ-代数族 $\{\mathscr{F}_n\}_{n\geqslant0}$，其中 $\mathscr{F}_n$ 是由 $\{F_n^{(j)}\}$ 生成的 σ-代数，其中

$$F_n^{(j)}=\left[\frac{j}{2^n},\frac{j+1}{2^n}\right),\quad j=0,1,\cdots,2^n-1.$$

则 $\forall f\in L^1$, $\forall n$, 有

$$E(f|\mathscr{F}_n)=\sum_{j=0}^{2^n-1}\frac{1}{|F_n^{(j)}|}\int_{F_n^{(j)}}f\,dx\,\mathrm{II}(F_n^{(j)}).$$

现考虑 f 的 Walsh 展开，并计算其 2^n 阶部分和 $S_{2^n}(x,f)$. 有

$$S_{2^n}(x,f)=\int_0^1 f(x\dotplus t)D_{2^n}(t)\,dt,$$

其中 $x\dotplus t$ 表示将 x, t 二进展开，然后按位模 2 相加，

$$D_{2^n}(t)=\begin{cases}2^n, & 0\leqslant t<\dfrac{1}{2^n},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

这样

$$S_{2^n}(x,f)\amalg(F_n^{(j)}) = 2^n\int_0^{2^{-n}} f(x+t)\,dt\,\amalg(F_n^{(j)})$$

$$= \frac{1}{|F_n^{(j)}|}\int_{F_n^{(j)}} f(t)\,dt\,\amalg(F_n^{(j)})$$

$$= E(f|\mathscr{F}_n)\amalg(F_n^{(j)}).$$

由此说明 $E(f|\mathscr{F}_n)$不是别的，正是 f 的 Walsh 展开的 2^n 阶部分和.

这种联系对于调和分析的更一般情况仍成立. 设 X 是一个局部紧致交换群，它有一个由紧开子群组成的增加族 $(X_j)_{-\infty}^{+\infty}$，满足下述性质：$X_j$ 在 X_{j+1} 中的指标有限，且

$$\bigcup X_j = X, \quad \bigcap X_j = \{0\}.$$

设 G_j 是 X_j 在 G 内的零化子(即 $G_j=\{t\in G: (x,t)=1, \forall x\in X_j\}$). 则 $(G_j)_{-\infty}^{+\infty}$ 递降，G_{j+1} 在 G_j 中的指标也有限，且

$$\bigcup G_j = G, \quad \bigcap G_j = \{0\}.$$

定义 $\Omega=G$, $\mathscr{F}$ 是 G 的 Borel 系. μ 是 G 上 Haar 测度，$\mathscr{F}_j$ 是由 G_j的所有陪集(至多可数个)生成的 σ-代数. 则$\{\mathscr{F}_j\}_{-\infty}^{+\infty}$ 是一个增加族. 且$\bigcap\mathscr{F}_j$ 是平凡的，$\bigvee\limits_j \mathscr{F}_j = \mathscr{F}$.

现将全测度不有限，但 σ-有限的测度空间内的鞅论应用于此. 注意每个 $(G,\mathscr{F}_j,\mu)$是原子的，其原子就是 G_j 的各个陪集. 注意，因为 G_j 是紧致的且为开的子集，则每个陪集 $x+G_j$ 都满足 $0<|x+G_j|<\infty$. 那末，$\forall f\in L^1(G)$, $E(f|\mathscr{F}_j)$在每个陪集 $x+G_j$ 上取常数值

$$E(f|\mathscr{F}_j)(x) = \frac{1}{|x+G_j|}\int_{x+G_j} f\,d\mu(y)$$

$$= \frac{1}{|G_j|}\int_{G_j} f(x-y)\,d\mu(y)$$

$$=\frac{\mathrm{II}(G_j)}{|G_j|}*f(x), \quad x\in x+G_j.$$

这也说明 G 上两个函数 $E(f|\mathscr{F}_j)$ 与 $\frac{\mathrm{II}(G_j)}{|G_j|}*f$ 相等. 既然 G_j 是紧致开子群, 故

$$\left(\frac{\mathrm{II}(G_j)}{|G_j|}\right)^{\wedge}(t)=\mathrm{II}(X_j)(t).$$

这样

$$E(f|\mathscr{F}_j)^{\wedge}(t)=\mathrm{II}(X_j)\hat{f}(t).$$

这说明条件期望算子 $E_{\mathscr{F}_j}$ 正是在子群 X_j 范围上的 Fourier 部分和算子.

特别, 当 $G=D_2$ 为二进群, 考虑 $\mathscr{F}_j$ 是由紧致开子群

$$G_j=\{x=(x_i)_1^{\infty}:\ x_i=0, \quad i=1,2,\cdots,j\}$$

的陪集生成的 σ-代数, 这时便回到前述 Walsh展开的情形. 事实上, G_j 在 X 中的零化子 X_j 是由前 j 个 Rademacher 函数

$$\varphi_0(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t<\frac{1}{2},\\ -1, & \frac{1}{2}\leqslant t<1,\end{cases}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_{j-1}(t)=\varphi_0(2^{j-1}t)$$

生成的子群, 它由按 Paley 排序的前 2^j 个 Walsh 函数

$$\psi_0(t)\equiv 1, \cdots, \psi_{2^j-1}(t)=\varphi_0(t)\cdots\varphi_{j-1}(t)$$

组成. 根据前述推理, $\forall f\in L^1(D_2)$, $(E_{\mathscr{F}_j}(f))^{\wedge}$ 即为 f 的 Walsh 变换局限于前 2^j 个的 Walsh 系数, 这就是说, $E_{\mathscr{F}_j}(f)$ 是 f 的Walsh 展开的 2^j 阶部分和.

鞅论与调和分析的上述联系说明由 $f\in L^1$ 生成鞅

$$f=(f_n)_{n\geqslant 0}, \quad f_n=E(f|\mathscr{F}_n)$$

的过程，不仅可以形式地类比于正交展开$f=\sum\limits_{1}^{\infty}\Delta f_k$，而且$\{f_n\}$确实在某种意义下相当于某些熟知的正交级数的部分和子序列．鞅论中的许多概念与问题便来自于这种类比．

定义 6 设$1\leqslant p\leqslant\infty$．对任意鞅$f=(f_n)$，记$\|f\|_p=\sup\limits_n\|f_n\|_p$．若$\|f\|_p<\infty$，则谓$f$是$L^p$有界的鞅．但若说某鞅$f=(f_n)$是$L^p$中的鞅，则意味着存在$f\in L^p$，使$f_n=E(f|\mathscr{F}_n)$．

注 下面讲鞅的收敛问题时将会看到，当$1<p<\infty$，对L^p中的鞅，$\|f\|_p$就是极限函数f_∞的L^p中的模，且L^p有界的鞅一定是L^p中的鞅．但$p=1$时则不一定这样．L^1有界的鞅必有极限函数$f_\infty\in L^1$，但此时可以有$\|f_\infty\|_1<\sup\limits_n\|f_n\|_1$，从而$f_n\neq E(f_\infty|\mathscr{F}_n)$．下面将会看到，对$L^1$有界鞅$(f_n)$，$f_n=E(f_\infty|\mathscr{F}_n)$，当且仅当$\|f_\infty\|_1=\sup\limits_n\|f_n\|_1$．

定义 7 $f=(f_n)_{0\leqslant n\leqslant\infty}$称为鞅（或上、或下鞅），若$(f_n)_{0\leqslant n<\infty}$是一鞅（或上鞅，或下鞅），且

$$f_n=(\text{或}>,\text{或}<)E(f_\infty|\mathscr{F}_n),\quad \forall n=0,1,\cdots.$$

注 条件$f_n=E(f_\infty|\mathscr{F}_n)$，$\forall n$，蕴含$f_n=E(f_m|\mathscr{F}_n)$，$\forall m\geqslant n$，$\forall n$．

1.3.1 鞅、上(下)鞅的分解

现在我们给出鞅(上、下鞅)的几个有用分解．

上(下)鞅的 Doob 分解．

定理 1(Doob) 每一上鞅都可表为一个鞅与一个非负增加可预报过程的差．相应地，每个下鞅都可表为一个鞅与一个非负增加可预报过程的和．且当这个增加过程A满足$A_0=0$时，分解是唯一的．当上(或下)鞅L^1有界时，则$A_\infty\in L^1$(从而$A=(A_n)$一致可积)，且分解中的鞅也L^1有界．

证明 设$(Q_n)_{n\geq 0}$是一上鞅，此即(Q_n)是适应过程，且

$$Q_n - E(Q_{n+1}|\mathscr{F}_n)\geq 0,\quad n=0,1,\cdots.$$

我们有

$$Q_n = Q_0 + \sum_{\nu=1}^{n}\{Q_\nu - E(Q_\nu|\mathscr{F}_{\nu-1})\} - \sum_{\nu=0}^{n-1}E(Q_\nu - Q_{\nu+1}|\mathscr{F}_\nu) = M_n - A_n, \tag{16}$$

$$M_n = Q_0 + \sum_{\nu=1}^{n}\{Q_\nu - E(Q_\nu|\mathscr{F}_{\nu-1})\},\quad M_0 = Q_0,$$

$$A_n = \sum_{\nu=0}^{n-1}E(Q_\nu - Q_{\nu+1}|\mathscr{F}_\nu),\quad A_0 = 0.$$

显然$(M_n)_{n\geq 0}$是一个鞅，并且$(A_n)_{n\geq 0}$是一个非负增加可预报过程. 由此完成了上鞅(Q_n)的所需分解.

下鞅$(Q_n)_{n\geq 0}$的分解是类似的. 同样定义M_n，而令$-A_n$为现在的A_n，则

$$Q_n = M_n + A_n.$$

当要求$A_0=0$时，分解是唯一的. 事实上，若假设

$$Q_n = M_n - A_n = N_n - B_n,\ n=0,1,\cdots.$$

则$M_n - N_n = A_n - B_n$, $n=0,1,\cdots$. 这说明$(M_n - N_n)_{n\geq 0}$是一个使得$M_n - N_n$关于$\mathscr{F}_{n-1}$可测的鞅. 这样的鞅必须满足

$$M_n - N_n = E(M_n - N_n|\mathscr{F}_{n-1}) = M_{n-1} - N_{n-1} = M_0 - N_0.$$

因此也有$A_n - B_n = A_0 - B_0 = 0$. 于是$M_n = N_n$, $A_n = B_n$，唯一性获证.

当$(Q_n)_{n\geq 0}L^1$有界时，因(A_n)为非负增加的，同时

$$E(A_n) = \sum_{\nu=0}^{n-1}E(Q_\nu - E(Q_{\nu+1}|\mathscr{F}_\nu)) = E(Q_0) - E(Q_n) \leq 2\sup_n\|Q_n\|_1 < \infty,$$

说明 $A_\infty \in L^1$, $A=(A_n)$一致可积, 故$(M_n)=(Q_n+A_n)$也跟随(Q_n)一起 L^1 有界. ▮

定义 8 一个非负上鞅$(Q_n)_{n\geqslant 0}$称为一个势,如果(Q_n)一致可积(见定义 9),且点态极限 $Q_\infty \equiv 0$. (或等价地,如果(Q_n)在 L^1 中收敛到 0.)

定理 2 若$(Q_n)_{n\geqslant 0}$是一个势,则存在唯一非负增加可预报过程$(A_n)_{n\geqslant 0}$, $A_0=0$,使得 $A_\infty \in L^1$,且

$$Q_n=E(A_\infty - A_n \mid \mathscr{F}_n). \tag{17}$$

证明 对$(Q_n)_{n\geqslant 0}$作 Doob 分解(16). 则由于 $M_n=Q_n+A_n$,知$(M_n)_{n\geqslant 0}$是一个非负鞅. 既然 $E(M_n)=E(Q_0)$,这说明(M_n)是 L^1 有界的. 故由下面将要指出的,点态极限M_∞存在. 既然由定理 1, $A=(A_n)$是一致可积的,因此 $M=(M_n)$也是一致可积的. 于是由下面定理 6 知, $M_n=E(M_\infty \mid \mathscr{F}_n)$. 注意

$$Q_\infty = \lim_n (M_n - A_n) = M_\infty - A_\infty,$$

从而式(16)可以改写为

$$\begin{aligned} Q_n &= E(Q_\infty \mid \mathscr{F}_n) + M_n - E(M_\infty \mid \mathscr{F}_n) + E(A_\infty - A_n \mid \mathscr{F}_n) \\ &= E(A_\infty - A_n \mid \mathscr{F}_n). \end{aligned}$$

这说明了任何势 $Q=(Q_n)$都可通过一个可预报增加过程如式(17)那样表示.

现证过程$(A_n)_{n\geqslant 0}$的唯一性. 由式(17)有

$$Q_{n+1}=E(A_\infty \mid \mathscr{F}_{n+1})-A_{n+1},$$

$$E(Q_{n+1} \mid \mathscr{F}_n)=E(A_\infty \mid \mathscr{F}_n)-A_{n+1},$$

$$Q_n - E(Q_{n+1} \mid \mathscr{F}_n)=A_{n+1}-A_n.$$

这说明 $(A_n)_{n\geqslant 0}$由$(Q_n)_{n\geqslant 0}$ 递推地确定. 而 $A_0=0$ 正决定了唯一性. ▮

注 对势(Q_n),式(17)中的增加过程 A 常称为与势(Q_n)联系的古典增加过程.

现在考虑 L^1 有界鞅的 Krickeberg[1]分解.

定理 3 (Krickeberg) 设 $(f_n)_{n\geq 0}$ 是一实鞅，则 (f_n) 可分解为

$$f_n=f_n^{(1)}-f_n^{(2)}, \quad n=0, 1, \cdots, \tag{18}$$

其中 $f^{(i)}=(f_n^{(i)})_{n\geq 0}(i=1, 2)$ 是非负鞅，当且仅当 f 是 L^1 有界的，且此时 $f^{(i)}$ 可以选得使

$$\|f\|_1=\sup_n\|f_n\|_1=\|f_0^{(1)}\|_1+\|f_0^{(2)}\|_1. \tag{19}$$

此外，这样的分解是唯一的.

证明 设分解式(18)成立. 则因 $E(f_n^{(i)})=K^{(i)}$ 不依赖于 n, $i=1, 2$, 故

$$\|f_n\|_1\leqslant K^{(1)}+K^{(2)}.$$

这证明了 $f=(f_n)$ 是 L^1 有界的.

反之，设 $f=(f_n)$ 为 L^1 有界的. 注意$(f_n^+)_{n\geq 0}$, $(f_n^-)_{n\geq 0}$ 都是非负下鞅(因 $\varphi(u)=u^+$是凸函数，以及$(f_n^-)=((-f_n)^+)$)，并且

$$\sup_n\|f_n^{\pm}\|_1\leqslant\sup_n\|f_n\|_1<\infty.$$

对固定的 n，考虑

$$f_{n,m}=E(f_{n+m}^+|\mathscr{F}_n), \quad m\geqslant 0,$$
$$g_{n,m}=E(f_{n+m}^-|\mathscr{F}_n), \quad m\geqslant 0.$$

显然，$(f_{n,m})_{m\geq 0}$, $(g_{n,m})_{m\geq 0}$ 都是增加过程. 因为

$$\begin{aligned} f_{n,m+1}&=E(f_{n+m+1}^+|\mathscr{F}_n)\\ &=E(E(f_{n+m+1}^+|\mathscr{F}_{n+m})|\mathscr{F}_n)\\ &\geqslant E(f_{n+m}^+|\mathscr{F}_n)=f_{n,m}. \end{aligned}$$

类似地，用$(-f_n)$代替(f_n)，可得 $g_{n,m+1}\geqslant g_{n,m}$. 因此

$$f_{n,m}\nearrow f_n^{(1)}, \quad g_{n,m}\nearrow f_n^{(2)}, \quad \text{a. e.}.$$

$f_n^{(i)}$显然关于 $\mathscr{F}_n$ 可测，且 $f_n^{(i)}\in L^1$. 事实上，有

$$
\begin{aligned}
\|f_n^{(1)}\|_1+\|f_n^{(2)}\|_1 &= \lim_m E(f_{n,m}+g_{n,m}) \\
&= \lim_m E(E(|f_{n+m}|\,|\mathscr{F}_n)) \\
&= \lim_m \|f_{n+m}\|_1 \leqslant \sup_n \|f_n\|_1. \qquad (19)'
\end{aligned}
$$

此外因为

$$
f_{n,m}-g_{n,m}=E(f_{n+m}^+-f_{n+m}^-|\mathscr{F}_n)=E(f_{n+m}|\mathscr{F}_n)=f_n,
$$

我们得到 $f_n=f_n^{(1)}-f_n^{(2)}$.

现证 $(f_n^{(i)})_{n\geqslant 0}(i=1,2)$ 是鞅. 因为

$$
\begin{aligned}
f_{n,m+1} &= E(f_{n+m+1}^+|\mathscr{F}_n)=E(E(f_{n+m+1}^+|\mathscr{F}_{n+1})|\mathscr{F}_n) \\
&= E(f_{n+1,m}|\mathscr{F}_n),
\end{aligned}
$$

令 $m\to\infty$, 并根据条件期望的单调收敛定理, 由上式得

$$
f_n^{(1)}=E(f_{n+1}^{(1)}|\mathscr{F}_n).
$$

类似地, 也有

$$
f_n^{(2)}=E(f_{n+1}^{(2)}|\mathscr{F}_n).
$$

由此证明了 L^1 有界鞅 f 的分解(18).

至于式(19), 由式(19)′与平凡的估计

$$
E(|f_n|)\leqslant E(f_n^{(1)}+f_n^{(2)})=K^{(1)}+K^{(2)}
$$

结合而得.

最后证分解的唯一性. 设除上述特殊构造的 $(f_n^{(i)})$ 外, 还有

$$
f_n=f_n^{(1)}-f_n^{(2)}=g_n^{(1)}-g_n^{(2)}.
$$

则 $f_n^+\leqslant g_n^{(1)}$. 故

$$
f_n^{(1)}=\lim_m E(f_{n+m}^+|\mathscr{F}_n)\leqslant \lim_m E(g_{n+m}^{(1)}|\mathscr{F}_n)=g_n^{(1)}.
$$

用 $(-f_n)$ 代替 (f_n), 得 $f_n^{(2)}\leqslant g_n^{(2)}$. 但因

$$
E(f_n^{(1)}+f_n^{(2)})=\sup_n\|f_n\|_1=E(g_n^{(1)}+g_n^{(2)}),
$$

从而证明了 $f_n^{(1)}=g_n^{(1)}$, $f_n^{(2)}=g_n^{(2)}$. ∎

推论 1 设 $(f_n)_{n\geqslant 0}$ 是 L^1 有界下鞅, 则存在非负鞅 (g_n), 使

$f_n^+ \leqslant g_n$, 且

$$\sup_n E(g_n) = \sup_n E(f_n^+).$$

证明 完全平行于上述定理的证明，因为上述证明中的主要部分只用到 L^1 有界鞅 (f_n) 的 (f_n^+) 是一个 L^1 有界非负下鞅的事实. 现 (f_n^+) 仍然是一个 L^1 有界非负下鞅. 定义 g_n 是增加序列 $\{g_{n,m}\}_{m\geqslant 0}$的极限, 其中 $g_{n,m}=E(f_{n+m}^+|\mathscr{F}_n)$. 则$(g_n)$是非负鞅, 且

$$\|g_n\|_1 = \lim_m \|g_{n,m}\|_1 = \lim_m \|f_{n+m}^+\|_1 = \sup_n \|f_n^+\|_1,$$

这里用到了$\|f_n^+\|_1$是增加的. 至于 $f_n^+ \leqslant g_n$ 是因

$$f_n^+ \leqslant E(f_{n+m}^+|\mathscr{F}_n) = g_{n,m}, \qquad \forall m. \ \blacksquare$$

现在来讨论上鞅的 Riesz 分解.

定理 4 设 $f=(f_n)$是上鞅. 则下述两个断言等价:

1) 存在一个下鞅(g_n), 使 $f_n \geqslant g_n$, $\forall n$ (此时称(f_n)控制(g_n));

2) 存在唯一的分解

$$f_n = f_n^{(1)} + f_n^{(2)}, \tag{20}$$

其中$(f_n^{(1)})$是一个鞅, 而$(f_n^{(2)})$是一个势.

证明 由 2)知(f_n)控制一个鞅, 即 $f_n \geqslant f_n^{(1)}$, 因此 1)成立.

现证由 1)推出2). 设(f_n)控制了下鞅(g_n). 类似于定理 3 之证明, 定义

$$f_{n,m} = E(f_{n+m}|\mathscr{F}_n).$$

则$\{f_{n,m}\}_{m\geqslant 0}$ 是一个下降序列. 事实上, 因

$$\begin{aligned} f_{n,m+1} &= E(f_{n+m+1}|\mathscr{F}_n) = E(E(f_{n+m+1}|\mathscr{F}_{n+m})|\mathscr{F}_n) \\ &\leqslant E(f_{n+m}|\mathscr{F}_n) = f_{n,m}. \end{aligned}$$

既然(g_n)是下鞅, (f_n)是上鞅, 且 $g_n \leqslant f_n$, 我们有

$$g_n \leqslant E(g_{n+m}|\mathscr{F}_n) \leqslant E(f_{n+m}|\mathscr{F}_n) = f_{n,m} \leqslant f_n.$$

这说明$\{f_{n,m}\}_{m\geqslant 0}$ 上、下有控制地、单调下降地有极限 $f_n^{(1)}$. 当然 $f_n^{(1)} \in L^1$.

现证$(f_n^{(1)})$是一个鞅. 这因

$$f_{n,m+1}=E(f_{n+m+1}|\mathscr{F}_n)=E(E(f_{n+m+1}|\mathscr{F}_{n+1})|\mathscr{F}_n)$$
$$=E(f_{n+1,m}|\mathscr{F}_n),$$

令$m\to\infty$, 即得$f_n^{(1)}=E(f_{n+1}^{(1)}|\mathscr{F}_n)$, 右边是由控制收敛定理而得.

现令$f_n^{(2)}=f_n-f_n^{(1)}$. 要证$(f_n^{(2)})$是一个势. 既然$g_n\leqslant f_n^{(1)}\leqslant f_n$, 故$f_n^{(2)}\geqslant 0$. 又因$(f_n)$是上鞅, $(f_n^{(1)})$是鞅, 故$(f_n^{(2)})$是上鞅. 剩下需证明$E(f_n^{(2)})\to 0$. 因为

$$f_0^{(1)}=\lim E(f_{0+m}|\mathscr{F}_0),$$
$$E(f_0^{(1)})=\lim E(E(f_m|\mathscr{F}_0))=\lim E(f_m).$$

所以有

$$E(f_n^{(2)})=E(f_n-f_n^{(1)})=E(f_n)-E(f_0^{(1)})\to 0.$$

于是完成了$(f_n^{(2)})$是一个势的证明. 至此, 上鞅的所需分解获证.

最后, 证这种分解的唯一性. 设

$$f_n=f_n^{(1)}+f_n^{(2)}=g_n^{(1)}+g_n^{(2)}.$$

则

$$f_{n,m}=E(f_{n+m}|\mathscr{F}_n)=E(g_{n+m}^{(1)}+g_{n+m}^{(2)}|\mathscr{F}_n)$$
$$=g_n^{(1)}+E(g_{n+m}^{(2)}|\mathscr{F}_n).$$

令$m\to\infty$, 上式左边即$f_n^{(1)}$, 右边即$g_n^{(1)}$. 因为对任意势(Q_n), 总有

$$\lim_m E(Q_{n+m}|\mathscr{F}_n)=0,\quad \forall n.$$

这是因为, 由

$$E(Q_{n+m}|\mathscr{F}_{n+m-1})\leqslant Q_{n+m-1},\quad \forall m\geqslant 1$$

知, $\{E(Q_{n+m}|\mathscr{F}_{n+m-1})\}_{m\geqslant 1}$是一致可积族, 并且点态地趋于极限0. 故

$$\lim_m E(Q_{n+m}|\mathscr{F}_n)=\lim_m E(E(Q_{n+m}|\mathscr{F}_{n+m-1})|\mathscr{F}_n)=0. \blacksquare$$

推论 2 每个非负上鞅总允许唯一的 Riesz 分解.

证明显然.

推论 3 每个 L^1 有界上鞅允许唯一的 Riesz 分解.

证明 设(f_n)是 L^1 有界上鞅，则$(-f_n)$是 L^1 有界下鞅．故由推论 1 知，存在非负鞅(g_n)，使$-f_n\leqslant g_n$，从而 $f_n\geqslant -g_n$．这说明上鞅(f_n)下面控制了一个下鞅$(-g_n)$．由定理 4 即知(f_n) 允许 Riesz 分解. ∎

注 Doob 分解说，每个上鞅均可被一个鞅控制；Riesz 分解说，每个上鞅都可控制一个鞅.

1.3.2 鞅、上(下)鞅的收敛

现在我们来讨论鞅、上(下)鞅的收敛问题．为此，首先讨论一下过程的一致可积性.

定义 9 L^1 的子集 B 称为一致可积的①，如果

$$\lim_{C\to\infty}\int_{\{|f|\geqslant C\}}|f|\,d\mu=0,\quad \forall f\in B \tag{21}$$

一致地成立.

引理 1 L^1 的子集 B 是一致可积的，当且仅当

$$\sup_{f\in B}E(|f|)<\infty, \tag{22}$$

以及对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得

$$\sup_{f\in B}\int_F|f|\,d\mu\leqslant\varepsilon,\quad \forall F\in\mathscr{F},\ |F|\leqslant\delta. \tag{22$'$}$$

证明 设式(21)成立．则 $\forall f\in B$，有

$$E(|f|)=\int_{\{|f|\leqslant C\}}|f|\,d\mu+\int_{\{|f|>C\}}|f|\,d\mu\leqslant C+1,$$

这只要取 C 充分大．由此证明了式(22)．此外，$\forall F\in\mathscr{F}$，有

$$\int_F|f|\,d\mu=\int_{F\cap\{|f|\leqslant C\}}|f|\,d\mu+\int_{F\cap\{|f|>C\}}|f|\,d\mu$$

---

① 我们只考虑概率空间上的 L^1 的子集的一致可积性.

$$\leqslant C|F|+\frac{\varepsilon}{2},$$

这也只要取 C 充分大. 令 $\delta\leqslant\varepsilon/2C$, 则式(22)′成立.

反之, 设式(22)成立. 则由

$$|\{|f|\geqslant C\}|\leqslant\frac{1}{C}E(|f|),$$

知 $\lim\limits_{C\to\infty}|\{|f|\geqslant C\}|=0$, 对 $f\in B$ 一致地成立. 于是式 (21) 便由 (22)′推出. ∎

注 当$\{\mathscr{F},\mu\}$无原子时, (22)蕴含在(22)′中.

引理 2 L^1 的子集 B 是一致可积的, 当且仅当存在 $\boldsymbol{R}^+$到 $\boldsymbol{R}^+$ 的凸函数 $\varphi(t)$, 满足

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\varphi(t)}{t}=\infty,\quad \varphi(2t)\leqslant C\varphi(t), \tag{23}$$

并且使得

$$\sup_{f\in B}E(\varphi(|f|))<\infty. \tag{24}$$

证明 任给 $\varepsilon>0$, 令 $a=M/\varepsilon$, $M=\sup\limits_{f\in B}E(\varphi(|f|))$. 选 C 充分大, 使

$$\frac{\varphi(t)}{t}\geqslant a,$$

当 $t\geqslant C$ 时. 则在集合 $\{|f|\geqslant C\}$上, $|f|\leqslant\varphi(|f|)/a$. 这样我们有

$$\int_{\{|f|\geqslant C\}}|f|d\mu\leqslant\frac{1}{a}\int_{\{|f|\geqslant C\}}\varphi(|f|)d\mu$$
$$\leqslant\frac{M}{a}=\varepsilon,\quad \forall f\in B,$$

由此证明了 B 的一致可积性.

反之, 设 B 是一致可积的. 选序列$\{C_n\}_{n\geqslant0}$, $C_0=0$, 满足 $C_n>2C_{n-1}$, 并且使得

$$\int_{\{|f|\geqslant C_n\}}|f|d\mu\leqslant 2^{-n},\quad \forall f\in B.$$

记 $A_n=[C_{n-1},C_n)$. 定义 $\boldsymbol{R}^+$ 上函数

$$g(t)=\sum_{n=1}^{\infty}n\mathrm{II}(A_n),\quad \varphi(x)=\int_0^x g(t)dt.$$

则因 $g(t)$单调增加,知 $\varphi(x)$是凸函数;又因 $\lim\limits_{t\to\infty}g(t)=\infty$, 知

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\varphi(x)}{x}=\infty;$$

最后,条件 $C_n>2C_{n-1}$ 保证了 $\varphi(2x)\leqslant 4\varphi(x)$. 现证式(24)成立.

我们注意到

$$\varphi(x)\mathrm{II}(A_n)\leqslant nx\mathrm{II}(A_n),\quad \forall n.$$

于是 $\forall f\in B$, 有

$$\begin{aligned}E(\varphi(|f|))&=\sum_{n=1}^{\infty}E(\varphi(|f|)\mathrm{II}(\{|f|\in A_n\}))\\&\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}nE(|f|\mathrm{II}(\{|f|\in A_n\}))\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}E(|f|\mathrm{II}(\{|f|\in A_n\}))\\&=E(|f|)+\sum_{k=2}^{\infty}\int_{\{|f|\geqslant C_{k-1}\}}|f|d\mu\\&\leqslant E(|f|)+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{2^{k-1}}=E(|f|)+1.\ \blacksquare\end{aligned}$$

引理 3 设$\{f_n\}_{n\geqslant 0}\subset L^1$, $f_n\to f$, a. e.. 则在 L^1 中 $f_n\to f$, 当且仅当$\{f_n\}$一致可积.

证明 设在 L^1 中 $f_n\to f$. 则 $f\in L^1$, 且 $\forall F\in\mathscr{F}$,

$$\int_F|f_n|d\mu\leqslant\int_F|f|d\mu+\|f_n-f\|_1.$$

由此即知式 (22) 与 (22)′ 成立. 如看式(22)′. 任给 $\varepsilon>0$, 先选

N, 使当 $n\geqslant N$ 时,

$$\|f_n-f\|_1\leqslant\frac{\varepsilon}{2};$$

再选 $\delta>0$, 使对一切的 $F\in\mathscr{F}$, $|F|\leqslant\delta$, 都有

$$\int_F|f|d\mu\leqslant\frac{\varepsilon}{2},\quad \int_F|f_n|d\mu\leqslant\frac{\varepsilon}{2},\quad n=1,\cdots,N-1.$$

这就证明了 $\int_F|f_n|d\mu\leqslant\varepsilon$, $\forall n$, 只要 $|F|\leqslant\delta$.

反之, 设 $\{f_n\}$ 是一致可积的. 由

$$E(|f_n-f|)\leqslant\int_\Omega|f_n\mathrm{II}(\{|f_n|\leqslant C\})-f\mathrm{II}(|f|\leqslant C\})|d\mu$$
$$+\int_{\{|f_n|>C\}}|f_n|d\mu+\int_{\{|f|>C\}}|f|d\mu,$$

根据 $\{f_n\}$ 一致可积, 以及

$$f_n\mathrm{II}(\{|f_n|\leqslant C\})-f\mathrm{II}(\{|f|\leqslant C\})$$

有界控制地趋于 0, 即知 $E(|f_n-f|)\to 0$. ∎

引理 4 设 $\{f_n\}\subset L^1$, $f_n\to f$, a.e.. 则在 L^1 中 $f_n\to f$, 当且仅当 $\|f\|_1=\lim\limits_n\|f_n\|_1$.

证明 由前者推出后者是显然的. 现只需证明由后者推出前者. 我们首先指出, 由 $f_n\to f$, a.e., 以及 $\|f_n\|_1\to\|f\|_1$ 可推出在 L^1 中 $|f_n|\to|f|$. 事实上,

$$|f_n|+|f|=\min(|f_n|,|f|)+\max(|f_n|,|f|),$$

以及

$$\min(|f_n|,|f|)\to|f|,\quad \text{a.e.},$$

并且左边有控制函数 $|f|$, 从而

$$E(\max(|f_n|,|f|))\to\|f\|_1.$$

但因

$$||f_n|-|f||=\max(|f_n|,|f|)-\min(|f_n|,|f|),$$

这证明了在 L^1 中 $|f_n|\to|f|$.

又由 $\forall F\in\mathscr{F}$,

$$\int_F|f_n|d\mu\leqslant\int_F|f|d\mu+\||f_n|-|f|\|_1,$$

即知 $\{f_n\}$ 一致可积. 这样应用引理 3 即完成引理的证明. ▮

引理 5 设 $f=(f_n)_{0\leqslant n\leqslant\infty}$ 是关于 $\{\mathscr{F}_n\}_{0\leqslant n\leqslant\infty}$ 的一个下鞅 $(\mathscr{F}_\infty=\bigvee\mathscr{F}_n=\mathscr{F})$. 则 $\forall\lambda\in\boldsymbol{R}$,

$$\lambda|\{\sup_n f_n>\lambda\}|\leqslant\int_{\{\sup_n f_n>\lambda\}}f_\infty d\mu, \tag{25}$$

$$\lambda|\{\inf_n f_n<\lambda\}|\geqslant\int_\Omega f_0 d\mu-\int_\Omega|f_\infty|d\mu. \tag{25}$$

证明 对任意的 $\lambda\in\boldsymbol{R}$, 定义停止时间

$$\tau_1=\inf\{n: f_n>\lambda\},$$
$$\tau_2=\inf\{n: f_n<\lambda\}.$$

则

$$\{\tau_1<\infty\}=\{\sup_n f_n>\lambda\},\quad \{\tau_2<\infty\}=\{\inf f_n<\lambda\},$$

并且 $f_{\tau_1}\geqslant\lambda, f_{\tau_2}\leqslant\lambda$. 这样, 我们有

$$\begin{aligned}
&\lambda|\{\sup_n f_n>\lambda\}|\\
&\qquad\leqslant\int_{\{\sup_n f_n>\lambda\}}f_{\tau_1}d\mu=\int_{\{\tau_1<\infty\}}f_{\tau_1}d\mu\\
&\qquad=\sum_{n=0}^\infty\int_{\{\tau_1=n\}}f_n d\mu\leqslant\sum_{n=0}^\infty\int_{\{\tau_1=n\}}f_\infty d\mu\\
&\qquad=\int_{\{\sup_n f_n>\lambda\}}f_\infty d\mu;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lambda|\{\inf f_n<\lambda\}|\\
&\qquad\geqslant\int_{\{\inf_n f_n<\lambda\}}f_{\tau_2}d\mu=\int_{\{\tau_2<\infty\}}f_{\tau_2}d\mu
\end{aligned}$$

$$=\int_{\Omega} f_{\tau_2} d\mu-\int_{\{\tau_2=\infty\}} f_{\infty} d\mu$$

$$\geqslant \int_{\Omega} f_0 d\mu-\int_{\Omega}|f_{\infty}| d\mu. \quad \blacksquare$$

定理 5 设 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$ 是关于 $\{\mathscr{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ 的 L^1 有界的鞅，则存在 f_{∞}，使

$$f_n \to f_{\infty}, \quad \text{a.e.},$$

且 $E(|f_{\infty}|)\leqslant \underline{\lim}\, E(|f_n|)$.

证明 由定理 3 知，每个 L^1 有界实鞅是两个 L^1 有界非负鞅的差. 故问题可化到非负鞅的情况. 而对非负鞅 $f=(f_n)$，我们可以考虑非负有界的下鞅 $(e^{-f_n})_{n\geqslant 0}$. 这因为

$$e^{-f_n} \to g, \quad \text{a.e.} \iff f_n \to f_{\infty}, \quad \text{a.e.},$$

因而我们便将问题化到非负有界下鞅的情况. 上式表示的两个收敛断言的等价推导如下. 如看 $\Rightarrow$. 这只需证 $g>0$, a.e.. 若否，则 $f_n \to \infty$ 于一正测集上. 但因 (f_n) 是非负鞅，

$$E(|f_n|)=E(f_n)=E(f_0),$$

而由 Fatou 引理，总有 $E(f_{\infty})<\infty$，由此得出矛盾. 故 $g=0$ 于一正测集是不可能的. 即由 $e^{-f_n} \to g$ 推出

$$-f_n \to \log g, \quad \text{a.e.}.$$

下面更一般地考虑非负 L^2 有界下鞅的情况. 设 $f=(f_n)$ 是一个这样的下鞅，要证它有在 L^2 中的，以及点态的极限 f_{∞}. 因为 (f_n^2) 也是下鞅，故 $E(f_n^2)\nearrow a<\infty$. 但因对 $n\geqslant m$ 有

$$0\leqslant E(f_n^2-f_m^2)=E((f_n-f_m)^2)+E(2f_m(f_n-f_m)),$$

以及

$$E(f_m(f_n-f_m))=E(f_m E(f_n-f_m|\mathscr{F}_m))\geqslant 0,$$

故由 $E(f_n^2-f_m^2)\to 0$ 推出 $E((f_n-f_m)^2)\to 0$. 这证明了 L^2 有界的非负下鞅总是在 L^2 中收敛的.

现在考虑相对于 $\{\mathscr{F}_n\}_{k\leqslant n\leqslant m}$ 的下鞅 $(f_n-f_k)_{k\leqslant n\leqslant m}$. 对任意

的 $\varepsilon>0$, 利用引理 5 得

$$
\begin{aligned}
&|\{\max_{k\le n\le m}|f_n-f_k|>\varepsilon\}|\\
&\quad\le|\{\max_{k\le n\le m}(f_n-f_k)>\varepsilon\}|+|\{\min_{k\le n\le m}(f_n-f_k)<-\varepsilon\}|\\
&\quad\le\frac{1}{\varepsilon}E(|f_m-f_k|)+\frac{1}{\varepsilon}E(|f_m-f_k|)\\
&\quad\le\frac{2}{\varepsilon}E(|f_m-f_k|^2)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

这样我们得

$$
\begin{aligned}
&|\{\overline{\lim}\, f_n-\underline{\lim}\, f_n>2\varepsilon\}|\\
&\quad\le|\bigcap_{k=1}^{\infty}\{\sup_{n\ge k}|f_n-f_k|\ge\varepsilon\}|\\
&\quad\le\lim_{k\to\infty}|\{\sup_{n\ge k}|f_n-f_k|\ge\varepsilon\}|\\
&\quad\le\frac{2}{\varepsilon}\lim_{m\ge k\to\infty}E(|f_m-f_k|^2)^{1/2}=0.
\end{aligned}
$$

由 ε 之任意性, 知 f_n 几乎处处地收敛于某个极限 f_∞.

总之, 我们已经证明了每个 L^1 有界的鞅, 总有点态极限 f_∞ 存在. 且由 Fatou 引理推出 $\|f_\infty\|_1\le\underline{\lim}\|f_n\|_1$. ∎

定理 6 设 $(f_n)_{n\ge0}$ 是一鞅. 则下述等价:

1) (f_n) 是 L^1 中的鞅, 即 $(f_n)_{0\le n\le\infty}$ 是鞅;

2) 存在如引理 2 中凸函数 φ, 使 $\sup_n E(\varphi(|f_n|))<\infty$;

3) (f_n) 一致可积;

4) (f_n) 是 L^1 中收敛的;

5) (f_n) 是 L^1 中的 Cauchy 序列;

6) $E(|f_\infty|)=\lim E(|f_n|)<\infty$, 其中 f_∞ 是 (f_n) 的点态极限.

证明 2) 由 1) 推出是因为 $f_\infty\in L^1$, 这时存在如引理 2 中凸函数 φ, 使 $E(\varphi(|f_\infty|))<\infty$. 又因为 $(|f_n|)_{0\le n\le\infty}$ 是下鞅, 所以

$(\varphi(|f_n|))_{0\leqslant n\leqslant\infty}$ 也是下鞅．特别，$\varphi(|f_n|)\leqslant E(\varphi(|f_\infty|)|\mathscr{F}_n)$，故

$$E(\varphi(|f_n|))\leqslant E(\varphi(|f_\infty|)).$$

此外，由 4)推 1)显然．

3)与 2)等价是根据引理 2．

4)与 3)等价是因为它们都蕴含 L^1 有界，从而有点态极限 f_∞，再根据引理 3 即得．

5)与 4)等价显然．

6)与 4)等价是因为 4)蕴含 L^1 有界，从而点态极限存在，而6)已经给出点态极限存在，再根据引理 4 即得．▮

定理 5′　设 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$ 是 L^1 有界的上(或下)鞅，则 $f_n\to f_\infty$ 点态地成立，且 $E(|f_\infty|)\leqslant\underline{\lim}E(|f_n|)$．

证明　利用 Doob 分解将问题化到 L^1 有界的鞅，以及一致可积的增加过程的情况．▮

定理 6′　设 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$ 是一个上(或下)鞅，则定理 6 中2)—6)五个断言等价．

证明　这因 2)—5) 都蕴含 L^1 有界性，从而点态极限 f_∞ 存在．此外，6)中已经给出 f_∞ 存在，故引理 2, 3, 4 分别给出它们的等价．▮

注　对上(或下)鞅，定理 6 中的 1) 不再有类似的结果成立．由条件"$(f_n)_{0\leqslant n\leqslant\infty}$ 是一个上(下)鞅"推不出 f_∞ 是(f_n)的点态极限(如令(f_n)是非正下鞅，而 $f_\infty\equiv 1$，则$(f_n)_{0\leqslant n\leqslant\infty}$ 是下鞅，f_∞ 不是(f_n)的极限)；也推不出(f_n)一致可积(我们即将在下面举出这样的例子)．

当附加非负(或非正)性质来讨论收敛问题时，有如下结果．

定理 7　任意非负上鞅（非正下鞅）都有点态极限 f_∞，且$(f_n)_{0\leqslant n\leqslant\infty}$ 仍是上(下)鞅．

证明　非负上鞅(f_n)总是 L^1 有界的，因

$$E(|f_n|)=E(f_n)\leqslant E(f_0).$$

故 f_∞ 总存在. 此外 $\forall F\in\mathscr{F}_n$, 有

$$\int_F f_\infty d\mu\leqslant\varliminf_{m}\int_F f_m d\mu\leqslant\int_F f_n d\mu.$$

由此证明了$(f_n)_{0\leqslant n\leqslant\infty}$仍为上鞅. ■

现在考虑 L^φ 收敛.

定理 8 设$(f_n)_{n\geqslant 0}$是一鞅, 且存在非负增加凸函数 $\varphi(u)$满足

$$\varphi(0)=0,\quad \lim_{u\to\infty}\frac{\varphi(u)}{u}=\infty,$$

使得 $\sup\limits_n E(\varphi(|f_n|))<\infty$, 则存在点态极限 f_∞ 使得

$$E\left(\varphi\left(\frac{1}{3}|f_n-f_\infty|\right)\right)\to 0.$$

证明 由 $\sup\limits_n E(\varphi(|f_n|))<\infty$, 知$(f_n)$是 L^1 中的鞅, 故对凸函数 φ, $(\varphi(|f_n|))_{0\leqslant n\leqslant\infty}$ 是非负下鞅. 因此

$$\sup_n E(\varphi(|f_n|))\leqslant E(\varphi(|f_\infty|))\leqslant\varliminf E(\varphi(|f_n|)).$$

因此说明下鞅$(\varphi(|f_n|))$满足

$$\varphi(|f_n|)\to\varphi(|f_\infty|),\quad \text{a.e.},$$
$$\lim E(\varphi(|f_n|))=E(\varphi(|f_\infty|)).$$

这样由引理 4 知$(\varphi(|f_n|))_{n\geqslant 0}$是一致可积的.

现在我们有

$$\begin{aligned}&E\left(\varphi\left(\frac{1}{3}|f_n-f_\infty|\right)\right)\\&\leqslant E\left(\varphi\left(\frac{1}{3}\left|f_n\mathrm{II}(\{|f_n|\leqslant C\})-f_\infty\mathrm{II}(\{|f_\infty|\leqslant C\})\right|\right.\right.\\&\qquad\left.\left.+\frac{1}{3}|f_n|\mathrm{II}(\{|f_n|>C\})+\frac{1}{3}|f_\infty|\mathrm{II}(\{|f_\infty|>C\})\right)\right)\end{aligned}$$

$$\leqslant\frac{1}{3}E(\varphi(|f_nI(\{|f_n|\leqslant C\})-f_\infty I(\{|f_\infty|\leqslant C\})|))$$

$$+\frac{1}{3}E(\varphi(|f_n|I(\{|f_n|>C\})))$$

$$+\frac{1}{3}E(\varphi(|f_\infty|I(\{|f_\infty|>C\}))).$$

上式第二个不等号的右端第一项因被积函数有界控制地趋于 0, 第二项因 $(\varphi(|f_n|))$ 的一致可积性, 第三项因 $\varphi(|f_\infty|)$ 可积, 于是得

$$\lim_n E\left(\varphi\left(\frac{1}{3}|f_n-f_\infty|\right)\right)=0. \blacksquare$$

注 特别对 $\varphi(u)=u^p$, $1<p<\infty$, 我们得知 L^p 有界的鞅总是在 L^p 中收敛的, 从而是 L^p 中的鞅.

现在我们举例说明 L^1 有界鞅空间可以真正大于 L^1 鞅空间.

例 考虑二进鞅. 令 $f_n=2^nI([0,\ 2^{-n}])$, 则 $(f_n)_{n\geqslant 0}$ 是一个鞅, 因

$$E(f_{n+1}|\mathscr{F}_n)=2^n\int_0^{2^{-n}}2^{n+1}I([0,2^{-n-1}])\,dx I([0,2^{-n}])$$

$$=2^nI([0,2^{-n}])=f_n.$$

又因 $E(f_n)=1$, 故此鞅 L^1 是有界的. 其点态极限是 $f_\infty=0$. 这个鞅不一致可积, 不在 L^1 中收敛.

同例也说明 L^1 有界的上(下)鞅 $(g_n)_{n\geqslant 0}$, 即使其点态极限 g_∞ 存在, 并且使得 $(g_n)_{0\leqslant n\leqslant\infty}$ 也是上(下)鞅, 它也不一定一致可积: 这只需以上述 (f_n) (或 $(-f_n)$) 作为例子. 它补充了定理 6′ 后的注.

作为本节的结束, 我们继续讨论 L^1 有界鞅成为 L^1 中鞅的刻划.

定理 9 设 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$ 是 L^1 有界的鞅, 令 $R_n=\inf\{m: |f_m|>n\}$. 则 (f_n) 一致可积, 当且仅当

$$\lim_{n} \int_{\{R_n<\infty\}} |f_{R_n}| d\mu = 0. \tag{26}$$

证明 设(f_n)一致可积. 则根据引理2知, 存在凸函数φ满足式(23), 使得$C=\sup_n E(\varphi(|f_n|))<\infty$. 既然

$$\frac{\varphi(u)}{u} \nearrow \infty,$$

因此当$u\geqslant n$时, $u\leqslant e_n\varphi(u)$, $e_n\to 0$. 故

$$\begin{aligned}
&\int_{\{R_n<\infty\}} |f_{R_n}| d\mu \\
&\quad\leqslant e_n \int_{\{R_n<\infty\}} \varphi(|f_{R_n}|) d\mu \\
&\quad= e_n \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\{R_n=k\}} \varphi(|f_k|) d\mu \\
&\quad\leqslant e_n \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\{R_n=k\}} \varphi(|f_\infty|) d\mu \leqslant C e_n \to 0.
\end{aligned}$$

反之, 设式(26)成立. 则由式(26)得

$$n|\{f^*>n\}| = n|\{R_n<\infty\}| \leqslant \int_{\{R_n<\infty\}} |f_{R_n}| d\mu \to 0.$$

既然$(|f_n|)_{n\geqslant 0}$是一个下鞅, 因此它有Doob分解$|f_n|=M_n+A_n$. 注意, 因为$f=(f_n)$是L^1有界的, 知$A_\infty\in L^1$. 我们有 (记$f_m^*=\sup_{n\leqslant m}|f_n|$)

$$\begin{aligned}
&\int_{\{|f_m|>n\}} |f_m| d\mu \\
&\quad\leqslant \int_{\{f_m^*>n\}} |f_m| d\mu \\
&\quad= \int_{\{R_n\leqslant m\}} |f_m| d\mu \\
&\quad= \int_{\{R_n\leqslant m\}} |f_{R_n}| d\mu + \int_{\{R_n\leqslant m\}} (|f_m|-|f_{R_n}|) d\mu
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\int_{\{R_n\leqslant m\}}|f_{R_n}|d\mu+E((M_m-M_{R_n})\mathrm{II}(\{R_n\leqslant m\}))\\
&\quad+E((A_m-A_{R_n})\mathrm{II}(\{R_n\leqslant m\}))\\
&\leqslant\int_{\{R_n<\infty\}}|f_{R_n}|d\mu\\
&\quad+E(E((M_m-M_{R_n})\mathrm{II}(\{R_n\leqslant m\})|\mathscr{F}_{R_n}))\\
&\quad+E(A_\infty\mathrm{II}(\{R_n<\infty\})),
\end{aligned}
$$

上式最后一个不等号的右端第一项为 $o(1)$；第二项为

$$E((M_{m\wedge R_n}-M_{R_n})\mathrm{II}(\{R_n\leqslant m\}))=0;$$

第三项也为 $o(1)$. 这证明了 (f_n) 一致可积. ∎

近来, Azema-Gundy-Yor[1] 利用上述定理对 L^1 有界的连续鞅, 给出了通过 f^* 或 $S(f)$ 的分布函数表达的一致可积性的刻划. 现在我们对第七章 7.1 节中将引进的正规鞅来建立他们的这个定理.

在 7.1 节中定义的正规鞅是关于 $(\Omega,\mathscr{F},\mu,\{\mathscr{F}_n\}_{n\geqslant 0})$ 的鞅, 其中子 σ-代数族 $\{\mathscr{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ 具有性质: 每个 $F_n\in\mathscr{F}_n$, $\forall n=1,2,\cdots$, 都至少有一个 $G_n\in\mathscr{F}_{n-1}$, 使 $F_n\subset G_n$, 且

$$|G_n|\leqslant d|F_n|,$$

其中 $d\geqslant 1$ 是一个常数. 我们将在 7.3 节中指出, 对于所有的这样的正规鞅 $f=(f_n)$, 有序配对 $(f^*, S(f))$ 与 $(S(f), f^*)$ 都满足"好 λ 不等式". 意即(如只看 $(f^*, S(f))$), 存在 $\alpha>1$ 与 $\beta>0$ 的一个收敛于 0 的序列, 以及常数 $\varepsilon_{\alpha,\beta}$, $d_{\alpha,\beta}$, 满足 $\lim\limits_{\beta\to 0}\varepsilon_{\alpha,\beta}=0$(对固定的 $\alpha>1$), 并且使

$$|\{f^*>\alpha\lambda\}|\leqslant\varepsilon_{\alpha,\beta}|\{f^*>\lambda\}|+d_{\alpha,\beta}|\{S(f)>\beta\lambda\}|.$$

而且正如 7.1 节中指出的, 这样的正规情形允许很方便的停止时间的存在. 我们将此述之为下述引理(略去证明).

引理 6 考虑如上正规情形. 设 $(\gamma_n)_{n\geqslant 0}$ 是任一满足 $\gamma_0=0$

的非负适应过程. 则 $\forall\lambda>0$, 存在停止时间 T, 使得

$$\gamma_T\leqslant\lambda,\quad \{\gamma_m^*>\lambda\}\subset\{T\leqslant m-1\},$$

$$|\{T\leqslant m-1\}|\leqslant d|\{\gamma_m^*>\lambda\}|,\quad \forall m\in\mathbf{Z}^+.$$

对于任意的非负随机变量 f, 记

$$\theta_1(f)=\sup_{\lambda>0}\lambda|\{f>\lambda\}|,\quad \theta_2(f)=\varlimsup_{\lambda\to\infty}\lambda|\{f>\lambda\}|.$$

我们先将 Azema-Gundy-Yor 的一个命题引述为一个引理.

引理 7 设非负随机变量的有序配对 (f,g) 满足 "好 λ 不等式", 则

$$\theta_1(f)\leqslant\alpha\beta^{-1}d_{\alpha,\beta}(1-\alpha\varepsilon_{\alpha,\beta})^{-1}\theta_1(g),\tag{27}$$

$$\theta_2(f)\leqslant\alpha\beta^{-1}d_{\alpha,\beta}(1-\alpha\varepsilon_{\alpha,\beta})^{-1}\theta_2(g).\tag{27$'$}$$

证明 记 $\theta(\lambda)=\lambda|\{f>\lambda\}|$. 则由"好 λ 不等式", 有

$$\theta(\alpha\lambda)\leqslant\alpha\varepsilon_{\alpha,\beta}\theta(\lambda)+\alpha\beta^{-1}d_{\alpha,\beta}\theta_1(g),$$

$$\begin{aligned}\theta(\lambda)&\leqslant\alpha\varepsilon_{\alpha,\beta}\theta\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)+C_{\alpha,\beta}\theta_1(g)\leqslant\cdots\\&\leqslant(\alpha\varepsilon_{\alpha,\beta})^n\theta\left(\frac{\lambda}{\alpha^n}\right)+C_{\alpha,\beta}(1+\alpha\varepsilon_{\alpha,\beta}\\&\quad+\cdots+(\alpha\varepsilon_{\alpha,\beta})^{n-1})\theta_1(g).\end{aligned}$$

选 $\beta>0$ 充分小, 使 $\alpha\varepsilon_{\alpha,\beta}<1$, 令 $n\to\infty$, 则得

$$\theta_1(f)=\sup_{\lambda}\theta(\lambda)\leqslant C_{\alpha,\beta}(1-\alpha\varepsilon_{\alpha,\beta})^{-1}\theta_1(g),$$

这就证明了式(27).

若 $\theta_2(g)<\infty$, 则 $\theta_1(g)<\infty$, 故 $\theta_2(f)\leqslant\theta_1(f)<\infty$. 由"好 λ 不等式"得

$$\theta_2(f)\leqslant\alpha\varepsilon_{\alpha,\beta}\theta_2(f)+\alpha\beta^{-1}d_{\alpha,\beta}\theta_2(g).$$

既然 $\theta_2(f)<\infty$, 这便得到式(27)$'$. ∎

定理 10 设 $f=(f_n)_{n\geqslant0}$ 是上述正规鞅, L^1 有界. 则 (f_n) 一致可积, 当且仅当

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda|\{f^*>\lambda\}|=0,\tag{28}$$

或等价地

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda|\{S(f)>\lambda\}|=0. \tag{28'}$$

证明 既然$(f^*, S(f))$与$(S(f), f^*)$都满足"好λ不等式"，引理 7 指出式(28)与(28)′是等价的. 故只需对f^*证明定理成立.

设(f_n)一致可积，定理 9 指出式(26)成立. 故

$$\begin{aligned}n|\{f^*>n\}|&=n|\{R_n<\infty\}|\\&\leqslant\int_{\{R_n<\infty\}}|f_{R_n}|d\mu=o(1),\end{aligned}$$

这就证明了定理的容易证明的一半.

反之，设式(28)成立. 无妨设鞅$f=(f_n)_{n\geqslant0}$满足$f_0=0$. 对非负过程$(|f_n|)_{n\geqslant0}$以及$\lambda=n$，如引理 6 中那样定义停止时间$\tilde{R}_n$. 则式(28)便给出

$$\begin{aligned}\int_{\{\tilde{R}_n<\infty\}}|f_{\tilde{R}_n}|d\mu&\leqslant n|\{\tilde{R}_n<\infty\}|\\&\leqslant dn|\{f^*>n\}|=o(1),\end{aligned}$$

这说明一个形式上类似于式(26)的等式成立，只是其中出现的停止时间不一样，但性质类似. 现在剩下的证明便是类似于定理 9 中相应部分的证明.

概述如下. 设$(|f_m|)$的 Doob 分解为$|f_m|=M_m+A_m$. 则

$$\begin{aligned}\int_{\{|f_m|>n\}}|f_m|d\mu&\leqslant\int_{\{f_m^*>n\}}|f_m|d\mu\\&\leqslant\int_{\{\tilde{R}_n\leqslant m-1\}}|f_m|d\mu\\&=\int_{\{\tilde{R}_n\leqslant m-1\}}|f_{\tilde{R}_n}|d\mu\\&\quad+E(E(M_m-M_{\tilde{R}_n})\mathrm{II}(\{\tilde{R}_n\leqslant m-1\})|\mathscr{F}_{\tilde{R}_n}))\\&\quad+E((A_m-A_{\tilde{R}_n})\mathrm{II}(\{\tilde{R}_n\leqslant m-1\}))=o(1).\ \blacksquare\end{aligned}$$

注 1 在 A-G-Y[1]中已举例，说明L^1有界性（它保证$A_\infty\in$

L^1）这个条件不能去掉，但连续性这个条件是否也可去掉却不知道．对离散时间情形，问题也是一样的，即不知道正规性这个条件能否去掉．

注 2 这个一致可积性问题与古典 Riesz 兄弟定理密切相关．与鞅对应的是调和函数族，L^1有界性对应于这些调和函数族是一个有界测度的 Poisson 积分，一致可积性则相应于这个测度关于 Lebesgue 测度是绝对连续的．关于此，R. F. Gundy，Varopoulos[3]等都有讨论．

章后注记

1.1—1.3 节 这三节中的结果大多是已有的，此处只是综合归纳．可参见 Dellacherie-Meyer[1,2]，Doob[1]，Rao[3] 以及 Yen[1]等．

1.3.2 关于 L^1 有界鞅的 a. e. 收敛的定理 5，原来的证明是利用 Doob 引进的"上穿数"的概念．此处证明本质上属于 R. Isaac，引自 Rao[3]．定理 9 是 G. Johnson-L. L. Holms 关于类 D 上鞅，以及 K. M. Rao[1]关于拟鞅的对应结果的改述．定理 10 是由本书首先给出的．

第二章　H_p　鞅($p\geqslant 1$)

本章我们开始讨论鞅的最重要的一类空间，即 H_p 空间，但 $p<1$ 的情况仍留待以后讨论. $p\geqslant 1$ 时有很多很重要的内容，如 Fefferman 不等式、Burkholder-Gundy 不等式、Davis 不等式. 最重要的是第一、三两个不等式. 至于第二个不等式，它包含在第四章要讨论的更一般的 Φ-不等式理论中，但在本章对它仍给出一个较直接而又简单的证明. 这对于刚接触 H_p 鞅论的读者似乎是必要的，并且因为在第四章又需要用到它. 此外与 H_p 相关，我们还将初步讨论 H_p 的某种意义下可预报的子空间，并且初步接触原子概念，以及简单地介绍一个很有效的方法——鞅变换方法.

2.1　几个定义

设$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$是一完备概率空间，$\{\mathscr{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ 是子 σ-代数的增加族，满足 $\mathscr{F}_0$ 完备，且 $\mathscr{F}=\bigvee\limits_{n\geqslant 0}\mathscr{F}_n$. 通常 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$ 表示关于$(\Omega, \mathscr{F}, \mu, \{\mathscr{F}_n\}_{n\geqslant 0})$的鞅. 为了简单起见，在这一章中，我们设 $\mathscr{F}_0$ 是平凡的(即由所有零集生成)，并只考虑 $f_0=0$ 的鞅. 一般地，这只是非本质的限制并不影响结论. 若此假定影响某些结论时我们将立即指出.

定义 1　对鞅 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$，记

$$f_n^*=\sup_{j\leqslant n}|f_j|,\quad f^*=f_\infty^*=\sup_n|f_n|,$$

$$S_n(f)=\left(\sum_1^n|\Delta f_j|^2\right)^{1/2}\quad(\Delta f_n=f_n-f_{n-1}),$$

$$S(f)=S_\infty(f).$$

f^*称为f的极大函数，$S(f)$称为f的均方根函数。

定义 2 定义鞅的几个空间如下：

$$H_p=\{f=(f_n):\ f^*\in L^p\},$$

$$\|f\|_{H_p}=\|f^*\|_p,\quad 1\leqslant p\leqslant\infty,$$

$$\widetilde{H}_p=\{f=(f_n):\ S(f)\in L^p\},$$

$$\|f\|_{\widetilde{H}_p}=\|S(f)\|_p,\quad 1\leqslant p<\infty,$$

$$_aK_p=\{f=(f_n):\ \exists\gamma\geqslant 0,\ \gamma\in L^p,\text{使}$$

$$E(|f-f_{n-1}|^a|\mathscr{F}_n)\leqslant E(\gamma^a|\mathscr{F}_n),\ n=0,1,\cdots\},$$

$$\|f\|_{_aK_p}=\inf_\gamma\{\|\gamma\|_p\},\quad 1\leqslant a\leqslant p\leqslant\infty,\quad a\neq\infty,$$

$$\mathrm{BMO}_a={}_aK_\infty.$$

注意，根据约定$f_{-1}\equiv 0$，由$_aK_p$的定义中条件$n=0$，知$_aK_p\subset L^a$(定义中f即理解为f_∞)．易证H_p，BMO_a都是Banach空间．下面将证明，当$1\leqslant a<p<\infty$，$H_p=\widetilde{H}_p={}_aK_p$，且范数等价；$\mathrm{BMO}_a$范数也等价，$\forall a\geqslant 1$.

例 当考虑在$[0,1]$上的二进鞅情形时，上述概念均与对应的古典概念吻合．如

$$f^*=\sup_{I\ni x}\left|\frac{1}{|I|}\int_I f\,dy\right|,$$

$$S(f)=\left(\sum_n\left|\sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n}c_k\psi_k(x)\right|^2\right)^{1/2}$$

(其中$\{\psi_k\}$是Paley排序的Walsh函数系)，以及

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}_1}\sim\sup_I\frac{1}{|I|}\int_I|f-f_I|\,dy,$$

只是其中出现的 I 不是任意区间，而是二进区间.

2.2 极大算子、均方根算子的弱(1, 1)型，Doob 极大不等式

下面出现的不等式，大多数可以先对有限鞅（即在有限时间停止的鞅）证明，然后再过渡到极限即可. 特别涉及 L^1 有界鞅的范数不等式更是如此. 这样便可回避无穷级数的收敛或可积性问题. 以后我们这样做时，不再另加声明.

定理 1 极大算子是定义在 L^1 有界鞅上的弱(1, 1)型算子.

证明 设 $f=(f_n)$ 是 L^1 有界的鞅. 先考虑有限鞅 $f^{(n)}=(f_{m\wedge n})_{m\geqslant 0}$. $\forall\lambda>0$，定义停止时间①

$$\tau_n=\inf\{m\leqslant n:\ |f_m|>\lambda\}.$$

既然 $\{\tau_n<\infty\}=\{f_n^*>\lambda\}$，以及 $|f_{\tau_n}|\mathrm{II}(\{\tau_n<\infty\})\geqslant\lambda$，那末

$$|\{f_n^*>\lambda\}|=|\{\tau_n<\infty\}|\leqslant\frac{1}{\lambda}\int_{\{\tau_n<\infty\}}|f_{\tau_n}|\,d\mu$$

$$\leqslant\frac{1}{\lambda}\int_{\{\tau_n<\infty\}}|f_n|\,d\mu. \tag{1}$$

上面最后一步用到$(|f_n|)$是一个非负下鞅.

因为当 $n\to\infty$，$f_n^*\nearrow f^*$，a. e.，我们便得

$$|\{f^*>\lambda\}|\leqslant\frac{1}{\lambda}\sup_n\|f_n\|_1=\frac{1}{\lambda}\|f\|_1. \tag{2}$$

于是定理得证. ▮

注 1 对 L^1 中的鞅，我们可得一个更强形式的弱型结果. 设 $f=(f_n)\in L^1$，则因为 $f_n\to f_\infty=f$ 在 L^1 中，由式(1)可得

---

① 注意约定：$\inf\varnothing=\infty$.

$$|\{f^*>\lambda\}|\leqslant\frac{1}{\lambda}\int_{\{f^*>\lambda\}}|f|\,d\mu. \tag{2'}$$

下面我们要用到这种形式的弱型结果.

注 2 因为式(2)与(2)′只用到$\{|f_n|\}$是一个下鞅，所以式(2)与(2)′不只对 L^1 有界鞅成立，对 L^1 有界非负下鞅也成立.

现证均方根算子的弱(1, 1)型. 先证一个引理.

引理 1 设 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$(仍设 $f_0=0$)是一个 L^1 有界鞅，或 L^1 有界非负下鞅. 则对停止时间 $\tau=\inf\{n:\ |f_n|>\lambda\}$，总有

$$\|S_{\tau-1}(f)\|_2^2+\|f_{\tau-1}\|_2^2\leqslant 2E(|f_\tau f_{\tau-1}|)\leqslant 2\lambda\|f\|_1. \tag{3}$$

证明 只需对有限鞅证明式(3)即可. 事实上，对于一般的L^1有界鞅 $f=(f_m)_{m\geqslant 0}$，考虑 $f^{(n)}=(f_{n\wedge m})$，以及对停止时间 τ，定义 $\tau_n=\tau$，当 $\tau\leqslant n$；$\tau_n=\infty$，当 $\tau>n$. 则由

$$\|S_{\tau_n-1}(f_n)\|_2^2+\|f_{\tau_n-1}\|_2^2\leqslant 2\lambda\|f_n\|_1,$$

令 $n\to\infty$ 即得式(3). 现考虑有限鞅 $f=(f_n)$. 我们有

$$\begin{aligned}
&|S_{\tau-1}(f)|^2+|f_{\tau-1}|^2\\
&=\sum_{k=1}^{\tau-1}(f_k-f_{k-1})(\bar f_k-\bar f_{k-1})+f_{\tau-1}\bar f_{\tau-1}\\
&=2\sum_{k=1}^{\tau}f_{k-1}\bar f_{k-1}-\sum_{k=1}^{\tau}f_k\bar f_{k-1}\\
&\quad-\sum_{k=1}^{\tau}\bar f_k f_{k-1}+f_\tau\bar f_{\tau-1}+\bar f_\tau f_{\tau-1}\\
&=\sum_{k=1}^{\tau}\bar f_{k-1}(f_{k-1}-f_k)\\
&\quad+\sum_{k=1}^{\tau}f_{k-1}(\bar f_{k-1}-\bar f_k)\\
&\quad+f_\tau\bar f_{\tau-1}+\bar f_\tau f_{\tau-1}.
\end{aligned} \tag{4}$$

注意到 $\mathrm{II}(\{k\leqslant\tau\})$是关于 $\mathscr{F}_{k-1}$ 可测的，从而

$$
\begin{aligned}
&E\left(\sum_{k=1}^{\tau}\bar{f}_{k-1}(f_{k-1}-f_k)\right)\\
&\quad=E\left(\sum_{k=1}^{\infty}\ \mathrm{II}(\{k\leqslant\tau\})\bar{f}_{k-1}(f_{k-1}-f_k)\right)\\
&\quad=\sum_{k=1}^{\infty}E(\mathrm{II}(\{k\leqslant\tau\})\bar{f}_{k-1}E(f_{k-1}-f_k|\mathscr{F}_{k-1}))\\
&\quad\begin{cases}\leqslant 0, & \text{对非负下鞅,}\\ =0, & \text{对鞅.}\end{cases}
\end{aligned}
$$

类似地也有

$$
E\left(\sum_{k=1}^{\tau}f_{k-1}(\bar{f}_{k-1}-\bar{f}_k)\right)\begin{cases}\leqslant 0, & \text{对非负下鞅,}\\ =0, & \text{对鞅.}\end{cases}
$$

那末

$$
\begin{aligned}
&E(|S_{\tau-1}|^2+|f_{\tau-1}|^2)\\
&\quad\leqslant E(f_\tau\bar{f}_{\tau-1}+\bar{f}_\tau f_{\tau-1})\\
&\quad\leqslant 2E(|f_\tau f_{\tau-1}|)\\
&\quad\leqslant 2\lambda E(|f_\tau|)\leqslant 2\lambda\|f\|_1. \blacksquare
\end{aligned}
$$

定理 1′ 均方根算子是定义在 L^1 有界鞅上的弱 (1, 1) 型算子.

证明 如引理 1 中那样定义停止时间 τ. 注意当 $\tau=\infty$, $S_{\tau-1}(f)=S(f)$. 那末有

$$
\begin{aligned}
&|\{S(f)>\lambda\}|\\
&\quad\leqslant|\{S_{\tau-1}(f)>\lambda,\tau=\infty\}|+|\{\tau<\infty\}|\\
&\quad\leqslant\frac{1}{\lambda^2}\|S_{\tau-1}\|_2^2+\frac{1}{\lambda}\|f\|_1\leqslant\frac{3}{\lambda}\|f\|_1.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

定理获证. $\blacksquare$

定理 2(Doob) 对 L^p 有界鞅 $f=(f_n)$, $1<p<\infty$, 总有

$$
\|f\|_p\leqslant\|f^*\|_p\leqslant p'\|f\|_p\quad\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1\right). \tag{6}
$$

证明 只需证右边不等式成立. 将式(2)′两边对 λ 积分得

$$\begin{aligned}\int_\Omega f^{*p}d\mu &= p\int_0^\infty \lambda^{p-1}|\{f^*>\lambda\}|d\lambda\\ &\leqslant p\int_0^\infty \lambda^{p-2}\int_{\{f^*>\lambda\}}|f|d\mu\\ &= p'\int_\Omega |f|(f^*)^{p-1}d\mu\\ &\leqslant p'\|f\|_p\left(\int_\Omega f^{*p}d\mu\right)^{\frac{1}{p'}}.\end{aligned}$$

因为总可设

$$E(f^{*p})<\infty \text{ (如先考虑有限鞅)},$$

于是证明了式(6)成立. ▮

注 同样,非负下鞅的极大算子也是强(p,p)型的.

2.3 H_p的对偶, Fefferman 不等式

本节将证明 $\widetilde{H}_p$(下面将指出它就是 Banach 空间 H_p) 的 Banach 对偶是 ${}_2K_{p'}$, $1\leqslant p\leqslant 2$. 作为 $p=1$ 时的特例, 即得 Fefferman 定理: $H_1'=\mathrm{BMO}(=\mathrm{BMO}_a,\ \forall a\geqslant 1)$.

定理 3 设 $f\in\widetilde{H}_p$, $1\leqslant p\leqslant 2$, $\varphi\in{}_2K_{p'}$ $(f_0=\varphi_0=0)$. 则

$$|E(f_n\overline{\varphi}_n)|\leqslant\sqrt{\frac{2}{p}}\|f\|_{\widetilde{H}_p}\|\varphi\|_{{}_2K_{p'}}. \tag{7}$$

证明 既然

$$|f_n|=\left|\sum_{\nu=1}^n\Delta f_\nu\right|\leqslant\sqrt{n}\,S_n(f),$$

故由 $S(f)\in L^p$ 知每个 $f_n\in L^p$; 同样对 $\varphi\in{}_2K_{p'}$, 由

$$|\Delta\varphi_n|^2=|E(\varphi-\varphi_{n-1}|\mathscr{F}_n)|^2\leqslant E(|\varphi-\varphi_{n-1}|^2|\mathscr{F}_n)$$

$$\leqslant E(\gamma^2|\mathscr{F}_n),$$

$$\|\Delta\varphi_n\|_{p'}\leqslant\|\gamma\|_{p'}\quad(\text{因 } p'\geqslant 2),$$

说明每个 $\varphi_n\in L^{p'}$. 因此 $E(f_n\overline{\varphi}_n)$ 以及 $E(\Delta f_\nu\overline{\Delta\varphi_\nu})$都有意义. 并且由下述正交性质: $\forall f\in L^p, \varphi\in L^{p'}, \mu>\nu\geqslant n$,

$$E(\Delta f_\nu\overline{\Delta\varphi_\mu}|\mathscr{F}_n)=E(\Delta f_\nu E(\overline{\Delta\varphi_\mu}|\mathscr{F}_\nu)|\mathscr{F}_n)=0,$$

我们得到等式

$$E(f_n\overline{\varphi_n})=\sum_{\nu=1}^{n}E(\Delta f_\nu\overline{\Delta\varphi_\nu}),\tag{8}$$

$$E(|\varphi_\mu-\varphi_{n-1}|^2|\mathscr{F}_n)=E\left(\sum_{\nu=n}^{\mu}|\Delta\varphi_\nu|^2|\mathscr{F}_n\right).\tag{9}$$

于是便有

$$\begin{aligned}|E(f_n\overline{\varphi}_n)|&=\left|\sum_{\nu=1}^{n}E\left(\Delta f_\nu S_\nu(f)^{\frac{p}{2}-1}\overline{\Delta\varphi_\nu}S_\nu(f)^{1-\frac{p}{2}}\right)\right|\\&\leqslant\left[\sum_{\nu=1}^{n}E(|\Delta f_\nu|^2S_\nu(f)^{p-2})\right]^{\frac{1}{2}}\\&\quad\cdot\left[\sum_{\nu=1}^{n}E(|\Delta\varphi_\nu|^2S_\nu(f)^{2-p})\right]^{\frac{1}{2}}\\&=\sqrt{A}\sqrt{B}.\end{aligned}$$

利用初等不等式①

$$(S_\nu(f)^2-S_{\nu-1}(f)^2)S_\nu(f)^{p-2}\leqslant\frac{2}{p}(S_\nu(f)^p-S_{\nu-1}(f)^p),$$

则得

$$A\leqslant\frac{2}{p}\sum_{\nu=1}^{n}E(S_\nu(f)^p-S_{\nu-1}(f)^p)\leqslant\frac{2}{p}E(S(f)^p).$$

---

① 因为对 $\alpha\leqslant 1\leqslant\rho$, 有

$$\rho^\alpha-1\geqslant\alpha(\rho-1)\rho^{\alpha-1},$$

令 $\rho=S_\nu^2/S_{\nu-1}^2$, $\alpha=p/2$, 即得.

为估计 B, 记 $Q_\nu = S_\nu^{2-p} - S_{\nu-1}^{2-p}$. 注意因 S_ν 不减, 以及 $p \leqslant 2$. 故 Q_ν 非负, 因而

$$
\begin{aligned}
B &= \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{\nu} E(Q_\mu |\Delta\varphi_\nu|^2) \\
&= \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=\mu}^{n} E(Q_\mu E(|\Delta\varphi_\nu|^2 | \mathscr{F}_\mu)) \\
&= \sum_{\mu=1}^{n} E(Q_\mu E(|\varphi_n - \varphi_{\mu-1}|^2 | \mathscr{F}_\mu)) \\
&\leqslant \sum_{\mu=1}^{n} E(Q_\mu E(\gamma^2 | \mathscr{F}_\mu)) = E(S_n^{2-p}\gamma^2) \\
&\leqslant E(S_n^p)^{\frac{2-p}{p}} E(\gamma^{p'})^{\frac{2p-2}{p}}.
\end{aligned}
$$

于是得

$$
\begin{aligned}
|E(f_n\bar{\varphi}_n)| &\leqslant \sqrt{\frac{2}{p}} E(S^p)^{\frac{1}{2}} E(S^p)^{\frac{2-p}{2p}} E(\gamma^{p'})^{\frac{2p-2}{2p}} \\
&= \sqrt{\frac{2}{p}} \|S\|_p \|\gamma\|_{p'},
\end{aligned}
$$

$$
|E(f_n\bar{\varphi}_n)| \leqslant \sqrt{\frac{2}{p}} \|f\|_{\tilde{H}_p} \|\varphi\|_{{}_2K_{p'}}. \quad \blacksquare
$$

注 根据上述定理, ${}_2K_{p'}$ 的每个元素 φ 都可以产生 $\tilde{H}_p$ 上的一个有界线性泛函:

$$
l_\varphi(f) = (f, \varphi) = \lim_n E(f_n\bar{\varphi}_n),
$$

且

$$
|l_\varphi(f)| \leqslant \sqrt{\frac{2}{p}} \|f\|_{\tilde{H}_p} \|\varphi\|_{{}_2K_{p'}}.
$$

这里 $E(f_n\bar{\varphi}_n) = \sum_{\nu=1}^{n} E(\Delta f_\nu \overline{\Delta\varphi_\nu})$的极限存在, 是因为$\sum_{1}^{\infty} E(\Delta f_\nu \overline{\Delta\varphi_\nu})$ 是绝对收敛的.

上注结论的逆也成立, 从而 $\tilde{H}_p$ 的 Banach 对偶就是 ${}_2K_{p'}$. 现

在我们为证明此逆作一些准备. Fefferman 证明 $H_1'=\mathrm{BMO}$ 时是将 H_1 嵌入一个更大的空间, 从而使其对偶容易被描述. 现如法泡制.

记 $\mathscr{SH}_p$ 表随机变量序列 $\theta=(\theta_1, \theta_2, \cdots)$ 的Banach空间, 范数为

$$\|\theta\|_{\mathscr{SH}_p}=E\left(\left[\sum_{\nu=1}^{\infty}|\theta_\nu|^2\right]^{p/2}\right)^{1/p}.$$

引理 2 若 $l(\theta)$ 是 $\mathscr{SH}_p$ 上的一个有界线性泛函, $1\leqslant p<\infty$, 则存在 $\sigma\in\mathscr{SH}_{p'}$ 使

$$l(\theta)=\sum_{\nu=1}^{\infty}E(\bar{\sigma}_\nu\theta_\nu), \tag{10}$$

$$\|\sigma\|_{\mathscr{SH}_{p'}}\leqslant\|l\|. \tag{11}$$

证明 先设 $p>1$. $\forall f\in L^p$, 考虑 $\theta=(0, \cdots, f, 0, \cdots)$, 其中 $\theta_n=f$, $\theta_\nu=0$, $\nu\neq n$. 令 $l_n(f)=l(\theta)$. 则

$$|l_n(f)|\leqslant\|l\|\|f\|_p.$$

因此存在 $\sigma_n\in L^{p'}$, 使 $l_n(f)=E(\bar{\sigma}_n f)$. 由 $l(\theta)$ 是线性的, 知对所有满足 $\theta_\nu=0(\forall\nu>n)$ 的 θ, 都有

$$l(\theta)=\sum_{\nu=1}^{n}E(\bar{\sigma}_\nu\theta_\nu).$$

现选

$$\theta_\nu=\sigma_\nu\left(\sum_{\mu=1}^{n}|\sigma_\mu|^2\right)^{\frac{p'-2}{2}},$$

代入后得

$$E\left(\left[\sum_{\nu=1}^{n}|\sigma_\nu|^2\right]^{p'/2}\right)\leqslant\|l\|\,E\left(\left[\sum_{\nu=1}^{n}|\sigma_\nu|^2\right]^{p'/2}\right)^{1/p},$$

$$E\left(\left[\sum_{\nu=1}^{n}|\sigma_\nu|^2\right]^{p'/2}\right)^{1/p'}\leqslant\|l\|.$$

令 $n\to\infty$, 即得 $(\sigma_1, \sigma_2, \cdots)\in\mathscr{S}\mathscr{H}_{p'}$.

当 $p=1$ 时，注意 $\mathscr{S}\mathscr{H}_q\subset\mathscr{S}\mathscr{H}_1$, $q>1$, 且嵌入是连续的. 故 $\mathscr{S}\mathscr{H}_1$ 上每个有界线性泛函 l 也在 $\mathscr{S}\mathscr{H}_q$ 上产生一个有界线性泛函. 因此存在 $\sigma=(\sigma_1, \sigma_2, \cdots)$ 满足

$$l(\theta)=\sum_{\nu=1}^{\infty}E(\bar{\sigma}_\nu\theta_\nu),$$

$$\|\sigma\|_{\mathscr{S}\mathscr{H}_{q'}}\leqslant\|l\|,\quad \forall q'<\infty.$$

这样必有

$$\left\|\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}|\sigma_\nu|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_\infty\leqslant\|l\|. \quad \blacksquare$$

引理 3 设 $q\geqslant2$, $\sigma=(\sigma_1, \sigma_2, \cdots)$ 是随机变量的一个序列, 满足

$$E\left(\left[\sum_{\nu=1}^{\infty}|\sigma_\nu|^2\right]^{\frac{q}{2}}\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant B, \tag{12}$$

则如下鞅 $\varphi=(\varphi_n)_{n\geqslant0}$,

$$\varphi_n=\sum_{\nu=1}^{n}[E(\sigma_\nu|\mathscr{F}_\nu)-E(\sigma_\nu|\mathscr{F}_{\nu-1})],\quad \varphi_0=0$$

是 ${}_2K_q$ 中元素, 且

$$\|\varphi\|_{{}_2K_q}\leqslant2q'B. \tag{13}$$

证明 易证 $\varphi=(\varphi_n)$ 确是一个鞅. 当 $\nu\geqslant n+1$ 时, 有

$$\begin{aligned}E(|\Delta\varphi_\nu|^2|\mathscr{F}_n)&=E(E(|\Delta\varphi_\nu|^2|\mathscr{F}_{\nu-1})|\mathscr{F}_n)\\&=E(|E(\sigma_\nu|\mathscr{F}_\nu)|^2-|E(\sigma_\nu|\mathscr{F}_{\nu-1})|^2|\mathscr{F}_n)\\&\leqslant E(E(|\sigma_\nu|^2|\mathscr{F}_\nu)|\mathscr{F}_n)=E(|\sigma_\nu|^2|\mathscr{F}_n).\end{aligned}$$

记

$$g=\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}|\sigma_\nu|^2\right)^{\frac{1}{2}},\quad g^*=\sup_n E(g|\mathscr{F}_n).$$

既然 $g\in L^q$, $q\geqslant2$, 由定理 2 知, $g^*\in L^q$, 且 $\|g^*\|_q\leqslant q'\|g\|_q$. 因此

$$
\begin{aligned}
|\Delta\varphi_n|^2 = &|E(\sigma_n|\mathscr{F}_n)|^2 + |E(\sigma_n|\mathscr{F}_{n-1})|^2 \\
&- E(\sigma_n|\mathscr{F}_n)E(\bar{\sigma}_n|\mathscr{F}_{n-1}) \\
&- E(\bar{\sigma}_n|\mathscr{F}_n)E(\sigma_n|\mathscr{F}_{n-1}) \\
\leqslant &E(|\sigma_n|^2|\mathscr{F}_n) + 3g^{*2}.
\end{aligned}
$$

因而

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\nu=n}^{\infty} E(|\Delta\varphi_\nu|^2|\mathscr{F}_n) \\
&\leqslant \sum_{\nu=n}^{\infty} E(|\sigma_\nu|^2|\mathscr{F}_n) + 3E(g^{*2}|\mathscr{F}_n) \\
&\leqslant 4E(g^{*2}|\mathscr{F}_n) = E((2g^*)^2|\mathscr{F}_n).
\end{aligned} \tag{14}
$$

特别说明 $\varphi=(\varphi_n)$ 是 L^2 中的鞅, 且

$$
E(|\varphi-\varphi_{n-1}|^2|\mathscr{F}_n) \leqslant E((2g^{*2})|\mathscr{F}_n).
$$

从而证明了 $\varphi \in {}_2K_q$, 且

$$
\|\varphi\|_{{}_2K_q} \leqslant \|2g^*\|_q \leqslant 2q'\|g\|_q \leqslant 2q'B. \quad \blacksquare
$$

定理 4 设 l 是 $\tilde{H}_p(1\leqslant p\leqslant 2)$ 上一个有界线性泛函, 则存在 $\varphi\in {}_2K_{p'}$ 满足 $l(f)=\lim\limits_n E(f_n\bar{\varphi}_n)$, 且

$$
\|\varphi\|_{{}_2K_{p'}} \leqslant 2p\|l\|. \tag{15}
$$

证明 将 $\tilde{H}_p$ 考虑为 $\mathscr{SH}_p$ 的子空间, 它由所有的序列 $\theta=(\theta_1, \theta_2, \cdots)$ 构成, 其中

$$
\theta_\nu = E(f|\mathscr{F}_\nu) - E(f|\mathscr{F}_{\nu-1}), \quad \forall\nu, \quad \text{某个 } f\in\tilde{H}_p.
$$

$l(f)$ 定义了这个子空间上的一个有界线性泛函(因为 $\tilde{H}_p$ 是等范地嵌入 $\mathscr{SH}_p$), 由 Hahn-Banach 定理, 我们可以扩充它为 $\mathscr{SH}_p$ 上的线性泛函(仍记为 l), 且保持同样的界. 由引理 2 知, 存在 $\sigma\in\mathscr{SH}_{p'}$, 使

$$
l(\theta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} E(\bar{\sigma}_\nu\theta_\nu),
$$

且$\|\sigma\|_{\mathscr{S}\mathscr{K}_{p'}}\leqslant\|l\|$.

特别地, 取 $\theta=(\theta_1, \theta_2, \cdots)$, 其中

$$\theta_\nu=E(f|\mathscr{F}_\nu)-E(f|\mathscr{F}_{\nu-1}),\quad \nu\leqslant n;\quad \theta_\nu=0,\ \forall\nu>n,$$

对某个 $f=(f_n)\in\widetilde{H}_p$. 既然这样的 θ 也可写为

$$\theta_\nu=E(f_n|\mathscr{F}_\nu)-E(f_n|\mathscr{F}_{\nu-1}),\quad \forall\nu.$$

那末我们便有

$$l(f_n)=l(\theta)=\sum_{\nu=1}^{n}E(\overline{\sigma}_\nu[E(f_n|\mathscr{F}_\nu)-E(f_n|\mathscr{F}_{\nu-1})])$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n}E(f_n[E(\overline{\sigma}_\nu|\mathscr{F}_\nu)-E(\overline{\sigma}_\nu|\mathscr{F}_{\nu-1})]).$$

现令 $\varphi=(\varphi_n)$,

$$\varphi_n=\sum_{\nu=1}^{n}[E(\sigma_\nu|\mathscr{F}_\nu)-E(\sigma_\nu|\mathscr{F}_{\nu-1})],$$

则 $l(f_n)=E(f_n\overline{\varphi}_n)$, 且由引理 3 知, $\varphi\in{}_2K_{p'}$, $\|\varphi\|_{{}_2K_{p'}}\leqslant2p\|l\|$. 因

$$\|f-f_n\|_{\widetilde{H}_p}=E\left(\left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}|\Delta f_\nu|^2\right)^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{p}}\to0,$$

故 l 的连续性说明 $l(f)=\lim\limits_n E(f_n\overline{\varphi}_n)$. ▌

2.4 Burkholder-Gundy 不等式, Davis 分解, Davis 不等式

Burkholder-Gundy指出, 对 $1<p<\infty$, $\|f\|_{H_p}\sim\|f\|_{\widetilde{H}_p}\sim\|f\|_p$, Davis 指出$\|f\|_{H_1}\sim\|f\|_{\widetilde{H}_1}$. 后者是一个更为深刻的结果. Garsia[1] 指出了一条通路:

Fefferman 不等式 $\Longrightarrow$ Davis 不等式

$\Longrightarrow$ 凸 Φ-不等式(包括 B-G 不等式).

这一章我们将介绍这个通路. 但是我们是将它们分开来讨论的, 这样便于在得到 B-G 不等式的同时也得到了 H_p 的其他等价刻划; 在得到 Davis 不等式的过程中顺便介绍 Davis 分解, 这是一个有独立兴趣的结果.

我们先对 $p>2$ 建立 B-G 不等式.

引理 4 设鞅 $f=(f_n)\in {}_2K_p$, $2<p<\infty$, $\{\varepsilon_k\}$是一个由± 1组成的序列. 则 ${}_2K_p$ 到自身的算子:

$$T_\varepsilon f=g=(g_n),\qquad g_n=\sum_1^n \varepsilon_k \Delta f_k,\qquad g_0=0,$$

满足

$$\|g^*\|_p\leqslant\sqrt{e}\sqrt{\frac{p^3}{p-2}}\|f\|_{{}_2K_p}. \tag{16}$$

证明 $g=(g_n)$显然还是鞅, 且 $g\in {}_2K_p$. 因

$$E(|g-g_{n-1}|^2|\mathscr{F}_n)=\sum_{k=n}^\infty E(|\Delta g_k|^2|\mathscr{F}_n)$$

$$=\sum_{k=n}^\infty E(|\Delta f_k|^2|\mathscr{F}_n)=E(|f-f_{n-1}|^2|\mathscr{F}_n).$$

现设 γ 是任何一个非负可测函数, 使得

$$E(|f-f_{n-1}|^2|\mathscr{F}_n)\leqslant E(\gamma^2|\mathscr{F}_n),\quad \forall n.$$

对任意的 $\lambda>0$ 与待定的 $\alpha>0$, 定义停止时间

$$\tau_1=\inf\{n:\ |g_n|>\alpha\lambda\},$$

$$\tau_2=\inf\{n:\ |g_n|>(\alpha+1)\lambda\}.$$

则 $\tau_1\leqslant\tau_2$, 故$\{\tau_1<\infty\}\in\mathscr{F}_{\tau_1}\subset\mathscr{F}_{\tau_2}$. 此外有

$$\{g^*>(\alpha+1)\lambda\}=\{\tau_2<\infty\}\subset\{\tau_1<\infty,\ |g_{\tau_2}-g_{\tau_1-1}|\geqslant\lambda\}.$$

记 $\sigma(\lambda)=|\{g^*>\lambda\}|$. 则有

$$\sigma((\alpha+1)\lambda)\leqslant\frac{1}{\lambda^2}\int_{\{\tau_1<\infty\}}|g_{\tau_2}-g_{\tau_1-1}|^2d\mu$$

$$=\frac{1}{\lambda^2}\int_{\{\tau_1<\infty\}} |E(g-g_{\tau_1-1}|\mathscr{F}_{\tau_2})|^2 d\mu$$

$$\leqslant\frac{1}{\lambda^2}\int_{\{\tau_1<\infty\}} E(|g-g_{\tau_1-1}|^2|\mathscr{F}_{\tau_2})d\mu$$

$$=\frac{1}{\lambda^2}\int_{\{\tau_1<\infty\}} E(|g-g_{\tau_1-1}|^2|\mathscr{F}_{\tau_1})d\mu.$$

既然对任意停止时间 τ, 有

$$E(|g-g_{\tau-1}|^2|\mathscr{F}_\tau)=E\left(\sum_{n=1}^{\infty}|g-g_{n-1}|^2 \mathrm{II}(\{\tau=n\})\,|\mathscr{F}_\tau\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}E(|g-g_{n-1}|^2|\mathscr{F}_n)\mathrm{II}(\{\tau=n\})$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}E(|f-f_{n-1}|^2|\mathscr{F}_n)\mathrm{II}(\{\tau=n\})$$

$$=E(|f-f_{\tau-1}|^2|\mathscr{F}_\tau)\leqslant E(\gamma^2|\mathscr{F}_\tau),$$

也就有

$$\sigma((\alpha+1)\lambda)\leqslant\frac{1}{\lambda^2}\int_{\{\tau_1<\infty\}} E(\gamma^2|\mathscr{F}_{\tau_1})d\mu$$

$$=\frac{1}{\lambda^2}\int_{\{\tau_1<\infty\}} \gamma^2 d\mu.$$

从而

$$p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\sigma((\alpha+1)\lambda)d\lambda$$

$$\leqslant p\int_0^\infty \lambda^{p-3}\int_{\{g^*>\alpha\lambda\}}\gamma^2 d\mu d\lambda$$

$$=\frac{p}{p-2}\int_\Omega\left(\frac{g^*}{\alpha}\right)^{p-2}\gamma^2 d\mu$$

$$\leqslant\frac{p}{p-2}\frac{1}{\alpha^{p-2}}\|g^*\|_p^{p-2}\|\gamma\|_p^2.$$

此即

$$\|g^*\|_p^p \leqslant \frac{p}{p-2} \frac{(\alpha+1)^p}{\alpha^{p-2}} \|g^*\|_p^{p-2} \|\gamma\|_p^2.$$

最后令 $\alpha=p$, 得

$$\|g^*\|_p \leqslant \sqrt{e\frac{p^3}{p-2}} \|\gamma\|_p, \quad \|g^*\|_p \leqslant \sqrt{e\frac{p^3}{p-2}} \|f\|_{{}_2K_p}. \quad \blacksquare$$

定理 5 对 $2<p<\infty$, 我们有 $H_p=\widetilde{H}_p={}_2K_p$, 并且三范数等价.

证明 因为

$$E(|f-f_{n-1}|^2|\mathscr{F}_n)=E(S(f)^2-S_{n-1}(f)^2|\mathscr{F}_n)$$
$$\leqslant E(S(f)^2|\mathscr{F}_n),$$

以及

$$E(|f-f_{n-1}|^2|\mathscr{F}_n) \leqslant E((2f^*)^2|\mathscr{F}_n),$$

从而证明了 $H_p \subset {}_2K_p$, $\widetilde{H}_p \subset {}_2K_p$.

利用引理 4 证明相反的结论. 首先取 $\varepsilon_k \equiv 1$, T_ε 是恒等算子, 则得

$$\|f^*\|_p \leqslant \sqrt{e\frac{p^3}{p-2}} \|f\|_{{}_2K_p}.$$

其次, 令 $\varepsilon_k=r_k(t)$, $\{r_k(t)\}$是$[0, 1]$上 Rademacher 函数系, 由引理 4 推出

$$\|(T_\varepsilon f)^*\|_p \leqslant C_p \|f\|_{{}_2K_p}.$$

特别地,

$$\int_\Omega \left|\sum_k r_k(t)\Delta f_k(\omega)\right|^p d\mu \leqslant C_p^p \|f\|_{{}_2K_p}^p,$$

从而

$$\int_\Omega \int_0^1 \left|\sum_k r_k(t)\Delta f_k(\omega)\right|^p dt\,d\mu \leqslant C_p^p \|f\|_{{}_2K_p}^p.$$

但因

$$\int_0^1 \left| \sum_k r_k(t)\Delta f_k(\omega) \right|^p dt \sim \left(\sum_k |\Delta f_k(\omega)|^2 \right)^{\frac{p}{2}},$$

我们得到

$$\|S(f)\|_p \leqslant C_p \left(\int_\Omega \int_0^1 \left| \sum_k r_k(t)\Delta f_k(\omega) \right|^p dt\, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant C_p \|f\|_{{}_2K_p}.$$

于是证明了 ${}_2K_p \subset H_p$ 与 ${}_2K_p \subset \widetilde{H}_p$. ▌

注 1 对 $f \in L^p$, $1 < p \leqslant 2$, 通过先对有限鞅的讨论，可知 $T_\varepsilon f$ 也有定义，并且

$$C\|f\|_p \leqslant \|T_\varepsilon f\|_p \leqslant C\|f\|_p^{①}, \quad 1 < p < \infty. \tag{17}$$

这只需用到 T_ε 是自伴的且满足 $T_\varepsilon^2 = I$. 事实上，设 $1 < p \leqslant 2$, 并设 $f \in L^p$ 是一个有限鞅，则由自伴性知，$\forall g \in L^{p'}$, 有

$$|E(T_\varepsilon fg)| = |E(fT_\varepsilon g)| \leqslant \|f\|_p \|T_\varepsilon g\|_{p'} \leqslant C\|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

因而证明了 $\|T_\varepsilon f\|_p \leqslant C\|f\|_p$, 对有限鞅 $f \in L^p$, $1 < p \leqslant 2$. 由连续性可将 T_ε 推广至整个 L^p, $1 < p \leqslant 2$. 于是式(17) 之右边对 $1 < p < \infty$ 成立. 至于式(17)之左边不等式，由 $T_\varepsilon^2 = I$, 即知

$$\|f\|_p = \|T_\varepsilon T_\varepsilon f\|_p \leqslant C\|T_\varepsilon f\|_p, \quad 1 < p < \infty.$$

注 2 特别地，上述注 1 说明

$$C\|f\|_p \leqslant \|S(f)\|_p \leqslant C\|f\|_p, \quad 1 < p < \infty.$$

定理 6 (Burkholder-Gundy) 对 $1 < p < \infty$, 有

$$\|f^*\|_p \sim \|S(f)\|_p \sim \|f\|_p.$$

证明 这是定理 2 以及定理 5 后注 2 的结果. ▌

类似于引理 4 的证明还给出 H_p 的另一个等价刻划，即

---

① 本书中常数用字母 C 等表示. 当有附标时表示它依赖附标所示的参数；不带附标时，它或是绝对常数，或仅依赖于不重要的参数. 值得指出的是，如通常一样，同一字母可以表示不同常数，即使在同一地方.

$$H_p \sim_a K_p,\quad 1 \leqslant a < p < \infty.$$

定理 7　对 $1 \leqslant a < p < \infty$, $H_p \sim_a K_p$, 且

$$\frac{1}{2}\|f\|_{{}_aK_p} \leqslant \|f^*\|_p \leqslant \left(\frac{ep}{p-a}\right)^{1/a} p\|f\|_{{}_aK_p}. \tag{18}$$

证明　左边不等式显然成立. 右边不等式的证明如同引理 4 一样, 考虑停止时间 τ_1 与 τ_2, 得

$$\sigma((\alpha+1)\lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda^a}\int_{\{\tau_1<\infty\}} |f_{\tau_2} - f_{\tau_1-1}|^a d\mu$$

$$\leqslant \frac{1}{\lambda^a}\int_{\{\tau_1<\infty\}} \gamma^a d\mu,$$

$$\|f^*\|_p^p \leqslant p(\alpha+1)^p \int_0^\infty \lambda^{p-a-1}\int_{\{f^*>\alpha\lambda\}} \gamma^a d\mu d\lambda$$

$$\leqslant \frac{ep}{p-a} p^a \|f^*\|_p^{p-a} \|\gamma\|_p^a,$$

$$\|f^*\|_p \leqslant \left(\frac{ep}{p-a}\right)^{1/a} p\|f\|_{{}_aK_p}. \quad \blacksquare$$

现在讨论 $p=1$ 时的 Davis 不等式.

引理 5 (Davis 分解)　设 $f=(f_n)$ 是一个鞅, 则 $f=g+h$, 其中 g 与 h 满足(记 $d_n = \Delta f_n = f_n - f_{n-1}$)

$$g=(g_n),\qquad |\Delta g_n| \leqslant 4d_{n-1}^*, \tag{19}$$

$$h=(h_n),\qquad E\left(\sum_k |\Delta h_k|\right) \leqslant 4E(d^*). \tag{20}$$

证明　对 $f=(f_n)$, $f_n = \sum_{k=1}^n d_k$, 令

$$\Delta g_n = d_n \mathrm{I}(\{|d_n| \leqslant 2d_{n-1}^*\})$$
$$\qquad - E(d_n \mathrm{I}(\{|d_n| \leqslant 2d_{n-1}^*\}) | \mathscr{F}_{n-1}),$$
$$\Delta h_n = d_n \mathrm{I}(\{|d_n| > 2d_{n-1}^*\})$$
$$\qquad - E(d_n \mathrm{I}(\{|d_n| > 2d_{n-1}^*\}) | \mathscr{F}_{n-1}).$$

显然有 $|\Delta g_n| \leqslant 4d_{n-1}^*$. 此外, 由于

$$
\begin{aligned}
&|d_n|\mathrm{II}(\{|d_n|>2d^*_{n-1}\})\\
&\quad\leqslant(2|d_n|-2d^*_{n-1})\mathrm{II}(\{|d_n|>2d^*_{n-1}\})\\
&\quad\leqslant 2d^*_n-2d^*_{n-1},
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
E\Big(\sum_n|\Delta h_n|\Big)\leqslant&\sum_n\{E(|d_n|\mathrm{II}(\{|d_n|>2d^*_{n-1}\}))\\
&+E(E(|d_n|\mathrm{II}(\{|d_n|>2d^*_{n-1}\})|\mathscr{F}_{n-1}))\}\\
\leqslant&4\sum_1^\infty E(d^*_n-d^*_{n-1})=4E(d^*).\quad\blacksquare
\end{aligned}
$$

定理 8 (Davis) 对所有鞅 $f=(f_n)$，都有

$$
C\|f^*\|_1\leqslant\|S(f)\|_1\leqslant C\|f^*\|_1. \tag{21}
$$

证明 首先注意对所有鞅 $f=(f_n)$，有

$$
d^*\leqslant\min(2f^*,S(f)).
$$

现考虑 f 的 Davis 分解 $f=g+h$. 对 h 有容易的估计

$$
\max(h^*,S(h))\leqslant\sum_1^\infty|\Delta h_n|,
$$

$$
\begin{aligned}
\max(E(h^*),E(S(h)))&\leqslant\sum_1^\infty E(|\Delta h_n|)\leqslant 4E(d^*)\\
&\leqslant 4\min(2E(f^*),E(S(f))).
\end{aligned}
$$

现看对 g 的估计. 首先注意对任意鞅 $g=(g_n)$，以及对任意停止时间 τ，停止鞅

$$
g^{(\tau)}=(g_{n\wedge\tau})_{n\geqslant 0},
$$

$$
g_{n\wedge\tau}=\sum_{k=1}^n\mathrm{II}(\{k\leqslant\tau\})\Delta g_k
$$

都满足

$$
g^{(\tau)*}=\sup_n|g_{n\wedge\tau}|=\sup_{n\leqslant\tau}|g_n|=g^*_\tau,
$$

$$S(g^{(\tau)})=\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{I\!I}(\{k\leqslant\tau\})\,|\Delta g_k|^2\Big)^{1/2}$$

$$=\Big(\sum_{k=1}^{\tau}|\Delta g_k|^2\Big)^{1/2}=S_\tau(g).$$

现在我们利用 g 的可预报性来定义合适的停止时间 τ. 注意

$$|g_n|\leqslant g_{n-1}^*+4d_{n-1}^*=\rho_{n-1},$$

定义停止时间, $\forall\lambda>0$,

$$\tau=\inf\{n:\ \ \rho_n>\lambda\}.$$

则有

$$|\{S(g)>\lambda\}|\leqslant|\{S(g)>\lambda,\ \tau=\infty\}|+|\{\tau<\infty\}|$$

$$\leqslant|\{S(g^{(\tau)})>\lambda\}|+|\{\tau<\infty\}|$$

$$\leqslant\frac{1}{\lambda^2}E(S(g^{(\tau)})^2)+|\{\tau<\infty\}|$$

$$=\frac{1}{\lambda^2}E(|g^{(\tau)}|^2)+|\{\tau<\infty\}|.$$

注意 $\{\tau=\infty\}\subset\{\rho^*\leqslant\lambda\}\subset\{g^*\leqslant\lambda\}$, 以及

$$|g_\tau|\,\mathrm{I\!I}(\{\tau<\infty\})\leqslant\rho_{\tau-1}\mathrm{I\!I}(\{\tau<\infty\})\leqslant\lambda,$$

于是

$$|\{S(g)>\lambda\}|\leqslant\frac{1}{\lambda^2}\int_{\{g^*\leqslant\lambda\}}g^{*2}d\mu+2|\{\tau<\infty\}|,$$

$$\|S(g)\|_1\leqslant\int_0^\infty\frac{1}{\lambda^2}\int_{\{g^*\leqslant\lambda\}}g^{*2}d\mu d\lambda+C\|g^*\|_1+C\|d^*\|_1$$

$$\leqslant C\|g^*\|_1+C\|f^*\|_1.$$

类似地, 根据

$$S_n(g)=\Big(\sum_1^{n-1}|\Delta g_k|^2+|\Delta g_n|^2\Big)^{1/2}$$

$$\leqslant S_{n-1}(g)+4d_{n-1}^*=\rho_{n-1}$$

定义停止时间 $\tau=\inf\{n:\ \ \rho_n>\lambda\}$, 可得

$$\|g^*\|_1 \leqslant C\|S(g)\|_1 + C\|S(f)\|_1.$$

由此综合即得

$$\begin{aligned} E(f^*) &\leqslant E(g^*) + E(h^*) \leqslant CE(S(g)) + CE(S(f)) \\ &\leqslant CE(S(f)) + CE(S(h)) \leqslant CE(S(f)), \\ E(S(f)) &\leqslant E(S(g)) + E(S(h)) \leqslant CE(g^*) + CE(f^*) \\ &\leqslant CE(f^*) + CE(h^*) \leqslant CE(f^*). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2.5 从 Fefferman 不等式到 Davis 不等式

本节介绍 Garsia[1]发现的通路:

$$\text{Fefferman 不等式} \Longrightarrow \text{Davis 不等式}$$
$$\Longrightarrow \text{凸 } \Phi\text{-不等式}.$$

凸Φ-不等式的最终建立将放到第四章去做, 但在这一节要完成重要的准备工作. 为便于直接将 Davis 不等式应用于凸性不等式的建立, 本节不再假定子 σ-代数 $\mathscr{F}_0$ 是平凡的, 以及鞅 $f=(f_n)$的初值 $f_0=0$. 此时约定 $\mathscr{F}_{-1}$ 是平凡的, 以及对任何过程$(\gamma_n)_{n\geqslant 0}$, 都约定 $\gamma_{-1}=0$. 这样, 在以前的许多定义中可以允许出现带指标 -1 的项. 如 $S_n(f)^2$ 可以写成

$$\sum_{k=0}^{n} |\Delta f_k|^2.$$

再注意因为 $\mathscr{F}_0$ 不是平凡的, 则以前我们关心的 $E(\cdot)$ 现在变为

$$E_0(\cdot) = E(\cdot \mid \mathscr{F}_0).$$

定理 3′ (Fefferman) 对所有鞅 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$, 有

$$|E_0(f_n\overline{\varphi}_n)| \leqslant \sqrt{2}\, E_0(S(f))\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}_2}. \tag{7$'$}$$

证明 这只需在定理 3 的证明中将E改为 E_0, 以及将所有从指标 1 开始求和改为从指标 0 开始. ∎

为了由 Fefferman 不等式推出 Davis 不等式, 还需要下述引

理.

引理 6 设$\{\theta_\nu\}$与$\{\varepsilon_\nu\}$是随机变量的序列, 满足: $\{\theta_\nu\}$是适应的, 且一致有界, 设为 1, 以及$\sum\limits_{0}^{\infty}|\varepsilon_\nu|\leqslant B$, a. e., 则

$$\varphi=\sum_{\nu=0}^{\infty}\theta_\nu E(\varepsilon_\nu|\mathscr{F}_\nu)$$

是 BMO_2 中元素, 且

$$\|\varphi\|_{BMO_2}\leqslant\sqrt{5}\,B. \tag{22}$$

证明 定义φ的级数是 a. e. 绝对收敛的, 因

$$E(|\varphi|)\leqslant\sum_{\nu=0}^{\infty}E(E(|\varepsilon_\nu||\mathscr{F}_\nu))=E\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}|\varepsilon_\nu|\right)\leqslant B.$$

$\forall n=0,1,\cdots$, 记

$$\psi_n=\sum_{\nu=n}^{\infty}\theta_\nu E(\varepsilon_\nu|\mathscr{F}_\nu).$$

则

$$\varphi-\varphi_{n-1}=\psi_n-E(\psi_n|\mathscr{F}_{n-1}).$$

因而,

$$\begin{aligned}E(|\varphi-\varphi_{n-1}|^2|\mathscr{F}_n)\leqslant &E(|\psi_n|^2|\mathscr{F}_n)+|E(\psi_n|\mathscr{F}_{n-1})|^2\\&+2|E(\psi_n|\mathscr{F}_n)E(\psi_n|\mathscr{F}_{n-1})|.\end{aligned}$$

既然

$$\begin{aligned}E(|\psi_n||\mathscr{F}_n)&\leqslant E\left(\sum_{\nu=n}^{\infty}E(|\varepsilon_\nu||\mathscr{F}_\nu)|\mathscr{F}_n\right)\\&=E\left(\sum_{\nu=n}^{\infty}|\varepsilon_\nu||\mathscr{F}_n\right)\leqslant B,\end{aligned}$$

当然更有$E(|\psi_n||\mathscr{F}_{n-1})\leqslant B$. 那末剩下的只需估计$E(|\psi_n|^2|\mathscr{F}_n)$. 我们有

$$E(|\psi_n|^2|\mathscr{F}_n)\leqslant\sum_{\nu=n}^{\infty}\sum_{\mu=n}^{\infty}E(E(|\varepsilon_\nu||\mathscr{F}_\nu)E(|\varepsilon_\mu||\mathscr{F}_\mu)|\mathscr{F}_n)$$

$$\leqslant 2\sum_{\nu=n}^{\infty}\sum_{\mu=\nu}^{\infty}E(E(E(|\varepsilon_\nu||\mathscr{F}_\nu)|\varepsilon_\mu||\mathscr{F}_\mu)|\mathscr{F}_n)$$

$$=2\sum_{\nu=n}^{\infty}\sum_{\mu=\nu}^{\infty}E(E(|\varepsilon_\nu||\mathscr{F}_\nu)|\varepsilon_\mu||\mathscr{F}_n)$$

$$\leqslant 2B\sum_{\nu=n}^{\infty}E(E(|\varepsilon_\nu||\mathscr{F}_\nu)|\mathscr{F}_n)\leqslant 2B^2.$$

于是我们得

$$E(|\varphi-\varphi_{n-1}|^2|\mathscr{F}_n)\leqslant 5B^2,$$

$$\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}_2}\leqslant\sqrt{5}\,B. \quad \blacksquare$$

注 我们将在 5.4 节的定理 6 中指出，这个命题的逆命题也成立.

引理 7 设$\{\theta_\nu\}$是适应的随机变量的序列，则对一切$\varepsilon>0$,

$$\varphi=\sum_{\nu=0}^{\infty}\theta_{\nu-1}\left\{E\left(\frac{1}{\theta^*+\varepsilon}\middle|\mathscr{F}_\nu\right)-E\left(\frac{1}{\theta^*+\varepsilon}\middle|\mathscr{F}_{\nu-1}\right)\right\}$$

是BMO_2中元素，且

$$\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}_2}\leqslant\sqrt{2}. \tag{23}$$

证明 记

$$g_\nu=E\left(\frac{1}{\theta^*+\varepsilon}\middle|\mathscr{F}_\nu\right),\quad \Delta g_\nu=g_\nu-g_{\nu-1},$$

$$\varphi_n=\sum_{\nu=0}^{n}\theta_{\nu-1}\Delta g_\nu.$$

注意(φ_n)是一个鞅. 对$N\geqslant n$，有

$$E(|\varphi_N-\varphi_{n-1}|^2|\mathscr{F}_n)=\sum_{\nu=n}^{N}E(|\theta_{\nu-1}|^2|\Delta g_\nu|^2|\mathscr{F}_n)$$

$$\leqslant\sum_{\nu=n}^{N}E(\theta_{\nu-1}^{*2}|\Delta g_\nu|^2|\mathscr{F}_n).$$

对 $\nu=n$, 有

$$E(\theta_{n-1}^{*2}|\Delta g_n|^2|\mathscr{F}_n)$$

$$\leqslant E\left(\theta_{n-1}^{*2}\max\left\{E\left(\frac{1}{\theta^*+\varepsilon}\middle|\mathscr{F}_n\right)^2,\right.\right.$$

$$\left.\left.E\left(\frac{1}{\theta^*+\varepsilon}\middle|\mathscr{F}_{n-1}\right)^2\right\}\middle|\mathscr{F}_n\right)$$

$$\leqslant 1;$$

以及当 $\nu\geqslant n+1$ 时,

$$E(\theta_{\nu-1}^{*2}|\Delta g_\nu|^2|\mathscr{F}_n)$$

$$=E(\theta_{\nu-1}^{*2}E(|\Delta g_\nu|^2|\mathscr{F}_{\nu-1})|\mathscr{F}_n)$$

$$=E(\theta_{\nu-1}^{*2}\{E(|g_\nu|^2|\mathscr{F}_{\nu-1})-|g_{\nu-1}|^2\}|\mathscr{F}_n)$$

$$=E(\theta_{\nu-1}^{*2}\{|g_\nu|^2-|g_{\nu-1}|^2\}|\mathscr{F}_n)$$

$$\leqslant E(\theta_\nu^{*2}|g_\nu|^2|\mathscr{F}_n)-E(\theta_{\nu-1}^{*2}|g_{\nu-1}|^2|\mathscr{F}_n).$$

这样我们有

$$\sum_{\nu=n}^{N}E(\theta_{\nu-1}^{*2}|\Delta g_\nu|^2|\mathscr{F}_n)$$

$$\leqslant 1+\sum_{\nu=n+1}^{N}\{E(\theta_\nu^{*2}|g_\nu|^2|\mathscr{F}_n)$$

$$-E(\theta_{\nu-1}^{*2}|g_{\nu-1}|^2|\mathscr{F}_n)\}$$

$$\leqslant 1+E(\theta_N^{*2}|g_N|^2|\mathscr{F}_n).$$

但

$$\theta_N^*g_N=E\left(\frac{\theta_N^*}{\theta^*+\varepsilon}\middle|\mathscr{F}_N\right)\leqslant 1,$$

于是证明了 $E(|\varphi_N-\varphi_{n-1}|^2|\mathscr{F}_n)\leqslant 2$, 从而说明 (φ_n) 是 L^2 中的鞅, 并且 $E(|\varphi-\varphi_{n-1}|^2|\mathscr{F}_n)\leqslant 2$, $\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}_2}\leqslant\sqrt{2}$. ∎

定理 8′ (Davis) 对一切鞅 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$, 都有

$$CE_0(f^*)\leqslant E_0(S(f))\leqslant CE_0(f^*). \tag{21$'$}$$

证明 只需对有限鞅证明式(21)′即可. 设 $f=(f_m)_{m\geqslant 0}$ 是一

个终止于 f_n 的鞅. 令

$$F_\nu=\{f^*_{\nu-1}<|f_\nu|=f^*_n\},$$

$$\theta_\nu=\operatorname{sgn} f_\nu=\bar{f}_\nu/|f_\nu|,$$

则我们有

$$\begin{aligned}
E_0(f^*_n)&=\sum_{\nu=0}^{n}E_0(|f_\nu|\,\mathrm{II}(F_\nu))\\
&=\sum_{\nu=0}^{n}E_0(f_\nu\theta_\nu\mathrm{II}(F_\nu))\\
&=\sum_{\nu=0}^{n}E_0(f_\nu\theta_\nu E(\mathrm{II}(F_\nu)\,|\,\mathscr{F}_\nu))\\
&=\sum_{\nu=0}^{n}E_0(f_n\theta_\nu E(\mathrm{II}(F_\nu)\,|\,\mathscr{F}_\nu))\\
&=E_0(f_n\varphi_n),
\end{aligned}$$

其中

$$\varphi_n=\sum_{\nu=0}^{n}\theta_\nu E(\mathrm{II}(F_\nu)\,|\,\mathscr{F}_\nu).$$

注意(φ_n)并不是一个鞅. 但对每个固定的 n, 用 φ_n 作终端函数(它是一个有界函数)却生成一个 BMO_2 中的鞅, 且由引理 6 可估计其范数为

$$\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}_2}\leqslant\sqrt{5}\left\|\sum_{\nu=0}^{n}\mathrm{II}(F_\nu)\right\|_\infty\leqslant\sqrt{5}.$$

由 Fefferman 不等式(定理 3′)知

$$|E_0(f_n\varphi_n)|\leqslant\sqrt{2}\,E_0(S(f_n))\sqrt{5}\leqslant\sqrt{10}E_0(S(f)).$$

这证明了式(21)′的左边不等式.

至于式(21)′的右边不等式, 由恒等式

$$S_n(f)^2=\sum_{0}^{n}(f_k-f_{k-1})(\bar{f}_k-\bar{f}_{k-1})$$

$$=|f_n|^2+\sum_0^n f_{k-1}(\bar{f}_{k-1}-\bar{f}_k)$$

$$+\sum_0^n \bar{f}_{k-1}(f_{k-1}-f_k),$$

得

$$E_0\left(\frac{S_n(f)^2}{f^*+\varepsilon}\right)\leqslant E_0\left(\frac{|f_n|^2}{f^*+\varepsilon}\right)$$

$$+2\left|E_0\left(\sum_0^n\frac{\bar{f}_{k-1}(f_{k-1}-f_k)}{f^*+\varepsilon}\right)\right|.$$

但我们有

$$\left|\sum_0^n E_0\left(\frac{\bar{f}_{k-1}\Delta f_k}{f^*+\varepsilon}\right)\right|$$

$$=\left|\sum_0^n E_0\left(\Delta f_k\cdot\bar{f}_{k-1}E\left(\frac{1}{f^*+\varepsilon}\middle|\mathscr{F}_k\right)\right)\right|$$

$$=\left|\sum_0^n E_0\left(\Delta f_k\cdot\bar{f}_{k-1}\left\{E\left(\frac{1}{f^*+\varepsilon}\middle|\mathscr{F}_k\right)\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-E\left(\frac{1}{f^*+\varepsilon}\middle|\mathscr{F}_{k-1}\right)\right\}\right)\right|.$$

既然根据引理 7, $\varphi=(\varphi_n)$,

$$\varphi=\sum_0^\infty\bar{f}_{k-1}\left\{E\left(\frac{1}{f^*+\varepsilon}\middle|\mathscr{F}_k\right)-E\left(\frac{1}{f^*+\varepsilon}\middle|\mathscr{F}_{k-1}\right)\right\},$$

正是 BMO_2 中的鞅, 且其范数 $\|\varphi\|_{BMO_2}\leqslant\sqrt{2}$, 故由 Fefferman不等式得

$$E_0\left(\frac{S_n(f)^2}{f^*+\varepsilon}\right)\leqslant E_0(f^*)+4E_0(S_n(f)).$$

于是,

$$E_0(S_n(f))\leqslant E_0(f^*+\varepsilon)^{1/2}E_0\left(\frac{S_n(f)^2}{f^*+\varepsilon}\right)^{1/2},$$

$$E_0(S_n(f)) \leqslant E_0(f^*)^{1/2}[E_0(f^*)+4E_0(S_n(f))]^{1/2},$$
$$E_0(S(f)) \leqslant (2+\sqrt{5})E_0(f^*).$$

这就证明了式(21)′的右边不等式. ∎

2.6 H_p 的 Davis 分解，空间 $\mathscr{D}_p(1\leqslant p\leqslant\infty)$ 与 $\mathscr{A}_p(1\leqslant p<\infty)$

定义 2 适应过程$(\lambda_n)_{n\geqslant0}$称为 L^p 可预报的，若存在非负增加适应过程$(r_n)_{n\geqslant0}$，使得

$$|\lambda_n| \leqslant r_{n-1}①, \qquad E(r_\infty^p)<\infty.$$

定义

$$\mathscr{D}_p=\{\text{鞅 } f=(f_n)_{n\geqslant0}:\ f \text{ 是 } L^p \text{ 可预报的}\}, \tag{24}$$
$$\|f\|_{\mathscr{D}_p}=\inf_r\{\|r_\infty\|_p\}, \qquad 1\leqslant p\leqslant\infty.$$

注 $\|\cdot\|_{\mathscr{D}_p}$ 定义中的“inf”是可以达到的. 事实上，若设$\{(r_n^{(k)})\}$是(f_n)的一族控制，使$\|r_\infty^{(k)}\|_p\to\|f\|_{\mathscr{D}_p}$，则$(r_n^{(f)})=(\inf\limits_k r_n^{(k)})$便是使得$\|\cdot\|_{\mathscr{D}_p}$达到的控制，称为 f 的最优控制. 此外，$\mathscr{D}_p$是一个 Banach 空间是容易证明的. 其完备性是因 $\mathscr{D}_p$ 中的 Cauchy序列$\{f^{(k)}\}$也是 H_p 中的 Cauchy 序列，故在 H_p 中有极限 f. 现证这个 f 也是 L^p 可预报的，并且就是$\{f^{(k)}\}$在 $\mathscr{D}_p$ 中的极限. 这只需找子序列$\{k_j\}$，以及非负增加适应过程的序列$(r_n^{(j)})$，使得

$$|f_n^{(k_{j+1})}-f_n^{(k_j)}| \leqslant r_{n-1}^{(j)}, \quad \forall n,$$
$$\|r_\infty^{(j)}\|_p \leqslant 2^{-j}.$$

则因为$\sum\limits_j(f^{(k_{j+1})}-f^{(k_j)})$在 L^p 中收敛于 f，所以

---

① L^p 可预报性的定义蕴含 $\lambda_0=0$. 但对在1.3 节中定义的(狭义)可预报性(即λ_n关于 $\mathscr{F}_{(n-1)\vee0}$可测)，则不一定有 $\lambda_0=0$.

$$|f_n-f_n^{(k_l)}|\leqslant\sum_{j\geqslant l}r_{n-1}^{(j)}.$$

而$\left(\sum\limits_{j\geqslant l}r_n^{(j)}\right)$是一个非负增加适应过程，满足

$$\left\|\sum_{j\geqslant l}r_\infty^{(j)}\right\|_p\leqslant\sum_{j\geqslant l}\|r_\infty^{(j)}\|_p\leqslant 2^{-l+1}.$$

由此证明了$\|f-f^{(k_l)}\|_{\mathscr{G}_p}\leqslant 2^{-l+1}\to 0$. 再由 Cauchy 性，$\|f-f^{(k)}\|_{\mathscr{G}_p}\to 0$.

定义 3 过程(λ_n)称为 L^p 变差可积的，如果$\|\Sigma|\Delta\lambda_n|\|_p<\infty$. 定义

$$\mathscr{A}_p=\{\text{鞅 } f=(f_n):\|f\|_{\mathscr{A}_p}=\|\Sigma|\Delta f_n|\|_p<\infty\}.$$

类似于 H_1 鞅的 Davis 分解我们有 H_p 的下述分解.

定理 9 设 $1\leqslant p<\infty$，则每个 $f\in H_p$ 均可分解为 $f=g+h$，其中 $g\in\mathscr{D}_p$，$h\in\mathscr{A}_p$，且有如下不等式

$$\begin{aligned}&\|g\|_{\mathscr{G}_p}\leqslant(13+4p)\|f\|_{H_p},\\&\|h\|_{\mathscr{A}_p}\leqslant(4+4p)\|f\|_{H_p}.\end{aligned}\tag{25}$$

证明 类似于 H_1 的 Davis 分解的证明. 设(λ_n)是控制过程 $f=(f_n)$（即$|f_n|\leqslant\lambda_n$）的任一非负增加适应过程. 分别定义 Δh_ν 与 Δg_ν 如下：

$$\begin{aligned}\Delta h_\nu=&\Delta f_\nu \mathrm{II}(\{\lambda_\nu>2\lambda_{\nu-1}\})\\&-E(\Delta f_\nu\mathrm{II}(\{\lambda_\nu>2\lambda_{\nu-1}\})|\mathscr{F}_{\nu-1}),\\\Delta g_\nu=&\Delta f_\nu\mathrm{II}(\{\lambda_\nu\leqslant 2\lambda_{\nu-1}\})\\&-E(\Delta f_\nu\mathrm{II}(\{\lambda_\nu\leqslant 2\lambda_{\nu-1}\})|\mathscr{F}_{\nu-1}).\end{aligned}$$

则鞅 $h=\left(\sum\limits_{\nu=1}^n\Delta h_\nu\right)$ 与 $g=\left(\sum\limits_{\nu=1}^n\Delta g_\nu\right)$ 便为所求. 事实上，既然当 $\lambda_\nu>2\lambda_{\nu-1}$ 时，有

$$\lambda_\nu=2\lambda_\nu-\lambda_\nu\leqslant 2\lambda_\nu-2\lambda_{\nu-1},$$

因而

$$|\Delta h_\nu|\leqslant 2\lambda_\nu \mathrm{II}(\{\lambda_\nu>2\lambda_{\nu-1}\})$$
$$+2E(\lambda_\nu \mathrm{II}(\{\lambda_\nu>2\lambda_{\nu-1}\})|\mathscr{F}_{\nu-1})$$
$$\leqslant 4(\lambda_\nu-\lambda_{\nu-1})+4E(\lambda_\nu-\lambda_{\nu-1}|\mathscr{F}_{\nu-1}); \qquad (26)$$

此外，有

$$|\Delta g_\nu|\leqslant 8\lambda_{\nu-1},$$
$$|g_\nu|\leqslant|f_{\nu-1}|+|h_{\nu-1}|+|\Delta g_\nu|$$
$$\leqslant 9\lambda_{\nu-1}+4\lambda_{\nu-1}+4\sum_{\mu=1}^{\nu-1}E(\lambda_\mu-\lambda_{\mu-1}|\mathscr{F}_{\mu-1})$$
$$\leqslant 13\lambda_{\nu-1}+4\sum_{\mu=1}^{\nu-1}E(\lambda_\mu-\lambda_{\mu-1}|\mathscr{F}_{\mu-1}). \qquad (26)'$$

记

$$r_n=\sum_{\nu=1}^{n}E(\lambda_\nu-\lambda_{\nu-1}|\mathscr{F}_{\nu-1}).$$

为说明 $g=(g_n)$ 是 L^p 可预报的，以及 $h=(h_n)\in\mathscr{A}_p$，都需要估计 $\|r_n\|_p$. 对这样形式的 r_n，更一般的 L^Φ 范数都是可以估计的，但 L^p 范数更简单一些. 设 (ε_ν) 是一个非负过程，但不一定是适应的，则

$$\left\|\sum_\nu E(\varepsilon_\nu|\mathscr{F}_\nu)\right\|_p\leqslant p\left\|\sum_\nu \varepsilon_\nu\right\|_p, \qquad 1\leqslant p<\infty. \qquad (27)$$

事实上，因 $\forall\gamma\in L^{p'}$，有

$$\left\|\sum_\nu E(\varepsilon_\nu|\mathscr{F}_\nu)\right\|_p=\sup_{\gamma:\|\gamma\|_{p'}\leqslant 1}\left|E\left(\sum_\nu E(\varepsilon_\nu|\mathscr{F}_\nu)\gamma\right)\right|$$
$$=\sup_\gamma\left|\sum_\nu E(\varepsilon_\nu E(\gamma|\mathscr{F}_\nu))\right|\leqslant\sup_\gamma E\left(\sum_\nu\varepsilon_\nu\gamma^*\right)$$
$$\leqslant\sup_\gamma\|\gamma^*\|_{p'}\left\|\sum_\nu\varepsilon_\nu\right\|_p\leqslant p\left\|\sum_\nu\varepsilon_\nu\right\|_p.$$

现在回到定理的证明. 应用式(27)于

$$r_\infty=\sum_{\nu=1}^{\infty}E(\lambda_\nu-\lambda_{\nu-1}|\mathscr{F}_{\nu-1}),$$

我们得

$$\|r_\infty\|_p\leqslant p\left\|\sum_\nu(\lambda_\nu-\lambda_{\nu-1})\right\|_p=p\|\lambda_\infty\|_p.$$

最后，利用式(26)′与(26)我们得到

$$\|g\|_{\mathscr{G}_p}\leqslant 13\|\lambda_\infty\|_p+4p\|\lambda_\infty\|_p=(13+4p)\|\lambda_\infty\|_p,$$

$$\|h\|_{\mathscr{A}_p}\leqslant 4\|\lambda_\infty\|_p+4p\|\lambda_\infty\|_p=(4+4p)\|\lambda_\infty\|_p.$$

特别因 $f\in H_p$，我们可以取 $(\lambda_n)=(f_n^*)$，即得式(25)．▮

2.7 Fefferman 定理的另一个证明 (利用 Davis 分解与原子分解)

定义 4 鞅 $\varphi=(\varphi_n)_{n\geqslant0}$ 称为跳跃有界的，如 $\sup\limits_n\|\Delta\varphi_n\|_\infty<\infty$.

定义

$$\mathrm{BD}=\{鞅\ \varphi=(\varphi_n):\|\varphi\|_{\mathrm{BD}}=\sup\|\Delta\varphi_n\|_\infty<\infty\}.$$

定理 10 $\mathscr{A}_1$ 的对偶是 BD，意即每个 $\varphi\in\mathrm{BD}$ 都在 $\mathscr{A}_1$ 上产生一个有界线性泛函 l_φ，且满足 $\|l_\varphi\|\leqslant\|\varphi\|_{\mathrm{BD}}$；反之，每个 $\mathscr{A}_1$ 上的有界线性泛函 l，均由某个 $\varphi\in\mathrm{BD}$ 产生，且 $\|\varphi\|_{\mathrm{BD}}\leqslant2\|l\|$．产生方式为

$$l_\varphi(f)=E\Big(\sum_n\Delta f_n\Delta\varphi_n\Big).$$

证明 设 $\varphi\in\mathrm{BD}$, $f\in\mathscr{A}_1$．则因为

$$E\Big(\sum_n|\Delta f_n\,\Delta\varphi_n|\Big)<\infty,$$

故，此 $\varphi\in\mathrm{BD}$在 $\mathscr{A}_1$ 上产生了一个有界线性泛函 l_φ，它可按上述方

式定义，且

$$|l_\varphi(f)|\leqslant\|\varphi\|_{\mathrm{BD}}\|f\|_{\mathscr{A}_1}.$$

定理的前一结论获证.

现在证明定理的后一结论. 首先考虑一个更大的空间上的有界线性泛函. 记

$$A_1=\{\text{过程 }\xi=(\xi_n):\ \|\xi\|_{A_1}=E(\Sigma|\xi_n|)<\infty\}.$$

它显然是一个 Banach 空间，且它的对偶空间是

$$A_\infty=\{\text{过程 }\eta=(\eta_n):\ \|\eta\|_{A_\infty}=\sup_n\|\eta_n\|_\infty<\infty\}.$$

这可如下论证. 设 $l\in A_1'$, $\forall f\in L^1$, 若定义

$$l_n(f)=l(\xi),\quad \text{其中 }\xi=(0,\cdots,f,0,\cdots)\in A_1,$$

则我们有

$$|l_n(f)|=|l(\xi)|\leqslant\|l\|\|\xi\|_{A_1}=\|l\|\|f\|_1.$$

故存在 $\eta_n\in L^\infty$, 使

$$l_n(f)=E(f\eta_n),\quad \|\eta_n\|_\infty\leqslant\|l\|.$$

那末对 $\xi^{(n)}=(\xi_1,\cdots,\xi_n,0,\cdots)\in A_1$, 我们有

$$l(\xi^{(n)})=\sum_{k=1}^n E(\xi_k\eta_k).$$

既然 $\forall\xi=(\xi_k)\in A_1$, $\|\xi-\xi^{(n)}\|_{A_1}\to0$, 于是有

$$l(\xi)=\lim_n\sum_1^n E(\xi_k\eta_k)=\sum_1^\infty E(\xi_k\eta_k).$$

从而关于 A_1 的对偶的断言获证.

现在回到定理的后一结论的证明.

$\mathscr{A}_1$ 显然与 A_1 的子集

$$\{\text{过程 }\xi=(\xi_n)\in A_1:\ \xi_n=\Delta f_n,\text{ 对某鞅 }f\in\mathscr{A}_1\}$$

恒同. 那末，若设 l 是 $\mathscr{A}_1$ 上的任一有界线性泛函，则由 Hahn-Banach 定理知，l 可扩充为 A_1 上的一个有相同界的有界线性泛

函，仍记为 l. 由上面证明的事实知，存在 $\eta=(\eta_n)\in A_\infty$, 使 $\forall f\in\mathscr{A}_1$ 有

$$
\begin{aligned}
l(f) &= \Sigma E(\Delta f_n\eta_n)=\Sigma E(\Delta f_n E(\eta_n|\mathscr{F}_n)) \\
&= \Sigma E(\Delta f_n\{E(\eta_n|\mathscr{F}_n)-E(\eta_n|\mathscr{F}_{n-1})\}) \\
&= \Sigma E(\Delta f_n\Delta g_n),
\end{aligned}
$$

其中

$$\Delta g_n=E(\eta_n|\mathscr{F}_n)-E(\eta_n|\mathscr{F}_{n-1})$$

是鞅 $g=(g_n)\in\mathrm{BD}$ 的差序列，$\|g\|_{\mathrm{BD}}\leqslant 2\|l\|$. ▌

现在用原子分解理论来讨论 $\mathscr{D}_1$ 的对偶空间. 关于原子这个概念，我们还将在 7.2 节中更多地讨论，此处只是初步涉及.

定义 5 一个有界可测函数 a 称为一个 p-原子，$0<p\leqslant 1$, 如果存在一个停止时间 T(称为与 a 联系的停止时间)，使①

$$a_n\mathrm{II}(\{n\leqslant T\})=0, \tag{28}$$

$$\|a\|_\infty\leqslant|\{T<\infty\}|^{-1/p}. \tag{28$'$}$$

引理 8 所有 1-原子都在 $\mathscr{D}_1$ 的单位球内.

证明 设 a 是一个 1-原子，T 是与之相联系的停止时间. 考虑过程 (r_n), 其中

$$r_{n-1}=\|a\|_\infty\mathrm{II}(\{T<n\}).$$

则它是一个非负增加适应过程，且满足

$$E(r_\infty)=E(\|a\|_\infty\mathrm{II}(\{T<\infty\}))\leqslant 1.$$

而因

$$
\begin{aligned}
|a_n| &= |a_n|\{\mathrm{II}(\{n\leqslant T\})+\mathrm{II}(\{n>T\})\} \\
&\leqslant \|a\|_\infty\mathrm{II}(\{n>T\})=r_{n-1},
\end{aligned}
$$

这说明 $a\in\mathscr{D}_1$, 且 $\|a\|_{\mathscr{D}_1}\leqslant 1$. ▌

定义 6 记

---

① 按照这样的定义，所有原子 $a=(a_n)$ 均满足 $a_0=E(a)=0$.

$$\mathrm{JN}_1=\{\text{鞅 } f=(f_n)\in L^1:\ \|f\|_{\mathrm{JN}_1}$$
$$=\sup_n\|E(|f-f_n|\,|\mathscr{F}_n)\|_\infty<\infty\}.$$

我们将在 3.5 节中更详细地讨论空间 BMO 的这样的类似. 这里只给出它的如下等价刻划.

命题 1 我们有

$$\|f\|_{\mathrm{JN}_1}=\sup_T\|f-f_T\|_1|\{T<\infty\}|^{-1}, \tag{29}$$

T 遍历所有停止时间.

证明 假设 $f\in\mathrm{JN}_1$, 则 $\forall$ 停止时间 T, 有

$$\|E(|f-f_T|\,|\mathscr{F}_T)\|_\infty\leqslant\|f\|_{\mathrm{JN}_1}.$$

此外我们有

$$\|f-f_T\|_1=\int_{\{T<\infty\}}|f-f_T|\,d\mu$$
$$=\int_{\{T<\infty\}}E(|f-f_T|\,|\mathscr{F}_T)\,d\mu$$
$$\leqslant\|f\|_{\mathrm{JN}_1}|\{T<\infty\}|.$$

因此证明了

$$\sup_T\|f-f_T\|_1|\{T<\infty\}|^{-1}\leqslant\|f\|_{\mathrm{JN}_1}.$$

反之, 设 $\beta=\sup\limits_T\|f-f_T\|_1|\{T<\infty\}|^{-1}<\infty$. 对任意的停止时间 T, 以及 $F\in\mathscr{F}_T$, 定义停止时间

$$T_F=\begin{cases}T, & \omega\in F,\\ \infty, & \omega\overline{\in}F.\end{cases}$$

我们有

$$\frac{1}{|F|}\int_F|f-f_T|\,d\mu\leqslant\|f-f_{T_F}\|_1|\{T_F<\infty\}|^{-1}\leqslant\beta.$$

于是

$$\|E(|f-f_T|\,|\mathscr{F}_T)\|_\infty\leqslant\beta,$$
$$\|f\|_{\mathrm{JN}_1}=\sup_n\|E(|f-f_n|\,|\mathscr{F}_n)\|_\infty\leqslant\beta. \quad\blacksquare$$

命题 2 $\forall$ 鞅 $\varphi=(\varphi_n)\in L^1$, 我们有

$$\frac{1}{2}\|\varphi\|_{JN_1}\leqslant\sup_{1-\text{原子 }a}|E(a\varphi)|\leqslant\|\varphi\|_{JN_1}. \tag{30}$$

证明 设 a 是一个 1-原子, T 为与其相联系的停止时间. 我们有

$$\begin{aligned}|E(a\varphi)|&=|E((a-a_T)\varphi)|\\&=|E(a\varphi)-E(a_T\varphi_T)|=|E(a(\varphi-\varphi_T))|\\&\leqslant\|\varphi-\varphi_T\|_1|\{T<\infty\}|^{-1}\leqslant\|\varphi\|_{JN_1}.\end{aligned}$$

反之, 设 T 是任一停止时间, $\varphi\in L^1$. 令 $f=\operatorname{sgn}(\varphi-\varphi_T)$,

$$a=\frac{1}{2|\{T<\infty\}|}(f-f_T),$$

则 a 是一个 1-原子. 并且,

$$\begin{aligned}E(|\varphi-\varphi_T|)&=E(f(\varphi-\varphi_T))=E((f-f_T)\varphi)\\&=2|\{T<\infty\}|E(a\varphi),\end{aligned}$$

这说明

$$\|\varphi\|_{JN_1}=\sup_T\|\varphi-\varphi_T\|_1|\{T<\infty\}|^{-1}\leqslant2\sup_a|E(a\varphi)|. \blacksquare$$

现在我们给出 $\mathscr{D}_1$ 的原子分解. 我们有

定理 11 记

$$H_1^{(a)}=\Big\{f=\sum_1^\infty\lambda_ja_j:\{a_j\}\text{是 1-原子序列,}$$

$$\{\lambda_j\}\text{是正数序列, 满足}\sum_1^\infty\lambda_j<\infty\Big\},$$

则 $\mathscr{D}_1=H_1^{(a)}$, 并且对 $f\in\mathscr{D}_1$ 存在分解, 使

$$\frac{1}{4}\Sigma\lambda_j\leqslant\|f\|_{\mathscr{D}_1}\leqslant\Sigma\lambda_j. \tag{31}$$

证明 由引理 8 知, 每个如定理所述的 $\Sigma\lambda_ja_j$ 在 $\mathscr{D}_1$ 中收敛于某个元素 f, 且 $\|f\|_{\mathscr{D}_1}\leqslant\Sigma\lambda_j$. 这说明式(31) 之右边不等式对一切分解成立.

反之，设 $f\in\mathscr{D}_1$ 为任意的，(r_n)是任一非负增加适应过程，使得$|f_n|\leqslant r_{n-1}$，以及$\|r_\infty\|_1<\infty$. $\forall i\in\mathbf{Z}$，定义停止时间

$$T_i=\inf\{n: r_n>2^i\}.$$

则$\{T_i\}$是停止时间的增加序列，并且 $T_i\to\infty$, a. e.，从而

$$\lim_{i\to\infty}f_{T_i}=f,$$

此外

$$\lim_{i\to-\infty}|f_{T_i}|\leqslant\lim_{i\to-\infty}r_{T_{i-1}}\leqslant\lim_{i\to-\infty}2^i=0.$$

于是我们得到分解

$$\begin{aligned}f&=\sum_{i=-\infty}^{\infty}(f_{T_i}-f_{T_{i-1}})\mathrm{II}(\{T_{i-1}<\infty\})\\&=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\lambda_i a_i=\sum_{j=1}^{\infty}\mu_j b_j,\end{aligned}$$

其中

$$\lambda_i=2^{i+1}|\{T_{i-1}<\infty\}|,$$

$$a_i=2^{-i-1}|\{T_{i-1}<\infty\}|^{-1}(f_{T_i}-f_{T_{i-1}}).$$

每个 a_i 都是与 T_{i-1} 联系的 1-原子，而且(记 $\sigma(\lambda)=|\{r_\infty>\lambda\}|$)

$$\begin{aligned}\sum_{-\infty}^{\infty}\lambda_i&=\sum_{-\infty}^{\infty}2^{i+1}|\{T_{i-1}<\infty\}|=\sum_{-\infty}^{\infty}2^{i+1}\sigma(2^{i-1})\\&\leqslant4\sum_{-\infty}^{\infty}\int_{2^{i-1}}^{2^i}\sigma(\lambda)d\lambda=4E(r_\infty).\end{aligned}$$

特别取(r_n)为 f 的最优控制，则得式(31)之左边不等式. 定理因而获证. ▌

推论 1 记$(L^\infty)_0$为满足 $E(f)=0$ 的 L^∞ 的子集，则$(L^\infty)_0$连续地嵌入$\mathscr{D}_1$，且稠密①.

---

① 一般地，为方便起见，常常只考虑 $f_0=0$ 的鞅. 而当出现$(L^p)_0$等类似的记号时，是为了强调空间$(L^p)_0$中不包含 $f_0\neq0$ 的鞅.

证明 设 $f=(f_n)_{n\geq 0}\in(L^\infty)_0$. 令 $r_n=\|f\|_\infty$, $\forall n$, 则 $(r_n)_{n\geq 0}$ 使得 $|f_n|\leqslant r_{n-1}$. 这说明 f 是 L^∞ 可预报的. 且因 $f/\|f\|_\infty$ 是一个与停止时间 $T=0$ 联系的原子, 故 $\|f\|_{\mathscr{P}_1}\leqslant\|f\|_\infty$. 这证明了 $(L^\infty)_0$ 连续地嵌入 $\mathscr{D}_1$. 现设 $f(\in\mathscr{D}_1)$ 为任意的. 对其任意的原子分解:

$f=\sum\lambda_j a_j$, 若记 $f^{(N)}=\sum\limits_1^N\lambda_j a_j$, 则 $f^{(N)}\in(L^\infty)_0$, 且

$$\|f-f^{(N)}\|_{\mathscr{P}_1}\leqslant\sum_{N+1}^{\infty}\lambda_j\to 0.$$

这证明了 $(L^\infty)_0$ 在 $\mathscr{D}_1$ 中稠密. ▌

命题 3 $\forall f\in(L^\infty)_0\subset\mathscr{D}_1$, $\forall\varphi\in\mathrm{JN}_1$, 有

$$|E(f\varphi)|\leqslant 4\|f\|_{\mathscr{P}_1}\|\varphi\|_{\mathrm{JN}_1}. \tag{32}$$

证明 设 $f\in(L^\infty)_0$. 对 f 作如定理 11 的分解 $f=\sum\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda_i a_i$, 使

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\lambda_i\leqslant 4\|f\|_{\mathscr{P}_1},$$

并将 $\sum\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda_i a_i$ 经适当地改排为 $\sum\limits_1^{\infty}\lambda_j a_j$ (如正负 i 相间), 使其为有界地 a.e. 收敛于 f. 则因 $\varphi\in L^1$, 有

$$E(f\varphi)=\lim_n\sum_1^n\lambda_j E(a_j\varphi)=\sum_1^{\infty}\lambda_j E(a_j\varphi).$$

这样由命题 2 得

$$|E(f\varphi)|\leqslant\sum_1^{\infty}\lambda_j|E(a_j\varphi)|\leqslant\sum_1^{\infty}\lambda_j\|\varphi\|_{\mathrm{JN}_1}$$
$$\leqslant 4\|f\|_{\mathscr{P}_1}\|\varphi\|_{\mathrm{JN}_1}. \text{ ▌}$$

注 本命题说明每个 $\varphi\in\mathrm{JN}_1$ 均可在 $\mathscr{D}_1$ 上产生一个有界线性泛函 l_φ, 且 $\|l_\varphi\|\leqslant 4\|\varphi\|_{\mathrm{JN}_1}$.

定理 12 (Fefferman)　$H_1' = \mathrm{BMO}_1$. 此即: 第一, 如下面 Fefferman 不等式成立

$$|E(f\varphi)| \leqslant C\|f\|_{H_1}\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}_1}, \quad \forall f \in L^p, p>1, \tag{33}$$

从而每个 $\varphi \in \mathrm{BMO}_1$ 可以产生 H_1 上的一个有界线性泛函 l_φ, 满足

$$\|l_\varphi\| \leqslant C\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}_1};$$

第二, H_1 上的每个有界线性泛函 l 均由某个 $\varphi \in \mathrm{BMO}_1$ 如上产生, 且

$$\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}_1} \leqslant 4\|l\|.$$

证明　注意 $\varphi \in \mathrm{BMO}_1$ 当且仅当 $\varphi \in \mathrm{JN}_1 \cap \mathrm{BD}$, 且

$$\max(\|\varphi\|_{\mathrm{BD}}, \|\varphi\|_{\mathrm{JN}_1}) \leqslant \|\varphi\|_{\mathrm{BMO}_1} \leqslant \|\varphi\|_{\mathrm{BD}} + \|\varphi\|_{\mathrm{JN}_1}.$$

现设 $\varphi \in \mathrm{BMO}_1$, 任取 $f \in L^p \subset H_1$. 如定理 9 中那样作 f 的 Davis 分解: $f = g + h$, 满足 $g, h \in L^p$, 并且

$$\|g\|_{\mathscr{P}_1} \leqslant 17\|f\|_{H_1}, \quad \|h\|_{\mathscr{A}_1} \leqslant 8\|f\|_{H_1}.$$

既然 $\varphi \in \mathrm{BMO}_1 \subset L^{p'}$ (见 5.1 节), 并利用定理 10 与命题 3, 有

$$E(f\varphi) = E(g\varphi) + E(h\varphi),$$

$$\begin{aligned}|E(f\varphi)| &\leqslant |E(g\varphi)| + |E(h\varphi)| \\ &\leqslant 4\|g\|_{\mathscr{P}_1}\|\varphi\|_{\mathrm{JN}_1} + \|h\|_{\mathscr{A}_1}\|\varphi\|_{\mathrm{BD}} \\ &\leqslant C\|f\|_{H_1}\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}_1}.\end{aligned}$$

这说明 φ 可在 H_1 上产生一个有界线性泛函 l_φ, 满足

$$\|l_\varphi\| \leqslant C\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}_1}.$$

反之, 设 l 是 H_1 上的任何一个有界线性泛函. 则因 $H_2 \subset H_1$, 故存在 $\varphi \in L^2$, 使

$$l(f) = E(f\varphi) = \sum E(\Delta f_n \Delta\varphi_n), \quad \forall f \in H_2 \subset H_1.$$

特别, $\forall$1-原子 a, 有

$$|E(\varphi a)| = |l(a)| \leqslant \|l\|\|a\|_{H_1} \leqslant \|l\|,$$

故由式(30)的左边不等式知, $\|\varphi\|_{\mathrm{JN}_1} \leqslant 2\|l\|$.

同时, $\forall f \in H_2 \cap \mathscr{A}_1$, 也有

$$|\Sigma E(\Delta f_n \Delta\varphi_n)| \leqslant \|l\| \|f\|_{H_1} \leqslant \|l\| \|f\|_{\mathscr{A}_1}.$$

但因 $H_2 \cap \mathscr{A}_1$ 在 $\mathscr{A}_1$ 内稠密（见下注），那末 l 可连续延拓为 $\mathscr{A}_1$ 上的一个有相同界的线性泛函，故由定理 10 知，

$$\|\varphi\|_{\mathrm{BD}} \leqslant 2\|l\|.$$

综合两方面情况，得

$$\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}_1} \leqslant \|\varphi\|_{\mathrm{JN}_1} + \|\varphi\|_{\mathrm{BD}} \leqslant 4\|l\|. \ ∎$$

注 我们列举两个有关稠密子空间的事实.

1）有限鞅显然在 H_1 或 $\mathscr{A}_1$ 内稠密；

2）L^∞ 有限鞅在 $\mathscr{A}_1$ 或 H_1 中稠密.

我们来看 2）中第一个断言．设 f 是 $\mathscr{A}_1$ 中止于 n 的有限鞅，用 $L^\infty(\mathscr{F}_n)$ 中函数 g 在 L^1 中逼近 $f=f_n$，使 $\|f_n-g\|_1 \leqslant \varepsilon/2n$，则

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{k=1}^{n} |\Delta(f_n-g)_k|\right) &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \{E(|(f_n-g)_k|) \\ &\quad + E(|(f_n-g)_{k-1}|)\} \\ &\leqslant 2n\|f_n-g\|_1 \leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

现设 $f \in \mathscr{A}_1$ 为任意的．设 n 使得有限鞅 $f^{(n)}$ 满足

$$\sum_{n+1}^{\infty} E(|\Delta f_k|) \leqslant \varepsilon.$$

则上述 $g \in L^\infty$ 生成的鞅（它是一个止于 n 的鞅）便满足

$$E\left(\sum_{1}^{\infty} |\Delta(f-g)_k|\right) \leqslant \sum_{1}^{n} E(|\Delta(f-g)_k|)$$

$$+ \sum_{n+1}^{\infty} E(|\Delta f_k|) \leqslant 2\varepsilon.$$

同样地，可证明 2）中的第二个结论．因

$$\|f^{(n)}-g\|_{H_1} \leqslant \sum_{1}^{n} E(|\Delta(f^{(n)}-g)_k|) \leqslant \varepsilon.$$

2.8 鞅变换

本节仍如前设 $\mathscr{F}_0$ 为平凡的，并一般只考虑 $f_0=0$ 的鞅 $f=(f_n)_{n\geq 0}$.

定义 7 设 $f=(f_n)_{n\geq 0}$ 是一鞅. $g=(g_n)_{n\geq 0}$ 称为 f 的鞅变换，如果

$$g_n=\sum_{k=1}^{n} v_k d_k, \quad g_0=0,$$

这里 $d_k=f_k-f_{k-1}$ 是 $f=(f_n)_{n\geq 0}$ 的鞅差，并且 v_k 关于 $\mathscr{F}_{k-1}$ 可测.

注 既然当所有的 $g_n\in L^1$ 时，有

$$E(g_n|\mathscr{F}_{n-1})=\sum_{k=1}^{n-1} v_k d_k+E(d_n|\mathscr{F}_{n-1})v_n=g_{n-1}.$$

因此当所有的 $g_n\in L^1$ 时，$g=(g_n)_{n\geq 0}$ 也是一个鞅. 当每个 $v_k\in L^\infty$ 时就是这种情况.

我们先叙述一个有关鞅变换收敛的结果，其证明可以参见 Burkholder[1]，此处从略.

命题 4 设 $g=(g_n)_{n\geq 0}$ 是一个 L^1 有界鞅 $f=(f_n)_{n\geq 0}$ 的鞅变换，则 $g=(g_n)$ 在集合 $\{v^*<\infty\}$ 上 a. e. 收敛.

鞅变换技巧对处理一些涉及到可预报过程的问题是有效的. 如利用它可方便地处理一些涉及到 $\mathscr{D}_p$，以及下章中引进的空间 Σ_p 的一些问题. 关于 $\mathscr{D}_{p_1}$ 中的每个鞅都是 $\mathscr{D}_{p_2}$ 中鞅的鞅变换的各种结果可参见 Garsia[1]. 下面我们给出关于鞅变换的一些简单而有用的结果.

定义 8 对每个鞅 $f=(f_n)_{n\geq 0}(f_0=0)$，定义

$$\sigma_n(f)=\left[\sum_1^n E(|\Delta f_k|^2|\mathscr{F}_{k-1})\right]^{1/2},\quad \sigma(f)=\sigma_\infty(f).$$

$\sigma(f)$称为f的条件均方根函数．定义

$$\Sigma_p=\{\text{鞅 } f=(f_n)_{n\geqslant 0}:\ \|f\|_{\Sigma_p}=\|\sigma(f)\|_p<\infty\},\quad 0<p<\infty.$$

引理 9 设鞅 $f=(f_n)\in\Sigma_p$, $0<p<\infty$, 则f是一个 L^2 中鞅 $g=(g_n)$的鞅变换.

证明 我们有如下初等不等式: 对 $\rho\geqslant 1$,

$$(\rho-1)\rho^{\alpha-1}\geqslant\rho^\alpha-1\geqslant\alpha(\rho-1)\rho^{\alpha-1},\quad 0<\alpha\leqslant 1,\tag{34}$$

$$(\rho-1)\rho^{\alpha-1}\leqslant\rho^\alpha-1\leqslant\alpha(\rho-1)\rho^{\alpha-1},\quad \alpha\geqslant 1.\tag{35}$$

事实上，式(34)和(35)的左边不等式是显然的，右边不等式只需比较两边关于ρ的导数在$\rho=1$处的值即可得．在上式中令$\rho=(B/A)^2$, $B^2\geqslant A^2$, 以及$\alpha=p/2$, $0<p<\infty$．则得

$$\begin{aligned}(B^2-A^2)B^{p-2}&\geqslant B^p-A^p\\&\geqslant\frac{p}{2}(B^2-A^2)B^{p-2},\quad 0<p\leqslant 2,\end{aligned}\tag{34$'$}$$

$$\begin{aligned}(B^2-A^2)B^{p-2}&\leqslant B^p-A^p\\&\leqslant\frac{p}{2}(B^2-A^2)B^{p-2},\quad p\geqslant 2.\end{aligned}\tag{35$'$}$$

现对鞅$f=(f_n)$定义

$$g_n=\sum_{\nu=1}^n\sigma_\nu(f)^{\frac{p-2}{2}}\Delta f_\nu,\quad g_0=0.$$

注意因$\sigma_\nu(f)$关于$\mathscr{F}_{\nu-1}$可测，则$g=(g_n)$是一个鞅变换，且

$$\begin{aligned}\sigma_n(g_n)^2&=\sum_{\nu=1}^n\sigma_\nu(f)^{p-2}E(|\Delta f_\nu|^2|\mathscr{F}_{\nu-1})\\&=\sum_{\nu=1}^n(\sigma_\nu(f)^2-\sigma_{\nu-1}(f)^2)\sigma_\nu(f)^{p-2}.\end{aligned}$$

利用式(34)$'$与(35)$'$，即得

$$\frac{p}{2}\sigma(g_n)^2 \leqslant \sigma_n(f)^p \leqslant \sigma(g_n)^2, \quad 0<p\leqslant 2,$$

$$\sigma(g_n)^2 \leqslant \sigma_n(f)^p \leqslant \frac{p}{2}\sigma(g_n)^2, \quad p\geqslant 2.$$

这说明当 $\sigma(f)\in L^p$, $0<p<\infty$,

$$E(|g_n|^2)=E(\sigma(g_n)^2)\leqslant CE(\sigma(f)^p),$$

此即 $g=(g_n)$ 是一个 L^2 中的鞅. 既然由

$$\Delta g_n = \Delta f_n \sigma_n(f)^{\frac{p-2}{2}}$$

可得

$$\Delta f_n = \Delta g_n \sigma_n(f)^{1-\frac{p}{2}},$$

故

$$f_n = \sum_{\nu=1}^{n} \sigma_\nu(f)^{1-\frac{p}{2}}\Delta g_\nu,$$

此即 f 是 L^2 中鞅 $g=(g_n)$ 的鞅变换. ∎

命题 5 对所有鞅 $f=(f_n)$, 有

$$\|f^*\|_p \leqslant 4\left(\frac{2}{p}\right)^{1/2}\|\sigma(f)\|_p, \quad 0<p\leqslant 2, \tag{36}$$

$$\|\sigma(f)\|_p \leqslant \sqrt{2p}\,\|f^*\|_p, \quad p\geqslant 2. \tag{37}$$

证明 利用引理 9 中的鞅变换即可完成证明. 因我们将在 4.2 节中定理 3′ 得到比式(37)有更好的常系数之不等式, 故此处证明从略. ∎

注 除常系数外, 式(36)与(37)不能对更大范围的 p 成立. 反例如下: 设$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$是一适当的概率空间, $\mathscr{F}_0$ 平凡, $\mathscr{F}_1=\mathscr{F}_2=\cdots=\mathscr{F}$. 设 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$ 是任一鞅, $f_0=0$. 则 $\sigma(f)=\|f\|_2$. 故 $\Sigma_p=L^2$, $0<p<\infty$. 只要 $L^2\neq L^p$, $\forall p\neq 2$, 这便构成反例.

定理 13 我们有 $\mathscr{D}_p\subset\Sigma_p$, $1\leqslant p<\infty$.

证明 设 $f=(f_n)\in\mathscr{D}_p$, (λ_n) 是 $\mathscr{D}_p$ 定义中的任一控制过程.

作如下鞅变换

$$g_n=\sum_1^n \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\nu-1}}}\Delta f_\nu.$$

则

$$g_n=\frac{f_n}{\sqrt{\lambda_{n-1}}}+\sum_1^{n-1} f_\nu\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_{\nu-1}}}-\frac{1}{\sqrt{\lambda_\nu}}\right)$$

$$=\frac{f_n}{\sqrt{\lambda_{n-1}}}+\sum_1^{n-1}\frac{f_\nu}{\sqrt{\lambda_{\nu-1}}}\frac{\sqrt{\lambda_\nu}-\sqrt{\lambda_{\nu-1}}}{\sqrt{\lambda_\nu}},$$

$$|g_n|\leqslant\sqrt{\lambda_{n-1}}+\sum_1^n(\sqrt{\lambda_\nu}-\sqrt{\lambda_{\nu-1}})\leqslant 2\sqrt{\lambda_{n-1}}.$$

这说明(g_n)是一个 L^{2p} 可预报的鞅．但因

$$f_n=\sum_1^n\sqrt{\lambda_{\nu-1}}\Delta g_\nu,$$

故

$$\sigma_n(f)^2=\sum_1^n\lambda_{\nu-1}E(|\Delta g_\nu|^2|\mathscr{F}_{\nu-1})\leqslant\lambda_{n-1}\sigma_n(g)^2,$$

$$\sigma_n(f)^p\leqslant\lambda_{n-1}^{p/2}\sigma_n(g)^p,$$

$$E(\sigma_n(f)^p)\leqslant E(\lambda_{n-1}^p)^{1/2}E(\sigma_n(g)^{2p})^{1/2}$$
$$\leqslant E(\lambda_{n-1}^p)^{1/2}CE(g^{*2p})^{1/2}\leqslant CE(\lambda_\infty^p),$$

于是我们得

$$\|\sigma(f)\|_p\leqslant C\|f\|_{\mathscr{F}_p}.\quad \blacksquare$$

章 后 注 记

2.2节 极大算子的弱(1,1)不等式常称为Kolmogorof不等式．强(p,p)型属于Doob．均方根算子的弱(1,1)型属于D. L.

Burkholder, R. F. Gundy 等，这里的证明属于 Burkholder[2]. 对于 $S(f)$ 的研究的重要一步始于 D. G. Austin，他证明了 L^1 有界鞅的 $S(f)$ 在集合 $\{f^* \leqslant \lambda\}$ 上平方可积.

2.3 节 Fefferman 不等式(定理 3)的证明是 Garsia[1]模仿 Herz[2]的思想而设计的. 引理 2 与 3，定理 4 的证明也属于 Garsia[1].

2.4 节 本节 Burkholder-Gundy 不等式的证明是由作者综合归纳而成的. R. F. Gundy 也考虑过算子 T_ε，然而他是用他自己建立的一个 L^1 有界鞅的分解作为研究 T_ε 的工具. 此节给出的运用两个如此定义的停止时间的思想借鉴于 Stroock[1] 在研究 BMO 时的想法. 我们将在第四章更充分而有效地运用这个思想讨论 Φ-不等式.

空间 ${}_2K_p$ 与 ${}_1K_p$ 是 Garsia[1]引进的，他建立了 ${}_1K_p$ (以及 ${}_2K_p$)与 L^p 中范数的等价，但其中的主要不等式的系数较差，如

$$\|f^*\|_p \leqslant 3epp' \|f\|_{{}_1K_p},$$

并且其证明稍嫌复杂.

Davis 不等式及 Davis 分解属于 Davis[1].

2.5 节 从 Fefferman 不等式到 Davis 不等式的思想属于 Garsia[1].

2.6 节 H_p 的 Davis 分解，以及 $\mathscr{D}_p$ 与 $\mathscr{A}_p$ 的引进也属于 Garsia[1].

2.7 节 利用 Davis 分解与原子分解证明 Fefferman 定理的思想属于 Herz[1], Bernard-Maisonneuve[1]等. C. Fefferman 也是很早就发现 H_1 的原子分解等价于 H_1-BMO 之对偶性的作者之一. 原子概念萌芽于 Herz[1]，古典情形下由 Coifman[1] 明确化，鞅论情形由 Bernard-Maisonneuve[1]明确化.

第三章 鞅的其他空间

本章讨论鞅的除 H_p 以外的其他空间. 我们主要讨论它们之间的等价或包含关系，以及它们的对偶空间. 其中有代表性的是 C. Herz 定义的 Σ_p, 它是 H_p 的形式类比. 其他空间大多都与 Σ_p 有些关系.

本章仍假设 $\mathscr{F}_0$ 平凡，并一般只讨论 $f_0=0$ 的鞅.

3.1 几个定义

$\Sigma_p(0<p<\infty)$ 已经在 2.8 节中被定义，它是

$$\Sigma_p=\Big\{\text{鞅 } f=(f_n):\ \|\sigma(f)\|_p<\infty,$$

$$\sigma(f)=\Big(\sum_n E(|\Delta f_n|^2|\mathscr{F}_{n-1})\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\}. \tag{1}$$

当 $1\leqslant p<\infty$, Σ_p 是一个 Banach 空间. 这是因 $\|\sigma(f)\|_p$ 满足

$$\|\sigma(f)\|=0\Longleftrightarrow f=0;\quad \|\sigma(\lambda f)\|_p=|\lambda|\,\|\sigma(f)\|_p;$$

$$\|\sigma(f+g)\|_p\leqslant\|\sigma(f)\|_p+\|\sigma(g)\|_p.$$

这最后一个不等式需用到条件期望的 Minkowski 不等式:

$$E(|f+g|^2|\cdot)^{1/2}\leqslant E(|f|^2|\cdot)^{1/2}+E(|g|^2|\cdot)^{1/2}.$$

这又是 Hölder 不等式的结果: 我们记 $a=E(|f|^2|\cdot)^{1/2}$, $b=E(|g|^2|\cdot)^{1/2}$, 则

$$\begin{aligned}E(|f+g|^2|\cdot)&\leqslant E(|f|^2|\cdot)+2E(|fg||\cdot)+E(|g|^2|\cdot)\\&\leqslant a^2+2ab+b^2=(a+b)^2.\end{aligned}$$

这样

$$\|\sigma(f+g)\|_p=E\left(\left\{\sum_1^{\infty}E(|\Delta(f+g)_n|^2|\mathscr{F}_{n-1})\right\}^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant E\left(\left\{\sum_{n=1}^{\infty}[E(|\Delta f_n|^2|\mathscr{F}_{n-1})^{1/2}+E(|\Delta g_n|^2|\mathscr{F}_{n-1})^{1/2}]^2\right\}^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant E\left(\left\{\left[\sum_1^{\infty}E(|\Delta f_n|^2|\mathscr{F}_{n-1})\right]^{\frac{1}{2}}+\left[\sum_1^{\infty}E(|\Delta g_n|^2|\mathscr{F}_{n-1})\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^{p}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant E\,(\sigma(f)^p)^{1/p}+E(\sigma(g)^p)^{1/p}.$$

其完备性是因，当 $1\leqslant p\leqslant 2$，由 2.8 节中的命题 5 知，Σ_p 空间中的 Cauchy 序列也是 H_p 中的 Cauchy 序列，故有 H_p 中的极限．由 Fatou 引理知这个极限必在 Σ_p 中，并且也是这个序列在 Σ_p 中的极限；当 $p>2$ 时，Σ_p 中的 Cauchy 序列也是 L^2 中的 Cauchy 序列，故有 L^2 中的极限，同样地，这个极限也是 Σ_p 中的极限．

为了探讨 Σ_p 的对偶空间，需要有 $\|\sigma(f)\|_p$ 的等价表示．与此相关，也讨论其他一些空间．

首先平行于 2.1 节中定义的 ${}_aK_p$，我们有

定义 1 设 $1\leqslant a\leqslant p\leqslant\infty$，$a\neq\infty$．令

$${}_a\mathscr{K}_p=\{\text{鞅 } f=(f_n)\in L^a:\ \text{存在非负 } \gamma\in L^p,\text{使得}$$

$$E(|f-f_n|^a|\mathscr{F}_n)=E(|f^{(n)}|^a|\mathscr{F}_n)\leqslant E(\gamma^a|\mathscr{F}_n),\ \forall n\},\qquad(2)$$

$$\|f\|_{{}_a\mathscr{K}_p}=\inf\{\|\gamma\|_p\},\qquad(2)'$$

当 $p=\infty$，${}_a\mathscr{K}_\infty$ 即为 Herz[1]中定义的 JN_a．

现在定义一类新的空间．记

$$R=\{\text{非负增加适应过程}(r_n)_{n\geqslant 0}:\ E(r_\infty)\leqslant 1\}.$$

定义 2 对鞅 $f=(f_n)$，与 $0<p\leqslant 2$，令

$${}_2\|f\|_p=\inf_{(r_n)\in R}\left\{E\left(\sum_{n=1}^{\infty}r_{n-1}^{1-2/p}|\Delta f_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$= \inf_{(r_n)\in R}\left\{E\left(\sum_{n=1}^{\infty} r_{n-1}^{1-2/p} E(|\Delta f_n|^2|\mathscr{F}_{n-1})\right)^{\frac{1}{2}}\right\}; \qquad (3)$$

对 $2\leqslant p\leqslant\infty$ 及 $-\infty\leqslant p<0$, 令

$${}_2\|f\|_p= \sup_{(r_n)\in R}\left\{E\left(\sum_{n=1}^{\infty} r_{n-1}^{1-2/p}|\Delta f_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\}. \qquad (3)'$$

定义

$${}_2\mathscr{L}_p=\{\text{鞅 } f=(f_n):\ {}_2\|f\|_p<\infty,\ -\infty\leqslant p\leqslant\infty,\ p\neq 0\}. \qquad (4)$$

定义 3 对 $1\leqslant p\leqslant\infty$, 令

$$L_1^p=\{\text{鞅 } f\in L^1:\ f=\Sigma g_k\psi_k,\ g_k\in L^{p'}(\mathscr{F}_{m_k}),\ \psi_k\in L^p,$$
$$E(\psi_k|\mathscr{F}_{m_k})=0,\ \text{且}\ \|f\|_{L_1^p}=\inf\{\Sigma\|g_k\|_{p'}\|\psi_k\|_p:$$
$$\text{遍历所有表示}\}<\infty\}. \qquad (5)$$

此外, 对 $1\leqslant p\leqslant\infty$, $\mathscr{D}_p$ 的定义如 2.6 节.

上面定义的一些量, 除 $\|\cdot\|_{\alpha\mathscr{K}_p}$ 以及 $0<p<1$ 时的 ${}_2\|\cdot\|_p$ 外, 都是范数, 且对应的空间是 Banach 空间.

式(3)′ 还有一个等价表示, 这在下面将会用到. 令 α 满足

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\geqslant 0,$$

及

$$G_2^p=\left\{\text{适应过程}(g_n)_{n\geqslant 0}:\ g_n\in L^\alpha,\ E\left(\left(\sum_n|g_n|^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right)\leqslant 1\right\}.$$

对任意的 $(g_n)\in G_2^p$ 定义

$$r_n=\left(\sum_{k\leqslant n}|g_k|^2\right)^{\frac{\alpha}{2}},$$

则 $(r_n)\in R$. 反之, 对任意的 $(r_n)\in R$ 定义过程 $(g_n)_{n\geqslant 0}$, 使

$$|g_n|^2=r_n^{1-\frac{2}{p}}-r_{n-1}^{1-2/p},$$

则 $(g_n)\in G_2^p$. 这说明集合 R 与 G_2^p 一一对应.

现设 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$ 是任意的一个鞅，有终端函数，记

$$f^{(n)}=f-f_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}\Delta f_k.$$

设(r_n)与(g_n)是一对如上述那样相联系的过程，则有下述等式

$$\begin{aligned}E\left(\sum_{n=0}^{\infty}|g_nf^{(n)}|^2\right)&=E\left(\sum_{n=0}^{\infty}|g_n|^2E(|f^{(n)}|^2|\mathscr{F}_n)\right)\\&=E\left(\sum_{n=0}^{\infty}|g_n|^2E\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}|\Delta f_k|^2|\mathscr{F}_n\right)\right)\\&=E\left(\sum_{n=0}^{\infty}|g_n|^2\sum_{k=n+1}^{\infty}|\Delta f_k|^2\right)\\&=E\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\Delta f_k|^2\sum_{n=0}^{k-1}|g_n|^2\right)\\&=E\left(\sum_{n=1}^{\infty}r_{n-1}^{1-2/p}|\Delta f_n|^2\right).\end{aligned}$$

从而，对 $2\leqslant p\leqslant\infty$, $-\infty\leqslant p<0$, 有

$$\begin{aligned}{}_2\|f\|_p&=\sup_{(r_n)\in R}E\left(\sum_n r_{n-1}^{1-2/p}|\Delta f_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\&=\sup_{(g_n)\in G_2^p}E\left(\sum_n|g_n|^2|f^{(n)}|^2\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}\tag{3}''$$

利用此关系可类似地定义 ${}_a\mathscr{L}_p$, $1\leqslant a\leqslant p\leqslant\infty$. 令 α 满足

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{a}-\frac{1}{p},$$

及

$$G_a^p=\{\text{适应过程}(g_n):\ g_n\in L^\alpha(\mathscr{F}_n),\ E((\Sigma|g_n|^a)^{\frac{\alpha}{a}})^{\frac{1}{\alpha}}\leqslant 1\}.$$

当 $\alpha=\infty\,(a=p)$时，

$$G_a^a=\{(g_n):g_n\in L^\infty(\mathscr{F}_n),\ \|(\sum|g_n|^a)^{\frac{1}{a}}\|_\infty\leqslant 1\}.$$

定义 2′ 对 $1\leqslant a\leqslant p\leqslant\infty$, 令

$$_a\mathscr{L}_p=\{f=(f_n)\in L^a:\ _a\|f\|_p<\infty\},$$

$$_a\|f\|_p=\sup_{(g_n)\in G_a^p}E\left(\sum_n|g_n|^a|f^{(n)}|^a\right)^{\frac{1}{a}}. \tag{6}$$

3.2 空间 Σ_p 与 $_2\mathscr{L}_p(0<p<\infty)$ 以及 $_2\mathscr{K}_p(2\leqslant p<\infty)$ 的等价

定理 1 设 $0<p\leqslant 2$, 则对一切鞅 $f=(f_n)$, $f_0=0$, 有

$$\left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{1}{2}}{}_2\|f\|_p\leqslant\|\sigma(f)\|_p\leqslant{}_2\|f\|_p. \tag{7}$$

从而对 $1\leqslant p\leqslant 2$, $_2\mathscr{L}_p$ 就是 Banach 空间 Σ_p.

证明 假设 $\|\sigma(f)\|_p=1$. 则 $(\sigma_{n+1}^p(f))_{n\geqslant 0}\in R$, 故由 2.8 节的式(34)′ 知

$$\begin{aligned}{}_2\|f\|_p&\leqslant E\left(\sum_{n=1}^\infty\sigma_n^{p-2}(f)(\sigma_n^2(f)-\sigma_{n-1}^2(f))\right)^{\frac{1}{2}}\\&\leqslant\left(\frac{2}{p}\right)^{\frac{1}{2}}E\left(\sum_{n=1}^\infty(\sigma_n^p(f)-\sigma_{n-1}^p(f))\right)^{\frac{1}{2}}\\&\leqslant\left(\frac{2}{p}\right)^{\frac{1}{2}}E(\sigma^p(f))^{1/2}\leqslant\left(\frac{2}{p}\right)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

由此证明了式 (7) 之左边不等式. 反之, 设 $f\in{}_2\mathscr{L}_p$. 对任意的 $(r_n)\in R$, 记 $r=r_\infty$. 既然 $1-2/p\leqslant 0$, 故

$$\sum_n r_{n-1}^{1-2/p}(\sigma_n^2(f)-\sigma_{n-1}^2(f))\geqslant r^{1-2/p}\sigma^2(f),$$

$$\|\sigma(f)\|_p^p=E(\sigma^p(f)r^{\frac{p-2}{2}}r^{\frac{2-p}{2}})\leqslant E(\sigma^2(f)r^{1-2/p})^{p/2}E(r)^{1-p/2}$$

$$\leqslant E\left(\sum_n r_{n-1}^{1-2/p}|\Delta f_n|^2\right)^{\frac{p}{2}},$$

$$\|\sigma(f)\|_p\leqslant \inf_{(r_n)\in R} E\left(\sum_n r_{n-1}^{1-2/p}|\Delta f_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}={}_2\|f\|_p.$$

这就证明了式(7)的右边不等式. ▮

定理 2 设 $2\leqslant p<\infty$, 则对一切鞅 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}, f_0=0$, 有

$$\left(\frac{2}{p}\right)^{\frac{1}{2}}\|\sigma(f)\|_p\leqslant {}_2\|f\|_p\leqslant\|\sigma(f)\|_p. \tag{8}$$

从而当 $2\leqslant p<\infty$ 时 ${}_2\mathscr{L}_p$ 就是 Banach 空间 Σ_p.

证明 设 $f\in{}_2\mathscr{L}_p$. 我们首先证明 $\forall n, \sigma_n(f)\in L^p$. 这是因为

$$\sup E(r_{n-1}^{1-2/p}E(|\Delta f_n|^2|\mathscr{F}_{n-1}))^{\frac{1}{2}}\leqslant{}_2\|f\|_p,\quad \forall n,$$

其中 r_{n-1} 遍历所有 $\mathscr{F}_{n-1}$ 可测非负函数, 满足 $E(r_{n-1})\leqslant 1$. 既然这个条件等价于 $E(r_{n-1}^{(1-2/p)(1-2/p)^{-1}})\leqslant 1$, 这就说明

$$\|E(|\Delta f_n|^2|\mathscr{F}_{n-1})^{1/2}\|_p^2=\|E(|\Delta f_n|^2|\mathscr{F}_{n-1})\|_{\frac{p}{2}}\leqslant{}_2\|f\|_p^2,$$

即证明了断言. 因而如设 $f\in{}_2\mathscr{L}_p$ 是有限鞅, 则 $\sigma(f)\in L^p$. 因此可设 $\|\sigma(f)\|_p=1$. 于是 $(\sigma_{n+1}^p(f))_{n\geqslant 0}\in R$. 从而由 2.8 节的式 (35)′ 知

$$\begin{aligned}{}_2\|f\|_p&\geqslant E\left(\sum_n\sigma_n^{p-2}(f)(\sigma_n^2(f)-\sigma_{n-1}^2(f))\right)^{\frac{1}{2}}\\&\geqslant\left(\frac{2}{p}\right)^{\frac{1}{2}}E\left(\sum_n(\sigma_n^p(f)-\sigma_{n-1}^p(f))\right)^{\frac{1}{2}}\\&=\left(\frac{2}{p}\right)^{\frac{1}{2}}E(\sigma^p(f))^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{2}{p}\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

由此证明了式(8)之左边不等式. 反之, 设 $f\in\Sigma_p$. 对任意的 $(r_n)\in R$, 既然 $1-2/p\geqslant 0$, 那末

$$E\left(\sum_n r_{n-1}^{1-2/p}(\sigma_n^2(f)-\sigma_{n-1}^2(f))\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant E(r^{1-2/p}\sigma^2(f))^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant E(\tau)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}E(\sigma^p(f))^{1/p}\leqslant\|\sigma(f)\|_p.$$

于是证明了式(8)之右边不等式. ∎

定理 3 当 $2\leqslant p<\infty$, $\Sigma_p={}_2\mathscr{K}_p={}_2\mathscr{L}_p$, 并有

$$_2\|f\|_p\leqslant\|f\|_{_2\mathscr{K}_p}\leqslant\|\sigma(f)\|_p\leqslant\left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{1}{2}}{}_2\|f\|_p. \tag{9}$$

证明 对一切 p, $2\leqslant p\leqslant\infty$, 都有 $\Sigma_p\subset{}_2\mathscr{K}_p$. 因

$$E(|f^{(n)}|^2|\mathscr{F}_n)=E\left(\sum_{n+1}^{\infty}E(|\Delta f_k|^2|\mathscr{F}_{k-1})|\mathscr{F}_n\right)$$
$$\leqslant E(\sigma^2(f)|\mathscr{F}_n),$$

故

$$\|f\|_{_2\mathscr{K}_p}\leqslant\|\sigma(f)\|_p.$$

现设 $f\in{}_2\mathscr{K}_p$, 非负的 $\gamma\in L^p$ 是式(2)中任意给出的. 则

$$_2\|f\|_p=\sup_{(g_n)\in G_2^p}E\left(\sum_n|g_n|^2|f^{(n)}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$=\sup_{(g_n)\in G_2^p}E\left(\sum_n|g_n|^2E(|f^{(n)}|^2|\mathscr{F}_n)\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant\sup_{(g_n)\in G_2^p}E\left(\sum_n|g_n|^2\gamma^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant\sup_{(g_n)\in G_2^p}E\left(\left(\sum_n|g_n|^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}E(\gamma^p)^{1/p}\leqslant\|\gamma\|_p.$$

注意这里用到 $\alpha/2$ 与 $p/2$ 是一对共轭指标. 由此证明了

$$_2\|f\|_p\leqslant\|f\|_{_2\mathscr{K}_p}.$$

此外, 式(9)中最右边不等式已在式(8)中出现. ∎

注 我们将在 4.3 节定理 8′ 中指出, 式(9)也可推广到一般的 Φ-不等式情形.

定理 4 我们有 $\Sigma_1=L_1^2$, 且

$$\|\sigma(f)\|_1\leqslant\|f\|_{L_1^2}\leqslant\sqrt{2}\|\sigma(f)\|_1. \tag{10}$$

证明 设 $f=g\psi$, 且对某个 n,

$$g\in L^2(\mathscr{F}_n),\quad \psi\in L^2,\quad E(\psi|\mathscr{F}_n)=0.$$

则因当 $m\leqslant n$ 时

$$E(g\psi|\mathscr{F}_m)=E(E(g\psi|\mathscr{F}_n)|\mathscr{F}_m)=0;$$

当 $m>n$ 时,

$$E(g\psi|\mathscr{F}_m)=g\psi_m.$$

由此说明

$$f_m=g\psi_m,\quad \forall m,$$
$$\sigma(f)=g\sigma(\psi).$$

因而

$$\|\sigma(f)\|_1\leqslant\|g\|_2\|\sigma(\psi)\|_2=\|g\|_2\|\psi\|_2.$$

对一般的 $f\in L_1^2$, 设

$$f=\sum g^{(k)}\psi^{(k)},$$
$$g^{(k)}\in L^2(\mathscr{F}_{m_k}),\quad \psi^{(k)}\in L^2,\quad E(\psi^{(k)}|\mathscr{F}_{m_k})=0.$$

则因 f 的级数表示是在 L^1 中收敛的, 故

$$\Delta f_n=\sum_k g^{(k)}\Delta\psi_n^{(k)}.$$

现在我们需要证明

$$\sigma(f)\leqslant\sum_k|g^{(k)}|\sigma(\psi^{(k)}).\tag{11}$$

事实上, 有

$$E(|\Delta f_n|^2|\mathscr{F}_{n-1})\leqslant E\left(\left[\sum_k|g^{(k)}||\Delta\psi_n^{(k)}|\right]^2\middle|\mathscr{F}_{n-1}\right)$$
$$\leqslant\left\{\sum_k E(|g^{(k)}|^2|\Delta\psi_n^{(k)}|^2|\mathscr{F}_{n-1})^{1/2}\right\}^2.$$

因为当 $n\leqslant m_k$ 时, $\Delta\psi_n^{(k)}=0$, 故上式右边的和号只需对那些使 $m_k<n$的 k 求和. 而对这些 k, $g^{(k)}$关于 $\mathscr{F}_{m_k}\subset\mathscr{F}_{n-1}$ 可测, 因此

$$\sigma(f)=\left(\sum_n E(|\Delta f_n|^2|\mathscr{F}_{n-1})\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\left\{\sum_n\left[\sum_k |g^{(k)}|E(|\Delta\psi_n^{(k)}|^2|\mathscr{F}_{n-1})^{\frac{1}{2}}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\sum_k |g^{(k)}|\left\{\sum_n E(|\Delta\psi_n^{(k)}|^2|\mathscr{F}_{n-1})\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\sum_k |g^{(k)}|\sigma(\psi^{(k)}).$$

这样，我们证明了对一般的 $f\in L_1^2$，及其任一表示 $\Sigma g^{(k)}\psi^{(k)}$，都有

$$\|\sigma(f)\|_1\leqslant\sum_k\|g^{(k)}\|_2\|\sigma(\psi^{(k)})\|_2$$

$$=\sum_k\|g^{(k)}\|_2\|\psi^{(k)}\|_2,$$

从而
$$\|\sigma(f)\|_1\leqslant\|f\|_{L_1^2}.$$

反之，首先我们要指出对任意的 $\varphi\in \mathrm{JN}_2={}_2\mathscr{K}_\infty={}_2\mathscr{L}_\infty$，都有

$$|E(f\varphi)|\leqslant\sqrt{2}\|\sigma(f)\|_1\|\varphi\|_{\mathrm{JN}_2}.$$

应用上式(证明见下面的引理 1)，以及下面将要在 3.5.3 中指出的：$(L_1^2)'\subset \mathrm{JN}_2$，得

$$\|f\|_{L_1^2}\leqslant\sup_{\varphi\in \mathrm{JN}_2,\ \|\varphi\|_{\mathrm{JN}_2}\leqslant 1}|E(f\varphi)|$$

$$\leqslant\sqrt{2}\|\sigma(f)\|_1. \blacksquare$$

上面所用之式是下述更一般关系的特殊情形.

引理 1 我们有

$$|E(f\varphi)|\leqslant\left(\frac{2}{p}\right)^{\frac{1}{2}}\|\sigma(f)\|_p\|\varphi\|_{{}_2\mathscr{K}_{p'}},\quad 1\leqslant p\leqslant 2, \tag{12}$$

其中

$$E(f\varphi)=\lim_n E(f_n\varphi_n)=\lim_n \sum_1^n E(\Delta f_k \Delta\varphi_k).$$

证明 此不等式可模仿 2.3 节中 Fefferman 不等式的证明，也可由本节的定理 1 推出．事实上

$$E\left(\sum_k |\Delta f_k||\Delta\varphi_k|\right)$$

$$\leqslant E\left(\sum_k r_{n-1}^{1-2/p}|\Delta f_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} E\left(\sum_k r_{n-1}^{1-2/p'}|\Delta\varphi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

适当地取 $(r_n)\in R$，使上式不等号右边第一项充分接近 ${}_2\|f\|_p$，则得

$$E\left(\sum_k |\Delta f_k||\Delta\varphi_k|\right)\leqslant {}_2\|f\|_p\ {}_2\|\varphi\|_{p'}$$

$$\leqslant\left(\frac{2}{p}\right)^{\frac{1}{2}}\|\sigma(f)\|_p\|\varphi\|_{{}_2\mathscr{K}_{p'}},$$

这最后一步用到了式(7)与(9)．引理证毕．∎

3.3 空间 ${}_a\mathscr{L}_p$ 与 ${}_a\mathscr{K}_p$ ($1\leqslant a\leqslant p\leqslant\infty$，$a\neq\infty$) 的等价

定理 5 我们有 ${}_a\mathscr{L}_p={}_a\mathscr{K}_p$，$1\leqslant a\leqslant p\leqslant\infty$，$a\neq\infty$，且

$$\begin{cases} {}_a\|f\|_\infty=\|f\|_{{}_a\mathscr{K}_\infty}, \\ \|f\|_p\leqslant {}_p\|f\|_p\leqslant\|f\|_{{}_p\mathscr{K}_p}\leqslant 2\|f\|_p(f_0=0), \quad 1\leqslant p<\infty, \\ {}_a\|f\|_p\leqslant\|f\|_{{}_a\mathscr{K}_p}\leqslant\left(\left(\frac{p}{a}\right)'\right)^{\frac{1}{a}}{}_a\|f\|_p, \quad 1\leqslant a<p<\infty. \end{cases} \tag{13}$$

证明 $\forall a,p$，$1\leqslant a\leqslant p\leqslant\infty$，都有

$${}_a\|f\|_p\leqslant\|f\|_{{}_a\mathscr{K}_p}.$$

这同定理 3 中的证明一样，只需注意 α/a 与 p/a 是共轭指标．

现证其他不等式，分别考虑 $p=\infty$，$a=p$，以及 $1\leqslant a<p<\infty$ 等三种情况.

当 $p=\infty$ 时，对 n 固定，$\forall A\in\mathscr{F}_n$，取 $g_n=|A|^{-1/a}\mathrm{I}(A)$. 则

$$E(|g_n|^a)^{1/a}=\left(\int_A\frac{1}{|A|}d\mu\right)^{\frac{1}{a}}\leqslant 1,$$

故

$$\left(\frac{1}{|A|}\int_A|f^{(n)}|^a d\mu\right)^{\frac{1}{a}}=E(|g_n|^a|f^{(n)}|^a)^{1/a}\leqslant{}_a\|f\|_\infty,$$

$$E(|f^{(n)}|^a|\mathscr{F}_n)^{1/a}\leqslant{}_a\|f\|_\infty,$$

$$\|f\|_{{}_a\mathscr{K}_\infty}\leqslant{}_a\|f\|_\infty.$$

于是证明了 ${}_a\mathscr{L}_\infty={}_a\mathscr{K}_\infty=\mathrm{JN}_a$，且范数相等.

$a=p$ 时，有

$$E(|f^{(n)}|^p|\mathscr{F}_n)\leqslant 2^{p-1}E(|f|^p|\mathscr{F}_n)+2^{p-1}|f_n|^p$$
$$\leqslant 2^pE(|f|^p|\mathscr{F}_n).$$

这说明 $L^p\subset{}_p\mathscr{L}_p$，以及 $L^p\subset{}_p\mathscr{K}_p$，并且

$${}_p\|f\|_p\leqslant 2\|f\|_p,\quad \|f\|_{{}_p\mathscr{K}_p}\leqslant 2\|f\|_p.$$

反之，${}_p\mathscr{L}_p\subset L^p$ 以及 ${}_p\mathscr{K}_p\subset L^p$ 是清楚的，并且(设 $f_0=0$)

$$\begin{aligned}\|f\|_p&=E(|f-f_0|^p|\mathscr{F}_0)^{1/p}\\&\leqslant\sup_{(g_n)\in G_p^p}E\left(\sum_n|g_n|^p|f^{(n)}|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\&={}_p\|f\|_p,\end{aligned}$$

$$\|f\|_p\leqslant\|f\|_{{}_p\mathscr{K}_p}.$$

由此证明了式(13)的第二个不等式.

现在考虑其他情况，此时 $1\leqslant a<p<\infty$.

设 $f\in{}_a\mathscr{L}_p$. 固定任意的 N，考虑非负适应过程 $(\rho_n)_{n=0}^N$，其中

$$\rho_n=E(|f^{(n)}|^a|\mathscr{F}_n)^{1/a}.$$

由 $f\in{}_a\mathscr{L}_p$，知

$$\|\rho_n\|_p=\sup_{g_n\in L^a(\mathscr{F}_n),\ \|g_n^a\|_{\alpha/a}\leq 1} E(|g_n|^a\rho_n^a)^{1/a}\leqslant_a\|f\|_p.$$

这说明(ρ_n)是L^p有界适应过程. 特别, $\rho_N^*=\sup\limits_{n\leq N}\rho_n\in L^p$.

考虑Ω的一个剖分$\{F_n\}_{n=0}^N$, 其中

$$F_n=\{\rho_{n-1}^*<\rho_n=\rho_N^*\}.$$

则

$$E(\rho_N^{*p})=E\left(\sum_{n=0}^N\rho_n^a\rho_n^{p-a}\mathrm{II}(F_n)\right)$$

$$=E\left(\sum_{n=0}^N\rho_n^a\rho_n^{p-a}E(\mathrm{II}(F_n)\,|\,\mathscr{F}_n)\right). \tag{14}$$

记

$$g_n^a=\rho_n^{p-a}E(\mathrm{II}(F_n)\,|\,\mathscr{F}_n).$$

我们再利用下式(证明待补)

$$E((\Sigma g_n^a)^{\frac{\alpha}{a}})^{\frac{1}{\alpha}}\leqslant C_{a,p}E(\rho_N^{*p})^{1/\alpha}, \tag{15}$$

从而

$$\left(\frac{g_n}{C_{a,p}E(\rho_N^{*p})^{1/\alpha}}\right)_{n=0}^N\in G_a^p.$$

于是由式(14)将有

$$\frac{E(\rho_N^{*p})}{C_{a,p}^aE(\rho_N^{*p})^{a/\alpha}}=E\left(\sum_{n=0}^N\frac{g_n^a}{C_{a,p}^aE(\rho_N^{*p})^{a/\alpha}}\rho_n^a\right)$$

$$=E\left(\sum_{n=0}^N\frac{g_n^a}{C_{a,p}^aE(\rho_N^{*p})^{a/\alpha}}|f^{(n)}|^a\right)$$

$$\leqslant_a\|f\|_p^a.$$

此即

$$E(\rho_N^{*p})^{a/p}\leqslant C_{a,p}^a\ {}_a\|f\|_p^a,$$

$$\|f\|_{a\mathscr{H}_p}\leqslant\|\rho^*\|_p\leqslant C_{a,p}\ {}_a\|f\|_p.$$

这就是定理要求证明的. 现补证式(15), 并且有

$$C_{a,p}\leqslant\left(\left(\frac{p}{a}\right)'\right)^{\frac{1}{a}}.$$

这只需引用在 2.6 节的定理 9 证明中已利用过的, 并将在 4.3 节的引理 6 中被推广到 L^{Φ}的如下事实. 述之为下述引理.

引理 2 设 $1\leqslant q<\infty$, $h\geqslant 0$, $h\in L^q$, (ε_n)是任一过程, $\sum|\varepsilon_n|\leqslant 1$. 则

$$g=\sum_1^{\infty}E(h\varepsilon_n|\mathscr{F}_n)$$

满足

$$\|g\|_q\leqslant q\|h\|_q.$$

现回到式(15)的证明. 因为

$$\varphi=\sum_{n=0}^{N}g_n^a=\sum_{n=0}^{N}\rho_n^{p-a}E(\mathrm{II}(F_n)|\mathscr{F}_n)$$
$$\leqslant\sum_{n=0}^{N}E(\rho_N^{*(p-a)}\mathrm{II}(F_n)|\mathscr{F}_n).$$

应用引理 2, 我们得

$$\left\|\sum_{n=0}^{N}g_n^a\right\|_{\alpha/a}\leqslant\frac{\alpha}{a}E((\rho_N^{*(p-a)})^{\alpha/a})^{a/\alpha}=\frac{\alpha}{a}E(\rho_N^{*p})^{a/\alpha},$$

$$E\left(\left(\sum_{n=0}^{N}g_n^a\right)^{\alpha/a}\right)^{1/\alpha}\leqslant\left(\frac{\alpha}{a}\right)^{1/a}E(\rho_N^{*p})^{1/\alpha}.$$

此即式(15), 其中系数满足 $C_{a,p}\leqslant\left(\left(\frac{p}{a}\right)'\right)^{\frac{1}{a}}$. ∎

注 当 $p>a$, 上面的证明其实已经蕴含(ρ^* 的定义如上)

$$_a\|f\|_p\leqslant\|\varphi\|_{a\mathscr{H}_p}\leqslant\|\rho^*\|_p\leqslant\left(\left(\frac{p}{a}\right)'\right)^{\frac{1}{a}}\|\varphi\|_{a\mathscr{H}_p}. \tag{16}$$

这是 Herz[2]中没有给出证明的下述结果(相当 $a=1$)的推广:

$$
{}_1\|\varphi\|_p \leqslant \|\rho^*\|_p \leqslant p'{}_1\|\varphi\|_p
$$

(那里 ρ^* 记为 $\varphi^\#$).

此外，我们将在 4.3 节的定理 7′ 中证明式 (16) 的 Φ-不等式的推广.

下面考虑空间 ${}_a\mathscr{L}_p$ 对不同指标的包含关系. 当 $p\leqslant q$ 时，显然地有 ${}_a\mathscr{K}_q\subset{}_a\mathscr{K}_p$，因此也有 ${}_a\mathscr{L}_q\subset{}_a\mathscr{L}_p$. 现看当指标 a 增加时，空间 ${}_a\mathscr{L}_p$ 有着怎样的包含关系. 为此我们先给出范数 ${}_a\|\cdot\|_p$ 的一个等价表示.

${}_a\|\cdot\|_p$ 定义中的集合 G_a^p 显然可以缩小为

$$
\tilde{G}_a^p=\left\{\text{有限过程}(g_n):\ g_n\in L^\infty(\mathscr{F}_n),\ E\left(\left(\sum_0^\infty|g_n|^a\right)^{\frac{\alpha}{a}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\leqslant 1\right\}. \tag{17}
$$

因为若对 $(g_n)\in G_a^p$ 定义

$$
g_n^{(N)}=\begin{cases}g_n, & |g_n|\leqslant N,\\ N, & |g_n|>N,\end{cases}\quad n\leqslant N;
$$

$$
g_n^{(N)}=0,\quad \text{对 } n>N,
$$

则

$$
E(\sum|g_n|^a|\varphi^{(n)}|^a)^{\frac{1}{a}}=\lim_{N\to\infty}E(\sum|g_n^{(N)}|^a|\varphi^{(n)}|^a)^{\frac{1}{a}}.
$$

于是证明了 G_a^p 确实可以缩小为 $\tilde{G}_a^p$. 现记

$$
F_a^p=\left\{\text{有限和 } f=\sum_0^\infty g_n\psi_n:\right.
$$

$$
\left.(g_n)\in\tilde{G}_a^p,\ E(\psi_n|\mathscr{F}_n)=0,\ \ E\left(\sum_0^\infty|\psi_n|^{a'}\right)^{\frac{1}{a'}}\leqslant 1\right\}, \tag{18}
$$

其中 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a'}=1$. 则我们有关于 ${}_a\|\cdot\|_p$ 的等价表示的下述引理.

引理 3　$\forall\varphi=(\varphi_n)\in L^a$, $1\leqslant a\leqslant p<\infty$. 我们有

$$\frac{1}{2}{}_a\|\varphi\|_p\leqslant\sup_{f\in F_a^p}|E(f\varphi)|\leqslant{}_a\|\varphi\|_p. \tag{19}$$

证明　设 $\varphi=(\varphi_n)\in L^a$. 对任意的 $(g_n)\in\tilde{G}_a^p$, 记

$$A_{g,\varphi}=E\left(\sum_0^\infty|g_n|^a|\varphi^{(n)}|^a\right)^{\frac{1}{a}}.$$

则 $A_{g,\varphi}$ 有限, 且

$$A_{g,\varphi}=\frac{A_{g,\varphi}^a}{A_{g,\varphi}^{a-1}}=E\left(\sum_n g_n\varphi^{(n)}\,\frac{\xi_n}{A_{g,\varphi}^{a-1}}\right)$$

$$=E\left(\sum_n g_n\varphi^{(n)}\,\frac{\xi_n-E(\xi_n|\mathscr{F}_n)}{A_{g,\varphi}^{a-1}}\right)$$

$$=E\left(\sum_n g_n\varphi^{(n)}\psi_n\right).$$

其中

$$\xi_n=|g_n\varphi^{(n)}|^{a-1}\mathrm{sgn}(g_n\varphi^{(n)}).$$

易知 $E(\psi_n|\mathscr{F}_n)=0$, 以及

$$E(|\psi_n|^{a'})\leqslant\frac{1}{A_{g,\varphi}^{(a-1)a'}}2^{a'}E(|\xi_n|^{a'}),$$

$$E(\Sigma|\psi_n|^{a'})^{\frac{1}{a'}}\leqslant2\frac{1}{A_{g,\varphi}^{a-1}}E(\Sigma|g_n\varphi^{(n)}|^a)^{\frac{1}{a'}}$$

$$=2A_{g,\varphi}^{\frac{a}{a'}-a+1}=2.$$

此外, 因为 $\varphi\in L^a$, 有限和 $f=\Sigma g_n\psi_n\in L^{a'}$, 故下面出现的积分是绝对可积的, 且与和号可自由交换, 故得

$${}_a\|\varphi\|_p=\sup_{(g_n)\in\tilde{G}_a^p}A_{g,\varphi}\leqslant2\sup_{f\in F_a^p}\left|E\left(\sum_n g_n\psi_n\varphi^{(n)}\right)\right|$$

$$=2\sup_{f\in F_a^p}\left|E\left(\sum_n g_n\psi_n(\varphi-\varphi_n)\right)\right|$$

$$=2\sup_{f\in F_a^p}|E(f\varphi)|.$$

于是证明了式(19)的左边不等式.

反之, $\forall f\in F_a^p$, $\forall\varphi\in{}_a\mathscr{L}_p$, 有

$$|E(f\varphi)|=|E(\Sigma g_n\psi_n(\varphi-\varphi_n))|$$
$$=|E(\Sigma g_n\varphi^{(n)}\psi_n)|$$
$$\leqslant E([\Sigma|g_n|^a|\varphi^{(n)}|^a]^{\frac{1}{a}}[\Sigma|\psi_n|^{a'}]^{\frac{1}{a'}})$$
$$\leqslant E(\Sigma|g_n|^a|\varphi^{(n)}|^a)^{\frac{1}{a}}E(\Sigma|\psi_n|^{a'})^{\frac{1}{a'}}$$
$$\leqslant{}_a\|\varphi\|_p.$$

由此又证明了式(19)的右边不等式. ▌

注 1 按 Herz[2]理解的

$$\varphi^{(n)}=\varphi-\varphi_n-\theta_n$$

(其中 θ_n 关于$\mathscr{F}_n$可测, 使 $E(|\varphi^{(n)}|^a|\mathscr{F}_n)$在某种意义下为极小)所定义的 ${}_a\|\cdot\|_p$ 亦有等价关系(19). 本引理说明Herz[2]的${}_a\|\cdot\|_p$与这里的 ${}_a\|\cdot\|_p$ 等价.

注 2 当 $a=1$, 我们需要一个稍微推广一些的形式, 即

$$\frac{1}{2}\,{}_1\|\varphi\|_p\leqslant\sup_{f\in F^p}|E(f\varphi)|\leqslant{}_1\|\varphi\|_p. \tag{19$'$}$$

其中

$$F^p=\{\text{有限和 } f=\Sigma g_m\psi_m:\ g_m\in L^\infty(\mathscr{F}_{k_m}),$$
$$E((\Sigma|g_m|)^{p'})^{\frac{1}{p'}}\leqslant 1,\ E(\psi_m|\mathscr{F}_{k_m})=0,$$
$$\sup_m\|\psi_m\|_\infty\leqslant 1\}.$$

证明 左边不等式显然成立. 因当 $k_m=m$ 时, F^p即 F_1^p. 此外, 既然 f 是 L^∞中的有限和, 同时 $\varphi\in L^1$, 故

$$E(f\varphi)=E\left(\sum g_m\psi_m\varphi\right)=E\left(\sum_n\sum_{m:k_m=n}g_m\psi_m\varphi^{(n)}\right)$$

$$\sup_{f\in F^p}|E(f\varphi)|$$

$$\leqslant\sup_{f\in F^p}E\left(\sum_n\sum_{m:k_m=n}|g_m\varphi^{(n)}|\right)\sup_m\|\psi_m\|_\infty$$

$$\leqslant\sup_{\left(\sum\limits_{m:k_m=n}|g_m|\right)_{n\geqslant 0}\in\widetilde{G}_1^p}E\left(\sum_n\sum_{m:k_m=n}|g_m||\varphi^{(n)}|\right)$$

$$\leqslant{}_1\|\varphi\|_p.\ \blacksquare$$

下面我们证明当 a 不同时，空间 ${}_a\mathscr{L}_p$ 的包含关系定理.

定理 6 设 $-\infty<\frac{1}{p}\leqslant\frac{1}{b}\leqslant\frac{1}{a}$, $1\leqslant a\leqslant b$. 则 ${}_b\mathscr{L}_p\subset{}_a\mathscr{L}_p$, 且

$$ {}_a\|\varphi\|_p\leqslant 8\quad {}_b\|\varphi\|_p. \tag{20}$$

证明 根据引理 3，如果我们能够证明每个 $f\in F_a^p$ 都可写为 $4\sum h_n\chi_n$, 其中 $\sum h_n\chi_n\in F_b^p$, 则我们便有

$$ {}_a\|\varphi\|_p\leqslant 2\sup_{f\in F_a^p}|E(f\varphi)|$$

$$\leqslant 8\sup_{f\in F_b^p}|E(f\varphi)|\leqslant 8{}_b\|\varphi\|_p.$$

现在设 $f\in F_a^p$, 即 $f=\sum g_n\psi_n$,

$$(g_n)\in\widetilde{G}_a^p(g_n\in L^\infty(\mathscr{F}_n),\ E(G^\alpha)\leqslant 1),$$

$$E(\psi_n|\mathscr{F}_n)=0,\quad E(\Psi^{a'})\leqslant 1,$$

其中 $$G=(\sum|g_n|^a)^{\frac{1}{a}},\ \Psi=(\sum|\psi_n|^{a'})^{\frac{1}{a'}},$$

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{a}-\frac{1}{p},\quad\frac{1}{\beta}=\frac{1}{b}-\frac{1}{p},\quad\theta=\frac{\alpha b}{\beta}.$$

则因

$$\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\geqslant 0,$$

故 $0\leqslant\frac{\theta}{b}\leqslant 1$.

考虑非负增加适应过程 $(G_n)_{n\geqslant 0}$, 其中

$$G_n=\left(\sum_{k\leqslant n}|g_k|^a\right)^{\frac{1}{a}}.$$

$\forall i\in\mathbf{Z}$, 定义增加的停止时间序列 $\{T_i\}$:

$$T_i=\inf\{n:\ G_n^\theta>2^i\}.$$

记

$$B_n^{(i)}=\{G_{n-1}^\theta\leqslant 2^i<G_n^\theta\leqslant 2^{i+1}\}.$$

则集合族 $\{B_n^{(i)}\}$ 当其中一个指标固定时, 关于另一个指标不交(如 n 固定, $i_1\neq i_2$ 时, 有 $B_n^{(i_1)}\cap B_n^{(i_2)}=\varnothing$), 且有等式

$$\{T_i<T_{i+1}\}=\bigcup_n B_n^{(i)}.$$

记 $T_{-\infty}=\inf\{n:\ g_n\neq 0\}$, 则

$$f=\sum_{k=0}^{\infty}g_k\psi_k=\sum_{k\geqslant T_{-\infty}}^{\infty}g_k\psi_k.$$

注意

$$\begin{aligned}E(\Sigma|g_k\psi_k|)&\leqslant\Sigma\|g_k\|_a\|\psi_k\|_{a'}\\&\leqslant(\Sigma E(|g_k|^a))^{\frac{1}{a}}(\Sigma E(|\psi_k|^{a'}))^{\frac{1}{a'}}\\&\leqslant 1,\end{aligned}$$

故级数 $f=\Sigma g_k\psi_k$ 是绝对收敛的, 因此下述和号可以任意地交换. 我们有

$$f=\sum_{k\geqslant T_{-\infty}}^{\infty}g_k\psi_k$$

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\ \sum_{T_i\leqslant k<T_{i+1}} g_k\psi_k \mathrm{II}(\{T_i<T_{i+1}\})\\
&=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\ \sum_{T_i\leqslant k<T_{i+1}} g_k\psi_k \sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{II}(B_n^{(i)})\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\ \sum_{i=-\infty}^{\infty}\ \sum_{n\leqslant k<T_{i+1}} g_k\psi_k \mathrm{II}(B_n^{(i)})\\
&=4\sum_{n=0}^{\infty}\ \sum_{i=-\infty}^{\infty} 2^{\frac{i-1}{b}}\mathrm{II}(B_n^{(i)})\Big\{\sum_{i=-\infty}^{\infty}2^{\frac{i-1}{b'}}\mathrm{II}(B_n^{(i)})\\
&\quad\cdot\sum_{n\leqslant k<T_{i+1}} 2^{-(i+1)}g_k\psi_k\Big\}\\
&=4\sum h_n\chi_n.
\end{aligned}
$$

注意这里用了当 $i\neq j$ 时, $\mathrm{II}(B_n^{(i)})\mathrm{II}(B_n^{(j)})=0$ 这个事实. 根据它, 两个关于 i 的求和相乘得到的是相同 i 的乘积的一重和. 现要证明 $\Sigma h_n\chi_n\in F_b^p$. 此即要证明下式中的四个断言:

$$
\left.
\begin{aligned}
&h_n=\sum_i 2^{\frac{i-1}{b}}\mathrm{II}(B_n^{(i)})\in L^\infty(\mathscr{F}_n),\\
&H=(\Sigma|h_n|^b)^{\frac{1}{b}}\leqslant G^{\alpha/\beta}=G^{\theta/b}, \text{从而 } E(H^\beta)\leqslant 1,\\
&E(\chi_n|\mathscr{F}_n)=E\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty}2^{\frac{i-1}{b'}}\mathrm{II}(B_n^{(i)})\frac{1}{2^{i+1}}\sum_{n\leqslant k<T_{i+1}}g_k\psi_k\,\Big|\,\mathscr{F}_n\right)\\
&\qquad=0,\\
&X=(\Sigma|\chi_n|^{b'})^{\frac{1}{b'}}\leqslant G^{1-\theta/b}\Psi, \text{从而 } E(X^{b'})\leqslant 1.
\end{aligned}
\right\}\quad(21)
$$

现在来证明这四个断言.

第一个断言显然.

H 的估计如下. 记

$$j(\omega)=\sup\{i;\ 2^i<G^\theta\}.$$

则

$$G^{\theta}\leqslant 2^{j(\omega)+l},\quad \forall l\geqslant 1.$$

这说明由 $\omega\in B_n^{(i)}$ 推出 $i\leqslant j(\omega)$. 并且因为对固定的 i, $B_n^{(i)}$关于 n 不交,故使得 $\omega\in B_n^{(i)}$的每个 i 只能与一个 n 对应. 因此

$$H=(\Sigma|h_n|^b)^{\frac{1}{b}}=\left(\sum_n\sum_i 2^{i-1}\mathrm{II}(B_n^{(i)})\right)^{\frac{1}{b}}$$

$$\leqslant\left(\sum_{i\leqslant j}2^{i-1}\right)^{1/b}\leqslant 2^{\frac{1}{b}j(\omega)}\leqslant G^{\theta/b},$$

证明第三个断言要用到在定理 4 的证明中已经指出的一个事实,即若设 $g\in L^a(\mathscr{F}_m)$, $\psi\in L^{a'}$, 且 $E(\psi|\mathscr{F}_m)=0$, 则 $\forall n$ 有

$$E(g\psi|\mathscr{F}_n)=gE(\psi|\mathscr{F}_n).$$

注意,在这里,

$$\lambda_n^{(i)}=\frac{1}{2^{i+1}}\sum_{n\leqslant k}g_k\mathrm{II}(\{k<T_{i+1}\})\psi_k$$

中的 $g_k\mathrm{II}(\{k<T_{i+1}\})$正是关于$\mathscr{F}_k$ 可测的, 同时 $E(\psi_k|\mathscr{F}_k)=0$, 故

$$E(\lambda_n^{(i)}|\mathscr{F}_n)=\frac{1}{2^{i+1}}\sum_{n\leqslant k}E(g_k\mathrm{II}(\{k<T_{i+1}\})E(\psi_k|\mathscr{F}_k)|\mathscr{F}_n)$$

$$=0.$$

于是

$$E(\chi_n|\mathscr{F}_n)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}2^{\frac{i-1}{b'}}E(\lambda_n^{(i)}\mathrm{II}(B_n^{(i)})|\mathscr{F}_n)$$

$$=\sum_{i=-\infty}^{\infty}2^{\frac{i-1}{b'}}\mathrm{II}(B_n^{(i)})E(\lambda_n^{(i)}|\mathscr{F}_n)=0.$$

最后一个断言要用到估计

$$\left(\sum_{k<T_{i+1}}|g_k|^a\right)^{\frac{\theta}{a}}\leqslant 2^{i+1}.$$

这样我们有

$$|\lambda_n^{(i)}|\leqslant\frac{1}{2^{i+1}}\left(\sum_{n\leqslant k<T_{i+1}}|g_k|^a\right)^{\frac{1}{a}}\left(\sum_k|\psi_k|^{a'}\right)^{\frac{1}{a'}}$$

$$\leqslant\frac{1}{2^{i+1}}\left(\sum_{k<T_{i+1}}|g_k|^a\right)^{\frac{\theta}{a}}G^{1-\theta}\Psi\leqslant G^{1-\theta}\Psi,$$

$$X=\left(\sum_n|\chi_n|^{b'}\right)^{\frac{1}{b'}}$$

$$=\left(\sum_n\sum_i 2^{i-1}\mathrm{II}(B_n^{(i)})\,|\lambda_n^{(i)}|^{b'}\right)^{\frac{1}{b'}}$$

$$\leqslant\left(\sum_{i\leqslant j(\omega)}2^{i-1}\right)^{\frac{1}{b'}}G^{1-\theta}\Psi$$

$$\leqslant G^{\theta/b'}G^{1-\theta}\Psi=G^{1-\theta/b}\Psi.$$

那末 Hölder 不等式便给出

$$E(X^{b'})\leqslant E(G^a)^{1-b'/a'}E(\Psi^{a'})^{b'/a'}\leqslant 1.$$

至此式(21)中四个断言获证．定理证毕．█

注　我们知道对 $1\leqslant a\leqslant p\leqslant\infty$, $a\neq\infty$, 总有 $L^p\subset{}_a\mathscr{K}_p\subset L^{a'}$. 当 $(\Omega,\mathscr{F},\mu,\{\mathscr{F}_n\})$ 中的 $\{\mathscr{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ 满足

$$\mathscr{F}_0\text{ 平凡},\quad \mathscr{F}_1=\mathscr{F}_2=\cdots=\mathscr{F}$$

时, $\forall p$, $a\leqslant p\leqslant\infty$, 有 ${}_a\mathscr{L}_p={}_a\mathscr{K}_p=L^a$. 这因 $\forall f\in L^a$,

$$E(|f-f_0|^a\,|\,\mathscr{F}_0)\leqslant 2^a\|f\|_a^a,$$
$$E(|f-f_n|^a\,|\,\mathscr{F}_n)=0,\quad\forall n\geqslant 1.$$

如果概率空间$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$选得适当, 使得 $L^a\neq L^b$(当 $a\neq b$ 时), 则上述例子说明 ${}_a\mathscr{K}_p={}_a\mathscr{L}_p$ 中的元素对任意的 $b>a$ 可以不局部地在

L^b中.

但当$(\Omega, \mathscr{F}, \mu, \{\mathscr{F}_n\})$是7.1节意义下的正规情形时，则有

$$ {}_a\mathscr{L}_p = {}_a\mathscr{K}_p = L^p, \quad 对\ 1 \leqslant a \leqslant p \leqslant \infty. $$

3.4 空间$\mathscr{D}_p$与L_1^p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$

首先我们给出$f \in \mathscr{D}_p$的一个特定分解，它对$\mathscr{D}_p$的研究很有用处. 给出这种分解的思想属于Herz[1]，那儿他是为了证明$\mathscr{D}_1 = L_1^\infty$. 同一思想，Herz[2]也在证明${}_b\mathscr{L}_p \subset {}_a\mathscr{L}_p (a \leqslant b)$中使用过. 值得指出的是，Herz的这个运用停止时间给出函数分解的思想，正是H_p空间论中原子概念的起源之一.

定理7 设$f = (f_n) \in \mathscr{D}_p, 1 \leqslant p \leqslant \infty$. 则存在过程$(g_m)$，$(\psi_m)$，使得

$$ f = \Sigma g_m \psi_m. \tag{22} $$

其中

$$ g_m \geqslant 0, \quad g_m \in L^\infty(\mathscr{F}_{k_m}), \quad E((\Sigma g_m)^p)^{\frac{1}{p}} \leqslant 4 \|f\|_{\mathscr{D}_p}, \tag{22)$'$($} $$

$$ E(\psi_m | \mathscr{F}_{k_m}) = 0, \qquad \sup_m \|\psi_m\|_\infty \leqslant \frac{3}{2}. \tag{22)$''$($} $$

反之，每个形如式(22)的f，当(g_m)，(ψ_m)分别满足前述条件(22)′与(22)″时，都有$f \in \mathscr{D}_p$，且

$$ \|f\|_{\mathscr{D}_p} \leqslant \frac{3}{2} \|\Sigma g_m\|_p. $$

证明 设(r_n)是非负增加适应过程，使

$$ |f_n| \leqslant r_{n-1}, \qquad \|f\|_{\mathscr{D}_p} = \|r_\infty\|_p. $$

(如在2.6节定义2后的注中所指出的，这样的$(r_n(f))_{n \geqslant 0}$是存在的.)设常数a待定，对每个$i \in \mathbf{Z}$，定义停止时间

$$ T_i = \inf\{n: r_n > a^i\}, $$

则$\{T_i\}$是停止时间的一个非降序列．记

$$B^{(i)}=\{T_i<T_{i+1}\},\quad B_k^{(i)}=\{r_{k-1}\leqslant a^i<r_k\leqslant a^{i+1}\}.$$

则每个 $B_k^{(i)}\in\mathscr{F}_k$；$\{B_k^{(i)}\}$中的一个指标固定时对另一个指标不交；以及 $B^{(i)}=\bigcup_k B_k^{(i)}$．我们有

$$\begin{aligned}f&=\sum_{-\infty}^{\infty}(f_{T_{i+1}}-f_{T_i})\mathrm{II}(B^{(i)})\\&=\sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(f_{T_{i+1}}-f_{T_i})\mathrm{II}(B_k^{(i)})\\&=\sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}a^{i+1}\mathrm{II}(B_k^{(i)})a^{-i-1}\mathrm{II}(B_k^{(i)})(f_{T_{i+1}}-f_{T_i})\\&=\sum g_m\psi_m,\end{aligned}$$

其中每个 g_m,ψ_m 分别形如

$$g=a^{i+1}\mathrm{II}(B_k^{(i)}),$$

$$\psi=a^{-i-1}\mathrm{II}(B_k^{(i)})(f_{T_{i+1}}-f_{T_i}).$$

现证(g_m)，(ψ_m)即为所求．事实上，设m与某对(i,k)对应．对于 ψ_m 我们有

$$|f_{T_{i+1}}|\leqslant r_{T_{i+1}-1}\leqslant a^{i+1},\quad |f_{T_i}|\leqslant a^i,$$

$$\|\psi_m\|_\infty\leqslant 1+\frac{1}{a},$$

$$\begin{aligned}E(\psi_m|\mathscr{F}_k)&=a^{-i-1}E(f_{T_{i+1}}-f_{T_i}|\mathscr{F}_k)\mathrm{II}(B_k^{(i)})\\&=a^{-i-1}(f_{T_{i+1}\wedge k}-f_{T_i\wedge k})\mathrm{II}(B_k^{(i)})=0.\end{aligned}$$

而对于(g_m)，我们有 $g_m\in L^\infty(\mathscr{F}_k)$，且有点态的估计

$$\sum_m g_m\leqslant a^2(a-1)^{-1}r_\infty.\tag{23}$$

这个估计如同在定理 6 证明中的估计一样，是因为

$$\sum_m g_m=\sum_{i,k}a^{i+1}\mathrm{II}(B_k^{(i)})\leqslant\sum_{i\leqslant j(\omega)}a^{i+1}$$

$$\leqslant a^{j(\omega)+2}(a-1)^{-1}\leqslant a^2(a-1)^{-1}r_\infty,$$

其中

$$j(\omega)=\sup\{i:\ a^i<r_\infty(\omega)\}.$$

因此我们有

$$E\left(\left(\sum_m g_m\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant a^2(a-1)^{-1}E(r_\infty^p)^{1/p}$$

$$=a^2(a-1)\|f\|_{\mathscr{P}_p}.$$

为简单计,取 $a=2$,即得式(22)′与(22)″所要求的性质.

反之,设 $f=\sum\limits_m g_m\psi_m$, (g_m), (ψ_m) 满足所述条件. 则 f 是 L^p 可预报的鞅,因

$$|f_n|=\left|\sum_{m:k_m<n}g_mE(\psi_m|\mathscr{F}_n)\right|$$

$$\leqslant\frac{3}{2}\sum_{m:k_m<n}g_m=\rho_{n-1},$$

$$\|f\|_{\mathscr{P}_p}\leqslant\|\rho_\infty\|_p\leqslant\frac{3}{2}\left\|\sum_m g_m\right\|_p. \blacksquare$$

注　根据式(23),有

$$\Sigma|g_m\psi_m|\leqslant\sup\|\psi_m\|_\infty\Sigma g_m\leqslant Cr_\infty.$$

上式特别说明,对于 $f\in(L^\infty)_0\subset\mathscr{D}_p$,式(22)中级数有界地 a.e. 收敛于 f.

现在讨论空间 L_1^p. 这是具有某种正规性的鞅的空间,Herz[1] 称之为 L^p- 正规的 L^1 鞅. 先回忆一下 L_1^p 的定义

$$L_1^p=\left\{f=\Sigma g_m\psi_m: g_m\in L^{p'}(\mathscr{F}_{k_m}),\ \psi_m\in L^p,\ E(\psi_m|\mathscr{F}_{k_m})=0,\text{且}\right.$$

$$\left.\|f\|_{L_1^p}=\inf\left\{\sum_m\|g_m\|_{p'}\|\psi_m\|_p\right\}<\infty\right\}.$$

首先叙述其几个初等性质. 显然，$E(f|\mathscr{F}_0)=0$, $\forall f\in L_1^p$. 因此当同时讨论其它的鞅时，宜区分 f_0 是否为 0 的两种情况. 此时仍设 $\mathscr{F}_0$ 平凡. 此外，显然有

$$L_1^1\subset L^1,\quad L_1^p\subset H_1,\quad 1<p\leqslant\infty.$$

事实上，这是因为 $\forall f\in L_1^p$, 级数 $f=\sum g_m\psi_m$ 在 L^1 中并且点态地绝对地收敛，故

$$f_n=\sum_{m:k_m<n}g_mE(\psi_m|\mathscr{F}_n),$$

$$f^*\leqslant\sum|g_m|\psi_m^*,\quad \|f\|_{H_1}\leqslant C\|f\|_{L_1^p}.$$

此外，若记

$$(L^p)_0=\{f\in L^p: E(f)=0\},$$

$$(L^p(\mathscr{F}_n))_0=\{f\in L^p(\mathscr{F}_n): E(f)=0\}.$$

则易知$(L^p)_0$连续地嵌入 $L_1^p(\|f\|_{L_1^p}\leqslant\|f\|_p)$, 且 $\bigcup\limits_n(L^p(\mathscr{F}_n))_0$ 在 L_1^p 中稠密. 后者是因若设 $f\in L_1^p$, $f=\sum g_m\psi_m$ 是其任一表示. 对任给的 $\varepsilon>0$, 选 N, M, K 充分大，使

$$\sum_1^M\|g_m-g_m\mathrm{II}(\{|g_m|\leqslant K\})\|_{p'}\|\psi_m\|_p\leqslant\frac{\varepsilon}{3},$$

$$\sum_1^M\|g_m\|_{p'}\|\psi_m-E(\psi_m|\mathscr{F}_N)\|_p\leqslant\frac{\varepsilon}{3},$$

$$\sum_{M+1}^\infty\|g_m\|_{p'}\|\psi_m\|_p\leqslant\frac{\varepsilon}{3},$$

则 $h=\sum\limits_1^M g_m\mathrm{II}(\{|g_m|\leqslant K\})E(\psi_m|\mathscr{F}_N)\in(L^p(\mathscr{F}_N))_0$, 且

$$\|f-h\|_{L_1^p}\leqslant\varepsilon.$$

注意，$\forall f\in\bigcup\limits_n(L^p(\mathscr{F}_n))_0$, f 的所有 L_1^p 允许表示都可以代之

以较特殊的形式. 事实上, 若设 $f\in(L^p(\mathscr{F}_n))_0$, 则

$$f=E(f|\mathscr{F}_n)=\sum_{m:k_m<n} g_m E(\psi_m|\mathscr{F}_n)$$

便是一个更好的 L_1^p 允许表示, 因为

$$E(\psi_m|\mathscr{F}_n)\in L^p,\quad E(E(\psi_m|\mathscr{F}_n)|\mathscr{F}_{k_m})=0,$$
$$\|E(\psi_m|\mathscr{F}_n)\|_p\leqslant\|\psi_m\|_p.$$

最后, L_1^p是 Banach 空间也是易知的. 下面只概述其完备性的证明. 设$\{f^{(n)}\}$是 Cauchy 序列, 选子序列$\{n_k\}$, 使

$$f^{(n_{k+1})}-f^{(n_k)}=\sum g_j^{(k)}\psi_j^{(k)}$$

满足

$$\sum\|g_j^{(k)}\|_{p'}\|\psi_j^{(k)}\|_p\leqslant\frac{1}{2^k},$$

则 $\sum\limits_0^\infty(f^{(n_{k+1})}-f^{(n_k)})$便在 L^1 中收敛于某 f, 且

$$f-f^{(n_k)}+f^{(n_0)}=\sum_{l=k}^\infty(f^{(n_{l+1})}-f^{(n_l)})$$
$$=\sum_{l=k}^\infty\sum_{j=1}^\infty g_j^{(l)}\psi_j^{(l)}$$

是 L_1^p 中元素, 在 L_1^p 中收敛于 0, 从而 $f-f^{(n)}+f^{(n_0)}$ 也在 L_1^p 中收敛于 0.

L_1^p 的较深入的一些性质, 已在 3.2 节的定理 4 中给出其中的一个, 即 $L_1^2=\Sigma_1$. 现再给出另外两个性质.

定理 7' 我们有 $L_1^\infty=\mathscr{D}_1$. 此即对每个 $f\in\mathscr{D}_1$都有 L_1^∞中的允许分解, 使

$$\sum\|g_m\|_1\|\psi_m\|_\infty\leqslant 6\|f\|_{\mathscr{D}_1}. \tag{24}$$

反之, 每个 L_1^∞ 中的元素都属于 $\mathscr{D}_1$, 且

$$\|f\|_{\mathscr{D}_1}\leqslant\|f\|_{L_1^\infty}. \tag*{(24)'}$$

证明 定理的前半已在定理 7 中证明了. 反之, $\forall f\in L_1^\infty$, 设

$f=\Sigma g_m\psi_m$ 是其任一表示，则

$$|f_n|\leqslant\sum_{m:k_m<n}|g_m|\,\|\psi_m\|_\infty=r_{n-1},$$

$$\begin{aligned}\|f\|_{\mathscr{P}_1}&=\inf\{E(r_\infty)\}\leqslant\inf\{\Sigma\|g_m\|_1\|\psi_m\|_\infty\}\\&=\|f\|_{L_1^\infty}.\ \blacksquare\end{aligned}$$

定理 8 设 $1<p\leqslant q\leqslant\infty$，则 $L_1^q\subset L_1^p$. 更确切而言，对每个 $f\in L_1^q$ 的任一表示 $\Sigma g_m\psi_m$，都存在 L_1^p 中的允许表示

$$\sum_m\sum_j\tilde{g}_j^{(m)}\tilde{\psi}_j^{(m)},$$

使得

$$\sum_m\sum_j\|\tilde{g}_j^{(m)}\|_{p'}\|\tilde{\psi}_j^{(m)}\|_p\leqslant 2^{1/p'}\sum_m\|g_m\|_{q'}\|\psi_m\|_q. \tag{25}$$

从而

$$\|f\|_{L_1^p}\leqslant 2^{1/p'}\|f\|_{L_1^q}. \tag{25$'$}$$

证明 只需证明，当 g,ψ 满足

$$g\in L^{q'}(\mathscr{F}_n),\quad \|g\|_{q'}=1,$$

$$\psi\in L^q,\quad E(\psi|\mathscr{F}_n)=0,\quad \|\psi\|_q=1,$$

则存在分解 $g\psi=\sum_j\tilde{g}_j\tilde{\psi}_j$，使得

$$\begin{aligned}&\tilde{g}_j\in L^{p'}(\mathscr{F}_n),\quad \tilde{\psi}_j\in L^p,\quad E(\tilde{\psi}_j|\mathscr{F}_n)=0,\\&\sum_j\|\tilde{g}_j\|_{p'}\|\tilde{\psi}_j\|_p\leqslant 2^{1/p'}.\end{aligned} \tag{25$''$}$$

设 g,ψ 如所设，$j\in\mathbf{Z}$. 令

$$B_j=\{2^j\leqslant|g|^{q'}<2^{j+1}\},$$

$$\begin{aligned}g\psi&=\sum_{j=-\infty}^{\infty}2^{j/p'}\mathrm{I\!I}(B_j)2^{-j/p'}\mathrm{I\!I}(B_j)g\psi\\&=\sum_j\tilde{g}_j\tilde{\psi}_j.\end{aligned}$$

显然，$\tilde{g}_j$ 关于$\mathscr{F}_n$ 可测，且

$$|\tilde{g}_j|^{p'}\mathrm{II}(B_j)=2^j\mathrm{II}(B_j)\leqslant|g|^{q'}\mathrm{II}(B_j),$$

$$E\left(\sum_j|\tilde{g}_j|^{p'}\right)\leqslant E(|g|^{q'})=1.$$

此外，显然又有

$$E(\tilde{\psi}_j|\mathscr{F}_n)=E(2^{-j/p'}g\psi\mathrm{II}(B_j)|\mathscr{F}_n)=0,$$

以及因为在 B_j 上有 $2^{-j}\leqslant2|g|^{-q'}$，因此有

$$\begin{aligned}\Sigma|\tilde{\psi}_j|^p&=\Sigma2^{-pj/p'}|g|^p|\psi|^p\mathrm{II}(B_j)\\&\leqslant2^{p/p'}|g|^{p-pq'/p'}|\psi|^p,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E\left(\sum_j|\tilde{\psi}_j|^p\right)&\leqslant2^{p/p'}E\left(|g|^{p\left(1-\frac{q'}{p'}\right)\left(1-\frac{p}{q}\right)^{-1}}\right)^{1-p/q}E(|\psi|^q)^{p/q}\\&=2^{p/p'}.\end{aligned}$$

从而

$$\Sigma\|\tilde{g}_j\|_{p'}\|\tilde{\psi}_j\|_p\leqslant(\Sigma\|\tilde{g}_j\|_{p'}^{p'})^{1/p'}(\Sigma\|\tilde{\psi}_j\|_p^p)^{1/p}\leqslant2^{1/p'}.\quad\blacksquare$$

3.5 对偶空间讨论

3.5.1 $\Sigma_p(0<p\leqslant2)$的对偶

首先引进鞅的 Lipschitz 条件($_2\Lambda^\beta$)，$\beta\geqslant0$，然后将 $-\infty\leqslant p<0$ 时的空间 $_2\mathscr{L}_p$ 与这个条件给出的空间（$_2\Lambda^\beta$）恒等，其中 $\beta=-1/p$.

定义 4 鞅 $f=(f_n)$满足Lipschitz条件($_2\Lambda^\beta$)，$\beta\geqslant0$，如果

$$\|f\|_{_2\Lambda^\beta}=\sup_n\|\omega_n^{-\beta}E(|f^{(n)}|^2|\mathscr{F}_n)^{1/2}\|_\infty<\infty,$$

其中 ω_n 是在$\mathscr{F}_n$ 的每个原子 I 上取值 $|I|$，其他的地方为 0 的函数.

例　考虑二进鞅情况. 此时每个长 2^{-n} 的第 n 次二进区间都

是 $\mathscr{F}_n$ 的原子，ω_n 便是取值 2^{-n} 的常值函数. 上述条件可表示为

$$\left(\frac{1}{|I|}\int_I |f-f_I|^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C2^{-n\beta},$$

$$\forall n, \forall n \text{ 阶二进区间 } I.$$

注 $\beta=0$ 时的条件 $({}_2\Lambda^0)$ 即为 JN_2 条件.

定理 9 设 $-\infty\leqslant p<0$, 或 $p=\infty$. 则鞅 $f=(f_n)\in({}_2\Lambda^\beta)$, 当且仅当 $f\in{}_2\mathscr{L}_p$, 其中 $1/p=-\beta\leqslant 0$. 更确切地有

$$\left(1-\frac{2}{p}\right)^{-\frac{1}{2}} {}_2\|f\|_p \leqslant \|f\|_{{}_2\Lambda^\beta} \leqslant {}_2\|f\|_p. \tag{26}$$

证明 设 $f\in{}_2\mathscr{L}_p$. 对任意的 $A\in\mathscr{F}_m$, 取 (g_n) 为

$$g_m=\frac{1}{|A|^{1/\alpha}}\mathrm{II}(A), \quad g_n=0, \text{当 } n\neq m,$$

则 $(g_n)\in G_2^p$. 由 ${}_2\mathscr{L}_p$ 范数的定义以及 $\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{2}-\frac{1}{p}$ 得

$$\left(|A|^{-2/\alpha}\int_A |f^{(m)}|^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant {}_2\|f\|_p,$$

$$\left(\frac{1}{|A|}\int_A E(|f^{(m)}|^2|\mathscr{F}_m)d\mu\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant {}_2\|f\|_p|A|^{-1/p}$$

$$= {}_2\|f\|_p|A|^\beta.$$

既然 $\beta\geqslant 0$, 因此当 A 不含 $\mathscr{F}_m$ 的原子时，若令 $|A|$ 充分小，则知 $E(|f^{(m)}|^2|\mathscr{F}_m)\mathrm{II}(A)$ 亦可充分小, 此即

$$E(|f^{(m)}|^2|\mathscr{F}_m)\mathrm{II}(A)=0, \quad \forall A\in\mathscr{F}_m, \ A \text{ 不含 } \mathscr{F}_m \text{ 的原子}.$$

同时当 A 为 $\mathscr{F}_m$ 的原子 I 时, 则有

$$\left(\frac{1}{|I|}\int_I E(|f^{(m)}|^2|\mathscr{F}_m)d\mu\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant {}_2\|f\|_p|I|^\beta.$$

这两方面事实说明

$$E(|f^{(n)}|^2|\mathscr{F}_n)^{1/2} \leqslant {}_2\|f\|_p\omega_n^\beta,$$

$$\|f\|_{{}_2\Lambda^\beta} = \sup\|\omega_n^{1/p}E(|f^{(n)}|^2|\mathscr{F}_n)^{1/2}\|_\infty \leqslant {}_2\|f\|_p.$$

反之,设 $f=(f_n)$ 满足条件 $({}_2\Lambda^\beta)$. 记 $C=\|f\|_{{}_2\Lambda^\beta}$. 则

$$
{}_2\|f\|_p=\sup_{(g_n)\in G_2^p} E(\Sigma|g_n|^2|f^{(n)}|^2)^{\frac{1}{2}}
$$

$$
\leqslant C\sup_{(g_n)\in G_2^p} E(\Sigma|g_n|^2\omega_n^{2\beta})^{\frac{1}{2}}.
$$

令

$$
r_n=\left(\sum_{k\leqslant n}|g_k|^2\right)^{\frac{q}{2}}.
$$

则

$$
\int_\Omega r_n d\mu\leqslant 1,\quad r_n\omega_n\leqslant 1,\quad \omega_n\leqslant r_n^{-1}.
$$

这样我们有

$$
\Sigma|g_n|^2\omega_n^{2\beta}\leqslant\Sigma(r_n^{1-2/p}-r_{n-1}^{1-2/p})r_n^{2/p}
$$

$$
=\Sigma\left(r_n^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)^2}-r_{n-1}^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)^2}\right)r_n^{\frac{p-2}{2p}(q-2)},
$$

其中 q 满足

$$
\frac{p-2}{2p}(q-2)=\frac{2}{p},\quad q=\frac{2p}{p-2}\leqslant 2,\quad \frac{p-2}{2p}q=1.
$$

故由 2.8 节的式(34)′得

$$
{}_2\|f\|_p\leqslant C\sup_{(r_n)\in R}\left(\frac{2}{q}\right)^{\frac{1}{2}}E(r_\infty)^{1/2}\leqslant C\left(\frac{2}{q}\right)^{\frac{1}{2}}
$$

$$
=C\left(1-\frac{2}{p}\right)^{\frac{1}{2}}. \blacksquare
$$

定理 10 对 $0<p\leqslant 2$, Σ_p的对偶是 ${}_2\mathscr{L}_{p'}$. 此即当 $1<p\leqslant 2$ 时, Σ_p的对偶是 $\Sigma_{p'}$; Σ_1 的对偶是 JN_2; 当 $0<p<1$ 时 Σ_p 的对偶是$({}_2\Lambda^\beta)$, $\beta=-1/p'$, 并且 ${}_2\mathscr{L}_{p'}$ 到Σ'_p的映射 $\varphi\to l_\varphi$ 满足

$$ {}_2\|\varphi\|_{p'} \leqslant \|l_\varphi\| \leqslant \left(\frac{2}{p}\right)^{\frac{1}{2}} {}_2\|\varphi\|_{p'}. \tag{27} $$

证明 如 3.2节指出的，我们有

$$ \Sigma_p = \{f: {}_2\|f\|_p < \infty\}, \quad 0 < p < \infty. $$

此外我们也有，$\forall f \in \boldsymbol{\Sigma}_p$, $\forall \varphi \in {}_2\mathscr{L}_{p'}$，以及 $\forall (r_n) \in R$,

$$ |E(\Sigma \Delta f_n \Delta \varphi_n)| \leqslant E(\Sigma |\Delta f_n| |\Delta \varphi_n|) $$

$$ \leqslant E(\Sigma r_{n-1}^{1-2/p} |\Delta f_n|^2)^{1/2} E(\Sigma r_{n-1}^{1-2/p'} |\Delta \varphi_n|^2)^{1/2}. \tag{28} $$

对任给的 $\varepsilon > 0$，选 $(r_n) \in R$，使

$$ E(\Sigma r_{n-1}^{1-2/p} |\Delta f_n|^2)^{1/2} \leqslant {}_2\|f\|_p + \varepsilon, $$

然后令 $\varepsilon \to 0$，即得

$$ |E(\Sigma \Delta f_n \Delta \varphi_n)| \leqslant {}_2\|f\|_p \; {}_2\|\varphi\|_{p'} $$

$$ \leqslant \left(\frac{2}{p}\right)^{\frac{1}{2}} \|\sigma(f)\|_p \; {}_2\|\varphi\|_{p'}. \tag{29} $$

这说明 ${}_2\mathscr{L}_{p'}$ 可连续地嵌入到$\Sigma_p (0 < p \leqslant 2)$ 的对偶内去，从而式(27)的右边不等式获证.

反之，既然 $L^2 = \Sigma_2 \subset \Sigma_p$, $0 < p \leqslant 2$，故Σ_p上每个连续线性泛函 l 也是 L^2 上的一个连续线性泛函．从而存在 $\varphi = (\varphi_n) \in L^2$，使得

$$ l(f) = E(\Sigma \Delta f_n \Delta \varphi_n), \quad \forall f \in L^2. $$

对任意固定的N, $\forall (r_n) \in R$，但使得每个 $r_n \in L^\infty$，都有

$$ E\left(\sum_1^N r_{n-1}^{1-2/p'} |\Delta \varphi_n|^2\right) = E\left(\sum_1^N r_{n-1}^{1-2/p'} \overline{\Delta \varphi_n} \Delta \varphi_n\right) $$

$$ = E\left(\sum_1^N \Delta f_n \Delta \varphi_n\right). \tag{30} $$

其中
$$ f = \sum_1^N r_{n-1}^{1-2/p'} \; \overline{\Delta \varphi_n} $$

是 L^2 中的鞅，并且

$$
{}_2\|f\|_p \leqslant E\left(\sum_1^N r_{n-1}^{1-2/p}\,|\,r_{n-1}^{1-2/p'}\Delta\varphi_n\,|^2\right)^{\frac{1}{2}}
$$

$$
= E\left(\sum_1^N r_{n-1}^{1-2/p'}\,|\,\Delta\varphi_n\,|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.
$$

由此，我们得

$$
E\left(\sum_1^N r_{n-1}^{1-2/p'}\,|\,\Delta\varphi_n\,|^2\right) = l(f) \leqslant \|l\|\,\|\sigma(f)\|_p
$$

$$
\leqslant \|l\|\ {}_2\|f\|_p
$$

$$
\leqslant \|l\| E\left(\sum_1^N r_{n-1}^{1-2/p'}\,|\,\Delta\varphi_n\,|^2\right)^{\frac{1}{2}},
$$

$$
{}_2\|\varphi\|_{p'} \leqslant \lim_N\ {}_2\|\varphi_N\|_{p'}
$$

$$
= \lim_N \sup_{(r_n)\in R,\, r_n\in L^\infty} E\left(\sum_1^N r_{n-1}^{1-2/p'}\,|\,\Delta\varphi_n\,|^2\right)^{\frac{1}{2}}
$$

$$
\leqslant \|l\|.
$$

因而证明了式(27)的左边不等式. ▮

3.5.2 $\Sigma_p(2\leqslant p<\infty)$的对偶

定理 11 $\Sigma_p(2\leqslant p<\infty)$ 的对偶是 $\Sigma_{p'}$. 并且 $\Sigma_{p'}$ 到Σ'_p的映射 $\varphi\to l_\varphi$ 满足

$$
\left(\frac{1}{p-1}\right)^{\frac{1}{2}}\|\sigma(\varphi)\|_{p'} \leqslant \|l\| \leqslant \left(\frac{2(p-1)}{p}\right)^{\frac{1}{2}}\|\sigma(\varphi)\|_{p'}. \qquad (31)
$$

证明 由式(28)知

$$
|E(\Sigma\Delta f_n\Delta\varphi_n)| \leqslant {}_2\|f\|_p\ {}_2\|\varphi\|_{p'}
$$

$$
\leqslant \left(\frac{2}{p'}\right)^{\frac{1}{2}}\|\sigma(\varphi)\|_{p'}\|\sigma(f)\|_p.
$$

这说明$\Sigma_{p'}$可连续地嵌入到Σ_p的对偶里去，因而式(31)的右边不等式获证．

反之，设l是Σ_p上的任意一个连续线性泛函．由$L^p\subset\Sigma_p$知，l也是L^p上的一个连续线性泛函．故存在$\varphi=(\varphi_n)\in L^{p'}$，使得

$$l(f)=E(\Sigma\Delta f_n\Delta\varphi_n),\quad \forall f\in L^p.$$

对任意固定的N，考虑φ的停止鞅φ_N．则$\varphi_N\in\Sigma_{p'}$，因为每个$\Delta\varphi_n$必满足

$$\rho_n=E(|\Delta\varphi_n|^2|\mathscr{F}_{n-1})^{1/2}\in L^{p'}.$$

事实上，若记

$$\rho_n^{(M)}=\rho_n \mathrm{II}(\{\rho_n\leqslant M\})=\rho_n\mathrm{II}(F),$$

则它关于$\mathscr{F}_{n-1}$可测，且我们有

$$\begin{aligned}E(\rho_n^{(M)p'})&=E(\rho_n^{p'-2}\rho_n^2\mathrm{II}(\{\rho_n\leqslant M\}))\\&=E(\rho_n^{p'-2}\mathrm{II}(F)E(|\Delta\varphi_n|^2|\mathscr{F}_{n-1}))\\&=E(\rho_n^{p'-2}\mathrm{II}(F)\overline{\Delta\varphi_n}\Delta\varphi_n).\end{aligned}$$

若令

$$f_m=0,\ \text{对}\ m<n;\quad f_m=\rho_n^{p'-2}\mathrm{II}(F)\overline{\Delta\varphi_n},\ \text{对}\ m\geqslant n.$$

则$f=(f_m)$是一个鞅，且

$$\begin{aligned}\sigma^2(f)&=\rho_n^{2(p'-2)}\mathrm{II}(F)E(|\Delta\varphi_n|^2|\mathscr{F}_{n-1})\\&=\rho_n^{(M)2(p'-1)},\end{aligned}$$

$$\|\sigma(f)\|_p=\|\rho_n^{(M)}\|_{p'}^{p'/p}.$$

这样由l的有界性得

$$\|\rho_n^{(M)}\|_{p'}^{p'}\leqslant\|l\|\|\sigma(f)\|_p=\|l\|\|\rho_n^{(M)}\|_{p'}^{p'/p},$$

$$\|\rho_n^{(M)}\|_{p'}\leqslant\|l\|,\quad \|\rho_n\|_{p'}\leqslant\|l\|.$$

于是$\varphi_N\in\Sigma_{p'}$获证．

再注意

$$\sigma(\varphi_N)=\sigma_N(\varphi),\quad \sigma_n(\varphi_N)=\sigma_n(\varphi),$$

并且过程

$$\left(\frac{1}{\|\sigma_N(\varphi)\|_{p'}^{p'}}\sigma_{n+1}^{p'}(\varphi)\right)_{n=0}^{N-1}\in R.$$

因而我们有

$$\|\sigma_N(\varphi)\|_{p'}^2\leqslant_2\|\varphi_N\|_{p'}^2$$

$$\leqslant E\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\|\sigma_N(\varphi)\|_{p'}^{p'-2}}\sigma_n^{p'-2}(\varphi)\,|\Delta\varphi_n|^2\right),$$

$$\|\sigma_N(\varphi)\|_{p'}^{p'}\leqslant E\left(\sum_{n=1}^{N}\sigma_n^{p'-2}(\varphi)\,\overline{\Delta\varphi_n}\,\Delta\varphi_n\right)$$

$$=E\left(\sum_{n=1}^{N}\Delta f_n\Delta\varphi_n\right), \tag{32}$$

其中 $f=\sum_{1}^{N}\sigma_n^{p'-2}(\varphi)\,\overline{\Delta\varphi_n}$ 是 Σ_p 中的鞅. 并且有

$$\sigma^2(f)=\sum_{n=1}^{N}\sigma_n^{2(p'-2)}(\varphi)E(|\Delta\varphi_n|^2|\mathscr{F}_{n-1})$$

$$=\sum_{n=1}^{N}\sigma_n^{2(p'-2)}(\varphi)(\sigma_n^2(\varphi)-\sigma_{n-1}^2(\varphi))$$

$$\leqslant\frac{2}{q}\sum_{n=1}^{N}(\sigma_n^q(\varphi)-\sigma_{n-1}^q(\varphi))=\frac{2}{q}\sigma_N^q(\varphi),$$

其中 q 满足

$$q-2=2(p'-2),\quad q=2p'-2\leqslant 2,\quad \frac{pq}{2}=p'.$$

我们得

$$\|\sigma(f)\|_p\leqslant\left(\frac{2}{q}\right)^{1/2}E(\sigma_N^{p'}(\varphi))^{1/p}=(p-1)^{1/2}\|\sigma_N(\varphi)\|_{p'}^{p'/p}.$$

再由式(32)即得(注意 $\|\sigma_N(\varphi)\|_{p'}<\infty$!)

$$\|\sigma_N(\varphi)\|_{p'}^{p'}\leqslant l(f)\leqslant(p-1)^{1/2}\|l\|\|\sigma_N(\varphi)\|_{p'}^{p'/p},$$

$$\|\sigma(\varphi)\|_{p'}\leqslant(p-1)^{1/2}\|l\|.$$

这就证明了式(31)的左边不等式. ∎

3.5.3 L_1^p $(1<p\leqslant\infty)$的对偶

遗憾地，在这一节我们未能完整地给出$(L_1^p)'$的刻划，只给出了部分结果.

定理12 设 $1<p<\infty$，则$(L_1^p)'$连续地嵌入 $\mathrm{JN}_{p'}$，并且$(L_1^p)'$到$\mathrm{JN}_{p'}$ 内的映射 $l\to\varphi$ 满足

$$\|\varphi\|_{\mathrm{JN}_{p'}}\leqslant 2\|l\|. \tag{33}$$

证明 既然$(L^p)_0$连续地嵌入 L_1^p，因此，每个 $l\in(L_1^p)'$也使得$l\in(L^p)_0'$. 于是，存在$L^{p'}$中模常数的等价类，无妨以条件 $\varphi_0=E(\varphi)=0$使之唯一化而成为$(L^{p'})_0$中元素 φ，使得

$$l(f)=E(f\varphi),\quad \forall f\in(L^p)_0. \tag{34}$$

但是由 3.3 节的引理 3 知

$$\|\varphi\|_{\mathrm{JN}_{p'}}={}_{p'}\|\varphi\|_\infty\leqslant 2\sup_{f\in F_{p'}^\infty}|E(f\varphi)|, \tag{34$'$}$$

其中

$$F_{p'}^\infty=\{f=\Sigma g_n\psi_n\text{ 有限和: } g_n\in L^\infty(\mathscr{F}_n), E(\Sigma|g_n|^{p'})^{1/p'}\leqslant 1, \psi_n\in L^p, E(\psi_n|\mathscr{F}_n)=0, E(\Sigma|\psi_n|^p)^{1/p}\leqslant 1\}.$$

由于 $F_{p'}^\infty$ 显然在$(L^p)_0$内，以及在 L_1^p 的单位球内，故式(34)$'$与(34)同时给出

$$\begin{aligned}{}_{p'}\|\varphi\|_\infty&\leqslant 2\sup_{f\in F_{p'}^\infty}|E(f\varphi)|\leqslant 2\sup_{f\in(L^p)_0,\ \|f\|_{L_1^p}\leqslant 1}|E(f\varphi)|\\&=2\sup_{f\in(L^p)_0,\ \|f\|_{L_1^p}\leqslant 1}|l(f)|\leqslant 2\|l\|.\end{aligned}$$

既然$(L^p)_0$在 L_1^p 中稠密，因此不可能有多个 l 与同一个φ对应. 这说明$(L_1^p)'$确实连续地嵌入(即一一地)于 $\mathrm{JN}_{p'}$. ∎

3.5.4 $\mathscr{D}_p(1\leqslant p\leqslant\infty)$的对偶的一个子空间的刻划

我们先证一个联系于$\mathscr{D}_p$与${}_1\mathscr{K}_{p'}$之间的不等式，这个不等式说明${}_1\mathscr{K}_{p'}$可以连续地嵌入到$\mathscr{D}_p$的对偶空间里去.

定理 13 $\forall f=(f_n)\in(L^\infty)_0\subset\mathscr{D}_p$与$\varphi=(\varphi_n)\in{}_1\mathscr{K}_{p'}$，$1\leqslant p\leqslant\infty$，有

$$|E(f\varphi)|\leqslant 6\|f\|_{\mathscr{P}_p}\ {}_1\|\varphi\|_{p'}. \tag{35}$$

证明 $p=\infty$时，$E(f\varphi)$绝对可积，且因为

$$\|f\|_{\mathscr{P}_\infty}=\|f\|_\infty,\quad \|\varphi\|_1\leqslant{}_1\|\varphi\|_1,$$

故式(35)成立，而且系数可取为1.

现设$1\leqslant p<\infty$. 先把 3.3 节的式 (19)′ 改写一下. 设$f=\Sigma g_m\psi_m$是有限和，满足

$$g_m\in L^\infty(\mathscr{F}_{k_m}),\quad E((\Sigma|g_m|)^p)^{1/p}<\infty,$$
$$E(\psi_m|\mathscr{F}_{k_m})=0,\quad \sup_m\|\psi_m\|_\infty<\infty.$$

则若记$g'_m=g_m/A$，$\psi'_m=\psi_m/B$，

$$A=E((\Sigma|g_m|)^p)^{1/p},\quad B=\sup_m\|\psi_m\|_\infty,$$

则

$$\frac{f}{AB}=\Sigma g'_m\psi'_m\in F^{p'}\ (3.3\text{ 节的式}(19)'\text{中的记号}).$$

故式(19)′的右边不等式可以改写为

$$\begin{aligned}|E(f\varphi)|&=AB\left|E\left(\frac{f}{AB}\varphi\right)\right|\\&\leqslant\sup_m\|\psi_m\|_\infty E((\Sigma|g_m|)^p)^{1/p}\ {}_1\|\varphi\|_{p'}.\end{aligned} \tag{19″}$$

现设$f\in(L^\infty)_0\subset\mathscr{D}_p$. 则由定理 7 及其后的注知，有分解$f=\Sigma g_m\psi_m$满足式(22)′与(22)″，且使

$$f_N=\sum_1^N g_m\psi'_m$$

有界地、几乎处处地收敛于 f. 既然 $\varphi\in{}_1\mathscr{K}_{p'}\subset L^1$, 因此

$$E(f\varphi)=\lim_{N\to\infty}E(f_N\varphi).$$

但如上面指出的$\frac{f_N}{AB}\in F^{p'}$, 故式(19)″给出

$$|E(f_N\varphi)|\leqslant\sup_m\|\psi_m\|_\infty E((\Sigma|g_m|)^p)^{1/p}{}_1\|\varphi\|_{p'}.$$

令 $N\to\infty$, 即得

$$|E(f\varphi)|\leqslant\frac{3}{2}4\|f\|_{\mathscr{P}_p}{}_1\|\varphi\|_{p'}=6\|f\|_{\mathscr{P}_p}{}_1\|\varphi\|_{p'}.\ ▮$$

注 正如 Bernard-Maisonneuve[1]指出的, ${}_1\mathscr{K}_\infty$一般不是$\mathscr{D}_1$的对偶. 同样地, ${}_1\mathscr{K}_{p'}$ 一般也不是 $\mathscr{D}_p$ 的对偶, 这由定理 6 后的注中的例子即可说明. 此时 ${}_1\mathscr{K}_{p'}=L^1$(模常数), 而同时 $\mathscr{D}_p=(L^\infty)_0$, $\forall p$. 因为此时对一切的 $f\in L^\infty$, $f_1=f$, 则 f_1 显然不能被 r_0 (=const)控制. 若概率空间选得合适, 则$(L^\infty)'\neq L^1$, 即证明了断言. 但若只考虑 $\mathscr{D}'_p$ 的子集 $\mathscr{D}'_p\cap L^1$, 则可清楚地刻划如下.

定理 14 对 $1\leqslant p\leqslant\infty$, 我们有 $\mathscr{D}'_p\cap L^1={}_1\mathscr{K}_{p'}$. 并且

$$\frac{1}{2}{}_1\|\varphi\|_{p'}\leqslant\|l_\varphi\|\leqslant6\ {}_1\|\varphi\|_{p'}.\tag{36}$$

证明 既然 ${}_1\mathscr{K}_{p'}\subset L^1$ 以及 ${}_1\mathscr{K}_{p'}\subset\mathscr{D}'_p$, 故 ${}_1\mathscr{K}_{p'}\subset\mathscr{D}'_p\cap L^1$. 且由式(35)知上式右边不等式成立.

反之, 设 $l_\varphi\in\mathscr{D}'_p\cap L^1$ 是由 L^1 中鞅$\varphi=(\varphi_n)$产生. 因为所有的 $f=\Sigma g_n\psi_n\in F_1^{p'}$ 都在 $\mathscr{D}_p$ 的单位球内(根据 $F_1^{p'}$ 的定义及定理 7), 故由 3.3 节的引理 3 知

$$\begin{aligned}{}_1\|\varphi\|_{p'}&\leqslant2\sup_{f\in F_1^{p'}}|E(f\varphi)|=2\sup_{f\in F_1^{p'}}|l_\varphi(f)|\\&\leqslant2\sup_{f\in F_1^{p'}}\|f\|_{\mathscr{P}_p}\|l_\varphi\|\leqslant2\|l_\varphi\|,\end{aligned}$$

由此证明了式(36)的左边不等式. ▮

3.6 $S(f)$与$\sigma(f)$的对比

本章主要以空间 Σ_p 为中心讨论了鞅的几个空间，当然也可以 $\widetilde{H}_p=\{f: S(f)\in L^p\}$ 为中心平行地展开讨论. 两种情况是有差别的，方法有时也不一样. 对前者，鞅变换的技巧往往可行；对后者，停止时间的讨论常常有效. 当然也有类似的地方. 这一节概括地给出与 $S(f)$ 有关的一些空间的结果，并与 $\sigma(f)$ 的情形作对比

对鞅 $f=(f_n)$，$f_0=0$，定义

$$_2\|f\|_p^*=\inf_{(r_n)\in R}E\left(\sum_{n=1}^{\infty}r_n^{1-2/p}|\Delta f_n|^2\right)^{1/2},\quad 0<p\leqslant 2;$$

$$_2\|f\|_p^*=\sup_{(r_n)\in R}E\left(\sum_{n=1}^{\infty}r_n^{1-2/p}|\Delta f_n|^2\right)^{1/2},$$

$$-\infty\leqslant p<0,\quad 2\leqslant p\leqslant\infty;$$

$$_2L_p=\{f=(f_n):{}_2\|f\|_p^*<\infty,\quad -\infty\leqslant p\leqslant\infty,\quad p\neq 0\}.$$

同样地，对 $1\leqslant a\leqslant p\leqslant\infty$，或 $-\infty\leqslant p<0$，定义

$$_aL_p=\{f=(f_n):{}_a\|f\|_p^*=\sup_{(g_n)\in\widetilde{G}_a^p}E(\Sigma|g_n|^a|f^{(n-1)}|^a)^{1/a}<\infty\},$$

其中 R 与 $\widetilde{G}_a^p$ 都是 3.1 节中定义的集合. 注意当 $a=2$ 时，两种定义是等价的.

Lipschitz 条件$({}_b\Lambda^\beta)^*$定义如下，$1\leqslant b<\infty$，$\beta\geqslant 0$，

$$\|f\|_{{}_b\Lambda^\beta}^*=\sup_n\|\omega_n^{-\beta}E(|f^{(n-1)}|^b|\mathscr{F}_n)^{1/b}\|_\infty<\infty,$$

其中 ω_n 如 3.5.1 中定义.

对 $1\leqslant a\leqslant p\leqslant\infty$，$a<\infty$，${}_aK_p$ 的定义如 2.1 节.

注意，所有这些对象的定义与以前相对应的定义的差别，只是将以前的定义中出现的 $f^{(n)}$ 换为 $f^{(n-1)}$，以及 r_{n-1} 换为 r_n，其它的完全一样.

有关这些空间的结果如下.

命题 1 我们有

$$\left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{1}{2}}{}_2\|f\|_p^*\leqslant\|S(f)\|_p\leqslant{}_2\|f\|_p^*,\quad 0<p\leqslant 2,$$

$$\left(\frac{2}{p}\right)^{\frac{1}{2}}\|S(f)\|_p\leqslant{}_2\|f\|_p^*\leqslant\|S(f)\|_p,\quad 2\leqslant p<\infty.$$

命题 2 设 $-\infty\leqslant p<0$, $1\leqslant b<\infty$. 记 $\beta=-1/p$. 则 ${}_bL_p=({}_b\Lambda^\beta)^*$. 且

$$\left(\frac{1}{1+b\beta}\right)^{\frac{1}{b}}{}_b\|f\|_p^*\leqslant\|f\|_{{}_b\Lambda^\beta}^*\leqslant{}_b\|f\|_p^*. \tag{26'}$$

命题 3 对 $1\leqslant a\leqslant p\leqslant\infty$, 但排除 $a=\infty$ 以及 $a=p=1$, 有

$${}_aL_p={}_aK_p.$$

且类似于式(13)的不等式成立(仅第二个系数稍作修改).

命题 4 设 $1\leqslant a\leqslant p<\infty$, 但排除 $a=p=1$, 则有

$${}_1K_p={}_aK_p=L^p.$$

注 这个结果与以前的情形没有对应, 即可以发生

$${}_a\mathscr{K}_p=L^a={}_a\mathscr{K}_\infty=\mathrm{JN}_a$$

的情况, 因此当 $p>a$ 时, ${}_a\mathscr{K}_p$ 中元素可以不局部的属于 L^p.

3.7 鞅的不等式一览

关于 f^*, $S(f)$ 与 $\sigma(f)$:

$\|f^*\|_p\leqslant p'\|f\|_p$, $1<p<\infty$ (Doob, 2.1 节的定理2);

$$\left.\begin{array}{l}\|f^*\|_p\leqslant\sqrt{10p}\|S(f)\|_p,\quad 1\leqslant p\leqslant 2,\\ \|S(f)\|_p\leqslant 5\|f^*\|_p,\quad 1\leqslant p\leqslant 2\end{array}\right\}\text{(Garsia[1])};$$

$\|f^*\|_p\leqslant 5pp'\|S(f)\|_p$, $2\leqslant p$ (Garsia[1]);

$\|f^*\|_p\leqslant\sqrt{2ep}\|S(f)\|_p$, $4\leqslant p$ (2.4 节的引理4);

$\|S(f)\|_p\leqslant\sqrt{2p}\|f^*\|_p$, $2\leqslant p$ (Garsia[1]);

$$\left.\begin{aligned}&\|S(f)\|_p\leqslant\sqrt{\frac{2}{p}}\|\sigma(f)\|_p,\ 0<p\leqslant 2,\\&\|f^*\|_p\leqslant 4\sqrt{\frac{2}{p}}\|\sigma(f)\|_p,\quad 0<p\leqslant 2\end{aligned}\right\}\text{(Garsia[1]);}$$

$$\|\sigma(f)\|_p\leqslant\sqrt{\frac{p}{2}}\|S(f)\|_p,\quad 2\leqslant p\ \text{(4.2节的定理 3 注);}$$

$$\|\sigma(f)\|_p\leqslant\sqrt{\frac{p}{2}}\|f\|_p,\quad 2\leqslant p\ \text{(4.2 节的定理 3' 注);}$$

关于空间 ${}_aK_p, {}_aL_p$ 与函数 $S(f), f^*$（与 $\sigma(f)$ 相对应的结果从略）:

$$\left.\begin{aligned}&{}_a\|f\|_\infty^*=\|f\|_{{}_aK_\infty},\\&\|f\|_p\leqslant{}_p\|f\|_p^*\leqslant\|f\|_{{}_pK_p}\leqslant 2p'\|f\|_p,\\&\qquad 1<p<\infty\,(f_0=0),\\&{}_a\|f\|_p^*\leqslant\|f\|_{{}_aK_p}\leqslant\left(\left(\frac{p}{a}\right)'\right)^{1/a}{}_a\|f\|_p^*,\\&\qquad 1\leqslant a<p<\infty\end{aligned}\right\}\text{(3.6 节的命题 3);}$$

$$\frac{1}{2}\|f\|_{{}_aK_p}\leqslant\|f^*\|_p\leqslant p\left(\frac{ep}{p-a}\right)^{1/a}\|f\|_{{}_aK_p},$$

$$1\leqslant a<p<\infty\ \text{(2.4 节的定理 7);}$$

$$\left.\begin{aligned}&\sqrt{\frac{p}{2}}{}_2\|f\|_p^*\leqslant\|S(f)\|_p\leqslant{}_2\|f\|_p^*,\quad 0<p\leqslant 2,\\&\sqrt{\frac{2}{p}}\|S(f)\|_p\leqslant{}_2\|f\|_p^*\leqslant\|S(f)\|_p,\quad 2\leqslant p\end{aligned}\right\}\text{(3.6 节的命题 1).}$$

关于 Σ_1 与 L_1^2:

$$\|\sigma(f)\|_1\leqslant\|f\|_{L_1^2}\leqslant\sqrt{2}\|\sigma(f)\|_1\qquad\text{(3.2 节的定理 4).}$$

关于 $H_p(1\leqslant p<\infty)$ 的 Davis 分解 $f=g+h$:

$$\left.\begin{aligned}&\|g\|_{\mathscr{G}_p}\leqslant(13+14p)\|f\|_{H_p},\\&\|h\|_{\mathscr{A}_p}\leqslant(4+4p)\|f\|_{H_p}\end{aligned}\right\}\text{(2.6 节的定理 9).}$$

关于 $\mathscr{P}_1$ 的原子分解 $f=\Sigma\lambda_j a_j$:

$$\frac{1}{4}\Sigma\lambda_j\leqslant\|f\|_{\mathscr{P}_1}\leqslant\Sigma\lambda_j \text{ (2.7 节的定理 11)}.$$

关于 $\mathscr{P}_p$ 的分解 $f=\Sigma g_m\psi_m$:

$$\left.\begin{array}{l} g_m\geqslant 0,\ g_m\in L^\infty(\mathscr{F}_{k_m}),\ E(\psi_m|\mathscr{F}_{k_m})=0, \\ E((\Sigma g_m)^p)^{1/p}\leqslant 4\|f\|_{\mathscr{P}_p}, \\ \sup\limits_m\|\psi_m\|_\infty\leqslant\dfrac{3}{2} \end{array}\right\}\text{(3.4 节的定理 7)}.$$

关于联系对偶空间的不等式:

$$|E(f\varphi)|\leqslant\sqrt{\frac{2}{p}}\|S(f)\|_p\|\varphi\|_{2K_{p'}},\quad 1\leqslant p\leqslant 2$$

(Fefferman, 2.3 节的定理 3);

$$|E(f\varphi)\leqslant\sqrt{\frac{2}{p}}\|\sigma(f)\|_p\|\varphi\|_{2\mathscr{K}_{p'}},\quad 1\leqslant p\leqslant 2$$

(3.2 节的引理 1);

$$|E(f\varphi)|\leqslant 4\|f\|_{\mathscr{P}_1}\|\varphi\|_{\mathrm{JN}_1} \text{ (2.7 节的命题 3)};$$

$$|E(f\varphi)|\leqslant 6\|f\|_{\mathscr{P}_{p,1}}\|\varphi\|_{p'},\quad 1\leqslant p\leqslant\infty$$

(3.5.4 的定理 13),

$$\frac{1}{2}\|\varphi\|_{1\Lambda^\alpha}\leqslant\sup_{a:\,p\text{-原子}}|E(a\varphi)|\leqslant\|\varphi\|_{1\Lambda^\alpha},$$

$$0<p\leqslant 1,\quad \alpha=\frac{1}{p}-1 \text{ (7.3.3 的引理 6)}.$$

关于 BMO:

$$\sup_n\|E(\exp(\alpha|f-f_n|)|\mathscr{F}_n)\|_\infty\leqslant K_\alpha<\infty,$$

$$\forall\alpha<(e\|f\|_{\mathrm{BMO}_1})^{-1} \text{ (5.1 节的定理 1)};$$

$$E(\exp(\alpha S^2(f)))<\infty,\quad\forall\alpha<(\|f\|_{\mathrm{BMO}_2})^{-2}$$

(5.1 节的定理 1′);

$$\frac{1}{e\alpha_f}\leqslant\mathrm{dist}(f,L^\infty)\leqslant\frac{C}{\alpha_f},\quad\forall f\in\mathrm{BMO} \text{ (5.3 节的定理 5)}.$$

关于 Φ-不等式从略(见第四章).

章后注记

3.1 节 ${}_a\mathscr{K}_p$的定义平行于 Garsia[1]对 ${}_aK_p(a=1,2)$的定义; ${}_a\mathscr{L}_p$ 的定义属于 Herz[2]. L_1^p 是 Herz[1]中的空间 ${}_pL_1$.

3.2 节 定理 1, 2 属于Herz[2]. 正是这个思想被 Garsia[1]用来证明 Fefferman 定理. 定理 4 属于 Herz[1].

3.3 节 定理 5 是第四章中对应的 Φ-不等式的特殊情形, 结果属于 Long[6]. 引理 3 与定理 6 也属于 Herz[2].

3.4 节 定理 7′ 属于 Herz[1]. 正是C. Herz的这篇文章与C. Fefferman, R. R. Coifman 等人的文章(或未发表的作品)一起构成了"原子"概念的发源地. 定理 7 是由作者第一次这样明确地叙述(借鉴于定理 7′). 定理 8 也可以说属于 C. Herz. 他也许正是从这里开始统一地定义了空间 ${}_a\mathscr{L}_p$.

3.5节 分四个部分说明:

3.5.1 Lipschitz 类是 Herz[2] 引进的, 定理 9, 10, 11 属于 Herz[2]. 但对于 $0<p\leqslant 2$ 的情形, 为了证明 $\Sigma'_p\subset {}_2\mathscr{L}_{p'}$, Herz[2] 使用了抽象语言. 他的处理不如本书的方法直接与初等, 而且也没有给出形如(27)的明显估计.

3.5.2 Herz[2] 没有正面讨论 $p>2$ 时的情形, 而是利用 Σ_p (当 $p>1$ 时) 是自反 Banach 空间这一断言而得到结论. 他既没有证明 Σ_p 当 $p>1$ 时是自反的, 也没有得到形如式(31)的估计.

3.5.3 Herz[1] 证明定理 12 时用了很抽象的语言, 也没有得到式(33)的估计. 但是 Herz[1] 还得到了

$$|E(f\varphi)|\leqslant\|f\|_{L_1^p}\|\varphi\|_{\mathrm{JN}_{p'}},\quad \forall f\in L_1^p, \forall\varphi\in\mathrm{JN}_{p'}.$$

不过对上面的不等式所给出的证明似乎不太严格, 因对 $E(f\varphi)$没

有给出明确的定义.

3.5.4 定理 13 属于 Garsia[1]. 不过他所得到的不等式中的系数比本书所给的稍差一些:

$$|E(f\varphi)|\leqslant(4+4\log 2)\|f\|_{\mathscr{P}_p}\|\varphi\|_{1\mathscr{K}_{p'}}.$$

定理 14 在本书以前未曾见诸文字, 但 Bernard-Maisonneuve[1]建立了 $p=1$ 时的结果.

3.6 节 我们知道 ${}_1\mathscr{K}_1={}_1\mathscr{L}_1=L^1$, 但一般并没有 ${}_1K_1={}_1L_1=L^1$. 对此, Garsia[1]曾提出如下的问题: 是否可由

$$f^{\#}=\sup_n E(|f-f_{n-1}||\mathscr{F}_n)\in L^1$$

推出 $f\in H_1$? Garsia[1] 断言这是不可能的. 实际上他的断言是不正确的. 他所给出的理由只能说明由"$f\in H_1$"推不出"$f^{\#}\in L^1$"; 而不能说明由"$f^{\#}\in L^1$"推不出"$f\in H_1$". 我们将在第四章给出上述问题的肯定回答, 即: 对任意限制增长的函数 $\Phi(u)$, 由"$f^{\#}\in L^{\Phi}$"能推出 $|f|^*\in L^{\Phi}$!

第四章　鞅的Φ-不等式

在鞅的几个主要算子(极大算子、均方根算子、条件均方根算子)之间除存在着L^p不等式以外,还存在更一般的Φ-不等式.所谓Φ-不等式,主要有凸Φ、某种意义下的严格凸Φ、凹Φ,以及一般Φ等四种形式. 本章中除考虑鞅的这四种形式的Φ-不等式以外,还将充分讨论Φ-不等式本身的一些性质. 这些性质对鞅论以外的其他分析领域是有用的.

本章仍假设$\mathscr{F}_0$为平凡的,以及只考虑$f_0=0$的鞅. 但我们将指出哪些结论可以不要这样的限制.

4.1　限制增长的 Young 凸函数

设$\Phi(u)$是$\mathbf{R}^+$到$\mathbf{R}^+$的增加凸函数, $\Phi(0)=0$. 规范化$\varphi(u)$ $(=\Phi'(u))$为左连续,$\varphi(0)=\varphi(0^+)$. $\Phi(u)$称为限制增长的函数,若存在常数C,使

$$\Phi(2u)\leqslant C\Phi(u),\quad \forall u>0;$$

称为 Young 函数,若

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\Phi(u)}{u}=\infty.$$

定义$\varphi(t)$的左连续逆函数如下:

$$\psi(s)=\inf\{t:\varphi(t)\geqslant s\}.$$

当$\Phi(u)$为 Young 函数时,$\varphi(t)\nearrow\infty$, 此时$\psi(s)$是处处有限的,函数

$$\Psi(v)=\int_0^v \psi(s)\,ds$$

称为 $\Phi(u)$的 Young 补函数. 对上述凸函数 Φ, 定义

$$p=\sup_u \frac{u\varphi(u)}{\Phi(u)},\quad q=\inf \frac{u\varphi(u)}{\Phi(u)},\quad q'=\frac{q}{q-1}. \tag{1}$$

命题 1 设 $\Phi(u)$是 R^+到R^+的增加凸函数, 满足 $\Phi(0)=0$. (当下面的结论中出现Ψ时, 自然假设Φ是 Young 函数.)则我们有

1) $uv\leqslant\Phi(u)+\Psi(v)$, 且等号成立当且仅当 $u=\psi(v)$, 或者 $v=\varphi(u)$.

2) $\Phi(\lambda u)\leqslant\lambda\Phi(u)$, $\forall\lambda\leqslant 1$.

3) 下面性质 a), b), c)等价, 并且 d)成立:

a) Φ 是限制增长的, 即

$$C=\sup\frac{\Phi(2u)}{\Phi(u)}<\infty \qquad (C\text{ 称为}\Phi\text{的限制增长系数});$$

b) 存在 $a>1$, 使

$$\sup\frac{\Phi(au)}{\Phi(u)}<\infty;$$

c) Φ 的如式(1)中定义的上指数 p 有限;

d) 当Φ是限制增长函数时, $p\leqslant C-1$; 而当Φ是Young 函数时, $p>1$.

4) Φ 的Young 补函数Ψ是限制增长的, 当且仅当 $q_\Phi>1$, 且任何情形下总有 $p_\Psi=q'_\Phi$.

5) 当 $p<\infty$ 时, $\forall\lambda\geqslant 1$, 有

$$\Phi(\lambda u)\leqslant\lambda^p\Phi(u).$$

6) 当 $p<\infty$ 时, $\Phi(u)/u^p$ 是 u 的下降函数; 当 $q<\infty$ 时, $\Phi(u)/u^q$ 是 u 的增加函数.

7) 当 $p<\infty$ 时,

$$\Psi(v) \leqslant (p-1)\Phi(\psi(v)).$$

证明

1）此即 Young 不等式. 将 $\Phi(u)$, $\Psi(v)$ 分别解释为由曲线 $v=\varphi(u)$, 或 $u=\psi(v)$ 与坐标轴所围的面积即得.

2）对点 $0, u$, 以及其中间点 λu, 利用凸性的定义, 注意 $\Phi(0)=0$, 即得.

3）a)与 b)等价是显然的. 现设 a)成立, 则有

$$u\varphi(u) \leqslant \int_u^{2u} \varphi(t)dt = \Phi(2u) - \Phi(u) \leqslant (C-1)\Phi(u).$$

这说明 $p \leqslant C-1 < \infty$, 于是 c)获证. 反之, 设 c)成立, 则

$$p\Phi(u) \geqslant u\varphi(u) \geqslant (p+1)\int_{\frac{p}{p+1}u}^{u} \varphi(t)dt$$

$$= (p+1)\left(\Phi(u) - \Phi\left(\frac{p}{p+1}u\right)\right),$$

$$\Phi(u) \leqslant (p+1)\Phi\left(\frac{p}{p+1}u\right),$$

$$\Phi\left(\frac{p+1}{p}u\right) \leqslant (p+1)\Phi(u),$$

这说明b)成立. 以上完成了 a), b), c)互相等价的证明.

最后只剩下 d) 中 $p>1$ 的证明. 这因当Φ是 Young 函数时, 有

$$u\varphi(u) = \Phi(u) + \Psi(\varphi(u)), \tag{2}$$

从而

$$p = \sup \frac{\Phi(u) + \Psi(\varphi(u))}{\Phi(u)} > 1.$$

5）由 $\dfrac{u\varphi(u)}{\Phi(u)} \leqslant p$, 得

$$\int_u^{\lambda u} \frac{d\Phi(t)}{\Phi(t)} \leqslant p\int_u^{\lambda u} \frac{dt}{t},$$

$$\log\frac{\Phi(\lambda u)}{\Phi(u)}\leqslant\log\lambda^p,\qquad \Phi(\lambda u)\leqslant\lambda^p\Phi(u).$$

6) 由 5)即得

$$\frac{\Phi(\lambda u)}{(\lambda u)^p}\leqslant\frac{\Phi(u)}{u^p},\qquad \forall\lambda\geqslant1,\ u>0,$$

由此证明了 $\Phi(u)/u^p$ 的下降性. 类似地, 有

$$\frac{u\varphi(u)}{\Phi(u)}\geqslant q\Rightarrow \Phi(\lambda u)\geqslant\lambda^q\Phi(u)\Rightarrow\frac{\Phi(\lambda u)}{(\lambda u)^q}\geqslant\frac{\Phi(u)}{u^q},$$

$$\forall\lambda\geqslant1,\quad u>0,$$

这证明了 $\Phi(u)/u^q$ 的增加性.

7) 利用 4), 我们有 $q'_\Psi=p_\Phi<\infty$. 由与式(2)相类似的式

$$v\psi(v)=\Psi(v)+\Phi(\psi(v)),\tag{2}'$$

便得

$$v\psi(v)-\Phi(\psi(v))=\Psi(v)\leqslant\frac{1}{q_\Psi}v\psi(v),$$

$$v\psi(v)\leqslant q'_\Psi\Phi(\psi(v))=p_\Phi\Phi(\psi(v)).$$

代入式(2)′即得 $\Psi(v)\leqslant(p_\Phi-1)\Phi(\psi(v))$.

4) 先证 $p_\Psi\leqslant q'_\Phi$. 设 $q_\Phi>1$. 则由式(2)′以及

$$\Phi(\psi(v))\leqslant\frac{\psi(v)\varphi(\psi(v))}{q_\Phi},$$

推出

$$v\psi(v)-\Psi(v)\leqslant\frac{\psi(v)\varphi(\psi(v))}{q_\Phi}.$$

既然由左连续性总有 $\varphi(\psi(v))\leqslant v$, $\forall v$ 成立, 因而有

$$v\psi(v)-\Psi(v)\leqslant\frac{v\psi(v)}{q_\Phi},$$

$$v\psi(v)\leqslant q'_\Phi\Psi(v).$$

这证明了 Ψ 是限制增长的, 且 $p_\Psi\leqslant q'_\Phi<\infty$.

现证 $q'_\Phi\leqslant p_\Psi$. 设 Ψ 是限制增长的(则 $1<p_\Psi<\infty$), 此即 $\forall v\in$

R^+, $v\psi(v)\leqslant p_\Psi \Psi(v)$. 考虑 $v+\varepsilon$, 然后令 $\varepsilon\to 0$, 即得

$$v\psi(v^+)\leqslant p_\Psi \Psi(v). \tag{3}$$

既然 $\varphi(u)$ 是左连续增加的，故 φ 的取常数值的区间系是 $\{(a_i, b_i]\}_1^\infty$. 对 $u\in(a_i, b_i]$, 令 $v=\varphi(u)$, 则 $u\leqslant b_i=\psi(v^+)$; 对 $u=a_i$, 令 $v=\varphi(a_i)$, 也有 $a_i=\psi(v^+)$. 这样对 $u\in[a_i, b_i]$, 式(3)给出

$$u\varphi(u)\leqslant v\psi(v^+)\leqslant p_\Psi \Psi(v)=p_\Psi \Psi(\varphi(u)). \tag{3$'$}$$

至于对所有 $u\in\bigcup\limits_i [a_i, b_i]$, 易知都有 $v\in R^+$, 使 $v=\varphi(u)$, 且 $u=\psi(v)$. 因而当然也有式(3)$'$. 但是根据式(2), 我们有

$$\Phi(u)\leqslant\frac{u\varphi(u)}{C}\Longleftrightarrow u\varphi(u)-\Psi(\varphi(u))\leqslant\frac{u\varphi(u)}{C}$$

$$\Longleftrightarrow u\varphi(u)\leqslant C'\Psi(\varphi(u)). \tag{4}$$

于是我们证明了, 对 $C=p'_\Psi$, 有

$$p'_\Psi\leqslant\frac{u\varphi(u)}{\Phi(u)},$$

此即 $1<p'_\Psi\leqslant q_\Phi$, 或 $q'_\Phi\leqslant p_\Psi<\infty$. ∎

注 Dellacherie[1] 是用右连续性来规范 $\varphi(t)$, $\psi(s)$的. 他只证明了 4)中断言的一半，对另一半只是作为一个问题提出，未加讨论. 当然这两种规范化不会有本质差别. 既然他的问题是对右连续情形提出的, 现在我们也给出右连续时的证明.

设Ψ是限制增长的，证明 $1<p'_\Psi\leqslant q_\Phi$成立. 根据右连续性, 总有

$$u\leqslant\psi(\varphi(u)),\quad \forall u\in R^+.$$

故若令 $v=\varphi(u)$, 利用Ψ的限制增长性, 则得

$$u\varphi(u)\leqslant v\psi(v)\leqslant p_\Psi\Psi(v)=p_\Psi\Psi(\varphi(u)).$$

于是根据式(4) 即得 $p'_\Psi\leqslant\dfrac{u\varphi(u)}{\Phi(u)}$. 由此得 $1<p'_\Psi\leqslant q_\Phi$.

反之, 设 $q_\Phi>1$, 证明 $p_\Psi\leqslant q'_\Phi<\infty$成立. 由于 $\psi(v)$的右连续

增加性，故它的取常数值的区间系是$\{[a_i,b_i)\}_1^\infty$. 对于$v\in\bigcup_i[a_i,b_i]$，易知总存在$u\in\boldsymbol{R}^+$，使$v=\varphi(u)$，并且$u=\psi(v)$. 那末利用式(4)，得

$$v\psi(v)=u\varphi(u)\leqslant q'_\Phi\Psi(\varphi(u))=q'_\Phi\Psi(v).$$

为了对于$v=a_i$或$v=b_i$证明上述不等式也成立，我们先由$q_\Phi>1$，得到与式(3)类似的下式

$$u\varphi(u^-)\leqslant q'_\Phi\Psi(\varphi(u^-)). \tag{3)''$$

这只需根据(4)，先考虑$u-\varepsilon$，然后令$\varepsilon\to0$即得. 现设$v=a_i$(或$v=b_i$，两种情况是完全一样的)，令$u=\psi(a_i)$，则$a_i=\varphi(u^-)$. 于是式(3)″给出

$$a_i\psi(a_i)\leqslant q'_\Phi\Psi(\varphi(u^-))=q'_\Phi\Psi(a_i).$$

现只剩下需要考虑$v\in\bigcup_i(a_i,b_i)$的情形. 而这是如下初等事实，以及对$v=a_i$的上述不等式的结果. 这个初等事实是：设$\Psi(v)$是$\boldsymbol{R}^+$到$\boldsymbol{R}^+$的增加凸函数，$\psi(v)=\Psi'(v)$为右连续的. 又设$[a,b)$是$\psi(v)$的取常数值的任何一个区间. 且设存在常数$A\geqslant1$，使$a\psi(a)\leqslant A\Psi(a)$，则$\forall v\in[a,b)$，也有$v\psi(v)\leqslant A\Psi(v)$. 事实上，因为

$$\begin{aligned}v\psi(v)&=(a+v-a)\psi(a)\leqslant A\Psi(a)+\int_a^v\psi(s)ds\\&\leqslant A\int_0^v\psi(s)ds=A\Psi(v).\end{aligned}$$

于是我们便完成了$\forall v\in\boldsymbol{R}^+$，$v\psi(v)\leqslant q'_\Phi\Psi(v)$的证明，此即$p_\Psi\leqslant q'_\Phi<\infty$. ▌

现在对上述凸函数Φ定义 Orlicz 空间及其Φ-范数如下. 对可测函数f，定义

$$\|f\|_\Phi=\inf\left\{\lambda>0:\ E\left(\Phi\left(\frac{|f|}{\lambda}\right)\right)\leqslant1\right\}, \tag{5}$$

$$L^{\Phi}=\{f:\ \|f\|_{\Phi}<\infty\}.$$

$\|\cdot\|_{\Phi}$ 显然是正齐性的. 此外，它的次可加性是由于 Φ 的凸性:

$$\Phi\left(\frac{|f+g|}{a+b}\right)\leqslant\frac{a}{a+b}\Phi\left(\frac{|f|}{a}\right)+\frac{b}{a+b}\Phi\left(\frac{|g|}{b}\right)$$

而得. 因此若选 a，使

$$E\left(\Phi\left(\frac{|f|}{a}\right)\right)\leqslant 1,\quad a\leqslant\|f\|_{\Phi}+\varepsilon;$$

类似地，选 b，则有

$$E\left(\Phi\left(\frac{|f+g|}{a+b}\right)\right)\leqslant 1.$$

从而 $\|f+g\|_{\Phi}\leqslant a+b$. 令 $\varepsilon\to 0$，即得三角不等式. 这样 $\|\cdot\|_{\Phi}$ 是一个范数. 这个范数与另一个通常范数是等价的:

$$N_{\Phi}(f)=\sup_{g:E(\Psi(|g|))\leqslant 1}|E(fg)|. \tag{6}$$

关于上面两个范数，我们今后需要用到如下事实:

$$\left.\begin{aligned}
&\|f\|_{\Phi}\leqslant N_{\Phi}(f)\leqslant 2\|f\|_{\Phi},\\
&E\left(\Phi\left(\frac{f}{\|f\|_{\Phi}}\right)\right)\leqslant 1,\\
&E\left(\Phi\left(\frac{f}{N_{\Phi}(f)}\right)\right)\leqslant 1,\\
&|E(fg)|\leqslant\max(E(\Psi(|g|)),1)N_{\Phi}(f).
\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

这些事实的证明，可见 Zygmund[1].

4.2 鞅的凸 Φ-不等式

引理 1 设 W, Y 是非负随机变量, $\Phi(u)$ 是 R^+ 到 R^+ 的增加凸函数, $\Phi(0)=0$, 且规范化 $\varphi(u)(=\Phi'(u))$ 为左连续的, $\varphi(0)=\varphi(0^+)$. 则下述两不等式等价

$$\int_{\{W>\lambda\}}(W-\lambda)d\mu\leqslant\int_{\{W>\lambda\}}Y d\mu,\quad\forall\lambda>0, \tag{8}$$

$$\int_{\Omega}\Phi(W)d\mu\leqslant\int_{\Omega}\varphi(W)Yd\mu,\quad \forall\text{ 这样的 }\Phi. \tag{9}$$

证明 在式(9)中令 $\varphi(u)=\mathrm{II}(\{u>\lambda\})$，则 $\Phi(u)=(u-\lambda)^+$，故

$$\int_{\{W>\lambda\}}(W-\lambda)d\mu=\int_{\Omega}\Phi(W)d\mu$$

$$\leqslant\int_{\Omega}\varphi(W)Yd\mu=\int_{\{W>\lambda\}}Yd\mu.$$

即由式(9)推出了式(8).

对式(8)两边关于测度 $d\varphi(\lambda)$ 积分，得

$$\int_0^{\infty}\int_{\{W>\lambda\}}(W-\lambda)d\mu d\varphi(\lambda)\leqslant\int_0^{\infty}\int_{\{W>\lambda\}}Yd\mu d\varphi(\lambda).$$

应用 φ 的左连续性，上面不等式的左边是

$$\int_{\Omega}\int_0^{W^-}(W-\lambda)d\varphi(\lambda)d\mu$$

$$=\int_{\Omega}\left\{(W-\lambda)\varphi(\lambda)\Big|_0^{W^-}+\int_0^{W^-}\varphi(\lambda)d\lambda\right\}d\mu$$

$$=\int_{\Omega}\{\Phi(W)-\varphi(0)W\}d\mu;$$

右边是

$$\int_{\Omega}Y\int_0^{W^-}d\varphi(\lambda)d\mu=\int_{\Omega}\{Y\varphi(W)-\varphi(0)Y\}d\mu.$$

此外，显然式(8)对 $\lambda=0$ 也成立，故

$$\int_{\Omega}\Phi(W)d\mu\leqslant\int_{\Omega}Y\varphi(W)d\mu+\varphi(0)\int_{\Omega}Wd\mu-\varphi(0)\int_{\Omega}Yd\mu$$

$$\leqslant\int_{\Omega}Y\varphi(W)d\mu.$$

由此完成了由式(8)推出式(9)的证明. ▌

注 当 $\mathscr{F}_0$ 不平凡时，引理仍然成立. 此时式(8)与(9)中的积分都用 $E_0(\cdot)=E(\cdot|\mathscr{F}_0)$ 代替. 如式(8)为

$$E_0(\mathrm{II}(\{W>\lambda\})(W-\lambda))\leqslant E_0(\mathrm{II}(\{W>\lambda\})Y).$$

引理 2 设 Y 是非负随机变量，$A=(A_n)_{n\geq 0}$ 是一个非负增加适应过程，使对一切停止时间 T，都有

$$E(A_\infty-A_{T-1}|\mathscr{F}_T)\leqslant E(Y|\mathscr{F}_T);\tag{10}$$

或者 $A=(A_n)$ 是一个非负增加可预报过程，且 $A_0=0$，使得对一切停止时间 T，都有

$$E(A_\infty-A_T|\mathscr{F}_T)\leqslant E(Y|\mathscr{F}_T).\tag{10$'$}$$

则

$$\int_{\{A_\infty>\lambda\}}(A_\infty-\lambda)d\mu\leqslant\int_{\{A_\infty>\lambda\}}Yd\mu,\quad \forall\lambda>0.\tag{11}$$

证明 先考虑第一种情形．定义停止时间

$$T=\inf\{n:A_n>\lambda\}.$$

对某些λ，以及某些点 $\omega\in\Omega$，可以有 $T=0$，此时理解 $A_{T-1}=0$. 对于这样定义的停止时间 T，总有 $A_{T-1}\leqslant\lambda$. 故

$$A_\infty-\lambda\leqslant A_\infty-A_{T-1}.$$

于是

$$\begin{aligned}\int_{\{A_\infty>\lambda\}}(A_\infty-\lambda)d\mu&\leqslant\int_{\{T<\infty\}}(A_\infty-A_{T-1})d\mu\\&=\int_{\{T<\infty\}}E(A_\infty-A_{T-1}|\mathscr{F}_T)d\mu\\&\leqslant\int_{\{T<\infty\}}E(Y|\mathscr{F}_T)d\mu=\int_{\{A_\infty>\lambda\}}Yd\mu.\end{aligned}$$

现在考虑第二种情形．此时定义停止时间

$$T=\inf\{n:A_{n+1}>\lambda\},$$

则 $A_T\leqslant\lambda$（当 $T=0$ 时也对，因假定 $A_0=0$①）．因而同上面一样可以证明式(11)成立．▌

注 1 Lenglart-Lepingle-Pratelli[1] 将条件(10)与(10)′改

① 需要附加这个假定，因为条件(10)′对 A_0 没有约束．而(10)却不然，当取$T=0$时，条件(10)意味着 $E(A_\infty)\leqslant E(Y)$.

述为如下的等价形式:

$$E(A_\infty - A_{T-1}) \leqslant E(Y\mathrm{I}(\{T<\infty\})), \quad \forall T; \quad (*)$$

$$E(A_\infty - A_T) \leqslant E(Y\mathrm{I}(\{T<\infty\})), \quad \forall T,$$

$$\text{当 } A \text{ 可预报}, A_0 = 0. \quad (**)$$

由条件(10)与(10)′推出式(*)与(**)(如(*))是因为

$$\begin{aligned} E(A_\infty - A_{T-1}) &= E(E(A_\infty - A_{T-1} | \mathscr{F}_T)\mathrm{I}(\{T<\infty\})) \\ &\leqslant E(E(Y\mathrm{I}(\{T<\infty\}) | \mathscr{F}_T)) \\ &= E(Y\mathrm{I}(\{T<\infty\})). \end{aligned}$$

反之,设式(*)成立. 对任意的 $F \in \mathscr{F}_T$, 考虑停止时间 $T_F(= T\mathrm{I}(F) + \infty\mathrm{I}(F'))$, 则由

$$E(A_\infty - A_{T_F-1}) = \int_F (A_\infty - A_{T-1}) d\mu$$

$$= \int_F E(A_\infty - A_{T-1} | \mathscr{F}_T) d\mu,$$

$$E(Y\mathrm{I}(\{T_F<\infty\})) \leqslant \int_F Y d\mu = \int_F E(Y | \mathscr{F}_T) d\mu,$$

即知 $E(A_\infty - A_{T-1} | \mathscr{F}_T) \leqslant E(Y | \mathscr{F}_T)$.

注 2 如果 $\forall n$, 对取常数值 n 的停止时间 T, 式(10)或(10)′满足,则对一切停止时间 T 亦然.

注 3 设 $(Q_n)_{n\geqslant 0}$ 是一个势, 则它由唯一的非负增加可预报过程 $A = (A_n)_{n\geqslant 0}$, $A_0 = 0$ 生成, 即 $Q_n = E(A_\infty - A_n | \mathscr{F}_n)$. 引理 1,2 同时说明,由势本身的控制 $Q_n \leqslant E(Y | \mathscr{F}_n)$, 便可得到 A_∞ 的可积性的形如式(9)给出的估计(下面将指出由式(9)足以得到凸 Φ-不等式). 用这个观点得到凸 Φ-不等式的思想属于 A. Garsia 与 J. Neveu. 引理 1, 2 常被通称为 Garsia-Neveu 凸性引理.

注 4 A. Garsia (见 C. S. Chou[1]) 是如下直接地由式(10)′推出式(9)的. 有

$$
\begin{aligned}
\Phi(A_\infty)=\int_0^{A_\infty}\varphi(s)ds &\leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\varphi(A_i)(A_i-A_{i-1})\\
&=\varphi(A_1)A_1+(\varphi(A_1)+\varphi(A_2)\\
&\quad -\varphi(A_1))(A_2-A_1)+\cdots\\
&=\varphi(A_1)(A_1+A_2-A_1+A_3-A_2+\cdots)\\
&\quad +(\varphi(A_2)-\varphi(A_1))(A_2-A_1+A_3-A_2+\cdots)\\
&\quad +\cdots\\
&=\varphi(A_1)A_\infty+(\varphi(A_2)-\varphi(A_1))(A_\infty-A_1)+\cdots,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(\Phi(A_\infty))&\leqslant E(E(\varphi(A_1)(A_\infty-A_0)|\mathscr{F}_0))\\
&\qquad +E(E((\varphi(A_2)-\varphi(A_1))(A_\infty-A_1)|\mathscr{F}_1)+\cdots\\
&\leqslant E(\varphi(A_1)E(Y|\mathscr{F}_0))+E((\varphi(A_2)\\
&\qquad -\varphi(A_1))E(Y|\mathscr{F}_1))+\cdots\\
&\leqslant E((\varphi(A_1)+\varphi(A_2)-\varphi(A_1)+\cdots)Y)\\
&=E(Y\varphi(A_\infty)).
\end{aligned}
$$

这就是 Garsia 的通路.

注 5 本引理对 $\mathscr{F}_0$ 不再是平凡的情况也成立.

下面介绍Dellacherie[1] 由式(9)得到凸 Φ-不等式的通路. 这个通路比早先的通路要好，它能得到最优系数.

引理 3 设 Φ 是限制增长的 Young凸函数，U, V 是两非负随机变量, 满足

$$E(U\varphi(U))<\infty,\quad E(U\varphi(U))\leqslant E(V\varphi(U))+C_V, \tag{12}$$

则对同一常数 C_V, 也有

$$E(\Phi(U))\leqslant E(\Phi(V))+C_V. \tag{13}$$

证明 根据

$$u\varphi(u)=\Phi(u)+\Psi(\varphi(u)),\quad v\varphi(u)\leqslant\Phi(v)+\Psi(\varphi(u)),$$

我们知道, 当 $E(U\varphi(U))<\infty$, 自然也有 $E(\Psi(\varphi(U))<\infty$. 故可在式(12)之第二个不等式两边减去 $E(\Psi(\varphi(U))$ 即得式(13). ∎

注 引理对$\mathscr{F}_0$不平凡时也成立，此时 $E(\cdot)$ 理解为$E_0(\cdot)$，条件(12)是a.e.成立，C_V 是$\mathscr{F}_0$可测函数.

定理 1 设 $A=(A_n)_{n\geqslant 0}$ 是一个非负增加适应过程（或非负增加可预报的，满足 $A_0=0$），Y 是一个非负随机变量，使得式(10)(或式(10)′)成立. Φ 是任意一个如引理 1 中的限制增长的 Young 凸函数，p 是它的上指数，则下述断言成立.

$$\left.\begin{aligned}
&\text{a) } E(\Phi(A_\infty))\leqslant E(Y\varphi(A_\infty));\\
&\text{b) } E(A_\infty\varphi(A_\infty))\leqslant E(pY\varphi(A_\infty));\\
&\text{c) } E(\Phi(A_\infty))\leqslant E(\Phi(pY));\\
&\text{d) } \|A_\infty\|_\Phi\leqslant p\|Y\|_\Phi.
\end{aligned}\right\}\tag{14}$$

证明 a) 由引理 2 与引理 1 即可推出. 由 a)推出 b)是因

$$A_\infty\varphi(A_\infty)\leqslant p\Phi(A_\infty).$$

由 c)推出 d)是根据范数$\|\cdot\|_\Phi$的正齐性: 即考虑过程$\left(\dfrac{A_n}{p\|Y\|_\Phi}\right)_{n\geqslant 0}$，它满足的条件形如式(10)或(10)′，只是控制函数换为 $\dfrac{Y}{p\|Y\|_\Phi}$. 这样由 c)即得

$$E\left(\Phi\left(\frac{A_\infty}{p\|Y\|_\Phi}\right)\right)\leqslant E\left(\Phi\left(pY\frac{1}{p\|Y\|_\Phi}\right)\right)\leqslant 1.$$

由此推出 $\|A_\infty\|_\Phi\leqslant p\|Y\|_\Phi$.

余下需要证明由 b)推出 c). 当 $E(A_\infty\varphi(A_\infty))<\infty$，只需应用引理 3 便可. 一般情形下考虑过程 $A\wedge N=(A_n\wedge N)_{n\geqslant 0}$. 它显然仍是非负增加适应过程(或可预报的过程)，现在说明它还有如定理中所述的控制函数 Y. 因为函数 $u\wedge N$ 是凹函数，所以

$$E(A_\infty\wedge N\mid\mathscr{F}_n)\leqslant E(A_\infty\mid\mathscr{F}_n)\wedge N,$$

$$E(A_\infty\wedge N\mid\mathscr{F}_n)-A_{n-1}\wedge N\leqslant E(A_\infty\mid\mathscr{F}_n)\wedge N-A_{n-1}\wedge N.\tag{15}$$

当 $E(A_\infty\mid\mathscr{F}_n)$与 A_{n-1} 同时$\geqslant N$，或同时$\leqslant N$，则显然有

$$E(A_\infty\wedge N\mid\mathscr{F}_n)-A_{n-1}\wedge N\leqslant E(Y\mid\mathscr{F}_n).\tag{15$'$}$$

既然总有 $E(A_\infty-A_{n-1}|\mathscr{F}_n)\geqslant 0$, 那末剩下的只需要对满足

$$A_{n-1}<N<E(A_\infty|\mathscr{F}_n)$$

的点处进行讨论. 此时式(15)的右边为

$$N-A_{n-1}\leqslant E(A_\infty|\mathscr{F}_n)-A_{n-1}\leqslant E(Y|\mathscr{F}_n).$$

总之, 无论哪种情况都有式(15)$'$. (当 A 可预报时, 用 A_n 代替 A_{n-1}, 其他讨论是完全一样的.) 上面我们对过程 $A\wedge N$ 证明了 c) 成立. 令 $N\to\infty$, 对一般的情形, c) 也成立. ▮

注 1 设 $A=(A_n)$ 是如定理中所述之非负增加过程, 对常数 γ, 有 $E(A_\infty-A_{n-1}|\mathscr{F}_n)\leqslant\gamma$ (或 A 可预报时, $E(A_\infty-A_n|\mathscr{F}_n)\leqslant\gamma$), 则

$$E(A_\infty^n)\leqslant n!\gamma^n,\quad \forall n,$$

$$E(e^{\lambda A_\infty})\leqslant\frac{1}{1-\lambda\gamma},\quad 0<\lambda<\frac{1}{\gamma}.$$

这只需分别令 $\Phi(u)=u^n$, $\Phi(u)=e^{\lambda u}-1$, 应用本定理之 a) 即可.

注 2 对不再是 Young 函数的 Φ, 可得

$$E(\Phi(A_\infty))\leqslant E(Y\varphi(A_\infty))\leqslant\varphi(\infty)E(Y).$$

注 3 本定理对 $\mathscr{F}_0$ 不再平凡时, 除 d) 外都成立.

现在我们来讨论鞅的凸 Φ-不等式.

定理 2 设 Φ 是如引理 1 中限制增长的 Young 凸函数, $\Phi(0)=0$ (或 $\Phi(u)=u$). 则对所有鞅 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$ (f_0 不一定为 0), 有

$$c\|f^*\|_\Phi\leqslant\|S(f)\|_\Phi\leqslant C\|f^*\|_\Phi. \tag{16}$$

证明 考虑两个增加过程

$$f^*=(f_n^*)_{n\geqslant 0},$$

$$S(f)=(S_n(f))_{n\geqslant 0}\quad\left(S(f)^2=|f_0|^2+\sum_1^\infty|\Delta f_k|^2\right).$$

根据定理 1, 为证式(16), 只需对 $A=f^*$, $Y=CS(f)$ (或反过来, $A=S(f)$, $Y=Cf^*$), 证明它们满足式(10). 根据引理 2 后的注 2, 只需对 $T=n$ 证明式(10)成立即可.

考虑新的子σ-代数的增加族$\{\mathscr{F}'_m\}_{m\geq 0}$，其中 $\mathscr{F}'_m=\mathscr{F}_{n+m}$, $n\in \mathbf{Z}^+$ 为暂时固定的. 现在 $\mathscr{F}'_0(=\mathscr{F}_n)$当然不一定为平凡的. 设 $f=(f_m)_{m\geq 0}$ 是关于$\{\mathscr{F}_m\}_{m\geq 0}$ 的任意一个鞅, 令

$$g'_m=f_{m+n}-f_{n-1},\quad m\geq 0.$$

则$(g'_m)_{m\geq 0}$ 是关于$\{\mathscr{F}'_m\}_{m\geq 0}$ 的一个鞅, 事实上, 因为

$$E'(g'_{m+1}|\mathscr{F}'_m)=E(f_{n+m+1}-f_{n-1}|\mathscr{F}_{n+m})=f_{n+m}-f_{n-1}=g'_m.$$

由 2.6 节所述之 Davis 不等式, 我们有

$$\begin{aligned}E(f^*-f^*_{n-1}|\mathscr{F}_n)&\leqslant E(\sup_{m\geq 0}|f_{n+m}-f_{n-1}|\mathscr{F}_n)\\&=E'((g')^*|\mathscr{F}'_0)\leqslant CE'(S(g')|\mathscr{F}'_0)\\&=CE(\sqrt{S(f)^2-S_{n-1}(f)^2}|\mathscr{F}_n)\\&\leqslant CE(S(f)|\mathscr{F}_n);\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}E(S(f)-S_{n-1}(f)|\mathscr{F}_n)&\leqslant E(\sqrt{S(f)^2-S_{n-1}(f)^2}|\mathscr{F}_n)\\&=E'(S(g')|\mathscr{F}'_0)\leqslant CE'((g')^*|\mathscr{F}'_0)\\&\leqslant CE(f^*|\mathscr{F}_n).\end{aligned}$$

这证明了(A,Y)满足式(10), 当$(A,Y)=(f^*,CS(f))$(或$=(S(f),Cf^*)$). ∎

定理 3 设 Φ 是如定理 2 中所设, $p=p_\Phi$(或 $\Phi(u)=u$). 则对一切鞅 $f=(f_n)$(f_0 不必为 0), 有

$$\|\sigma^2(f)\|_\Phi\leqslant p\|S^2(f)\|_\Phi. \tag{17}$$

证明 给定鞅 $f=(f_n)$, 考虑过程 $A=(A_n)_{n\geq 0}$,

$$A_n=\sum_1^n E(|\Delta f_k|^2|\mathscr{F}_{k-1})+|f_0|^2,\quad A_0=0,$$

以及 $Y=(Y_n)_{n\geq 0}$,

$$Y_n=\sum_1^n|\Delta f_k|^2+|f_0|^2,\quad Y_0=0.$$

则我们有，当 $n\geqslant 1$，

$$E(A_\infty-A_n|\mathscr{F}_n)=E\left(\sum_{n+1}^{\infty}E(|\Delta f_k|^2|\mathscr{F}_{k-1})|\mathscr{F}_n\right)$$

$$=E\left(\sum_{n+1}^{\infty}|\Delta f_k|^2|\mathscr{F}_n\right)=E(Y_\infty-Y_n|\mathscr{F}_n)$$

$$\leqslant E(Y_\infty|\mathscr{F}_n),$$

以及

$$E(A_\infty)=E\left(|f_0|^2+\sum_{1}^{\infty}|\Delta f_k|^2\right)=E(Y_\infty).$$

注意这里 A 是一个可预报过程. 故由定理 1 知

$$\|A_\infty\|_\Phi\leqslant p\|Y_\infty\|_\Phi.$$

将 $A_\infty=\sigma^2(f)$, $Y_\infty=S^2(f)$ 代入上式，即得式(17). 定理证毕. ∎

注 当 $\Phi(u)=u^{p/2}$, $p\geqslant 2$ 时，式(17)成为 $\sigma(f)$ 与 $S(f)$ 间的 L^p 模不等式. 此时有很理想的系数:

$$\|\sigma(f)\|_p\leqslant\sqrt{\frac{p}{2}}\|S(f)\|_p,\quad p\geqslant 2.$$

定理 3′ Φ 如定理 3 所设，则 $\forall$ 鞅 $f=(f_n)$(f_0 不必为 0)，有

$$\|\sigma^2(f)\|_\Phi\leqslant p\||f|^2\|_\Phi. \tag{17′}$$

证明 同定理 3 类似，令 $A=(A_n)_{n\geqslant 0}$，但 $Y=|f|^2$. 则我们有

$$E(A_\infty)=E(\sigma^2(f))=E(|f|^2),$$

$$E(A_\infty-A_n|\mathscr{F}_n)=E\left(\sum_{n+1}^{\infty}|\Delta f_k|^2|\mathscr{F}_n\right)$$

$$=E(|f-f_n|^2|\mathscr{F}_n)=E(|f|^2-|f_n|^2|\mathscr{F}_n)$$

$$\leqslant E(|f|^2|\mathscr{F}_n).$$

故由定理 1 即知式(17)′成立. ∎

注 当 $\Phi(u)=u^{p/2}$, $p\geqslant 2$ 时, 式(17)$'$同 2.8 节命题 5 中所述. 但此处系数更优, 为

$$\|\sigma(f)\|_p\leqslant\sqrt{\frac{p}{2}}\|f\|_p\leqslant\sqrt{\frac{p}{2}}\|f^*\|_p,\quad p\geqslant 2.$$

现在我们来讨论鞅的一类新型凸性不等式. 对鞅 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$, 令

$$M(f)=\max(f^*, S(f)),\quad m(f)=\min(f^*, S(f)).$$

定理 4 Φ 如引理 1 中所设. 则 $\forall$ 鞅 $f=(f_n)$, 有

$$E(\Phi(M(f)))\leqslant CE(\Phi(m(f))). \tag{18}$$

证明 我们要利用将在 4.5 节定理 16 中建立的一个一般事实的特殊情形, 即: 若设 $g=(g_n)_{n\geqslant 0}$ 是一个鞅, 使得它的差过程 $(\Delta g_n)_{n\geqslant 0}$ 有一个可预报的控制, 意即存在一个非负增加适应过程 $(D_n)_{n\geqslant 0}$, 使得 $|\Delta g_n|\leqslant D_{n-1}$. 则对限制增长的凸函数 Φ, 有

$$E(\Phi(M(g)))\leqslant CE(\Phi(m(g)+D_\infty)). \tag{19}$$

事实上, 它又是下述更为特殊的不等式的推论

$$E_0(M(g))\leqslant CE_0(m(g)+D_\infty). \tag{20}$$

作为一个练习, 我们先证由式(20)推出式(19). 这比证明定理 16 (即 Φ 不一定是凸函数)要容易.

对任意的 $n\in Z^+$ 取定后, 考虑新的子 σ-代数的增加族 $\{\mathscr{F}'_m\}_{m\geqslant 0}=\{\mathscr{F}_{n+m}\}_{m\geqslant 0}$, 以及关于这个族的鞅

$$g'=(g'_m): g'_m=g_{m+n}-g_{n-1},\quad m=0, 1, \cdots.$$

它的差过程$(\Delta g'_m)$仍然有可预报的控制过程

$$D'=(D'_m),\quad D'_m=D_{m+n},\quad D'_\infty=D_\infty.$$

我们将对鞅 g' 应用式(20).

注意, 当 $M(g)=g^*$ 时, 我们有

$$M(g)-M_{n-1}(g)\leqslant g^*-\max(g^*_{n-1}, S_{n-1}(g))\leqslant g^*-g^*_{n-1}.$$

类似地, 当 $M(g)=S(g)$时,

$$M(g)-M_{n-1}(g)\leqslant S(g)-S_{n-1}(g).$$

因此,

$$M(g)-M_{n-1}(g)\leqslant \max(g^*-g_{n-1}^*, S(g)-S_{n-1}(g))$$
$$\leqslant \max((g')^*, S(g'))=M(g').$$

此外, 我们也有

$$m(g')\leqslant \min(2g^*, S(g))\leqslant 2m(g).$$

由此对鞅 g' 应用式(20)得

$$\begin{aligned}
E(M(g)-M_{n-1}(g)\,|\,\mathscr{F}_n) &\leqslant E'(M(g')\,|\,\mathscr{F}'_0)\\
&\leqslant CE'(m(g')+D'_\infty\,|\,\mathscr{F}'_0)\\
&\leqslant CE(m(g)+D_\infty\,|\,\mathscr{F}_n).
\end{aligned}$$

从而定理 1 便给出式(19).

现对任意的鞅 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$, 作 Davis 分解 $f=g+h$, 其中 g 满足 $|\Delta g_n|\leqslant d_{n-1}^*$; h 满足

$$\Sigma|\Delta h_n|\leqslant \Sigma\{2(d_n^*-d_{n-1}^*)+2E(d_n^*-d_{n-1}^*\,|\,\mathscr{F}_{n-1})\}.$$

注意, 我们有

$$d^*\leqslant \min(2f^*, S(f)),$$
$$\max(h^*, S(h))\leqslant \Sigma|\Delta h_n|,$$
$$M(f)\leqslant M(g)+M(h),$$

$$\begin{aligned}
m(g) &\leqslant \min(f^*+h^*, S(f)+S(h))\\
&\leqslant \min(f^*, S(f))+\Sigma|\Delta h_n|=m(f)+\Sigma|\Delta h_n|,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(\Phi(\Sigma|\Delta h_n|)) &\leqslant CE(\Phi(d^*))\\
&\quad +CE(\Phi(\Sigma E(d_n^*-d_{n-1}^*\,|\,\mathscr{F}_{n-1})))\\
&\leqslant CE(\Phi(d^*))+CE(\Phi(\Sigma(d_n^*-d_{n-1}^*)))\\
&\leqslant CE(\Phi(d^*))\leqslant CE(\Phi(m(f))),
\end{aligned}$$

这里中间那个不等式中用到凸性引理. (例如模仿 4.3 节引理 6 的证明.) 因而便得

$$E(\Phi(M(f)))\leqslant CE(\Phi(M(g)))+CE(\Phi(M(h)))$$

$$\leqslant CE(\Phi(m(g)))+CE(\Phi(d^*))+CE(\Phi(m(f)))$$

$$\leqslant CE(\Phi(m(f))). \blacksquare$$

注 由式(20)知，当$\mathscr{F}_0$不平凡时，式(19)与式(18)中的$E(\cdot)$均可用$E_0(\cdot)$代替.

4.3 $q_\Phi>1$ 时的凸 Φ-不等式

Doob 不等式是一个只对 $p>1$ 成立的(p,p)型不等式的典型代表. 此外，已在 2.4 与 3.6 节讨论过关于空间 ${}_1K_p$, ${}_1L_p$ 与 L^p 间的一些不等式也只对 $p>1$ 成立. 这样的不等式当然不能期望推广到任意的凸 Φ-不等式，但一般而言，却可推广到 $q_\Phi>1$ 的情形. 本节就是讨论这样的 Φ-不等式，其中涉及到的一个重要对象是空间 ${}_aK_p$, ${}_aL_p$ 的 Φ-推广.

引理 4 设 Φ 是满足

$$1<q_\Phi\leqslant p_\Phi<\infty$$

的凸函数；(f,g)是非负随机变量的配对，满足(其中 $\alpha\geqslant\beta>0$ 是常数)

$$\lambda|\{f>\alpha\lambda\}|\leqslant\int_{\{f>\beta\lambda\}}g\,d\mu,\quad \forall\lambda>0. \tag{21}$$

则

$$E\left(\frac{f}{\alpha}\varphi\left(\frac{f}{\alpha}\right)\right)\leqslant q'_\Phi C_{\alpha,\beta,\Phi}E\left(g\varphi\left(\frac{f}{\alpha}\right)\right). \tag{22}$$

当 $\alpha=\beta$ 时，条件 $p_\Phi<\infty$ 是不必要的，并且此时 $C_{\alpha,\beta,\Phi}=1$.

证明 在$[0,\infty)$上对式(21)两边关于 $d\varphi(\lambda)$积分，得

$$\int_0^\infty\lambda\int\qquad d\mu d\varphi(\lambda)\leqslant\int_0^\infty\int_{\{f>\beta\lambda\}}g\,d\mu d\varphi(\lambda),$$

$$\int_\Omega\int_0^{f/\alpha}\lambda d\varphi(\lambda)d\mu\leqslant\int_\Omega\int_0^{f/\beta}d\varphi(\lambda)g\,d\mu,$$

$$\int_\Omega \frac{f}{\alpha}\varphi\left(\frac{f}{\alpha}\right)d\mu-\int_\Omega \Phi\left(\frac{f}{\alpha}\right)d\mu\leqslant\int_\Omega g\varphi\left(\frac{f}{\beta}\right)d\mu.$$

注意，我们有

$$\Phi\left(\frac{f}{\alpha}\right)\leqslant\frac{1}{q_\Phi}\frac{f}{\alpha}\varphi\left(\frac{f}{\alpha}\right),$$

以及(分别用 p, q 简记 p_Φ, q_Φ)

$$\varphi(\gamma u)\leqslant p\frac{\Phi(\gamma u)}{\gamma u}\leqslant p(\gamma u)^{p-1}\frac{\Phi(u)}{u^p}$$
$$\leqslant pq^{-1}\gamma^{p-1}\varphi(u),\quad \forall u>0,\ \gamma\geqslant 1. \tag{23}$$

(注意，我们已经利用了当 $p<\infty$ 时，$\dfrac{\Phi(u)}{u^p}$ 是 u 的下降函数的事实.)这样，式(22)便由式(23)及其前面的两个不等式直接推出. 至于 $\alpha=\beta$ 时的结论是显然的. ▮

注 这个引理对 $\mathscr{F}_0$ 不平凡时也成立. 此时条件为

$$\lambda E(\mathrm{II}(\{f>\alpha\lambda\})|\mathscr{F}_0)\leqslant E(g\mathrm{II}(\{f>\beta\lambda\})|\mathscr{F}_0),\quad \forall\lambda>0. \tag{21$'$}$$

根据这个条件，$\forall F\in\mathscr{F}_0$，我们有

$$\lambda\int_F \mathrm{II}(\{f>\alpha\lambda\})d\mu\leqslant\int_F g\mathrm{II}(\{f>\beta\lambda\})d\mu,$$

$$\int_F\int_0^{f/\alpha}\lambda d\varphi(\lambda)d\mu\leqslant\int_F g\int_0^{f/\beta}d\varphi(\lambda)d\mu,$$

$$\int_F\left(\frac{f}{\alpha}\varphi\left(\frac{f}{\alpha}\right)-\Phi\left(\frac{f}{\alpha}\right)\right)d\mu\leqslant\int_F g\varphi\left(\frac{f}{\beta}\right)d\mu,$$

由此即得

$$E\left(\frac{f}{\alpha}\varphi\left(\frac{f}{\alpha}\right)\middle|\mathscr{F}_0\right)\leqslant q'E\left(g\varphi\left(\frac{f}{\beta}\right)\middle|\mathscr{F}_0\right)$$
$$\leqslant q'C_{\alpha,\beta,\Phi}E\left(g\varphi\left(\frac{f}{\alpha}\right)\middle|\mathscr{F}_0\right). \tag{22$'$}$$

此即 $\mathscr{F}_0$ 不平凡时式(22)的代替.

引理 5 设 Φ 如引理 4 所述. 则对任意满足式(21)的配对 (f,g)，都有

$$\|f\|_\Phi \leqslant \alpha q' C_{\alpha,\beta,\Phi} \|g\|_\Phi. \tag{24}$$

当 $\alpha=\beta$ 时，当然也有 $C_{\alpha,\beta,\Phi}=1$.

证明 设 (f,g) 是满足(21)的任一配对，则 $(f\wedge N,g)$ 也满足式(21)，$\forall N>0$. 因当 $N>\alpha\lambda$ 时，有

$$\{f\wedge N>\alpha\lambda\}=\{f>\alpha\lambda\},$$

$$\{f\wedge N>\beta\lambda\}=\{f>\beta\lambda\};$$

而当 $N\leqslant\alpha\lambda$ 时，有

$$|\{f\wedge N>\alpha\lambda\}|=0.$$

因此，如果必要的话，我们可以先考虑 $(f\wedge N,g)$，得到对于 $(f\wedge N,g)$ 的式(22). 此时

$$E\left(\frac{f\wedge N}{\alpha}\varphi\left(\frac{f\wedge N}{\alpha}\right)\right)<\infty.$$

为得到最终的结果，只需令 $N\to\infty$ 即可. 这就是说，我们总可以在式(22)中假设 $E\left(\frac{f}{\alpha}\varphi\left(\frac{f}{\alpha}\right)\right)<\infty$. 这样，利用引理 3 即得

$$E\left(\Phi\left(\frac{f}{\alpha}\right)\right)\leqslant E(\Phi(q'C_{\alpha,\beta,\Phi}g)). \tag{25}$$

此外，由 (f,g) 满足式(21)，即知 $\forall c>0$，(cf,cg) 也满足式(21). 因为

$$\lambda|\{cf>\alpha\lambda\}|=\lambda\left|\left\{f>\frac{\alpha}{c}\lambda\right\}\right|$$

$$\leqslant\int_{\{f>\beta\frac{\lambda}{c}\}}cg\,d\mu=\int_{\{cf>\beta\lambda\}}cg\,d\mu.$$

因此我们可将式(25)应用于 (cf,cg)，其中 $c=(q'C_{\alpha,\beta,\Phi}\|g\|_\Phi)^{-1}$，得到

$$E\left(\Phi\left(\frac{cf}{\alpha}\right)\right)\leqslant E(\Phi(cq'C_{\alpha,\beta,\Phi}g))\leqslant 1,$$

$$\|f\|_\Phi\leqslant\frac{\alpha}{c}=\alpha q'C_{\alpha,\beta,\Phi}\|g\|_\Phi. \quad \blacksquare$$

我们首先考虑 Doob 定理的推广.

定理 5 设 $f=(f_n)_{0\leqslant n\leqslant\infty}$ 是一非负下鞅(特别地,例如$(|f_n|)$. 当(f_n)是 L^1 中的鞅), Φ 是满足 $q=q_\Phi>1$ 的凸函数. 则

$$\|f^*\|_\Phi\leqslant q'\|f\|_\Phi. \tag{26}$$

证明 因$(f_n)_{0\leqslant n\leqslant\infty}$是非负下鞅, 则

$$\lambda|\{f^*>\lambda\}|\leqslant\int_{\{f^*>\lambda\}}f_\infty d\mu.$$

于是, 引理 5 便给出式(26). ∎

现在我们考虑空间 ${}_aK_p$ 与 ${}_aL_p$ 的 Φ-推广. 设 $0<a<\infty$, Φ是一个 Young 凸函数. 先给出几个定义.

$$^aL^\Phi=\{\text{可测函数 } f:\ \|f\|_{^aL^\Phi}=\||f|^a\|_\Phi^{1/a}<\infty\}. \tag{27}$$

${}_aK_\Phi=\{$可测函数 f: 存在至少一个适应过程 $\theta=(\theta_n(f))_{n\geqslant0}$,

使得存在 $\gamma\geqslant0$, $\gamma\in{}^aL^\Phi$, 满足

$$E(|f-\theta_{n-1}|^a|\mathscr{F}_n)\leqslant E(\gamma^a|\mathscr{F}_n),\ n=0,1,\cdots\}. \tag{28}$$

注意根据约定 $\theta_{-1}\equiv0$, 以及式(28)中 $n=0$ 时的条件, 我们知道 ${}_aK_\Phi\subset L^a$. 此外, ${}_aK_\Phi$ 显然是一个线性空间, 在它上面可以定义一个"拟范数"如下①:

$$\|f\|_{{}_aK_\Phi}=\inf_\theta\{\|f\|^{(\theta)}_{{}_aK_\Phi}\}=\inf_\theta\left\{\inf_\gamma\{\|\gamma^a\|_\Phi^{1/a}\}\right\}. \tag{29}$$

注意, 当 $1\leqslant a<\infty$, 以及 $q_\Phi>1$ 时, 在 ${}_aK_\Phi$ 的定义中, 我们总可以取 $\theta=(f_n)_{n\geqslant0}$, $f_n=E(f|\mathscr{F}_n)$, 以及采用如下等价的, 且更为通常的拟范数:

$\|f\|^*_{{}_aK_\Phi}=\inf\limits_\gamma\{\|\gamma^a\|_\Phi^{1/a}\}$, γ 遍历对固定 $\theta=(f_n)$时所有可能的 γ.

两个拟范数的等价是根据如下事实:

$$E(|f-f_{n-1}|^a|\mathscr{F}_n)\leqslant2^{a-1}E(|f-\theta_{n-1}|^a|\mathscr{F}_n)$$

---

① 我们这里的"拟范数", 指的是满足正齐性($\|\lambda f\|=|\lambda|\|f\|$)与广义三角不等式($\|f+g\|\leqslant C(\|f\|+\|g\|)$)的非负函数$\|\ \|$.

$$+2^{a-1}|f_{n-1}-\theta_{n-1}|^a$$
$$\leqslant 2^{a-1}E(\gamma^a|\mathscr{F}_n)+2^{a-1}E(\gamma^a|\mathscr{F}_{n-1})$$
$$\leqslant 2^a E((\gamma^a)^*|\mathscr{F}_n), \tag{30}$$

以及

$$\|(\gamma^a)^*\|_\Phi \leqslant q'_\Phi \|\gamma^a\|_\Phi,$$

从而

$$\|f\|_{{}_aK_\Phi} \leqslant \|f\|^*_{{}_aK_\Phi} \leqslant 2(q'_\Phi)^{1/a}\|f\|_{{}_aK_\Phi}.$$

此后，当 $1\leqslant a<\infty$ 以及 $q_\Phi>1$ 时，我们总固定地取 $\theta=(f_n)$，同时采用这个通常拟范数，并略去附标“ * ”.

${}_aL_p$ 的 Φ 推广定义如下. 首先定义集合

$$G_a^\Phi=\{适应过程(g_n)_{n\geqslant 0}: E(\Psi(\Sigma|g_n|^a))\leqslant 1\}, \tag{31}$$

其中 $1\leqslant a<\infty$, Φ 是 Young 函数, Ψ 是 Φ 的 Young 补函数. 然后定义

${}_aL_\Phi=\{$可测函数 f: 存在适应过程 $\theta=(\theta_n)_{n\geqslant 0}$，使得

$$\|f\|^{(\theta)}_{{}_aL_\Phi}=\sup_{(g_n)\in G_a^\Phi} E(\Sigma|g_n|^a|f-\theta_{n-1}|^a)^{1/a}<\infty\}, \tag{32}$$

$$\|f\|_{{}_aL_\Phi}=\inf_\theta\{\|f\|^{(\theta)}_{{}_aL_\Phi}\}. \tag{33}$$

类似地，根据约定 $\theta_{-1}\equiv 0$ 与适当地选择 $(g_n)_{n\geqslant 0}$，其中 $g_0\equiv 1$, $g_n\equiv 0$, $n\geqslant 1$, 可推出 ${}_aL_\Phi\subset L^a$.

注意，使 ${}_aK_\Phi$ 与 ${}_aL_\Phi$ 分别化为已定义过的 ${}_aK_p$ 与 ${}_aL_p$ 的函数 Φ 是 $\Phi(u)=u^{p/a}(0<a\leqslant p)$，不是 $\Phi(u)=u^p$. 这个断言是容易验证的. 因此这里有一个记号上的微小混淆.

现在我们可以刻划 ${}_aK_\Phi$ 与 ${}_aL_\Phi$. 首先刻划 ${}_aK_\Phi$.

定理 6 设 $1\leqslant a<\infty$, Φ 是满足 $1<q\leqslant p<\infty$ 的凸函数. 则 ${}_aK_\Phi={}^aL^\Phi$. 更确切地说，我们有

$$\frac{1}{2(q')^{1/a}}\|f\|_{{}_aK_\Phi}\leqslant\|f\|_{{}^aL^\Phi}\leqslant\|f^*\|_{{}^aL^\Phi}$$

$$\leqslant 2^{p/a^*}(ep^* q^{-p} q')^{1/a} \|f\|_{a K_\Phi}. \tag{34}$$

证明 因为

$$f^{*a} \leqslant \sup_n E(|f|^a | \mathscr{F}_n) = (|f|^a)^*,$$

$$E(|f - f_{n-1}|^a | \mathscr{F}_n) \leqslant 2^{a-1}\{E(|f|^a | \mathscr{F}_n) + E(f^{*a} | \mathscr{F}_n)\}$$
$$\leqslant 2^a E((|f|^a)^* | \mathscr{F}_n),$$

我们得

$$\|f\|_{a K_p} \leqslant \|2^a (|f|^a)^*\|_\Phi^{1/a} \leqslant 2(q')^{1/a} \||f|^a\|_\Phi^{1/a}$$
$$= 2(q')^{1/a} \|f\|_{a L^\Phi}.$$

由此证明了式(34)左边的不等式.

现在证明式(34)右边的不等式成立. 设 $\alpha>0$ 为待定的. $\forall \lambda >0$, 定义停止时间

$$T_1 = \inf\left\{n:\ \ |f_n|^a > \frac{1}{2^{a-1}}\alpha\lambda\right\},$$

$$T_2 = \inf\left\{n:\ \ |f_n|^a > (\alpha+1)\lambda\right\}.$$

则 $T_1 \leqslant T_2$, 因为 $(\alpha+1)\lambda \geqslant \frac{\alpha\lambda}{2^{a-1}}$. 此外, 我们有

$$\{T_2 < \infty\} \subset \left\{T_1 < \infty,\ \ |f_{T_2} - f_{T_1 - 1}|^a \geqslant \frac{\lambda}{2^{a-1}}\right\}.$$

于是得

$$\lambda |\{f^{*a} > (\alpha+1)\lambda\}|$$
$$\leqslant 2^{a-1} \int_{\{T_1 < \infty\}} |f_{T_2} - f_{T_1 - 1}|^a d\mu$$
$$= 2^{a-1} \int_{\{T_1 < \infty\}} |E(f - f_{T_1 - 1} | \mathscr{F}_{T_2})|^a d\mu$$
$$\leqslant 2^{a-1} \int_{\{T_1 < \infty\}} E(|f - f_{T_1 - 1}|^a | \mathscr{F}_{T_1}) d\mu$$
$$\leqslant 2^{a-1} \int_{\{T_1 < \infty\}} E(\gamma^a | \mathscr{F}_{T_1}) d\mu$$

$$= 2^{a-1}\int_{\left(f^{*a}>\frac{a\lambda}{2^{a-1}}\right)}\gamma^a d\mu.$$

应用引理 4 与式(23), 并取 $\alpha=p$, 得

$$E\left(\frac{f^{*a}}{p+1}\varphi\left(\frac{f^{*a}}{p+1}\right)\right)\leqslant q'2^{a-1}E\left(\gamma^a\varphi\left(\frac{2^{a-1}}{p}f^{*a}\right)\right)$$

$$\leqslant ep^2q^{-1}q'2^{(a-1)p}\frac{1}{p+1}E\left(\gamma^a\varphi\left(\frac{f^{*a}}{p+1}\right)\right).$$

最后, 由引理 5, 我们得

$$\|f^{*a}\|_\Phi\leqslant ep^2q^{-1}q'2^{(a-1)p}\|\gamma^a\|_\Phi.$$

两边取 $1/a$ 次幂, 并对 γ 取"inf", 即得式(34)右边的不等式. ▌

注 1 特别当 $\Phi(u)=u^{p/a}$, $1\leqslant a<p<\infty$, 即得 2.4 节定理 7 之结论.

注 2 本定理条件在如下意义下是不能放宽的, 即当 $p_\Phi=\infty$ 或 $q_\Phi=1$ 时结论不必为真. 对 L^∞(可以视为 $p_\Phi=\infty$ 的例子), 如众所周知, 一般地, 我们没有 ${}_1K_\infty(=\mathrm{BMO})\subset L^\infty$; 对 L^1(可以视为 $q_\Phi=1$ 的例子), 一般地有 $H_1\subsetneqq {}_1K_1$ 与 ${}_1K_1\subsetneqq L^1$. 这说明当 $q_\Phi=1$ 时, 式(34)之左右两边不等式均可以不成立. Garsia[1] 指出, 可以构造使得 $f\geqslant 0$, $f\in L^1$, $|\Delta f_n|\leqslant 1$, $f\notin H_1$ 的例子. 这即说明 ${}_1K_1\neq H_1$. 下面我们举一个说明 ${}_1K_1\neq L^1$ 的例子.

考虑$(\Omega,\mathscr{F},\mu,\{\mathscr{F}_n\}_{n\geqslant 1})$, 其中 $\Omega=(0,1]$, $\mu=dx$, $\mathscr{F}_1$ 平凡, $\mathscr{F}_n$ 由 n 个原子

$$\left(0,\frac{1}{2^{n-1}}\right],\left(\frac{1}{2^{n-1}},\frac{1}{2^{n-2}}\right],\cdots,\left(\frac{1}{2},1\right],$$

生成. 记 $I_k=\left(\frac{1}{2^k},\frac{1}{2^{k-1}}\right]$. 令

$$f=\sum_1^\infty c_k\mathrm{II}(I_k)\in L^1,$$

$$f_n=\sum_1^{n-1}c_k\mathrm{II}(I_k)+c_n'\mathrm{II}\left(\left(0,\frac{1}{2^{n-1}}\right]\right),$$

$$c'_n = 2^{n-1} \sum_{k \geqslant n} \frac{c_k}{2^k}.$$

我们有

$$|f - f_{n-1}| = |c_{n-1} - c'_{n-1}| \mathrm{II}(I_{n-1}) + \sum_{k \geqslant n} |c_k - c'_{n-1}| \mathrm{II}(I_k),$$

$$E(|f - f_{n-1}| \,|\, \mathscr{F}_n) \mathrm{II}(I_{n-1}) = |c_{n-1} - c'_{n-1}| \mathrm{II}(I_{n-1}).$$

假设 $\gamma = \sum_1^\infty d_k \mathrm{II}(I_k)$是任一非负函数，满足

$$E(|f - f_{n-1}| \,|\, \mathscr{F}_n) \leqslant E(\gamma | \mathscr{F}_n),$$

则 $d_n \geqslant |c_n - c'_n|, \forall n$. 若取 $c_n = 2^n / n^2$，则

$$c'_n = 2^{n-1} \sum_{k \geqslant n} \frac{1}{k^2} \sim n c_n,$$

$$\Sigma \frac{d_n}{2^n} \geqslant \Sigma \frac{c'_n - c_n}{2^n} \sim \Sigma \frac{1}{n} = \infty.$$

由此说明 $\gamma \overline{\in} L^1$，亦即 $f \overline{\in} {}_1K_1$. 这就证明了 ${}_1K_1 \neq L^1$.

定理 6′ 设 $0 < a < 1$，Φ 如定理 6 所述. 则 ${}_aK_\Phi = {}^aL^\Phi$. 更确切地说，有

$$\begin{aligned} \|f\|_{{}_aK_\Phi} &\leqslant \|f\|_{{}^aL^\Phi} \leqslant \|(|f|^a)^*\|_\Phi^{1/a} \\ &\leqslant (2epq^{-1}(q')^2)^{1/a} \|f\|_{{}_aK_\Phi}. \end{aligned} \tag{35}$$

证明 设 $f \in {}^aL^\Phi$. 取 $\theta = (\theta_n), \theta_n \equiv 0$，我们有

$$\begin{aligned} \|f\|_{{}_aK_\Phi} &\leqslant \|f\|_{{}_aK_\Phi}^{(\theta)} \leqslant \||f|^a\|_\Phi^{1/a} \\ &= \|f\|_{{}^aL^\Phi} \leqslant \|(|f|^a)^*\|_\Phi^{1/a}. \end{aligned}$$

即证明了式(35)之第一、二两个不等式成立.

现看最右边的不等式. 设 $f \in {}_aK_\Phi$, $\theta = (\theta_n)_{n \geqslant 0}$ 与 $\gamma \in {}^aL^\Phi$ 是如式(28)中任意给定的. 由于 $0 < a < 1$，我们有

$$||f|^a - |\theta_{n-1}|^a| \leqslant |f - \theta_{n-1}|^a.$$

从而

$$E(||f|^a - |\theta_{n-1}|^a| \,|\, \mathscr{F}_n) \leqslant E(\gamma^a | \mathscr{F}_n),$$

以及

$$E(||f|^a-(|f|^a)_{n-1}||\mathscr{F}_n)$$
$$\leqslant E(||f|^a-|\theta_{n-1}|^a||\mathscr{F}_n)+E(||f|^a-|\theta_{n-1}|^a||\mathscr{F}_{n-1})$$
$$\leqslant E(\gamma^a|\mathscr{F}_n)+E(\gamma^a|\mathscr{F}_{n-1})$$
$$\leqslant 2E((\gamma^a)^*|\mathscr{F}_n).$$

因为 $q_\Phi>1$, 因此

$$_aK_\Phi\subset\{f:\ |f|^a\in {}_1K_\Phi\}.$$

更确切地说, 根据定理 6 中 $a=1$ 情形的结果, 我们有

$$\|(|f|^a)^*\|_\Phi\leqslant epq^{-1}q'\|2(\gamma^a)^*\|_\Phi,$$
$$\|(|f|^a)^*\|_\Phi^{1/a}\leqslant(2epq^{-1}(q')^2)^{1/a}\|\gamma^a\|_\Phi^{1/a},$$
$$\|(|f|^a)^*\|_\Phi^{1/a}\leqslant(2epq^{-1}(q')^2)^{1/a}\|f\|_{_aK_\Phi}.\ \blacksquare$$

注 如定理 6 一样, 对更广泛的 Φ, 如 $p_\Phi=\infty$ 或 $q_\Phi=1$ 时, 定理结论可以不成立; 当 $p_\Phi=\infty$ 时讨论同前一样; 当 $q_\Phi=1$ 时, 适当选取 $(\Omega,\mathscr{F},\mu,\{\mathscr{F}_n\}_{n\geqslant0})$, 使得存在 f, 满足 $|f|^a\in L^\Phi$, 但 $(|f|^a)^*\overline{\in}L^\Phi$, 则 f 说明定理 6′的结论不成立. 因 $f\in{}^aL^\Phi\subset{}_aK_\Phi$, 但 $(|f|^a)^*\overline{\in}L^\Phi$.

现在刻划 $_aL_\Phi$. 首先将 3.3 节中引理 2 推广到 L^Φ.

引理 6 设 Φ 是满足 $p_\Phi<\infty$ 的凸函数, $h\geqslant0$, $h\in L^\Phi$, $(\varepsilon_n)_{n\geqslant0}$ 是任一满足 $\Sigma|\varepsilon_n|\leqslant1$ 的过程. 则

$$g=\Sigma E(h\varepsilon_n|\mathscr{F}_n)$$

满足

$$\|g\|_\Phi\leqslant p_\Phi\|h\|_\Phi. \tag{36}$$

证明 记 $W_n=\sum_{k=0}^{n}E(h|\varepsilon_k||\mathscr{F}_k)$, $W=W_\infty$,

$$Y_n=\sum_0^n h|\varepsilon_k|,\quad Y=Y_\infty.$$

则若定义停止时间 $T=\inf\{n;\ W_n>\lambda\}$, 便有

$$\int_{\{W>\lambda\}}(W-\lambda)d\mu$$

$$\leqslant\int_{\{T<\infty\}}E(W-W_{T-1}|\mathscr{F}_T)d\mu$$

$$=\int_{\{T<\infty\}}E(Y-Y_{T-1}|\mathscr{F}_T)d\mu$$

$$\leqslant\int_{\{W>\lambda\}}Yd\mu.$$

因此,应用定理1即得

$$\|g\|_\Phi\leqslant\|W\|_\Phi\leqslant p_\Phi\|Y\|_\Phi\leqslant p_\Phi\|h\|_\Phi.\ \blacksquare$$

定理7 设 $0<a<\infty$, Φ 是满足 $q_\Phi>1$ 的凸函数. 则 ${}_aL_\Phi={}_aK_\Phi$. 更确切而言,有

$$2^{-1/a}\|f\|_{{}_aL_\Phi}\leqslant\|f\|_{{}_aK_\Phi}\leqslant(q')^{1/a}\|f\|_{{}_aL_\Phi}. \tag{37}$$

证明 设 $f\in{}_aK_\Phi$. 则存在 $\theta=(\theta_n)_{n\geqslant0}$ 与 $\gamma\in{}^aL^\Phi$ 满足

$$E(|f^{(n-1)}|^a|\mathscr{F}_n)=E(|f-\theta_{n-1}|^a|\mathscr{F}_n)\leqslant E(\gamma^a|\mathscr{F}_n),\quad\forall n.$$

对此同一个 $\theta=(\theta_n)$, 有

$$\|f\|_{{}_aL_\Phi}^{(\theta)}=\sup_{(g_n)\in G_a^\Phi}E(\Sigma|g_n|^a|f^{(n-1)}|^a)^{1/a}$$

$$=\sup_{(g_n)\in G_a^\Phi}E(\Sigma|g_n|^aE(|f^{(n-1)}|^a|\mathscr{F}_n))^{1/a}$$

$$\leqslant\sup_{(g_n)\in G_a^\Phi}E(\Sigma|g_n|^a\gamma^a)^{1/a}$$

$$\leqslant\sup_{(g_n)\in G_a^\Phi}\max(E(\Psi(\Sigma|g_n|^a)),1)^{1/a}N_\Phi(\gamma^a)^{1/a}$$

$$\leqslant2^{1/a}\|\gamma^a\|_\Phi^{1/a}.$$

将此 $\theta=(\theta_n)$ 固定,关于 γ 取“inf”,然后关于 θ 再取“inf”, 则得式(37)之左边不等式.

现设 $f\in{}_aL_\Phi$. 则存在 $\theta=(\theta_n)$(仍简记 $f^{(n-1)}=f-\theta_{n-1}$), 使得

$$\|f\|_{{}_aL_\Phi}^{(\theta)}=\sup_{(g_n)\in G_a^\Phi}E(\Sigma|g_n|^a|f^{(n-1)}|^a)^{1/a}<\infty.$$

取N固定，考虑过程

$$(\gamma_n^a)_{n=0}^N, \quad \gamma_n^a = E(|f^{(n-1)}|^a|\mathscr{F}_n).$$

现在，我们需要对满足 $h\geqslant 0$, $E(\Psi(h))\leqslant 1$ 的任意 $h\in L^\Psi$ 来估计 $E(\gamma_N^{*a}h)$. 为此，作Ω的一个剖分

$$\Omega = \bigcup_{n=0}^N F_n, \quad F_n = \{\gamma_{n-1}^* < \gamma_n = \gamma_N^*\}.$$

则有

$$\begin{aligned} E(\gamma_N^{*a}h) &= \sum_{n=0}^N E(\gamma_n^a h \mathrm{I}(F_n)) \\ &= \sum_{n=0}^N E(\gamma_n^a E(h\mathrm{I}(F_n)|\mathscr{F}_n)) \\ &= E\left(\sum_{n=0}^N |f^{(n-1)}|^a E(h\mathrm{I}(F_n)|\mathscr{F}_n)\right). \end{aligned}$$

现记

$$g_n^a = E(h\mathrm{I}(F_n)|\mathscr{F}_n).$$

则$(g_n)_{n=0}^N$是一个适应过程，并且根据引理 6 以及 4.1 节命题 1 之 4)即得

$$\|\Sigma g_n^a\|_\Psi \leqslant p_\Psi \|h\|_\Psi \leqslant p_\Psi = q_\Phi'.$$

于是我们有

$$E\left(\Psi\left(\frac{\Sigma g_n^a}{q_\Phi'}\right)\right) \leqslant E\left(\Psi\left(\frac{\Sigma g_n^a}{\|\Sigma g_n^a\|_\Psi}\right)\right) \leqslant 1.$$

这说明

$$\left(\frac{E(h\mathrm{I}(F_n)|\mathscr{F}_n)^{1/a}}{(q_\Phi')^{1/a}}\right)_{n=0}^N \in G_a^\Phi.$$

因此，根据$\|\cdot\|_{{}_aL_\Phi}^{(\theta)}$的定义，我们得

$$\|\gamma_N^{*a}\|_\Phi \leqslant \sup_{h:\ E(\Psi(h))\leqslant 1} E(\gamma_N^{*a}h)$$

$$\leqslant q'_\Phi \sup_{h:\ E(\Psi(h))\leqslant 1} E\left(\sum_0^N |f^{(n-1)}|^a (q'_\Phi)^{-1} E(h\mathrm{II}(F_n)|\mathscr{F}_n)\right)$$

$$\leqslant q'_\Phi (\|f\|^{(\theta)}_{{}_aL_\Phi})^a.$$

令 $N\to\infty$, 并注意 $\gamma^{*a}=\sup\limits_n E(|f^{(n-1)}|^a|\mathscr{F}_n)$满足

$$E(|f^{(n-1)}|^a|\mathscr{F}_n)\leqslant E(\gamma^{*a}|\mathscr{F}_n),$$

我们得

$$\|f\|^{(\theta)}_{{}_aK_\Phi}\leqslant\|\gamma^{*a}\|_\Phi^{1/a}\leqslant(q'_\Phi)^{1/a}\|f\|^{(\theta)}_{{}_aL_\Phi}.$$

对 θ 取"inf", 便得到式(37)之右边不等式. ∎

注 当 $1\leqslant a<\infty$ 以及 $q_\Phi>1$ 时, 对 $f\in{}_aK_\Phi$ 或 $f\in{}_aL_\Phi$, 我们总取 $\theta=(f_n)_{n\geqslant0}$, 并采用通常拟范数, 则式(37)成为

$$2^{-1/a}\|f\|_{{}_aL_\Phi}\leqslant\|f\|_{{}_aK_\Phi}\leqslant\|(f_a^\#)^a\|_\Phi^{1/a}\leqslant(q'_\Phi)^{1/a}\|f\|_{{}_aL_\Phi}, \qquad (37)'$$

其中

$$f_a^\#=\sup_n E(|f-f_{n-1}|^a|\mathscr{F}_n)^{\frac{1}{a}}.$$

这是 Fefferman-Stein-Hanks 定义的函数 $f^\#$ 在鞅论中的类似.

现在我们考虑与 ${}_aK_\Phi$, ${}_aL_\Phi$ 相类似的 ${}_a\mathscr{K}_\Phi$, ${}_a\mathscr{L}_\Phi$, 它们由用 θ_n 代替式(28) 与 (32)中的 θ_{n-1} 而得. 这是 3.3 节中讨论的 ${}_a\mathscr{K}_p$ 与 ${}_a\mathscr{L}_p$ 的推广.

当 $1\leqslant a<\infty$ 时, 无论是否有 $q_\Phi>1$, 我们总取 $\theta=(f_n)_{n\geqslant0}$, 同时采用通常拟范数, 我们有

定理 7′ 设 $0<a<\infty$, Φ 是满足 $q_\Phi>1$ 的凸函数. 则 ${}_a\mathscr{L}_\Phi={}_a\mathscr{K}_\Phi$. 亦即有

$$2^{-1/a}\|f\|_{{}_a\mathscr{L}_\Phi}\leqslant\|f\|_{{}_a\mathscr{K}_\Phi}\leqslant(q')^{1/a}\|f\|_{{}_a\mathscr{L}_\Phi}. \qquad (38)$$

当 $1\leqslant a<\infty$, $q_\Phi>1$ 时, 式(38)成为

$$2^{-1/a}\|f\|_{{}_a\mathscr{L}_\Phi}\leqslant\|f\|_{{}_a\mathscr{K}_\Phi}\leqslant\|(\tilde{f}_a^\#)^a\|_\Phi^{1/a}\leqslant(q')^{1/a}\|f\|_{{}_a\mathscr{L}_\Phi}, \qquad (38)'$$

其中

$$f_a^{\#}=\sup_n E(|f-f_n|^a|\mathscr{F}_n)^{1/a}.$$

证明基本上同定理 7.

注 当 $\Phi(u)=u^{p/a}$, $1\leqslant a<p\leqslant\infty$ 时, 式(38)之右边不等式即化为 3.3 节定理 5 之主要结论.

注意, 如 $\Phi(u)=u^{p/a}$ 的情形所示, 对 ${}_a\mathscr{K}_\Phi$ 与 ${}_a\mathscr{L}_\Phi$ 定理 6, 6′ 的结论不再成立. 也就是可以有 ${}_a\mathscr{K}_\Phi={}_a\mathscr{L}_\Phi=L^a\neq{}^aL^\Phi$.

最后, 简单地讨论一下当 $q_\Phi=1$ 时有关空间 ${}_aK_\Phi$, ${}_aL_\Phi$, ${}_a\mathscr{K}_\Phi$ 与 ${}_a\mathscr{L}_\Phi$ 的一些问题. 关于它们我们知之甚少. 我们按以下两类空间讨论. 当固定地取 $\theta=(f_n)_{n\geqslant0}$ 时, 记相应的空间为 ${}_aK_\Phi$, ${}_aL_\Phi$, ${}_a\mathscr{K}_\Phi$ 与 ${}_a\mathscr{L}_\Phi$; 否则记为 ${}_a\widetilde{K}_\Phi$, ${}_a\widetilde{L}_\Phi$, ${}_a\widetilde{\mathscr{K}}_\Phi$ 与 ${}_a\widetilde{\mathscr{L}}_\Phi$.

当 $0<a<1$时, 只考虑 ${}_a\widetilde{K}_\Phi$, ${}_a\widetilde{L}_\Phi$, ${}_a\widetilde{\mathscr{K}}_\Phi$与${}_a\widetilde{\mathscr{L}}_\Phi$. 此时由于

$$\big||f|^a-|\theta_{n-1}|^a\big|\leqslant|f-\theta_{n-1}|^a,$$

因此得到初等事实

$$
\begin{aligned}
&{}^aL^\Phi\subset{}_a\widetilde{K}_\Phi\subset\{f:\ |f|^a\in{}_1\widetilde{K}_\Phi\},\\
&{}^aL^\Phi\subset{}_a\widetilde{L}_\Phi\subset\{f:\ |f|^a\in{}_1\widetilde{L}_\Phi\}.
\end{aligned}
$$

对于${}_a\widetilde{\mathscr{K}}_\Phi$, ${}_a\widetilde{\mathscr{L}}_\Phi$有同样的结论.

当 $a=2$, 以及取 $\theta=(f_n)$固定时, 我们有下面的定理.

定理 8 设 $\Phi(u)$是满足 $p_\Phi<\infty$ 的 Young 凸函数. 则有

$${}_2K_\Phi={}_2L_\Phi={}_2H_\Phi=\{f:\ \|S(f)^2\|_\Phi<\infty\}.$$

即有

$$\frac{1}{2p_\Phi}\|S(f)^2\|_\Phi\leqslant\frac{1}{2}\|f\|^2_{{}_2L_\Phi}\leqslant\|f\|^2_{{}_2K_\Phi}\leqslant\|S(f)^2\|_\Phi. \tag{39}$$

证明 设 $f\in{}_2H_\Phi$. 则由于

$$
\begin{aligned}
E(|f-f_{n-1}|^2|\mathscr{F}_n)&=E(S(f)^2-S_{n-1}(f)^2|\mathscr{F}_n)\\
&\leqslant E(S(f)^2|\mathscr{F}_n),
\end{aligned}
$$

我们得式(39)之第三个不等式.

现设 $f\in{}_2K_\Phi$. 任取 $\gamma\geqslant 0$ 为 ${}_2K_\Phi$ 定义中 f 的控制函数. 则

$$\begin{aligned}\|f\|_{2L_\Phi}^2&=\sup_{(g_n)\in G_2^\Phi}E(\Sigma|g_n|^2|f^{(n-1)}|^2)\\&\leqslant\sup_{(g_n)\in G_2^\Phi}E(\Sigma|g_n|^2\gamma^2)\\&\leqslant\sup_{(g_n)\in G_2^\Phi}\max(E(\Psi(\Sigma|g_n|^2)),1)N_\Phi(\gamma^2)\\&\leqslant 2\|\gamma^2\|_\Phi.\end{aligned}$$

由此得式(39)之第二个不等式.

现设 $f\in{}_2L_\Phi$. 我们首先给出 $\|\cdot\|_{2L_\Phi}$ 的等价表示. 记

$$R^\Phi=\{\text{非负增加适应过程}(r_n):E(\Psi(r_\infty))\leqslant 1\}.$$

则对应于 $r_n=\sum_{k\leqslant n}|g_k|^2$, 同 3.2 节中一样可得

$$\begin{aligned}E(\Sigma|g_k|^2|f^{(k-1)}|^2)&=E(\Sigma|g_k|^2E(|f^{(k-1)}|^2|\mathscr{F}_k))\\&=E\left(\sum_{k=0}^\infty|g_k|^2\sum_{n=k}^\infty|\Delta f_n|^2\right)\\&=E\left(\sum_{n=0}^\infty\sum_{k=0}^n|g_k|^2|\Delta f_n|^2\right)\\&=E\left(\sum_{n=0}^\infty r_n|\Delta f_n|^2\right).\end{aligned}$$

从而

$$\|f\|_{2L_\Phi}=\sup_{(r_n)\in R^\Phi}E(\Sigma r_n|\Delta f_n|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

现在我们考虑满足 $E(\Psi(\rho))\leqslant 1$ 的 $\rho(\geqslant 0)$ 所生成的鞅 $\rho=(\rho_n)_{n\geqslant 0}$. 则由于 Φ 是限制增长的, 且是 Young 函数, 因此有 $1<p_\Phi<\infty$. 于是 $1<p'_\Phi=q_\Psi<\infty$. 所以

$$\|\rho^*\|_\Psi\leqslant q'_\Psi\|\rho\|_\Psi\leqslant p_\Phi.\quad E\left(\Psi\left(\frac{\rho^*}{p_\Phi}\right)\right)\leqslant 1\ .$$

这说明$\left(\frac{1}{p_\Phi}\rho_n^*\right)_{n\geq 0}\in R^\Phi$. 由此我们得

$$\begin{aligned}\|S(f)^2\|_\Phi&\leqslant\sup_{\rho:\ E(\Psi(\rho))\leqslant 1}E\left(\rho\sum_{n=1}^{\infty}|\Delta f_n|^2\right)\\&=\sup_{\rho:\ E(\Psi(\rho))\leqslant 1}E\left(\sum_{1}^{\infty}E(\rho|\mathscr{F}_n)|\Delta f_n|^2\right)\\&\leqslant p_\Phi\sup_{\rho}E\left(\sum_{1}^{\infty}\frac{\rho_n^*}{p_\Phi}|\Delta f_n|^2\right)\\&\leqslant p_\Phi\|f\|_{{}_2L_\Phi}^2.\ \blacksquare\end{aligned}$$

定理 8′ Φ 如定理 8 所设. 则

$${}_2\mathscr{K}_\Phi={}_2\mathscr{L}_\Phi={}_2\Sigma_\Phi=\{f:\ \|\sigma(f)^2\|_\Phi<\infty\}.$$

即有

$$\frac{1}{2p_\Phi}\|\sigma(f)^2\|_\Phi\leqslant\frac{1}{2}\|f\|_{{}_2\mathscr{L}_\Phi}^2\leqslant\|f\|_{{}_2\mathscr{K}_\Phi}^2\leqslant\|\sigma(f)^2\|_\Phi. \qquad (39)'$$

证明 式(39)′的第二和第三个不等式的证明同定理 8. 因此只需证明第一个不等式. 注意此时$\|\cdot\|_{{}_2\mathscr{L}_\Phi}$的两个等价表示是

$$\begin{aligned}&\sup_{(g_n)\in G_2^\Phi}E\left(\sum_{n=1}^{\infty}|g_n|^2|f^{(n)}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\&=\sup_{(r_n)\in R^\Phi}E\left(\sum_{n=1}^{\infty}r_{n-1}|\Delta f_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

由此得

$$\begin{aligned}\|\sigma(f)^2\|_\Phi&\leqslant\sup_{\rho:\ E(\Psi(\rho))\leqslant 1}E\left(\rho\sum_{n=1}^{\infty}E(|\Delta f_n|^2|\mathscr{F}_{n-1})\right)\\&\leqslant\sup_{\rho:\ E(\Psi(\rho))\leqslant 1}E\left(\sum_{1}^{\infty}\rho_{n-1}^*E(|\Delta f_n|^2|\mathscr{F}_{n-1})\right)\\&\leqslant p_\Phi\|f\|_{{}_2\mathscr{L}_\Phi}^2.\ \blacksquare\end{aligned}$$

注1 若 $\Phi(u)=u^{p/2}, p\geqslant 2$, 则定理 8′ 即可化为 3.2 节的定理 3. 式(39)′中除第二个不等式中多出系数 1/2 外，其他同 3.2 节的定理 3 之式(9)中的系数完全一样.

注 2 当 $\Phi(u)=u$ 时, $\|\cdot\|_{2L_\Phi}$ 与 $\|\cdot\|_{2\mathscr{L}_\Phi}$ 应采用 R^Φ 定义，此时 ${}_2L_\Phi$ 应理解为 ${}_2H_\Phi=H_2$; ${}_2\mathscr{L}_\Phi$ 应理解为 ${}_2\Sigma_\Phi=\Sigma_2$. 因此定理 8 与 8′ 仍然成立.

4.4 鞅的凹 Φ-不等式

设 $\Phi(u)$是 $\mathbf{R}^+$到 $\mathbf{R}^+$ 的增加凹函数, $\Phi(0)=0$, 规范化 $\varphi(u)$ $(=\Phi'(u))$为左连续的, $\varphi(0)=\varphi(0^+)$. 因为 $\varphi(u)$是非负单调下降的, $\varphi(\infty)=\lim\limits_{u\to\infty}\varphi(u)$存在. 又, 对于所有这样的凹函数 Φ, 总有

$$\Phi=(2u)\leqslant 2\Phi(u),\qquad p=\sup\frac{u\varphi(u)}{\Phi(u)}\leqslant 1.$$

此外, 注意到

$$\lim_{u\to 0}\ u\varphi(u)\leqslant\lim_{u\to 0}\ 2\left(\Phi(u)-\Phi\left(\frac{u}{2}\right)\right)=0,$$

故我们有

$$\begin{aligned}\Phi(u)&=\int_0^u\varphi(t)\,dt=\lim_{a\to 0,\,b\to\infty}\int_a^b\varphi(t)\,d(u\wedge t)\\&=\lim_{a\to 0,\,b\to\infty}\left\{\varphi(t)(u\wedge t)\Big|_a^b-\int_a^b u\wedge t\,d\varphi(t)\right\}\\&=u\varphi(\infty)-\int_0^\infty u\wedge t\,d\varphi(t),\end{aligned}\tag{40}$$

其中 $-d\varphi(t)$是一个非负 Lebesgue-Stieltjes 测度.

引理 7 设 $\Phi(u)$ 是满足 $\Phi(0)=0$ 的增加凹函数, W, Y 是两非负随机变量, 满足

$$E(W\wedge\lambda)\leqslant CE(Y\wedge\lambda),\quad\forall\lambda>0.\tag{41}$$

则有

$$E(\Phi(W)) \leqslant CE(\Phi(Y)). \tag{42}$$

证明 分别以 $u=W$, $u=Y$ 代入式(40)，然后关于空间变量积分，再利用 Fubini 定理交换积分次序，得

$$E(\Phi(W)) = \varphi(\infty)E(W) - \int_0^\infty E(W\wedge\lambda)d\varphi(\lambda)$$

$$\leqslant C\varphi(\infty)E(Y) - C\int_0^\infty E(Y\wedge\lambda)d\varphi(\lambda)$$

$$+\varphi(\infty)(E(W)-CE(Y)) \leqslant CE(\Phi(Y)),$$

这里我们用了 $E(W)\leqslant CE(Y)$. 这个不等式由式(41)中令 $\lambda\to\infty$ 而得. ▌

注 引理结论对 $\mathscr{F}_0$ 不平凡时也成立.

现在考虑一类特别的凹函数.

定义 1 一个如本节所述之凹函数 Φ 称为严格凹的，如果

$$p = \sup\frac{u\varphi(u)}{\Phi(u)} < 1.$$

引理 8 设 Φ 是严格凹函数；W, Y 是两非负随机变量，满足

$$|\{W>\lambda\}| \leqslant \frac{C_1}{\lambda}E(Y\wedge\lambda) + C_2|\{Y>\lambda\}|, \quad \forall\lambda>0. \tag{43}$$

则有

$$E(\Phi(W)) \leqslant \left(\frac{C_1}{1-p}+C_2\right)E(\Phi(Y)). \tag{44}$$

证明 首先指出 $\dfrac{\Phi(u)}{u^p}$ 是单调下降函数. 其证明同 4.1 节的命题 1 之 6) 中的一样(那里证明并没有用到 $\varphi(u)$ 的增加性). 将式(43)两边关于 $d\Phi(\lambda)$ 积分得

$$E(\Phi(W)) \leqslant C_1\int_0^\infty \frac{1}{\lambda}\left\{\int_{\{Y\leqslant\lambda\}} Y d\mu + \int_{\{Y>\lambda\}} \lambda d\mu\right\} d\Phi(\lambda)$$

$$+C_2E(\Phi(Y))$$

$$\leqslant C_1\int_\Omega Y\int_Y^\infty \frac{d\Phi(\lambda)}{\lambda}d\mu+(C_1+C_2)E(\Phi(Y)).$$

现在来估计$\int_Y^\infty \frac{d\Phi(\lambda)}{\lambda}$. 我们有

$$\begin{aligned}
&\int_Y^\infty \frac{d\Phi(\lambda)}{\lambda}\\
&\quad=\int_Y^\infty\int_\lambda^\infty \frac{dt}{t^2}d\Phi(\lambda)\\
&\quad=\int_Y^\infty\int_Y^t d\Phi(\lambda)\frac{dt}{t^2}\\
&\quad=\int_Y^\infty \frac{\Phi(t)}{t^2}dt-\frac{\Phi(Y)}{Y}\\
&\quad=\int_Y^\infty \frac{\Phi(t)}{t^p}\cdot\frac{1}{t^{2-p}}dt-\frac{\Phi(Y)}{Y}\\
&\quad\leqslant \frac{\Phi(Y)}{Y^p}\int_Y^\infty \frac{dt}{t^{2-p}}-\frac{\Phi(Y)}{Y}\\
&\quad=\frac{p}{1-p}\cdot\frac{(Y)}{Y}.
\end{aligned}$$

因此得

$$\begin{aligned}
E(\Phi(W))&\leqslant\left(\frac{p}{1-p}C_1+C_1+C_2\right)E(\Phi(Y))\\
&=\left(\frac{C_1}{1-p}+C_2\right)E(\Phi(Y)).\ \blacksquare
\end{aligned}$$

注 从引理的证明知, 为了保证由式(43)推出式(44), 只需凹函数 Φ 满足

$$\int_u^\infty \frac{\Phi(t)}{t^2}dt\leqslant C\frac{\Phi(u)}{u}. \tag{45}$$

而条件

$$\Phi(\alpha u)\leqslant\beta\Phi(u),\ \forall u,\ 某个\ 1<\beta<\alpha, \tag{46}$$

对式(45)的成立是充分的. 事实上, 我们有

$$
\begin{aligned}
&\int_u^\infty \frac{\Phi(t)}{t^2}dt \\
&=\sum_{k=0}^\infty \int_{\alpha^k u}^{\alpha^{k+1}u} \frac{\Phi(t)}{t^2}dt \\
&=\sum_{k=0}^\infty \int_u^{\alpha u} \frac{\Phi(\alpha^k s)}{(\alpha^k s)^2}\alpha^k ds \\
&\leqslant \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k \int_u^{\alpha u} \frac{\Phi(s)}{s^2}ds \leqslant C\frac{\Phi(u)}{u}.
\end{aligned}
$$

但条件

$$\Phi(\alpha u)<\alpha\Phi(u), \quad \forall u, \text{某 } \alpha>1, \tag{46'}$$

对式(45)的成立是不充分的. 例如 $\Phi(u)=\dfrac{u}{\log(1+u)}$ 满足式(46)′, 但不满足式(45).

条件(46)可被严格凹性推出; 反之, 是否亦然, 我们并不知道.

引理 9 设 $(X_n)_{n\geqslant0}$ 是一非负适应过程; $B=(B_n)_{n\geqslant0}$ 是一个非负增加可预报过程, 但 B_0 可不等于0, $\mathscr{F}_0$ 也不一定是平凡的. 又设对所有停止时间 T, 都有

$$E(X_T \mathrm{I}(\{T>0\}))\leqslant CE(B_T \mathrm{I}(\{T>0\})). \tag{47}$$

则我们有

$$E(X_\infty\wedge\lambda)\leqslant(C+1)E(B_\infty\wedge\lambda), \quad \forall\lambda>0. \tag{48}$$

证明 定义停止时间 $T=\inf\{n: B_{n+1}>\lambda\}$. 注意因对 B_0 没有作任何假定, 故当 $T_0=0$, 不必有 $B_T\leqslant\lambda$. 但仍有

$$B_T \mathrm{I}(\{T>0\})\leqslant\lambda.$$

我们有

$$X_\infty\wedge\lambda\leqslant X_T \mathrm{I}(\{T=\infty\})+\lambda \mathrm{I}(\{T<\infty\}).$$

以及

$$B_T \mathrm{II}(\{T>0\}) \leqslant \min(B_\infty, \lambda) = B_\infty \wedge \lambda,$$

$$\begin{aligned}\lambda|\{T<\infty\}| &= \int_{\{T<\infty\}} \lambda d\mu \\ &\leqslant \int_{\{T<\infty\}} \lambda d\mu + \int_{\{T=\infty\}} B_\infty d\mu \\ &= E(B_\infty \wedge \lambda).\end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned}E(X_\infty \wedge \lambda) &\leqslant E(X_T \mathrm{II}(\{T>0\})) + E(\lambda \mathrm{II}(\{T<\infty\})) \\ &\leqslant CE(B_T \mathrm{II}(\{T>0\})) + E(B_\infty \wedge \lambda) \\ &\leqslant (C+1)E(B_\infty \wedge \lambda). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

引理 10 基本条件如引理 9，但条件(47)改为如下稍强的形式

$$E(X_T | \mathscr{F}_0) \leqslant E(B_T | \mathscr{F}_0). \tag{49}$$

则有

$$|\{X^* > c\}| \leqslant \frac{1}{c} E(B_\infty \wedge d) + |\{B_\infty > d\}|, \quad \forall c, d > 0. \tag{50}$$

证明 定义停止时间

$$T = \inf\{n: \ B_{n+1} > d\}, \quad S = \inf\{n: \ X_n > c\}.$$

因而有

$$|\{X^* > c\}| \leqslant |\{X^* > c, T=\infty\}| + |\{T<\infty\}|,$$

$$\begin{aligned}|\{X^* > c, T=\infty\}| &\leqslant |\{X_T^* > c, T>0\}| \\ &\leqslant |\{X_S > c, S \leqslant T, T>0\}| \leqslant |\{X_{S\wedge T} > c, T>0\}| \\ &\leqslant \frac{1}{c} E(X_{S\wedge T} \mathrm{II}(\{T>0\})) \\ &= \frac{1}{c} E(E(X_{S\wedge T} | \mathscr{F}_0) \mathrm{II}(\{T>0\})) \\ &\leqslant \frac{1}{c} E(E(B_{S\wedge T} | \mathscr{F}_0) \mathrm{II}(\{T>0\}))\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{c}E(B_{S\wedge T}\mathrm{I\!I}(\{T>0\}))$$

$$\leqslant\frac{1}{c}E(B_T\mathrm{I\!I}(\{T>0\}))\leqslant\frac{1}{c}E(B_\infty\wedge d),$$

以及

$$|\{T<\infty\}|=|\{B_\infty>d\}|.$$

于是即得式(50). ∎

注 当$\mathscr{F}_0$平凡时，式(47)是对所有非零停止时间T都有

$$E(X_T)\leqslant CE(B_T);$$

而式(49)则是对一切停止时间T，上式都成立. 两者差别只是对$T\equiv 0$式(47)不一定成立. 但当$\mathscr{F}_0$不再平凡时，式(49)当然比式(47)强多了. 此时在证明中用到的条件的确是式(49). 对于稍微弱一些的条件

$$E(X_T)\leqslant CE(B_T),\quad \forall T,$$

我们却不可能推出

$$E(X_{S\wedge T}\mathrm{I\!I}(\{T>0\}))\leqslant E(B_{S\wedge T}\mathrm{I\!I}(\{T>0\}))\leqslant E(B_\infty\wedge d).$$

现在考虑上述不等式对鞅的应用. 一般仍设$\mathscr{F}_0$为平凡的. 但我们将指出哪些结论当$\mathscr{F}_0$不平凡时也成立.

定理 9 设$\Phi(u)$是满足$\Phi(0)=0$的增加凹函数. 则$\forall$鞅$f=(f_n)_{n\geqslant 0}$，有

$$E(\Phi(S(f)^2))\leqslant 2E(\Phi(\sigma(f)^2)). \tag{51}$$

证明 记

$$W=S(f)^2=\sum_1^\infty|\Delta f_k|^2+|f_0|^2,$$

$$W_n=\sum_1^n|\Delta f_k|^2+|f_0|^2,\quad W_0=0,$$

$$Y=\sigma(f)^2=\sum_1^\infty E(|\Delta f_k|^2|\mathscr{F}_{k-1})+|f_0|^2,$$

$$Y_n=\sum_{1}^{n}E(|\Delta f_k|^2|\mathscr{F}_{k-1})+|f_0|^2,\quad Y_0=0.$$

则 $Y=(Y_n)_{n\geq 0}$ 是一个可预报的增加过程，且对一切停止时间 T，

$$E(W_T)=E(S_T(f)^2)=E(\sigma_T(f)^2)=E(Y_T).$$

于是应用引理 9 与引理 7，即完成定理的证明. ▮

注 定理结论对 $\mathscr{F}_0$ 不平凡时也成立. 因我们有条件

$$E(W_T|\mathscr{F}_0)=E(S_T(f)^2|\mathscr{F}_0)=E(\sigma_T(f)^2|\mathscr{F}_0)=E(Y_T|\mathscr{F}_0).$$

由此可推出式(47).

定理 10 条件如定理 9，则 $\forall$ 鞅 $f=(f_n)_{n\geq 0}$，有

$$E(\Phi(f^{*2}))\leqslant 5E(\Phi(\sigma(f)^2)).\tag{52}$$

证明 记

$$W=f^{*2}=(f_n^{*2})_{n\geq 0},\quad Y=\sigma(f)^2=(\sigma_n(f)^2)_{n\geq 0}.$$

既然对一切停止时间 T，都有

$$W_T=f_T^{*2}=(f^{(T)*})^2,\quad Y_T=\sigma(f^{(T)})^2.\tag{53}$$

从而

$$\begin{aligned}E(W_T)&=E((f^{(T)*})^2)\\&\leqslant 4E(|f^{(T)}|^2)=4E(\sigma(f^{(T)})^2)=4E(Y_T).\end{aligned}$$

于是，由引理 9 与引理 7 便给出式(52). ▮

注 定理结论对 $\mathscr{F}_0$ 不再平凡时也成立. 此外，当 $\Phi(u)=u^{\frac{p}{2}}$ $(0<p\leqslant 2)$ 时即得

$$\|f^*\|_p^p\leqslant 5\|\sigma(f)\|_p^p.$$

此式在 2.8 节的命题 5 中已叙述过(常系数不同).

定理 11 设 $f=(f_n)_{n\geq 0}$ 是可预报的下鞅，$f_0\geqslant 0$. 又设 $B=(B_n)_{n\geq 0}$ 是非负增加可预报过程，其中 $B_n=\sup\limits_{k\leqslant n}f_k$. 则对一切严格凹函数 $\Phi(u)$，都有

$$E(\Phi(f^*))\leqslant CE(\Phi(B_\infty)).\tag{54}$$

证明 考虑非负过程 $X=(X_n)_{n\geqslant 0}$,

$$X_n=B_n-f_n=\sup_{k\leqslant n}f_k-f_n.$$

既然 $E(f_n|\mathscr{F}_0)\geqslant f_0\geqslant 0$, 故对一切停止时间 T,

$$E(X_T|\mathscr{F}_0)=E(B_T-f_T|\mathscr{F}_0)\leqslant E(B_T|\mathscr{F}_0).$$

应用引理 10 与引理 8, 即知

$$E(\Phi(X^*))\leqslant CE(\Phi(B_\infty)),$$

从而

$$E(\Phi(f^*))\leqslant CE(\Phi(X^*))+CE(\Phi(B_\infty))\leqslant CE(\Phi(B_\infty)).\ \blacksquare$$

4.5 鞅的一般Φ-不等式

本节考虑的 Φ 如不另加说明, 都是 $\boldsymbol{R}^+$到 $\boldsymbol{R}^+$的连续增加函数, 满足 $\Phi(0)=0$, 且是限制增长的, 意即

$$\Phi(\alpha\lambda)\leqslant C_\alpha\Phi(\lambda),\quad \forall\lambda>0,\alpha\geqslant 1. \tag{55}$$

定义 2 我们说非负随机变量的有序配对(f,g)满足"好λ不等式", 如果存在 $\alpha>1$ 以及 $\beta>0$ 的一个趋于 0 的序列, 使

$$|\{f>\alpha\lambda,g\leqslant\beta\lambda\}|\leqslant\varepsilon_{\alpha,\beta}|\{f>\lambda\}|, \tag{56}$$

并且其中常系数 $\varepsilon_{\alpha,\beta}$ 对固定的 $\alpha>1$, 满足 $\lim\limits_{\beta\to 0}\varepsilon_{\alpha,\beta}=0$.

有时也称下述稍弱一些的不等式为"好λ不等式":

$$|\{f>\alpha\lambda\}|\leqslant\varepsilon_{\alpha,\beta}|\{f>\lambda\}|+\delta_{\alpha,\beta}|\{g>\beta\lambda\}|. \tag{56$'$}$$

引理 11 Φ 如本节所设, (f,g)满足"好λ不等式". 则只要 $\beta>0$ 充分小, 便有

$$E(\Phi(f))\leqslant C_\alpha C_{\beta^{-1}}\delta_{\alpha,\beta}(1-C_\alpha\varepsilon_{\alpha,\beta})^{-1}E(\Phi(g)). \tag{57}$$

证明 首先注意一个事实, 即对于所设的 Φ 以及任意一个非负随机变量 h, 总有

$$E(\Phi(h))=\int_0^\infty\sigma(\lambda)d\Phi(\lambda), \tag{58}$$

其中 $\sigma(\lambda)$ 是 h 的分布函数. $\sigma(\lambda)=|\{h>\lambda\}|$, $d\Phi(\lambda)$ 是非负的 Lebesgue-Stieltjes 测度. 事实上,这是 Fubini 定理的结果:

$$
\begin{aligned}
E(\Phi(h)) &= \int_{\Omega}\int_{0}^{h} d\Phi(\lambda)\, d\mu \\
&= \int_{0}^{\infty}\int_{\Omega} \mathrm{II}(\{h>\lambda\})\, d\mu\, d\Phi(\lambda) \\
&= \int_{0}^{\infty} \sigma(\lambda)\, d\Phi(\lambda).
\end{aligned}
$$

这样,为证明式(57), 只需将式(56)两边关于测度 $d\Phi(\lambda)$ 积分即得:

$$
E\left(\Phi\left(\frac{f}{\alpha}\right)\right) \leqslant \varepsilon_{\alpha,\beta} E(\Phi(f)) + \delta_{\alpha,\beta} E\left(\Phi\left(\frac{g}{\beta}\right)\right),
$$

$$
\begin{aligned}
E(\Phi(f)) &\leqslant C_{\alpha} E\left(\Phi\left(\frac{f}{\alpha}\right)\right) \\
&\leqslant C_{\alpha}\varepsilon_{\alpha,\beta} E(\Phi(f)) + C_{\alpha} C_{\beta}^{-1} \delta_{\alpha,\beta} E(\Phi(g)).
\end{aligned}
$$

因 $\lim\limits_{\beta\to 0}\varepsilon_{\alpha,\beta}=0$, 故对 $\alpha>1$ 取定,只要 β 充分小, 便有 $C_{\alpha}\varepsilon_{\alpha,\beta}<1$ (C_{α} 就是式(55)中的常数). 因此,当 $E(\Phi(f))<\infty$, 便有

$$
E(\Phi(f)) \leqslant C_{\alpha} C_{\beta}^{-1} \delta_{\alpha,\beta} (1 - C_{\alpha}\varepsilon_{\alpha,\beta})^{-1} E(\Phi(g)).
$$

一般的情形,因 (f,g) 满足式(56′)或(56),则自然地 $(f\wedge N, g)$ 也满足式(56)′或(56), $\forall N\in\mathbf{Z}^{+}$. 这是因为当 $N>\alpha\lambda$ 时,

$$
\{f\wedge N>\alpha\lambda\}=\{f>\alpha\lambda\}, \quad \{f\wedge N>\lambda\}=\{f>\lambda\};
$$

而当 $N\leqslant\alpha\lambda$ 时,

$$
\{f\wedge N>\alpha\lambda\}=\varnothing.
$$

应用刚才证明的不等式于 $(f\wedge N,\ g)$, 再令 $N\to\infty$, 我们即得式(57). ▌

注 本引理对 $\mathscr{F}_0$ 不再平凡时也对. 此时条件为

$$
\begin{aligned}
E(\mathrm{II}(\{f>\alpha\lambda\})\,|\,\mathscr{F}_0) \leqslant{}& \varepsilon_{\alpha,\beta} E(\mathrm{II}(\{f>\lambda\})\,|\,\mathscr{F}_0) \\
&+ \delta_{\alpha,\beta} E(\mathrm{II}(\{g>\beta\lambda\})\,|\,\mathscr{F}_0). \quad (56)''
\end{aligned}
$$

事实上，对一切 $F\in\mathscr{F}_0$，对任意的非负 h，类似于式(58)(注意 $\Phi(0)=0$)，有

$$\int_F \Phi(h)\,d\mu=\int_\Omega \Phi(\mathrm{I\!I}(F)h)\,d\mu=\int_0^\infty \sigma_F(\lambda)\,d\Phi(\lambda), \tag{58$'$}$$

其中 $\sigma_F(\lambda)$ 是 $\mathrm{I\!I}(F)h$ 的分布函数，它即是

$$\begin{aligned}\sigma_F(h,\lambda)=\sigma_F(\lambda)&=|\{\mathrm{I\!I}(F)h>\lambda\}|=|\{h>\lambda\}\cap F|\\&=\int_F \mathrm{I\!I}(\{h>\lambda\})\,d\mu.\end{aligned}$$

再注意式(56)″蕴含

$$\sigma_F\left(\frac{f}{\alpha},\lambda\right)\leqslant\varepsilon_{\alpha,\beta}\sigma_F(f,\lambda)+\delta_{\alpha,\beta}\sigma_F\left(\frac{g}{\beta},\lambda\right),\qquad \forall F\in\mathscr{F}_0.$$

那末完全同引理的证明一样，可得

$$\int_F \Phi(f)\,d\mu\leqslant C_\alpha C_{\beta^{-1}}\delta_{\alpha,\beta}(1-C_\alpha\varepsilon_{\alpha,\beta})^{-1}\int_F \Phi(g)\,d\mu,$$

$$E(\Phi(f)\,|\,\mathscr{F}_0)\leqslant C_\alpha C_{\beta^{-1}}\delta_{\alpha,\beta}(1-C_\alpha\varepsilon_{\alpha,\beta})^{-1}E(\Phi(g)\,|\,\mathscr{F}_0).$$

此即 $\mathscr{F}_0$ 不平凡时式(57)所需要的形式.

引理 12 设 A, B 是两个非负增加适应过程(或两个非负增加可预报过程，$A_0=B_0=0$；或只是 B 为可预报过程，$B_0=0$，而 A 为非负增加适应过程)，且对如下定义的停止时间

$$T=\inf\{n:\ B_n>\beta\lambda\},\qquad \forall\lambda>0,$$

$$S=\inf\{n:\ A_n>\lambda\},\qquad \forall\lambda>0,$$

(或当 A, B 之一、或两者都是可预报过程时，停止时间的定义中用指标 $n+1$ 代 n)存在正常数 a, q 满足

$$E((A_{T-1}-A_{(T\wedge S)-1})^q)\leqslant aE(B_{T-1}^q\mathrm{I\!I}(\{S<T\}));\tag{59}$$

或当 A, B 都为可预报过程时

$$E((A_T-A_{T\wedge S})^q)\leqslant aE(B_T^q\mathrm{I\!I}(\{S<T\}));\tag{59$'$}$$

或仅仅 B 是可预报过程时

$$E((A_T-A_{T\wedge(S-1)})^q)\leqslant aE(B_T^q\mathrm{I\!I}(\{S<\infty\})).\tag{59$''$}$$

则 $\forall\alpha>1$，以及充分小的 $\beta>0$，有序配对 (A_∞, B_∞) 满足“好 λ 不等式”.

证明 先考虑 A, B 都不是可预报过程的情形，我们有

$$
\begin{aligned}
&|\{A_\infty>\alpha\lambda, B_\infty\leqslant\beta\lambda\}|=|\{A_{T-1}>\alpha\lambda, T=\infty\}|\\
&\leqslant|\{A_{T-1}>\alpha\lambda\}|\leqslant|\{A_{T-1}-A_{(T\wedge S)-1}>(\alpha-1)\lambda\}|\\
&\leqslant\frac{1}{(\alpha-1)^q\lambda^q}E((A_{T-1}-A_{(T\wedge S)-1})^q)\\
&\leqslant\frac{a}{(\alpha-1)^q\lambda^q}E(B_{T-1}^q\mathrm{II}(\{S<T\}))\\
&\leqslant\frac{a\beta^q}{(\alpha-1)^q}E(\mathrm{II}(\{S<\infty\}))\\
&=\frac{a\beta^q}{(\alpha-1)^q}|\{A_\infty>\lambda\}|.
\end{aligned}
$$

至于 A 或 B 是可预报过程的情形，处理是完全一样的. 只需注意

$$
A_{T\wedge S}\leqslant A_S\leqslant\lambda\quad(\text{或 } A_{T\wedge(S-1)}\leqslant A_{S-1}\leqslant\lambda),
$$
$$
B_T\leqslant\beta\lambda. \blacksquare
$$

注 当式(59)(或(59)′, (59)″)中 $E(\cdot)$ 用 $E(\cdot|\mathscr{F}_0)$ 代替时，本引理给出类似如式(56)″ 中用条件期望表达的“好 λ 不等式”.

定理 12 设鞅 $f=(f_n)_{n\geqslant0}$ 的差过程 $(\Delta f_n)_{n\geqslant0}$ 有一个可预报控制，意即存在非负增加适应过程 $D=(D_n)_{n\geqslant0}$，使得 $|\Delta f_n|\leqslant D_{n-1}$. 则有序配对 $(f^*, S(f)+D_\infty)$, $(S(f), f^*+D_\infty)$ 都满足“好 λ 不等式”. 从而对本节考虑的函数 Φ，都有

$$
E(\Phi(f^*))\leqslant CE(\Phi(S(f)))+CE(\Phi(D_\infty)), \tag{60}
$$
$$
E(\Phi(S(f)))\leqslant CE(\Phi(f^*))+CE(\Phi(D_\infty)). \tag*{(60)′}
$$

证明 我们有

$$
S_n(f)=\left(\sum_{k=1}^{n-1}|\Delta f_k|^2+|\Delta f_n|^2\right)^{\frac12}\leqslant S_{n-1}(f)+D_{n-1}=\rho_{n-1}.
$$

对 $\beta>0$, $\forall\lambda>0$, 定义停止时间

$$\tau=\inf\{n:\ \rho_n>\beta\lambda\}.$$

考虑停止鞅 $f^{(\tau)}=(f_{n\wedge\tau})_{n\geq 0}$. 再定义停止时间

$$T=\inf\{n:\ |f_n^{(\tau)}|>\lambda\}.$$

则对 $\alpha>1$, 我们有

$$\begin{aligned}|\{f^*>\alpha\lambda\}|&\leqslant|\{f^*>\alpha\lambda,\ \tau=\infty\}|+|\{\tau<\infty\}|\\&\leqslant|\{f^{(\tau)*}>\alpha\lambda\}|+|\{\tau<\infty\}|\\&\leqslant|\{f^{(\tau)*}-f_{T-1}^{(\tau)*}>(\alpha-1)\lambda\}|+|\{\tau<\infty\}|.\end{aligned}$$

现在考虑新的 σ-代数的增加族 $\{\mathscr{F}'_n\}_{n\geq 0}$, 其中 $\mathscr{F}'_n=\mathscr{F}_{n+T}$, 以及考虑过程

$$g'=f^{(\tau)}-f_{T-1}^{(\tau)}=(g'_n),\quad g'_n=f_{n+T}^{(\tau)}-f_{T-1}^{(\tau)}.$$

则它是一个关于 $\{\mathscr{F}'_n\}$ 的鞅. 注意

$$f^{(\tau)*}-f_{T-1}^{(\tau)*}\leqslant\sup_{m\geq T}(|f_m^{(\tau)}-f_{T-1}^{(\tau)}|)=(g')^*,$$

(因为当 $f^{(\tau)*}=|f_m^{(\tau)}|$, 对某个 $m\leqslant T-1$ 时, 则上式不等号左边为 0.) 以及

$$\begin{aligned}S(g')&=S(f^{(\tau)}-f_{T-1}^{(\tau)})\leqslant S(f^{(\tau)})\mathrm{II}(\{T<\infty\})\\&=S_\tau(f)\mathrm{II}(\{T<\infty\})\leqslant\rho_{\tau-1}\mathrm{II}(\{T<\infty\})\\&\leqslant\beta\lambda\mathrm{II}(\{T<\infty\}).\end{aligned}$$

那末应用 2.6 节中所述之 Davis 不等式, 我们得到

$$\begin{aligned}|\{f^{(\tau)*}>\alpha\lambda\}|&\leqslant|\{(g')^*>(\alpha-1)\lambda\}|\\&\leqslant\frac{1}{(\alpha-1)\lambda}E(E((g')^*|\mathscr{F}_T))\\&\leqslant\frac{C}{(\alpha-1)\lambda}E(E(S(g')|\mathscr{F}_T))\\&\leqslant\frac{C\beta}{\alpha-1}|\{T<\infty\}|\\&=\frac{C\beta}{\alpha-1}|\{f^{(\tau)*}>\lambda\}|\leqslant\frac{C\beta}{\alpha-1}|\{f^*>\lambda\}|.\end{aligned}$$

最后我们得

$$|\{f^*>\alpha\lambda\}|\leqslant\frac{C\beta}{\alpha-1}|\{f^*>\lambda\}|+|\{S(f)+D_\infty>\beta\lambda\}|.$$

这就证明了$(f^*, S(f)+D_\infty)$满足“好λ不等式”.

类似地，由于

$$|f_n|\leqslant f^*_{n-1}+D_{n-1}=\rho_{n-1},$$

先对(ρ_n)定义停止时间τ，再对$(S_n(f^{(\tau)}))_{n\geqslant 0}$定义停止时间$T$. 并注意

$$\begin{aligned}S(f^{(\tau)})-S_{T-1}(f^{(\tau)})&\leqslant\sqrt{S(f^{(\tau)})^2-S_{T-1}(f^{(\tau)})^2}\\&=S(f^{(\tau)}-f^{(\tau)}_{T-1}),\\ \sup_{m\geqslant T}|f^{(\tau)}_m-f^{(\tau)}_{T-1}|&\leqslant 2f^{(\tau)*}\mathrm{I\!I}(\{T<\infty\})\\&\leqslant 2\beta\lambda\mathrm{I\!I}(\{T<\infty\}),\end{aligned}$$

同样地，利用 2.6 节中所述之 Davis 不等式(另一半)，即知$(S(f), f^*+D_\infty)$也满足“好λ不等式”.

由引理 11 知，对本节中考虑的Φ，式(60)与(60)′都成立. ∎

注 本定理对$\mathscr{F}_0$不平凡时也成立，即我们有用$E(\cdot|\mathscr{F}_0)$代替$E(\cdot)$后的式(60)与(60)′. 这个断言的验证类似于引理 11 后的注中所给出的.

定理 13 设$f=(f_n)_{n\geqslant 0}$是非负鞅. 则$(S(f), f^*)$对一切$\alpha>1$，与$0<\beta<\sqrt{\alpha^2-1}$，满足“好$\lambda$不等式”. 故对本节中的$\Phi$都有

$$E(\Phi(S(f)))\leqslant CE(\Phi(f^*)),\quad \forall\text{ 非负鞅 } f=(f_n). \tag{61}$$

证明 设$f=(f_n)$是给定的一个非负鞅. 为避免考虑收敛问题，无妨设它是有限鞅. 记$d_n=f_n-f_{n-1}$. 定义停止时间

$$\tau=\inf\{n:\ f_n>\beta\lambda\},$$

$$T=\inf\left\{n:\ \sum_{k=1}^n\mathrm{I\!I}(\{k<\tau\})|d_k|^2>\lambda^2\right\}.$$

注意 $T\mathrm{II}(\{T<\infty\})\leqslant\tau-1$. 如同 2.2 节中引理 1 的证明一样，利用如下代数恒等式

$$\sum_{k=T+1}^{\infty}\mathrm{II}(\{k<\tau\})|d_k|^2$$

$$=2\sum_{k=T+1}^{\tau}f_{k-1}(f_{k-1}-f_k)-f_T^2-f_{\tau-1}^2+2f_\tau f_{\tau-1}. \qquad (62)$$

由于 $\{T+1\leqslant k\leqslant\tau\}\in\mathscr{F}_{k-1}$, 以及 $\{T+1\leqslant k\leqslant\tau\}\subset\{T\leqslant k-1\}$, 因此我们有(因为下述级数绝对值的和可积，所以积分与和号可交换)

$$E\left(\sum_{k=T+1}^{\tau}f_{k-1}(f_{k-1}-f_k)|\mathscr{F}_T\right)$$

$$=E\left(\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{II}(\{T+1\leqslant k\leqslant\tau\})f_{k-1}(f_{k-1}-f_k)|\mathscr{F}_T\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}E(\mathrm{II}(\{T+1\leqslant k\leqslant\tau\})f_{k-1}E(f_{k-1}-f_k|\mathscr{F}_{k-1})|\mathscr{F}_T)$$

$$=0.$$

任取 $\alpha>1$ 与充分小的 $\beta>0$, 使 $\alpha>(1+\beta^2)^{1/2}$, 则

$$\{S_{\tau-1}(f)>\alpha\lambda\}=\Big\{S_{T-1}(f)^2+|\Delta f_T|^2$$

$$+\sum_{k=T+1}^{\infty}\mathrm{II}(\{k<\tau\})|d_k|^2>\alpha^2\lambda^2\Big\}\cap\{T<\tau\}$$

$$\subset\left\{\sum_{k=T+1}^{\infty}\mathrm{II}(\{k<\tau\})|d_k|^2>(\alpha^2-1-\beta^2)\lambda^2\right\}\cap\{T<\tau\}.$$

这里用到 $S_{T-1}(f)^2\leqslant\lambda^2$, 以及

$$|\Delta f_T|^2\leqslant\max(f_T,f_{T-1})^2\leqslant f_{T-1}^{*2}\leqslant\beta^2\lambda^2.$$

因而我们有

$$E(\mathrm{II}(\{S_{\tau-1}(f)>\alpha\lambda\})|\mathscr{F}_T)$$

$$\leqslant\frac{1}{(\alpha^2-1-\beta^2)\lambda^2}E\left(\sum_{k=T+1}^{\infty}\mathrm{II}(\{k<\tau\})|d_k|^2|\mathscr{F}_T\right)$$

$$\times \mathrm{II}(\{T<\tau\})$$
$$\leqslant \frac{1}{(\alpha^2-1-\beta^2)\lambda^2} E(2f_\tau f_{\tau-1} \mid \mathscr{F}_T)\mathrm{II}(\{T<\tau\})$$
$$\leqslant \frac{2\beta}{(\alpha^2-1-\beta^2)\lambda} f_{\tau\wedge T}\mathrm{II}(\{T<\tau\}) \leqslant \frac{2\beta^2}{\alpha^2-1-\beta^2}.$$

这里 f 的非负性用在导出下式

$$E(f_\tau f_{\tau-1} \mid \mathscr{F}_T)\mathrm{II}(\{T<\tau\}) \leqslant \beta^2\lambda^2.$$

于是，因为 $\{S_{\tau-1}(f)>\alpha\lambda\} \subset \{T<\infty\} \in \mathscr{F}_T$，所以

$$\begin{aligned}
|\{S_{\tau-1}(f)>\alpha\lambda\}| &\leqslant \int_{(T<\infty)} \mathrm{II}(\{S_{\tau-1}(f)>\alpha\lambda\})d\mu \\
&= \int_{(T<\infty)} E(\mathrm{II}(\{S_{\tau-1}(f)>\alpha\lambda\}) \mid \mathscr{F}_T)d\mu \\
&\leqslant \frac{2\beta^2}{\alpha^2-1-\beta^2}|\{T<\infty\}| \\
&= \frac{2\beta^2}{\alpha^2-1-\beta^2}|\{S_{\tau-1}(f)>\lambda\}|.
\end{aligned}$$

最后我们得

$$|\{S(f)>\alpha\lambda, f^* \leqslant \beta\lambda\}| \leqslant \frac{2\beta^2}{\alpha^2-1-\beta^2}|\{S(f)>\lambda\}|. \quad \blacksquare$$

现在我们对某些可预报过程应用引理 12.

定理 14 设 Z 是任意的非负上鞅，$Z=M-A$ 是其 Doob 分解. 则对一切停止时间 R，(A_R, Z^*_{R-1}) 满足"好 λ 不等式". 从而对本节所述之任意的 Φ，有

$$E(\Phi(A_R)) \leqslant CE(\Phi(Z^*_{R-1})). \tag{63}$$

证明 设 Z 是任一非负上鞅，$Z=M-A$ 是其 Doob 分解，R 是任一停止时间. 则停止于 R 的过程 $Z^{(R)}=(Z_{n\wedge R})_{n\geqslant 0}$ 仍是非负上鞅. 并且 $Z^{(R)}=M^{(R)}-A^{(R)}$ 是其 Doob 分解. 事实上，$Z^{(R)}$ 是上鞅是因为

$$E(Z_{n\wedge R} \mid \mathscr{F}_{n-1}) = E\Big(\sum_{k=1}^{n-1} Z_k \mathrm{II}(\{R=k\}) \mid \mathscr{F}_{n-1}\Big)$$

$$+E(Z_n \mathrm{II}(\{R\geqslant n\})|\mathscr{F}_{n-1})$$
$$\leqslant Z_R \mathrm{II}(\{R\leqslant n-1\})+Z_{n-1}\mathrm{II}(\{R\geqslant n\})$$
$$=Z_{(n-1)\wedge R}.$$

$M^{(R)}-A^{(R)}$是 $Z^{(R)}$的 Doob 分解也是易知的. 因此考虑 $Z^{(R)}$与考虑Z是完全一样的. 故只需考虑 $R\equiv\infty$的情况.

注意 Doob 分解中的非负增加过程 $A=(A_n)_{n\geqslant 0}$ 是可预报的. 另记 $B=(B_n)_{n\geqslant 0}$, $B_0=0$, $B_n=Z^*_{n-1}$, 则B也是非负增加可预报过程, 并且 $A_0=B_0=0$. 根据引理 12 知, 我们只需对任意停止时间 T, S, 证明 $q=1$ 时的式(59)′.

为证式(63), 只需先对有限非负上鞅证明即可, 因非负上鞅点态地收敛. 因此我们总可设 Doob 分解中的鞅M是 L^1 中的鞅. 于是

$$E(A_T-A_{S\wedge T})=E(M_T-M_{S\wedge T}+Z_{S\wedge T}-Z_T)=E(Z_{S\wedge T}-Z_T)$$
$$\leqslant E(Z_{S\wedge T}\mathrm{II}(\{S<T\}))\leqslant E(Z^*_{T-1}\mathrm{II}(\{S<T\}))$$
$$=E(B_T\mathrm{II}(\{S<T\})).\ \blacksquare$$

定理 15 设Z是下鞅, 其 Doob 分解 $Z=M+A$ 中的M是一致可积的. 则

a) $\forall$ 限制增长的 Young 凸函数 Φ, p 是其上指数, 有

$$E(\Phi(A_\infty))\leqslant(2p)^p E(\Phi(Z^*));\tag{64}$$

b) 若 Z 为非负的, Φ 如 a) 中所述, 则有

$$E(\Phi(A_\infty))\leqslant p^p E(\Phi(Z_\infty));\tag{65}$$

c) 若 Z 是可预报过程, $Z_0=0$, Φ 是本节中所述之任意函数, 则

$$E(\Phi(A_\infty))\leqslant CE(\Phi(Z^*_\infty));\tag{66}$$

d) Z 是非负的, Φ 是严格凹函数, 则

$$E(\Phi(Z^*))\leqslant CE(\Phi(Z_0+A_\infty));\tag{67}$$

e) Z 是非负的, 且有点态极限 Z_∞, Φ 是凹函数, 则

$$E(\Phi(Z_\infty))\leqslant CE(\Phi(Z_0+A_\infty)). \tag{68}$$

证明 a) 注意 A 是一个可预报过程, 利用

$$E(A_\infty-A_T)=E(M_T-M_\infty+Z_\infty-Z_T)=E(Z_\infty-Z_T)$$
$$\leqslant 2E(Z_\infty^* \mathrm{II}(\{T<\infty\})).$$

则定理 1 便给出式(64).

b) 同 a)一样, 因为 Z 是非负的, 所以有

$$E(A_\infty-A_T)\leqslant E(Z_\infty \mathrm{II}(\{T<\infty\})).$$

c) 此时 A, Z^* 皆为非负增加可预报过程, 因此对任意的两个停止时间 T, S, 有

$$E(A_T-A_{S\wedge T})=E(M_{S\wedge T}-M_T+Z_T-Z_{S\wedge T})$$
$$=E(Z_T-Z_{S\wedge T})\leqslant 2E(Z_T^* \mathrm{II}(\{S<T\})),$$

再由引理 12 与引理 11 便给出结论.

d) 考虑 $X=Z$ 为非负适应过程, $B=Z_0+A$ 为非负增加可预报过程. 对一切停止时间 T, 有

$$E(Z_T|\mathscr{F}_0)=E(M_T|\mathscr{F}_0)+E(A_T|\mathscr{F}_0)$$
$$=E(M_0+A_T|\mathscr{F}_0)=E(Z_0+A_T|\mathscr{F}_0).$$

由引理 10 与引理 8 即给出结论.

e) 同 d)一样, 有

$$E(Z_T|\mathscr{F}_0)=E(Z_0+A_T|\mathscr{F}_0).$$

这是一个比

$$E(Z_T \mathrm{II}(\{T>0\}))\leqslant E((Z_0+A_T)\mathrm{II}(\{T>0\}))$$

更强的条件. 因此再利用引理 9 与引理 7 便得出结论.

现在讨论 4.2 节中已经讨论过的算子 $M(f)$ 与 $m(f)$ 间的一般 Φ-不等式.

定理 16 设 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$ 是使得其差过程为可预报地被控制的鞅, 即 $|\Delta f_n|\leqslant D_{n-1}(f)$, $D=(D_n(f))_{n\geqslant 0}$ 为非负增加适应过程. 则对本节中所考虑的 Φ, 都有

$$E(\Phi(M(f)))\leqslant CE(\Phi(m(f)+D_\infty)). \tag{69}$$

证明 同定理2的证明一样，我们要利用那里使用过的下述形式的Davis不等式

$$E(f^*-f^*_{n-1}|\mathscr{F}_n)\leqslant CE(S(f)|\mathscr{F}_n),$$
$$E(S(f)-S_{n-1}(f)|\mathscr{F}_n)\leqslant CE(f^*|\mathscr{F}_n),$$

以及利用引理2与引理1．由此，对 $\Phi(u)=u^2$，我们得到

$$E(f^{*2})\leqslant CE(f^*S(f)),\quad E(S(f)^2)\leqslant CE(f^*S(f)).$$

于是有

$$\begin{aligned}E(\max(f^{*2},S(f)^2))\leqslant E(f^{*2}+S(f)^2)&\leqslant CE(f^*S(f))\\&=CE(M(f)m(f))\\&\leqslant CE(M(f)^2)^{1/2}E(m(f)^2)^{1/2}.\end{aligned}$$

当 $E(M^2(f))<\infty$ 时，它给出

$$E(M^2(f))\leqslant CE(m^2(f)). \tag{70}$$

事实上，这个不等式对一切鞅都成立．这是因为我们可以先考虑有限鞅，然后取极限．而对有限鞅而言，由 $m(f)\in L^2$ 总可以推出 $M(f)\in L^2\left(\text{既然 } f^*\leqslant\sum\limits_1^N|\Delta f_k|\leqslant N^{1/2}S(f)\right)$．此外，当 $\mathscr{F}_0$ 不平凡时，式(70)还可以是用 $E(\cdot|\mathscr{F}_0)$ 代替 $E(\cdot)$ 的形式：

$$E(M(f)^2|\mathscr{F}_0)\leqslant CE(m(f)^2|\mathscr{F}_0). \tag{70$'$}$$

现设 $f=(f_n)_{n\geqslant0}$ 是任意一个如定理中所设的鞅．考虑与之联系的两个过程

$$A=M(f)=(M_n(f)),\quad M_n(f)=\max(f^*_n,S_n(f)),$$
$$B=(B_n)=(m_{n-1}(f)+D_{n-1}(f)).$$

我们有

$$\begin{aligned}m_n(f)=\min(f^*_n,S_n(f))&\leqslant\min(f^*_{n-1}+D_{n-1},S_{n-1}(f)+D_{n-1})\\&=m_{n-1}(f)+D_{n-1}=B_n.\end{aligned}$$

设 S，T 是引理12中的停止时间．考虑停止鞅 $f^{(T)}$，以及新 σ-代

数族

$$\{\mathscr{F}'_m\}_{m\geq 0}=\{\mathscr{F}_{m+S}\}_{m\geq 0}.$$

则

$$g'=f^{(T)}-f^{(T)}_{S-1}=(g'_m)_{m\geq 0},\quad g'_m=f^{(T)}_{m+S}-f^{(T)}_{S-1}$$

便是一个关于$\{\mathscr{F}'_m\}_{m\geq 0}$的鞅，并且我们有

$$\begin{aligned}M_T(f)-M_{T\wedge(S-1)}&\leqslant\max(f^*_T-f^*_{T\wedge(S-1)},S_T(f)-S_{T\wedge(S-1)}(f))\\&\leqslant\max(\sup_{m\geq 0}|f^{(T)}_{m+S}-f^{(T)}_{S-1}|,S(f^{(T)}-f^{(T)}_{S-1}))=M(g');\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}m(g')&=\min(\sup_{m\geq 0}|f^{(T)}_{m+S}-f^{(T)}_{S-1}|,S(f^{(T)}-f^{(T)}_{S-1}))\\&\leqslant\min(2f^*_T,S_T(f))\mathrm{II}(\{S<\infty\})\leqslant Cm_T(f)\mathrm{II}(\{S<\infty\}).\end{aligned}$$

于是由对关于$\{\mathscr{F}'_m\}_{m\geq 0}$(注意$\mathscr{F}'_0=\mathscr{F}_T$是不平凡的)的鞅$g'=(g'_m)$使用式(70)′，便得到

$$\begin{aligned}E((A_T-A_{T\wedge(S-1)})^2)\leqslant E(M(g')^2)&\leqslant CE(m(g')^2)\\&\leqslant CE(m_T(f)^2\mathrm{II}(\{S<\infty\}))\\&\leqslant CE(B_T^2\mathrm{II}(\{S<\infty\}).\end{aligned}$$

再由引理 12 与 11，即得式(69). ▮

注 当$\mathscr{F}_0$不平凡时，我们也有用$E(\cdot|\mathscr{F}_0)$代替$E(\cdot)$的式(69). 此外我们指出，也可模仿 4.5 节中定理 12 的证明来证明本定理.

最后我们来考虑极大函数与#-函数之间的Φ-不等式. 我们要证明它们满足"好λ不等式". 所谓#-函数是

$$f^\#_a=\sup_n\rho_n=\sup_n E(|f-f_{n-1}|^a|\mathscr{F}_n)^{1/a},\quad f\in L^a,1\leqslant a<\infty,\tag{71}$$

$$f^\#_a=\sup_n E(||f|-(|f|^a)^{1/a}_{n-1}|^a|\mathscr{F}_n)^{1/a},\quad f\in L^a,0<a<1.\tag{71$'$}$$

定理 17 设Φ如本节所述. 则

$$E(\Phi(((|f|^a)^*))\leqslant C_{a,\Phi}E(\Phi((f^\#_a)^a)),\tag{72}$$

证明 首先考虑 $1\leqslant a<\infty$. 设 $\alpha>0$ 为任意固定的, $0<\beta<1$ 为待定的. 定义停止时间如下:

$$T=\inf\{n:\ |f_n|^a>(\alpha+1)\lambda\},$$

$$S=\inf\left\{n:\ |f_n|^a>\frac{\alpha\lambda}{2^{a-1}}\right\},$$

$$R=\inf\{n:\ \rho_n^a>\beta\lambda\},\quad \rho_n^a=E(|f-f_{n-1}|^a|\mathscr{F}_n).$$

则 $S\leqslant T$, 且

$$\begin{aligned}|\{T<\infty\}|&=|\{T<\infty, S<R\}|+|\{T<\infty, R\leqslant S\}|\\&\leqslant|\{T<\infty, S<R\}|+|\{R<\infty\}|,\end{aligned}$$

$$\left\{T<\infty, S<R\right\}\subset\left\{S<R, |f_T-f_{S-1}|^a\geqslant\frac{\lambda}{2^{a-1}}\right\}.$$

这样, 我们有

$$\begin{aligned}|\{T<\infty, S<R\}|&\leqslant\frac{2^{a-1}}{\lambda}\int_{\{S<R\}}|f_T-f_{S-1}|^a d\mu\\&=\frac{2^{a-1}}{\lambda}\int_{\{S<R\}}|E(f-f_{S-1}|\mathscr{F}_T)|^a d\mu\\&\leqslant\frac{2^{a-1}}{\lambda}\int_{\{S<R\}}\rho_S^a d\mu\leqslant\beta 2^{a-1}|\{S<\infty\}|.\end{aligned}$$

从而

$$|\{f^{*a}>(\alpha+1)\lambda\}|\leqslant\beta 2^{a-1}\left|\left\{f^{*a}>\frac{\alpha\lambda}{2^{a-1}}\right\}\right|+|\{\rho^{*a}>\beta\lambda\}|.$$

既然 $\lim\limits_{\beta\to 0}\beta 2^{a-1}=0$, 以及 $\rho^{*a}=(f_a^{\#})^a$, 这说明 $(f^{*a}, (f_a^{\#})^a)$ 满足"好 λ 不等式". 由于 Φ 为限制增长函数, 因此由引理 11 可推出

$$E(\Phi(f^{*a}))\leqslant C_{a,\Phi}E(\Phi((f_a^{\#})^a)).$$

但因

$$(|f|^a)^*\leqslant 2^{a-1}((f_a^{\#})^a+f^{*a}),$$

这说明式(72)当$1\leqslant a<\infty$时成立.

当 $0<a<1$ 时, 我们有

$$E(||f|^a-(|f|^a)_{n-1}||\mathscr{F}_n)\leqslant E(||f|-(|f|^a)_{n-1}^{1/a}|^a|\mathscr{F}_n),$$

$$(|f|^a)^{\#}\leqslant(f_a^{\#})^a.$$

这样由上面证明的对应于 $a=1$ 时的结果即得

$$E(\Phi((|f|^a)^*))\leqslant C_{1,\Phi}E(\Phi((|f|^a)^{\#}))$$
$$\leqslant C_{1,\Phi}E(\Phi((f_a^{\#})^a)).\ \blacksquare$$

注 特别地，当 $a=1$ 以及 $\Phi(u)=u$ 时给出

$$E(|f|^*)\leqslant CE(f^{\#}).$$

这便回答了 Garsia[1]提出的问题(见第三章章后注记的 3.6 节).

由式(71)与(71)′知

$$(f_a^{\#})^a\leqslant C(|f|^a)^*.$$

故与式(72)相反的不等式自然也成立.

章后注记

4.1 节 q_Φ 是由 Dellacherie[1]引进的；此外，命题 1 之 4)中的等式 $p_\Psi=q'_\Phi$ 是否无条件成立是该文提出的一个问题. Long[5]对这个问题给出了肯定的回答. 其余的结果可见 Garsia[1], C. S. Chou[1].

4.2 节 引理 1 与 2 通常称为 Garsia-Neveu 引理. 定理 1 属于 Dellacherie[1], 这个通路优于原来的通路，是在于得到了最好的系数 p. 定理 2 属于 Burkholder-Davis-Gundy[1]. 定理 4 属于 Lenglart-Lepingle-Pratelli[1]，其中对 $\Phi(u)=u^p(1\leqslant p<\infty)$的结果由 L. Chevalier 首先获得.

4.3 节 引理 4 与 5，在此书以前似乎未曾明确地出现过，其思想是受了 Dellacherie[1]的启发. 定理 5 属于 Dellacheire[1]. 空间 ${}_aK_\Phi$, ${}_aL_\Phi$ 及其有关结果(定理 6, 6′, 7, 7′等)都属于 Long[6]. 定理 8 与 8′ 也是在此书第一次出现.

4.4节 引理 7 属于 Burkholder[2]. 此处严格凹性以及引理 8 是第一次出现. L-L-P[1]曾引进所谓"慢增性",如式(46)'所示. 设 $\varphi(u)$是任一严格下降的非负函数,则

$$\Phi(u)=\int_0^u \varphi(t)\,dt$$

便是满足式(46)'的"慢增"函数. 如此看来,这种类似嫌过大. 若修改"慢增"性如式(46)所示,则如我们已在正文中所指出的,这样的"慢增"性完全可以保证由(43)推出(44). 引理 9 隐含在 Burkholder[2], 明显地叙述在 L-L-P[1]. 引理 10 属于 L-L-P[1]. 定理 9, 10 属于 Burkholder-Gundy[1]. 定理 11 属于 L-L-P[1], 对 $\Phi(u)=u^p(0<p<1)$的特殊情形属于 D. Burkholder 及 M. Yor 等.

4.5节 引理 11 属于 Burkholder[2]. 引理 12 属于L-L-P[1], 但其中第三种情形 (即仅仅B是可预报过程的情形) 是本书补充的,它更适于应用. 定理 12 与 13 属于 Burkholder[2]. 定理 14, 15 与 16 属于 L-L-P[1]. 定理 17 属于 Long[6], 其古典情形的类似属于 Fefferman-Stein[1], Hanks[1] 与 Strömberg[1].

第五章 BMO 鞅①

设$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$是一完备概率空间，$\{\mathscr{F}_n\}_{n\geqslant 0}$是完备的子$\sigma$-代数的一个增加族，满足$\mathscr{F}=\bigvee\limits_{n\geqslant 0}\mathscr{F}_n$. 为简单计，仍设$\mathscr{F}_0$是平凡的. 对$1\leqslant a<\infty$，我们已经定义过空间$\mathrm{BMO}_a$:

$$\mathrm{BMO}_a=\{\text{鞅 } f=(f_n):\ \|f\|_{\mathrm{BMO}a} =\sup_n\|E(|f-f_{n-1}|^a|\mathscr{F}_n)\|_\infty^{1/a}<\infty\}. \qquad (1)$$

则它们是模常数鞅等价类的 Banach 空间. 一般我们仍假设$f_0=0$.

我们将在 5.1 节中证明

$$\mathrm{BMO}_a=\mathrm{BMO}_1, \quad \forall a>1.$$

这里$\mathrm{BMO}_a\subset\mathrm{BMO}_1$的证明是根据 Hölder 不等式；而$\mathrm{BMO}_1\subset\mathrm{BMO}_a$的证明则是根据 John-Nirenberg[1]定理. 正是他们引进了R^n上 BMO 函数空间的概念. 在 5.2 节中，我们要介绍 Coifman-Rochberg[1] 引进的 BLO 鞅②的概念，并且进而讨论 BMO与 BLO 的关系，其主要内容是BMO鞅的分解. 在 5.3节中我们要讨论 Carnett-Jones[1]关于 BMO 鞅与L^∞空间的距离的定理. 最后，在 5.4 节中我们还讨论其他一些相关问题.

---

① BMO 是英文 Bounded Mean Oscillation 的缩写，意为“有界平均振动”或“平均振动有界”.

② BLO 是英文 Bounded Lower Oscillation 的缩写，意为“有界下振动”或“下振动有界”.

5.1 John-Nirenberg 定理

为证 John-Nirenberg 定理，先证一个引理，其思想属于 Stroock[1]，可见 Meyer[1]. 引理中参数范围的明确化是 Long[8] 给出的. 当然它们未必是最好的. 我们也已在 2.4 与 4.3 节中将这个思想应用于对空间 ${}_aK_p$ 等的研究.

引理 1 设 $\mathscr{F}_0$ 不一定是平凡的. 设 $f\in\mathrm{BMO}_1$，$\|f\|_{\mathrm{BMO}_1}\leqslant 1$ (f_0 不一定为 0). 则对 $0<\alpha<1/e$，有

$$E(\exp(\alpha\sup_n|f_n-f_0|)|\mathscr{F}_0)\leqslant K_\alpha<\infty. \tag{2}$$

证明 记 $g=(g_n)_{n\geqslant 0}$，$g_n=f_n-f_0$，$g^*=\sup\limits_n|f_n-f_0|$. 对 $\lambda,\mu>0$ 定义停止时间

$$T=\inf\{n:\ |g_n|>\lambda\},\quad \tau=\inf\{n:\ |g_n|>\lambda+\mu\}.$$

因为 $g_0\equiv 0$，所以 $T>0$. 此外，显然有 $T\leqslant\tau$. $\forall F\in\mathscr{F}_0$，定义

$$T_F=\begin{cases}T, & \omega\in F,\\ \infty, & \omega\overline{\in}F;\end{cases}\qquad \tau_F=\begin{cases}\tau, & \omega\in F,\\ \infty, & \omega\overline{\in}F.\end{cases}$$

因为 $T_F\leqslant\tau_F$，以及 $|g_{T_F-1}\mathrm{II}(F)|\leqslant\lambda$，我们有

$$\begin{aligned}\sigma_F(\lambda+\mu)&=|\{g^*>\lambda+\mu\}\cap F|=|\{\tau_F<\infty\}|\\&\leqslant|\{T_F<\infty,|g_{\tau_F}-g_{T_F-1}|\\&=|f_{\tau_F}-f_{T_F-1}|>\mu\}|.\end{aligned}$$

于是得到

$$\begin{aligned}\sigma_F(\lambda+\mu)&\leqslant\frac{1}{\mu}\int_{\{T_F<\infty\}}|f_{\tau_F}-f_{T_F-1}|d\mu\\&\leqslant\frac{1}{\mu}\int_{\{T_F<\infty\}}|E(f-f_{T_F-1}|\mathscr{F}_{\tau_F})|d\mu\\&\leqslant\frac{1}{\mu}\int_{\{T_F<\infty\}}E(|f-f_{T_F-1}||\mathscr{F}_{T_F})d\mu\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{1}{\mu} | \{g^* > \lambda\} \cap F | = \frac{1}{\mu} \sigma_F(\lambda).$$

特别地，取 $\mu = e, \lambda = ke$，由此即得

$$\sigma_F((k+1)e) \leqslant \frac{1}{e} \sigma_F(ke) \leqslant e^{-k} \sigma_F(e) \leqslant |F| e^{-k}.$$

因为 $\sigma_F(\lambda)$ 是单调下降的，故对 $e \leqslant \lambda < \infty$，若设 $ke \leqslant \lambda < (k+1)e$，$k = 1, 2, \cdots$，则

$$\begin{aligned} \sigma_F(\lambda) &\leqslant \sigma_F(ke) \leqslant |F| e^{-(k-1)e} \\ &\leqslant |F| e^2 e^{-\lambda/e}. \end{aligned} \tag{3}$$

这个不等式对 $0 < \lambda < e$ 也成立，因为

$$|F| e^2 e^{-\lambda/e} \geqslant |F| e \geqslant \sigma_F(\lambda).$$

于是，对 $0 < \alpha < 1/e$，我们得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{|F|} \int_F e^{\alpha g^*} d\mu &\leqslant 1 + \frac{1}{|F|} \int_0^\infty \sigma_F(\lambda) d e^{\alpha\lambda} \\ &\leqslant 1 + \alpha e^2 \int_0^\infty e^{(\alpha - 1/e)\lambda} d\lambda = K_\alpha < \infty. \end{aligned}$$

此即

$$E(e^{\alpha g^*} | \mathscr{F}_0) \leqslant K_\alpha < \infty, \qquad \forall 0 < \alpha < \frac{1}{e}. \quad \blacksquare$$

定理 1 对 $\mathscr{F}_0, f_0$ 不作附加假定. 设 $f \in \mathrm{BMO}_1$，则对 $0 < \alpha < (e\|f\|_{\mathrm{BMO}_1})^{-1}$，有

$$\sup_n \| E(\exp(\alpha | f - f_n |) | \mathscr{F}_n) \|_\infty \leqslant K_\alpha < \infty. \tag{2$'$}$$

证明 对一般的 $f \in \mathrm{BMO}_1$，由考虑 $f / \|f\|_{\mathrm{BMO}_1}$ 即知，为证明式 (2)′，只需考虑 $\|f\|_{\mathrm{BMO}_1} \leqslant 1$ 与 $0 < \alpha < 1/e$ 的情形. 现设 $f = (f_n)_{n \geqslant 0} \in \mathrm{BMO}_1$，且 $\|f\|_{\mathrm{BMO}_1} \leqslant 1$.

现在对任意的 $n \in \mathbb{Z}^+$ 固定，考虑新的子 σ-代数的族 $\{\mathscr{F}'_m\}_{m \geqslant 0}$，其中 $\mathscr{F}'_m = \mathscr{F}_{n+m}$，以及关于这个族的鞅 $g = f - f_{n-1} = (f_{n+m} - f_{n-1})_{m \geqslant 0}$. 因

$$
\begin{aligned}
&E'(|g-g_{m-1}|\,|\mathscr{F}'_m)\\
&\quad=E(|f-f_{n-1}-(f-f_{n-1})_{n+m-1}|\,|\mathscr{F}_{n+m})\\
&\quad=E(|f-f_{n+m-1}|\,|\mathscr{F}_{n+m})\leqslant 1,
\end{aligned}
$$

这说明 g 关于$(\Omega,\mathscr{F},\mu,\{\mathscr{F}'_m\}_{m\geqslant 0})$满足引理 1 的条件(此时 $\mathscr{F}'_0=\mathscr{F}_n$ 可以不平凡，一般地，$g_0=f_n-f_{n-1}$也不为 0)．因此，$\forall\alpha,\ 0<\alpha<1/e$，有

$$
E'(\exp(\alpha\sup_m|g_m|)\,|\mathscr{F}'_0)\leqslant K_\alpha<\infty.
$$

于是

$$
\begin{aligned}
E(\exp(\alpha|f-f_{n-1}|)\,|\mathscr{F}_n)&\leqslant E(\exp(\alpha\sup_{m\geqslant 0}|f_{n+m}-f_{n-1}|)\,|\mathscr{F}_n)\\
&\leqslant K_\alpha<\infty. \qquad (2)''
\end{aligned}
$$

因为对 $f\in\mathrm{BMO}_1$，

$$
|f_n-f_{n-1}|=|E(f-f_{n-1}|\mathscr{F}_n)|\leqslant\|f\|_{\mathrm{BMO}_1},
$$

因此式$(2)'$便由$(2)''$推出．∎

注 1　我们之所以用$(2)'$而不用$(2)''$来叙述John-Nirenberg定理，是因式$(2)'$较$(2)''$要方便得多．因对连续时间的鞅，式$(2)'$中的 n 应该用一切停止时间 T 代替，式$(2)''$中的 $n-1$ 应该用 T^- 代替．而对不是可预报的停止时间 T, T^- 处理起来是很麻烦的．

注 2　定理 1 就是所谓 John-Nirenberg 定理，其原来的形式是说 f 的(局部)分布函数是 e 的负指数级，它与指数可积性是等价的．并且我们也已在引理 1 的证明中得到了 f^* 的分布函数的估计

$$
\sigma_F(\lambda)\leqslant e^2e^{-\lambda/e}|F|,\quad \forall f,\ \|f\|_{\mathrm{BMO}_1}\leqslant 1,\ \ \forall n,\ \forall F\in\mathscr{F}_n.
$$

注 3　定理 1 特别地推出，每个 $f\in\mathrm{BMO}_1$ 必须满足

$$
\sup_n\|E(|f-f_{n-1}|^a|\mathscr{F}_n)\|_\infty^{1/a}<\infty,\quad \forall a\geqslant 1.
$$

此即 $\mathrm{BMO}_1=\mathrm{BMO}_a$．因此这个空间记号的下标可略去，以后可用 BMO 表示．

注 4 定理中 α 的最好值是不知道的. 如考虑 $\exp(\alpha S^2(f))$ 的可积性, 则可得到 α 的用 $\|f\|_{\mathrm{BMO}_2}$ 表示的上项, 如下面定理所示.

定理 1′ 若 $f\in\mathrm{BMO}$, 则 $\forall\alpha,\ 0<\alpha<(\|f\|^2_{\mathrm{BMO}_2})^{-1}$, 有

$$E(\exp(\alpha S^2(f)))\leqslant(1-\alpha\|f\|^2_{\mathrm{BMO}_2})^{-1}.$$

证明 首先直接计算给出

$$E(S^2(f)-S^2_{n-1}(f)\,|\,\mathscr{F}_n)=E(|f-f_{n-1}|^2\,|\,\mathscr{F}_n)\leqslant\|f\|^2_{\mathrm{BMO}_2}.$$

又因为 $(S^2_n(f))_{n\geqslant0}$ 是一个非负增加适应过程, 故由凸性引理(见 4.2. 节中引理 1 与 2)知, 特别地, 对凸函数 $\Phi(u)=e^{\alpha u}-1,\ \alpha>0$ 待定, 有

$$E(\Phi(S^2(f)))\leqslant E(\varphi(S^2(f)))\|f\|^2_{\mathrm{BMO}_2},$$

其中 $\varphi(u)=\Phi'(u)=\alpha e^{\alpha u}$, 这样我们得

$$E(\exp(\alpha S^2(f))-1)\leqslant\alpha\|f\|^2_{\mathrm{BMO}_2}E(\exp(\alpha S^2(f))).$$

如果 $E(\exp(\alpha S^2(f)))<\infty$, 则此不等式直接给出所希望的不等式. 一般情况, 我们考虑过程 $(S^2_n(f)\wedge N)_{n\geqslant0},\ \forall N\in\mathbf{Z}^+$. 因为

$$S^2(f)\wedge N-S^2_{n-1}(f)\wedge N\leqslant S^2(f)-S^2_{n-1}(f),$$

这说明非负增加适应过程 $(S^2_n(f)\wedge N)$ 满足同 $(S^2_n(f))$ 一样的不等式

$$E(S^2(f)\wedge N-S^2_{n-1}(f)\wedge N\,|\,\mathscr{F}_n)\leqslant\|f\|^2_{\mathrm{BMO}_2}.$$

于是我们有

$$E(\exp(\alpha(S^2(f)\wedge N)))\leqslant(1-\alpha\|f\|^2_{\mathrm{BMO}_2})^{-1}.$$

令 $N\to\infty$, 即得所希望的不等式. ▌

注 事实上, 对 $f\in\mathrm{BMO}_2$, 我们有 $S^2(f)\in\mathrm{BMO}_1$, 且 $\|S^2(f)\|_{\mathrm{BMO}_1}\leqslant2\|f\|^2_{\mathrm{BMO}_2}$. 这是下面一般结论的特殊情形.

命题 1 设势 (Q_n) 是有界 B 的, 则与之联系的增加过程 (A_n) 满足

$$\|A_\infty\|_{\mathrm{BMO}_1}\leqslant2B.$$

证明 根据定义有 $Q_n=E(A_\infty-A_{n-1}|\mathscr{F}_n)$. 注意 $A_n\nearrow A_\infty$, 故

$$A_{n-1}-E(A_\infty|\mathscr{F}_{n-1})\leqslant A_\infty-E(A_\infty|\mathscr{F}_{n-1})\leqslant A_\infty-A_{n-1},$$

因此有

$$|A_\infty-E(A_\infty|\mathscr{F}_{n-1})|\leqslant A_\infty-A_{n-1}+E(A_\infty|\mathscr{F}_{n-1})-A_{n-1},$$

$$\begin{aligned}&E(|A_\infty-E(A_\infty|\mathscr{F}_{n-1})||\mathscr{F}_n)\\&\quad\leqslant E(A_\infty-A_{n-1}|\mathscr{F}_n)+E(A_\infty-A_{n-1}|\mathscr{F}_{n-1})\leqslant 2B.\end{aligned}$$

从而完成了 $\|A_\infty\|_{\mathrm{BMO}_1}\leqslant 2B$ 的证明. ∎

注 我们利用在定理 1′ 的证明中已有的关系

$$E(S^2(f)-S_{n-1}^2(f)|\mathscr{F}_n)=E(|f-f_{n-1}|^2|\mathscr{F}_n)\leqslant\|f\|_{\mathrm{BMO}_2}^2,$$

与命题 1 得出结论

$$\|S^2(f)\|_{\mathrm{BMO}_1}\leqslant 2\|f\|_{\mathrm{BMO}_2}^2.$$

类似地可知, 均方根算子 S 是 BMO 上的有界算子. 下面我们指出极大算子也是 BMO 上的有界算子.

命题 1′ 下述断言成立

$$\|f^*\|_{\mathrm{BMO}_2}\leqslant C\|f\|_{\mathrm{BMO}_2},\quad \forall f\in\mathrm{BMO}.$$

证明 设 $f\in\mathrm{BMO}_2$, n 为固定的. 则

$$g=(g_m)_{m\geqslant 0},\quad g_m=f_{m+n}-f_{n-1}$$

是关于 $\{\mathscr{G}_m\}=\{\mathscr{F}_{m+n}\}$ 的鞅. 且如以前多次指出的, 有

$$f^*-f_{n-1}^*\leqslant g^*=\sup_{m\geqslant 0}|f_{m+n}-f_{n-1}|.$$

于是,

$$\begin{aligned}E(|f^*-f_{n-1}^*|^2|\mathscr{F}_n)&\leqslant CE(S^2(f-f_{n-1})|\mathscr{F}_n)\\&=CE(S^2(f)-S_{n-1}^2(f)|\mathscr{F}_n)\\&=CE(|f-f_{n-1}|^2|\mathscr{F}_n)\leqslant C\|f\|_{\mathrm{BMO}_2}^2.\end{aligned}$$

再利用 5.4. 节中命题 3 的结论, 就可推出

$$\|f^*\|_{\mathrm{BMO}_2}\leqslant C\|f\|_{\mathrm{BMO}_2}.\ ∎$$

5.2 BMO 与 BLO

定义 1 设 $f=(f_n)_{n\geq0}$ 是一个实鞅. 称 f 属于 BLO, 如果

$$|f_n-f_{n-1}|\leqslant C,\quad f_n\leqslant f+C,\quad \text{a.e.},\ \forall n. \tag{4}$$

并记

$$\|f\|_{\mathrm{BLO}}=\inf\{C:\ C\text{ 为满足式(4)的常数.}\} \tag{4'}$$

命题 2 下述包含关系成立

$$\mathrm{Re}L^{\infty}\subset\mathrm{BLO}\subset\mathrm{BMO}.$$

且对应的范数满足

$$\frac{1}{3}\|f\|_{\mathrm{BMO}_1}\leqslant\|f\|_{\mathrm{BLO}}\leqslant2\|f\|_{\infty}. \tag{5}$$

证明 由关系式

$$|f_n-f_{n-1}|\leqslant2\|f\|_{\infty},\qquad |f_n-f|\leqslant2\|f\|_{\infty}$$

可推出式(5)的第二个不等式. 现设 $f\in\mathrm{BLO}$. 则

$$\begin{aligned}E(|f-f_{n-1}\|\mathscr{F}_n)&\leqslant E(|f-f_n\|\mathscr{F}_n)+|f_n-f_{n-1}|\\&\leqslant2E((f_n-f)^+|\mathscr{F}_n)+\|f\|_{\mathrm{BLO}}\\&\leqslant2E((\sup_n f_n-f)\mathrm{II}(\{\sup_n f_n\geqslant f\})|\mathscr{F}_n)+\|f\|_{\mathrm{BLO}}\\&\leqslant3\|f\|_{\mathrm{BLO}}.\end{aligned}$$

这里用到了事实

$$E((f_n-f)^+|\mathscr{F}_n)=E((f_n-f)^-|\mathscr{F}_n),$$
$$\forall\text{ 鞅 } f=(f_n)_{n\geq0},\quad \forall n.$$

于是证明了式(5)中第一个不等式. 命题获证. ▮

定义 2 设 $f=(f_n)_{n\geq0}$ 是一个实鞅, $\alpha>0$, $\beta>0$. 称 $f\in\log A_{\alpha,\beta}$①, 如果

$$\begin{aligned}&\sup\|E(\exp(\alpha(f-f_n))|\mathscr{F}_n)\|_{\infty}^{1/\alpha}\leqslant K_\alpha<\infty,\\&\sup\|E(\exp(-\beta(f-f_n))|\mathscr{F}_n)\|_{\infty}^{1/\beta}\leqslant K_\beta<\infty.\end{aligned} \tag{6}$$

---

① 这个记号不是通用的, 只是为了叙述的方便才引进. 记号来源于 A_p 权条件.

注 1 式(6)与下式等价

$$\begin{aligned}&\sup_n\|E(\exp(\alpha(f-f_n)^+)|\mathscr{F}_n)\|_\infty^{1/\alpha}\leqslant K_\alpha<\infty,\\&\sup_n\|E(\exp(\beta(f-f_n)^-)|\mathscr{F}_n)\|_\infty^{1/\beta}\leqslant K_\beta<\infty.\end{aligned}\qquad(6)'$$

事实上，因为

$$-1\leqslant\exp(\alpha(f-f_n))-\exp(\alpha(f-f_n)^+)\leqslant 0,$$

$$-1\leqslant\exp(-\beta(f-f_n))-\exp(\beta(f-f_n)^-)\leqslant 0.$$

注 2 由式(6)′知，若 $\alpha'\leqslant\alpha$, $\beta'\leqslant\beta$, 则 $\log A_{\alpha,\beta}\subset\log A_{\alpha',\beta'}$.

引理 2 设 $f\in\log A_{\alpha,\beta}$, 则对 $\gamma=\min(\alpha,\beta)$, 有

$$E(\exp(\gamma|f-f_n|)|\mathscr{F}_n)\leqslant K_\gamma<\infty.$$

证明 这可由式(6)′推出．因为

$$\begin{aligned}&E(\exp(\gamma|f-f_n|)|\mathscr{F}_n)\\&\quad=E(\exp(\gamma(f-f_n)^+\mathrm{II}(\{f>f_n\}))|\mathscr{F}_n)\\&\qquad+E(\exp(\gamma(f-f_n)^-\mathrm{II}(\{f\leqslant f_n\}))|\mathscr{F}_n)\\&\quad\leqslant 2+E(\exp(\alpha(f-f_n))|\mathscr{F}_n)\\&\qquad+E(\exp(-\beta(f-f_n))|\mathscr{F}_n)\\&\quad\leqslant 2+K_\alpha^\alpha+K_\beta^\beta<\infty.\ \blacksquare\end{aligned}$$

注 本引理推出 $\mathrm{BD}\cap\log A_{\alpha,\beta}\subset\mathrm{BMO}$. 再根据定理 1 即得

$$\operatorname{Re}\mathrm{BMO}=\bigcup_{\alpha,\beta>0}\log A_{\alpha,\beta}\cap\mathrm{BD}.\qquad(7)$$

引理 3 $f\in\log A_{\alpha,\beta}$, 当且仅当

$$\sup_n\|E(e^{\alpha f}|\mathscr{F}_n)^{1/\alpha}E(e^{-\beta f}|\mathscr{F}_n)^{1/\beta}\|_\infty\leqslant K_{\alpha,\beta}<\infty.\qquad(8)$$

证明 设 $f\in\log A_{\alpha,\beta}$, 则式(6)成立．故

$$\begin{aligned}\sup\|E(e^{\alpha f}|\mathscr{F}_n)^{1/\alpha}E(e^{-\beta f}|\mathscr{F}_n)^{1/\beta}\|_\infty&\leqslant\sup\|K_\alpha e^{f_n}K_\beta e^{-f_n}\|_\infty\\&=K_\alpha K_\beta<\infty.\end{aligned}$$

反之，设式(8)成立．则对 $\varphi(u)=e^{\alpha u}$ 与 $\varphi(u)=e^{-\beta u}$ 应用 Jensen 不等式即得

$$e^{f_n}E(e^{-\beta f}|\mathscr{F}_n)^{1/\beta}\leqslant E(e^{\alpha f}|\mathscr{F}_n)^{1/\alpha}E(e^{-\beta f}|\mathscr{F}_n)^{1/\beta}\leqslant K_{\alpha,\beta},$$

此即

$$\sup_n\|E(\exp(-\beta(f-f_n))|\mathscr{F}_n)\|_\infty^{1/\beta}\leqslant K_{\alpha,\beta}<\infty.$$

类似地，也有

$$\sup_n\|E(\exp(\alpha(f-f_n))|\mathscr{F}_n)\|_\infty^{1/\alpha}\leqslant K_{\alpha,\beta}<\infty.\ \blacksquare$$

引理 4 设 $f\in\log A_{\alpha,\beta}$；$T$ 是任意的停止时间．令 $\varphi=f-f_T$．则对同样的参数 $\alpha,\beta,K_\alpha,K_\beta$，$\varphi$ 满足式(6)，并且

$$\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}_1}\leqslant\|f\|_{\mathrm{BMO}_1}.\tag{9}$$

证明 首先，注意条件式(6)在用停止时间 T 代替 n 后并不改变．这就是说，若 $f=(f_n)$ 满足式(6)，则它也满足表面上看起来更强的不等式，即式（6）中 n 被停止时间 T 代替．现对给定 $f\in\log A_{\alpha,\beta}$ 与停止时间 T，记

$$F=\{n\leqslant T\},\quad F'=\{n>T\}.$$

则

$$\begin{aligned}
&E(\exp(\alpha(\varphi-\varphi_n))|\mathscr{F}_n)\\
&\quad=E(\exp(\alpha(\varphi-\varphi_n)(\mathrm{II}(F)+\mathrm{II}(F')))|\mathscr{F}_n)\\
&\quad=E(\exp(\alpha(f-f_T)\mathrm{II}(F)+\alpha(f-f_n)\mathrm{II}(F'))|\mathscr{F}_n)\\
&\quad=E(\exp(\alpha(f-f_T))\mathrm{II}(F)|\mathscr{F}_n)\\
&\qquad+E(\exp(\alpha(f-f_n))\mathrm{II}(F')|\mathscr{F}_n)\\
&\quad=E(E(\exp(\alpha(f-f_T))|\mathscr{F}_T)|\mathscr{F}_n)\mathrm{II}(F)\\
&\qquad+E(\exp(\alpha(f-f_n))|\mathscr{F}_n)\mathrm{II}(F')\\
&\quad\leqslant K_\alpha^\alpha.
\end{aligned}$$

类似地，用 $-\beta$ 代 α 时也有相同结论．这即证明了 φ 对相同的参数满足式(6)．

现证式(9)．记 $F=\{T\leqslant n-1\}$，$F'=\{T\geqslant n\}$．则有

$$E(|\varphi-\varphi_{n-1}||\mathscr{F}_n)$$

$$
\begin{aligned}
&= E(|f-f_T-(f-f_T)_{n-1}|(\mathrm{II}(F)+\mathrm{II}(F'))|\mathscr{F}_n)\\
&= E(|f-f_{n-1}|\mathrm{II}(F)+|f-f_T|\mathrm{II}(F')|\mathscr{F}_n)\\
&\leqslant \|f\|_{\mathrm{BMO}_1}\mathrm{II}(F)+E(E(|f-f_T|\mathrm{II}(F')|\mathscr{F}_T)|\mathscr{F}_n)\\
&\leqslant \|f\|_{\mathrm{BMO}_1}(\mathrm{II}(F)+\mathrm{II}(F'))=\|f\|_{\mathrm{BMO}_1}.
\end{aligned}
$$

这里用到 $E(|f-f_T||\mathscr{F}_T)\leqslant\|f\|_{\mathrm{BMO}_1}$, $\forall$ 停止时间 T. 因为

$$
\begin{aligned}
E(|f-f_T||\mathscr{F}_T) &= \sum_{k=0}^{\infty}E(|f-f_k||\mathscr{F}_k)\mathrm{II}(\{T=k\})\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}E(E(|f-f_k||\mathscr{F}_{k+1})|\mathscr{F}_k)\mathrm{II}(\{T=k\})\\
&\leqslant \|f\|_{\mathrm{BMO}_1}. \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

注 若 $f\in\mathrm{BLO}$, 则 $\varphi=f-f_T\in\mathrm{BLO}$, 并且 $\|\varphi\|_{\mathrm{BLO}}\leqslant\|f\|_{\mathrm{BLO}}$. 因为

$$
\begin{aligned}
\varphi_n-\varphi &= (f_T-f)\mathrm{II}(\{n\leqslant T\})+(f_n-f)\mathrm{II}(\{n>T\})\\
&\leqslant \|f\|_{\mathrm{BLO}}.
\end{aligned}
$$

现在介绍 Varopoulos[1] 引进的 γ-度停止时间序列的概念. 它在 BMO 鞅的分解理论中是一个有效工具.

定义 3 设 $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是停止时间的一个增加序列, 对 $0<\gamma<1$, 满足

$$
E(\mathrm{II}(\{T_{i+1}<\infty\})|\mathscr{F}_{T_i})\leqslant\gamma. \tag{10}
$$

则称 $\{T_i\}$ 是一个 γ-度停止时间序列.

注 Varopoulos 的参考文献[1]中引进了 γ-度函数的概念, 此即函数

$$
\varphi=\sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{II}(\{T_i<\infty\}),
$$

其中 $\{T_i\}$ 是一个 γ-度停止时间序列. 同时还估计了这样定义的 φ 的 BMO 范数. 我们将考虑广义的 γ-度函数

$$\varphi=\sum_{i=1}^{\infty}b_i(\omega)\mathrm{II}(\{T_i<\infty\})$$

的 BMO, BLO 与 $\log A_{\alpha,\beta}$ 属性(其中 $b_i(\omega)$ 是一致有界或非负一致有界, 且是关于 $\mathscr{F}_{T_i}$ 可测的函数序列). 这样的推广使 γ-度停止时间这个工具的使用可扩充到有跳跃的情形.

引理 5 设$\{T_k\}_{k=1}^{\infty}$是一个 γ-度停止时间序列, 其中 $0<\gamma<1$. 并设$\{b_k(\omega)\}$是可测函数的序列, 满足

$$0\leqslant b_k(\omega)\leqslant B,\quad b_k\text{ 关于 }\mathscr{F}_{T_k}\text{ 可测}. \tag{11}$$

则函数

$$\varphi=\sum_{1}^{\infty}b_k(\omega)\mathrm{II}(\{T_k<\infty\})$$

是 BLO 中元素; 并有

$$\|\varphi\|_{\mathrm{BLO}}\leqslant\frac{2B}{1-\gamma},\quad \|\varphi\|_{\mathrm{BMO}_1}\leqslant\frac{2B}{1-\gamma}; \tag{12}$$

且 $\forall\alpha>0$ 满足 $e^{\alpha B}<1/\gamma$, 都有

$$\sup_n\|E(e^{\alpha(\varphi-\varphi_n)}|\mathscr{F}_n)\|_\infty<\infty. \tag{13}$$

证明 根据式(10), 我们有

$$\begin{aligned}|\{T_k<\infty\}|&=E(E(\mathrm{II}(\{T_k<\infty\})|\mathscr{F}_{T_{k-1}}))\\&=E(E(\mathrm{II}(\{T_k<\infty\})\mathrm{II}(\{T_{k-1}<\infty\})|\mathscr{F}_{k-1}))\\&\leqslant\gamma E(\mathrm{II}(\{T_{k-1}<\infty\}))\\&\leqslant\gamma^{k-1}E(\mathrm{II}(\{T_1<\infty\}))\leqslant\gamma^{k-1}.\end{aligned}$$

这说明$|\{T_k<\infty\}|\to0$, $\sum_{1}^{\infty}\mathrm{II}(\{T_k<\infty\})\in L^1$. 从而因为 $\{T_k\}$增加, 因此 $T_k\to\infty$, a. e..

现在对 $n\in\mathbf{Z}^+$ 取定, 考虑集合

$$X_n^{(m)}=\{T_1<n,T_2<n,\cdots,T_m<n,T_{m+1}\geqslant n\},$$

$$X_n^{(0)}=\{T_1\geqslant n\},$$

$$X_n^{(\infty)}=\{T_m<n, \forall m=1,2,\cdots\}.$$

我们有 $|X_n^{(\infty)}|=0$, 并且 $\{X_n^{(m)}\}_{m\geq 0}$ 构成了 Ω 的一个剖分. 注意

$$X_n^{(m)}\in\mathscr{F}_{n-1}\cap\mathscr{F}_{T_{m+1}}.$$

现在我们估计

$$(\varphi_n-\varphi)\mathrm{II}(X_n^{(m)}),\quad m=0,1,\cdots.$$

因为 $b_k(\omega)\mathrm{II}(\{T_k<\infty\})\mathrm{II}(X_n^{(m)})$, 当 $1\leqslant k\leqslant m$, 关于 $\mathscr{F}_{n-1}$ 可测, 以及 b_k 为非负的, 所以我们有

$$\begin{aligned}\varphi_n\mathrm{II}(X_n^{(m)})=&\sum_{k=1}^{m}b_k(\omega)\mathrm{II}(\{T_k<\infty\})\mathrm{II}(X_n^{(m)})\\&+\sum_{k=m+1}^{\infty}E(b_k\mathrm{II}(\{T_k<\infty\})\mathrm{II}(X_n^{(m)})|\mathscr{F}_n),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\varphi_n-\varphi)\mathrm{II}(X_n^{(m)})=&\sum_{k=m+1}^{\infty}E(b_k\mathrm{II}(\{T_k<\infty\})\mathrm{II}(X_n^{(m)})|\mathscr{F}_n)\\&-\sum_{k=m+1}^{\infty}b_k\mathrm{II}(\{T_k<\infty\})\mathrm{II}(X_n^{(m)})\\\leqslant&\sum_{k=m+1}^{\infty}E(E(b_k\mathrm{II}(\{T_k<\infty\})\\&\cdot\mathrm{II}(X_n^{(m)})|\mathscr{F}_{T_{m+1}})|\mathscr{F}_n)\\\leqslant&B\sum_{k=m+1}^{\infty}\gamma^{k-m-1}=\frac{B}{1-\gamma}.\end{aligned}$$

类似地, 我们有

$$\begin{aligned}&E(|\varphi-\varphi_{n-1}||\mathscr{F}_n)\mathrm{II}(X_n^{(m)})\\&\quad=E(|\varphi-\varphi_{n-1}|\mathrm{II}(X_n^{(m)})|\mathscr{F}_n)\\&\quad=E\Big(\Big|\sum_{k=m+1}^{\infty}b_k\mathrm{II}(\{T_k<\infty\})\mathrm{II}(X_n^{(m)})\\&\qquad-\sum_{k=m+1}^{\infty}E(b_k\mathrm{II}(\{T_k<\infty\})\mathrm{II}(X_n^{(m)})|\mathscr{F}_{n-1})\Big|\Big|\mathscr{F}_n\Big)\end{aligned}$$

$$\leqslant B\sum_{k=m+1}^{\infty}E(\mathrm{II}(\{T_k<\infty\})\mathrm{II}(X_n^{(m)})\,|\,\mathscr{F}_n)$$

$$+B\sum_{k=m+1}^{\infty}E(\mathrm{II}(\{T_k<\infty\})\mathrm{II}(X_n^{(m)})\,|\,\mathscr{F}_{n-1})$$

$$\leqslant 2B\sum_{k=m+1}^{\infty}\|E(\mathrm{II}(\{T_k<\infty\})\,|\,\mathscr{F}_{T_{m+1}})\|_\infty$$

$$\leqslant\frac{2B}{1-\gamma}.$$

特别地

$$\|\varphi_n-\varphi_{n-1}\|_\infty\leqslant\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}_1}\leqslant\frac{2B}{1-\gamma}.$$

因此也有

$$\|\varphi\|_{\mathrm{BLO}}\leqslant\frac{2B}{1-\gamma}.$$

于是我们完成了式(12)中两个不等式的证明.

现在证明式(13). 对待定的$\alpha>0$, 我们有

$$\sum_{m=0}^{\infty}E(\exp(\alpha(\varphi-\varphi_n))\,|\,\mathscr{F}_n)\mathrm{II}(X_n^{(m)})$$

$$=E\Big(\sum_{m=0}^{\infty}\exp(\alpha(\varphi-\varphi_n))\mathrm{II}(X_n^{(m)})\,|\,\mathscr{F}_n\Big)$$

$$=E\Big(\sum_{m=0}^{\infty}\exp\{\alpha(\varphi-\varphi_n)\mathrm{II}(X_n^{(m)})\}\mathrm{II}(X_n^{(m)})\,|\,\mathscr{F}_n\Big)$$

$$=E\Big(\sum_{m=0}^{\infty}\exp\Big\{\alpha\Big(\sum_{k=m+1}^{\infty}b_k\mathrm{II}(\{T_k<\infty\})\mathrm{II}(X_n^{(m)})$$

$$-\sum_{k=m+1}^{\infty}E(b_k\mathrm{II}(\{T_k<\infty\})\mathrm{II}(X_n^{(m)})\,|\,\mathscr{F}_n)\Big)\Big\}$$

$$\cdot\ \mathrm{II}(X_n^{(m)})\,|\,\mathscr{F}_n\Big)$$

$$\leqslant E\Big(\sum_{m=0}^{\infty}\exp\Big\{\alpha B\sum_{k=m+1}^{\infty}\mathrm{II}(\{T_k<\infty\})\Big\}\mathrm{II}(X_n^{(m)})\,|\,\mathscr{F}_n\Big)$$

$$
=\sum_{m=0}^{\infty}E\Big(E\Big(\exp\Big\{\alpha B\sum_{k=m+1}^{\infty}\mathrm{II}(\{T_k<\infty\})\Big\}\,|\,\mathscr{F}_{T_{m+1}}\Big)\,|\,\mathscr{F}_n\Big)\mathrm{II}(X_n^{(m)}). \tag{14}
$$

为此我们要求出

$$
\Big\|E\Big(\exp\Big\{\alpha B\sum_{k=m+1}^{\infty}\mathrm{II}(\{T_k<\infty\})\Big\}\,|\,\mathscr{F}_{T_{m+1}}\Big)\Big\|_{\infty}
$$

对m的一致估计. 我们有下述恒等式

$$
\begin{aligned}
&\exp\Big\{\alpha B\sum_{k=m+1}^{\infty}\mathrm{II}(\{T_k<\infty\})\Big\}\\
&=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(\alpha B)^l}{l!}\Big(\sum_{k=m+1}^{\infty}\mathrm{II}(\{T_k<\infty\})\Big)^l\\
&=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(\alpha B)^l}{l!}\sum_{k=m+1}^{\infty}(k-m)^l\mathrm{II}(\{T_k<\infty,T_{k+1}=\infty\}),
\end{aligned}
$$

因此,

$$
\begin{aligned}
&E\Big(\exp\Big\{\alpha B\sum_{k=m+1}^{\infty}\mathrm{II}(\{T_k<\infty\})\Big\}\,|\,\mathscr{F}_{T_{m+1}}\Big)\\
&\quad=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(\alpha B)^l}{l!}\sum_{k=m+1}^{\infty}(k-m)^lE(\mathrm{II}(\{T_k<\infty,\\
&\qquad\qquad T_{k+1}=\infty\})\,|\,\mathscr{F}_{T_{m+1}})\\
&\quad\leqslant\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(\alpha B)^l}{l!}\sum_{k=m+1}^{\infty}(k-m)^l\gamma^{k-m-1}\\
&\quad=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(\alpha B)^l}{l!}\sum_{k=1}^{\infty}k^l\gamma^{k-1}\\
&\quad=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(\alpha Bk)^l}{l!}\gamma^{k-1}=\sum_{k=1}^{\infty}e^{\alpha Bk}\gamma^{k-1}\\
&\quad=\frac{1}{\gamma}\sum_{k=1}^{\infty}(\gamma e^{\alpha B})^k.
\end{aligned}
$$

于是将它代入式(14), 我们得

$$\sum_{m=0}^{\infty} E(\exp(\alpha(\varphi-\varphi_n))|\mathscr{F}_n)\mathrm{II}(X_n^{(m)})$$

$$\leqslant \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma} \sum_{k=1}^{\infty} (\gamma e^{\alpha B})^k \mathrm{II}(X_n^{(m)})$$

$$\leqslant \frac{1}{\gamma} \frac{\gamma e^{\alpha B}}{1-\gamma e^{\alpha B}} < \infty,$$

只要 α 使得 $e^{\alpha B}<1/\gamma$. ▌

现在考虑 BMO 鞅表为 BLO 鞅的差的分解.

定理 2 每个实鞅 $f\in\mathrm{BMO}$, 均可表为

$$f=g-h+\varphi,$$

其中 $g, h\in\mathrm{BLO}$, $\varphi\in L^\infty$.

证明 由定理 1 知, 对 $f\in\mathrm{BMO}$, 存在 $\alpha>0$, 使

$$\|E(\exp(\alpha|f-f_n|)|\mathscr{F}_n)\|_\infty \leqslant K_\alpha < \infty.$$

我们定义

$$f^{(1)}=f-E(f),$$

$$T_i=\inf\{n:|f_n^{(i)}|>\lambda\}, \quad \lambda>0 \text{ 待定}, i=1,2,\cdots,$$

$$f^{(i+1)}=f-f_{T_i}, \quad i=1,2,\cdots.$$

因为 $f_n^{(i+1)}=f_n-f_{T_i\wedge n}$, 所以当 $n\leqslant T_i$ 时, $f_n^{(i+1)}=0$. 因此使得 $|f_n^{(i+1)}|>\lambda$ 的 n 必须满足 $n>T_i$, 这说明 $T_{i+1}\geqslant T_i$. 于是 $\{T_i\}_1^\infty$ 是停止时间的一个增加序列. 此外, 我们有

$$E(\exp(\alpha|f^{(i+1)}|)|\mathscr{F}_{T_{i+1}})\geqslant \exp(\alpha E(|f^{(i+1)}||\mathscr{F}_{T_{i+1}})$$

$$\geqslant \exp(\alpha|E(f^{(i+1)}|\mathscr{F}_{T_{i+1}})|)=\exp(\alpha|f_{T_{i+1}}^{(i+1)}|)$$

$$\geqslant \exp(\alpha\lambda)\mathrm{II}(\{T_{i+1}<\infty\}),$$

以及

$$K_\alpha \geqslant E(\exp(\alpha|f-f_{T_i}|)|\mathscr{F}_{T_i})$$

$$=E(E(\exp(\alpha|f^{(i+1)}|)|\mathscr{F}_{T_{i+1}})|\mathscr{F}_{T_i})$$

因此有

$$E(\mathrm{II}(\{T_{i+1}<\infty\})|\mathscr{F}_{T_i})\leqslant K_\alpha e^{-\alpha\lambda}.$$

当 λ 充分大时，可有 $\gamma=K_\alpha e^{-\alpha\lambda}<1$, 这说明 $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是一个 γ-度停止时间序列.

我们已指出，对一个 γ-度停止时间序列，总有

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\{T_i<\infty\}|<\infty.$$

特别地，有 $T_i\to\infty$, a.e., $f^{(i)}\to 0$, a.e., 并且 $\{T_i=\infty\}\subset\{f^{(i+1)}=0\}$. 记 $T_0=0$, 则 $f_{T_0}=E(f)$. 这样我们得到实鞅 $f\in\mathrm{BMO}$ 的分解如下:

$$\begin{aligned}f-E(f)&=\sum_{i=1}^{\infty}(f_{T_i}-f_{T_{i-1}})=\sum_{i=1}^{\infty}f_{T_i}^{(i)}\\&=\sum_{i=1}^{\infty}(f_{T_i}^{(i)})^{+}\mathrm{II}(\{T_i<\infty\})-\sum_{i=1}^{\infty}(f_{T_i}^{(i)})^{-}\mathrm{II}(\{T_i<\infty\})\\&\quad+\sum_{i=1}^{\infty}f_{T_i}^{(i)}\,\mathrm{II}(\{T_i=\infty\}),\end{aligned}$$

$$f=g-h+\varphi.$$

注意 $|f_{T_i}^{(i)}\mathrm{II}(\{T_i=\infty\})|\leqslant\lambda$, 以及因为

$$\{f_{T_i}^{(i)}\,\mathrm{II}(\{T_i=\infty\})\neq 0\}\subset\{T_{i-1}<\infty, T_i=\infty\},$$

所以上式左边关于 i 是不交集合族，故

$$\|\varphi\|_\infty\leqslant|E(f)|+\lambda.$$

又因 $\{(f_{T_i}^{(i)})^{\pm}\}$ 是由分别关于 $\mathscr{F}_{T_i}$ 可测的非负可测函数构成的序列，并且一致有界. (这后一断言，是根据式(9),

$$\begin{aligned}|f_{T_i}^{(i)}|&\leqslant|f_{T_i-1}^{(i)}|+|f_{T_i}^{(i)}-f_{T_i-1}^{(i)}|\leqslant\lambda+\|f^{(i)}\|_{\mathrm{BMO}_1}\\&\leqslant\lambda+\|f\|_{\mathrm{BMO}_1}.)\end{aligned}$$

因而级数 $\sum_{i=1}^{\infty}|f_{T_i}^{(i)}|\mathrm{II}(\{T_i<\infty\})$ 几乎处处收敛，此即 g, h 有意义，并且由引理 5 知，$g, h\in\mathrm{BLO}$. 于是定理获证. ▌

现在对 $\log A_{\alpha,\beta}\cap \mathrm{BD}$ 中的鞅的上述分解作进一步的讨论. 为此先证一个引理.

引理 6 设 $\{T_k\}_1^\infty$ 是 γ_0-度停止时间序列. 又设 $\{A_k\}_1^\infty$ 是满足 $A_k\subset\{T_k<\infty\}$, 且 $A_k\in\mathscr{F}_{T_k}$, 以及

$$E(\mathrm{II}(A_{k+1})\,|\mathscr{F}_{T_k})\leqslant\gamma_1,\ \text{a.e.} \tag{15}$$

的集合序列. 再设 $\{b_k\}_1^\infty$ 是可测函数的序列, 满足

$$0\leqslant b_k\leqslant B,\quad b_k\ 关于\ \mathscr{F}_{T_k}\ 可测.$$

则存在 $\dfrac{\gamma_1}{1-\gamma_0}$-度 $\left(设\ \gamma_1\ 充分小, 使\ \dfrac{\gamma_1}{1-\gamma_0}<1\right)$ 停止时间序列 $\{S_j\}_1^\infty$, 以及可测函数序列 $\{c_j\}$, 满足

$$0\leqslant c_j\leqslant B,\quad c_j\ 关于\ \mathscr{F}_{S_j}\ 可测,$$

使得

$$\begin{aligned}\varphi(\omega)&=\sum_1^\infty b_k\mathrm{II}(A_k)\\&=\sum_1^\infty c_j\mathrm{II}(\{S_j<\infty\})=\theta(\omega).\end{aligned} \tag{16}$$

证明 定义

$$n_0(\omega)\equiv0,\ \ n_j(\omega)=\inf\{i>n_{j-1}(\omega):\ \omega\in A_i\},\quad j=1,2,\cdots.$$

首先我们证明 $\{n_j(\omega)=k\}\in\mathscr{F}_{T_k}$. 用归纳法证明. $j=1$ 时是清楚的. 事实上, 我们有

$$n_1(\omega)=\inf\{i>0:\ \omega\in A_i\},$$

$$\{n_1(\omega)=k\}=A_1'\cap\cdots\cap A_{k-1}'\cap A_k\in\mathscr{F}_{T_k}.$$

现设 $\{n_{j-1}=l\}\in\mathscr{F}_{T_l}$, $\forall l=1,\cdots,k-1$. 则因为

$$\{n_j=k\}=\bigcup_{i=1}^{k-1}\left(\{n_{j-1}=i\}\cap A_k\cap\left(\bigcap_{j=i+1}^{k-1}A_j'\right)\right),$$

由此证明了 $\{n_j(\omega)=k\}\in\mathscr{F}_{T_k}$.

对 $j=1,2,\cdots$, 定义

$$S_j(\omega)=\begin{cases}T_{n_j(\omega)}(\omega), & n_j(\omega)<\infty,\\ \infty, & n_j(\omega)=\infty.\end{cases} \tag{17}$$

则 S_j 都是停止时间．因为 $\forall k\geqslant 0$, 有

$$\{S_j=k\}=\bigcup_{l=1}^{\infty}\{n_j=l\}\cap\{T_l=k\}\in\mathscr{F}_k.$$

并且由于$\{n_j\}$与$\{T_k\}$都是增加序列, 知$\{S_j\}$也是增加序列．因

$$S_j=\begin{cases}T_{n_j} & (n_j<\infty)\\ \infty & (n_j=\infty)\end{cases}\leqslant\begin{cases}T_{n_{j+1}} & (n_{j+1}<\infty)\\ \infty & (n_{j+1}=\infty)\end{cases}=S_{j+1}.$$

此外$\{S_j\}$还有一个性质是$\{n_j=k\}\in\mathscr{F}_{S_j}$, $\forall j$, $\forall k$．因为 $\forall n\geqslant 0$,

$$\{n_j=k\}\cap\{S_j=n\}=\{n_j=k\}\cap\{T_k=n\}\in\mathscr{F}_n.$$

现在我们来证明$\{S_j\}_1^\infty$是$\frac{\gamma_1}{1-\gamma_0}$-度的．因 $\forall k\geqslant 1$, 有

$$\begin{aligned}
&E(\mathrm{II}(\{S_{j+1}<\infty\})\,|\,\mathscr{F}_{S_j})\mathrm{II}(\{n_j=k\})\\
&=E(\mathrm{II}(\{S_{j+1}<\infty\})\mathrm{II}(\{n_j=k\})\,|\,\mathscr{F}_{S_j})\\
&=E(\mathrm{II}(\{S_{j+1}<\infty\})\mathrm{II}(\{n_j=k\})\,|\,\mathscr{F}_{T_k})\\
&=E(\mathrm{II}(\{S_{j+1}<\infty\})\,|\,\mathscr{F}_{T_k})\mathrm{II}(\{n_j=k\})\\
&=E\Big(\mathrm{II}\Big(\bigcup_{i=k+1}^{\infty}A_i\Big)\,|\,\mathscr{F}_{T_k}\Big)\mathrm{II}(\{n_j=k\})\\
&\leqslant\sum_{i=k+1}^{\infty}E(\mathrm{II}(A_i)\,|\,\mathscr{F}_{T_k})\mathrm{II}(\{n_j=k\}).
\end{aligned}$$

但是由于

$$E(\mathrm{II}(A_{k+1})\,|\,\mathscr{F}_{T_k})\leqslant\gamma_1,$$

$$E(\mathrm{II}(A_{k+2})\,|\,\mathscr{F}_{T_k})\leqslant\gamma_1 E(\mathrm{II}(\{T_{k+1}<\infty\})\,|\,\mathscr{F}_{T_k})\leqslant\gamma_1\gamma_0,$$

$$E(\mathrm{II}(A_i)\,|\,\mathscr{F}_{T_k})\leqslant\gamma_1\gamma_0^{i-k-1},\quad i\geqslant k+1.$$

所以

$$E(\mathrm{II}(\{S_{j+1}<\infty\})\,|\,\mathscr{F}_{S_j})\mathrm{II}(\{n_j=k\})$$

$$\leqslant\gamma_1\sum_{i=k+1}^{\infty}\gamma_0^{i-k-1}=\frac{\gamma_1}{1-\gamma_0}.$$

显然又有

$$\{n_j(\omega)=\infty\}=\Big(\bigcup_k\{n_j(\omega)=k\}\Big)'\in\mathscr{F}_{S_j},$$

于是

$$\begin{aligned}&E(\mathrm{II}(\{S_{j+1}<\infty\})|\mathscr{F}_{S_j})\mathrm{II}(\{n_j=\infty\})\\&\quad=E(\mathrm{II}(\{S_{j+1}<\infty\})\cap\{n_j=\infty\})|\mathscr{F}_{S_j})=0.\end{aligned}$$

这就证明了

$$E(\mathrm{II}(\{S_{j+1}<\infty\})|\mathscr{F}_{S_j})\leqslant\frac{\gamma_1}{1-\gamma_0},\quad\forall j\geqslant1.$$

现在我们令

$$c_j(\omega)=\begin{cases}b_{n_j(\omega)}(\omega), & n_j<\infty,\\0, & n_j=\infty.\end{cases}\tag{18}$$

则 $0\leqslant c_j\leqslant B$，并且 c_j 是关于$\mathscr{F}_{S_j}$ 可测的. 因为对复平面 内的任一个 Borel 集 Δ，与一切的 n，都有

$$\begin{aligned}&\{c_j(\omega)\in\Delta\}\cap\{S_j=n\}\\&\quad=\bigcup_k(\{n_j=k\}\cap\{T_k=n\}\cap\{b_k\in\Delta\})\in\mathscr{F}_n.\end{aligned}$$

最后我们证明 $\varphi(\omega)=\theta(\omega)$, a. e..

任取 ω. 如 $\omega\in\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$，则 $\varphi(\omega)=0$. 并且由于 $\forall j\geqslant1$，$n_j(\omega)=\infty$，所以也有 $\theta(\omega)=0$. 如 $\omega\in A_{n_1}\cap\cdots\cap A_{n_j}$，则

$$\varphi(\omega)=b_{n_1}+b_{n_2}+\cdots+b_{n_j}.$$

同时也有 $n_1(\omega)<\infty$，$S_1(\omega)<\infty$（因 $\omega\in A_{n_1}$），$\cdots$，$n_j(\omega)<\infty$，$S_j(\omega)<\infty$（因 $\omega\in A_{n_1}\cap\cdots\cap A_{n_j}$），并且 $n_{j+1}(\omega)=\infty$（因为如果 $n_{j+1}(\omega)<\infty$，则对于某个 $n_{j+1}>n_j$，有 $\omega\in A_{n_{j+1}}$，）. 因此对任意的 $\omega\in A_{n_1}\cap\cdots\cap A_{n_j}$，我们有

$$\theta(\omega)=c_1+c_2+\cdots+c_j=b_{n_1}+\cdots+b_{n_j}=\varphi(\omega).$$

最后还要注意，属于无穷个 A_i 的点的集合$\left(\text{即}\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{i=j}^{\infty}A_i\right)$有零测度$\left(\text{这因为}\sum_{i=j}^{\infty}|A_i|\leqslant\sum_{i=j}^{\infty}|\{T_i<\infty\}|\to 0\right)$，故可不予考虑．总之我们证明了 $\varphi(\omega)=\theta(\omega)$, a. e.．∎

定理 3　设 $f\in\log A_{\alpha,\beta}\cap\mathrm{BD}$．则 $\forall\varepsilon>0$，存在 f 的分解 $f=g-h+\varphi$，其中 $\varphi\in L^{\infty}$，$g, h\in\mathrm{BLO}$；并且 $\forall\tau>0$，有

$$g\in\log A_{\alpha-\varepsilon,\tau},\quad h\in\log A_{\beta-\varepsilon,\tau}.$$

证明　我们从引理 2 知道，假设 $\beta=\min(\alpha,\beta)$，则有

$$E(\exp(\beta|f-f_n|)|\mathscr{F}_n)\leqslant K_\beta<\infty.$$

同定理 2 的证明一样，对待定的 $\lambda>0$ 定义

$$f^{(1)}=f-E(f);$$

$$T_i=\inf\{n:\ |f_n^{(i)}|>\lambda\},\quad i=1,2,\cdots;$$

$$f^{(i+1)}=f-f_{T_i},\quad i=1,2,\cdots.$$

则如我们已知的，$\{T_i\}_1^{\infty}$ 是 $K_\beta e^{-\beta\lambda}$-度的停止时间序列，并且有分解(记 $T_0\equiv 0$)

$$f=\sum_1^{\infty}f_{T_i}^{(i)}\mathrm{II}(A_i)+\sum_1^{\infty}f_{T_i}^{(i)}\mathrm{II}(B_i)+\sum_1^{\infty}f_{T_i}^{(i)}\mathrm{II}(\{T_i=\infty\})$$
$$+E(f)=g-h+\varphi,$$

其中

$$g=\sum_1^{\infty}f_{T_i}^{(i)}\mathrm{II}(A_i),\quad A_i=\{\omega\in\{T_i<\infty\}:\ f_{T_i}^{(i)}>0\};$$

$$h=-\sum_1^{\infty}f_{T_i}^{(i)}\mathrm{II}(B_i),\quad B_i=\{\omega\in\{T_i<\infty\}:\ f_{T_i}^{(i)}\leqslant 0\},$$

剩下的就是 φ．注意 $A_i\in\mathscr{F}_{T_i}$，并且 $E(\mathrm{II}(A_i)|\mathscr{F}_{T_{i-1}})\leqslant K_\alpha e^{-\alpha\lambda}$．因为

$$
\begin{aligned}
K_\alpha &\geq E(\exp(\alpha(f-f_{T_i}))|\mathscr{F}_{T_i})\\
&=E(E(\exp(\alpha(f-f_{T_i}))|\mathscr{F}_{T_{i+1}})|\mathscr{F}_{T_i})\\
&\geq E(\exp(\alpha E(f-f_{T_i}|\mathscr{F}_{T_{i+1}}))|\mathscr{F}_{T_i})\\
&=E(\exp(\alpha f^{(i+1)}_{T_{i+1}})|\mathscr{F}_{T_i})\geq E(e^{\alpha\lambda}\mathrm{II}(A_{i+1})|\mathscr{F}_{T_i}).
\end{aligned}
$$

再注意 $b_i(\omega)=f^{(i)}_{T_i}$ 关于 $\mathscr{F}_{T_i}$ 可测，且

$$b_i(\omega)\leqslant\lambda+\|f\|_{\mathrm{BMO}_1}.$$

这样由引理 6 知，存在 γ-度$\left(\gamma=\frac{K_\alpha e^{-\alpha\lambda}}{1-K_\beta e^{-\beta\lambda}}<1\right)$停止时间序列 $\{S_j\}_{j=1}^\infty$，以及函数序列 $\{c_j\}_1^\infty$（满足 $0\leqslant c_j\leqslant\lambda+\|f\|_{\mathrm{BMO}_1}$），并且 c_j 关于 $\mathscr{F}_{S_j}$ 可测，使得

$$g=\sum_{i=1}^\infty f^{(i)}_{T_i}\mathrm{II}(A_i)=\sum_1^\infty c_j\mathrm{II}(\{S_j<\infty\}).$$

由于 $\log A_{\alpha,\beta}\cap\mathrm{BD}\subset\mathrm{BMO}$，我们由定理 2 知，$g,h\in\mathrm{BLO}$，$\varphi\in L^\infty$. 现只需证明，只要 λ 充分大，一定有 $g\in\log A_{\alpha-\varepsilon,\tau}$，$h\in\log A_{\beta-\varepsilon,\tau}$，$\forall\tau>0$. 先看 g. 对任意给定的 $\varepsilon>0$，任选 $\delta_1,\delta_2>0$，使 $(\delta_1+\delta_2)\alpha<\varepsilon$. 再选充分大的 λ，使

$$\lambda+\|f\|_{\mathrm{BMO}_1}\leqslant(1+\delta_1)\lambda,$$
$$\gamma=K_\alpha e^{-\alpha\lambda}(1-K_\beta e^{-\beta\lambda})^{-1}\leqslant e^{-(1-\delta_2)\alpha\lambda}.$$

注意

$$(\alpha-\varepsilon)(1+\delta_1)\lambda-(1-\delta_2)\alpha\lambda=(-\varepsilon+(\delta_1+\delta_2)\alpha-\varepsilon\delta_1)\lambda<0.$$

于是由引理 5 知，g 满足

$$E(\exp((\alpha-\varepsilon)(g-g_n))|\mathscr{F}_n)\leqslant K_\alpha<\infty. \tag{19}$$

类似地，但更容易地，我们利用 $\{T_i\}_1^\infty$ 是 $K_\beta e^{-\beta\lambda}$-度停止时间，即知

$$E(\exp((\beta-\varepsilon)(h-h_n))|\mathscr{F}_n)\leqslant K_\beta<\infty. \tag{19$'$}$$

我们已知 $g,h\in\mathrm{BLO}$. 自然地，$\forall\tau>0$，有

$$g\in\log A_{\alpha-\varepsilon,\tau},\quad h\in\log A_{\beta-\varepsilon,\tau}. \blacksquare$$

注 我们将在 6.5 节中直接由定理 3 得到 A_p 权的 Jones 因子分解定理.

现在对原子鞅考虑 BMO 鞅的一种分解. 设 $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ 是一概率空间, $\{\mathscr{F}_n\}_{n\geq 0}$ 中每个 $\mathscr{F}_n$ 都是原子的. 记 $\mathscr{J}$ 为所有原子的集合.

定理 4 设 $(\Omega, \mathscr{F}, \mu, \{\mathscr{F}_n\}_{n\geq 0})$ 是原子的, 则每个 $\varphi\in$BMO 可以分解为

$$\varphi=\psi+\sum_i b_i \frac{1}{|I_i|}\mathrm{II}(I_i), \tag{20}$$

其中 b_i 都是复数, I_i 都是原子, 且

$$\left.\begin{aligned}&\|\psi\|_\infty\leqslant C(\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}}+|E(\varphi)|),\\&\frac{1}{|I|}\sum_{I_i\subset I}|b_i|\leqslant C\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}}, \quad \forall I\in\mathscr{J}.\end{aligned}\right. \tag{20)$'$}$$

证明 上面定理 2 已给出分解

$$\varphi=\psi+\sum_j \varphi_{T_j}^{(j)}\mathrm{II}(\{T_j<\infty\}),$$

$$\|\psi\|_\infty\leqslant\lambda+|E(\varphi)|, \quad \varphi_{T_j}^{(j)}=\varphi_{T_j}-\varphi_{T_{j-1}},$$

其中 λ 可以取为 $2\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}}$. 设 $\{T_j<\infty\}=\bigcup\limits_k I_{j,k}$, 并记 $b_{j,k}$ 为 $\varphi_{T_j}^{(j)}$ 在原子 $I_{j,k}$ 上的值的 $|I_{j,k}|$ 倍. 注意因为 $\varphi_{T_j}^{(j)}$ 关于 $\mathscr{F}_{T_j}$ 是可测的, 故它在 $\mathscr{F}_{T_j}$ 的原子上是常数, 这说明 $b_{j,k}$ 是复数. 于是我们得到 φ 的下述形式的分解

$$\varphi=\psi+\sum_{j,k} b_{j,k}\frac{1}{|I_{j,k}|}\mathrm{II}(I_{j,k}).$$

由定理 2 的证明中已知, 此级数是 a. e. 绝对收敛的, 故可将二重和化为一重和, 即得式(20).

现证 $\{b_j\}$ 满足所需性质.

对任给的 $I\in\mathscr{J}$, 如果对某个 j 有性质

$$\exists \text{ 原子 } I_0 \in \mathscr{J}, \text{满足 } I \subsetneqq I_0 \subset \{T_j < \infty\},$$

则对所有的 $i \leqslant j$ 也具有此性质. 现记

$$j_0(I) = \max\{j: \ \exists I_0 \in \mathscr{J}, \text{满足 } I \subsetneqq I_0 \subset \{T_j < \infty\}\}.$$

如果 $j_0(I) = \infty$, 这说明 $\forall j$, $\exists I_0 \in \mathscr{J}$, 使得

$$I \subsetneqq I_0 \subset \{T_j < \infty\},$$

因而不可能有任何 i 以及$\{T_i < \infty\}$中的任何原子$I_{i,k}$满足$I_{i,k} \subseteqq I$. 这就是说

$$\sum_{I_i \subset I} |b_i| = 0,$$

自然有

$$\frac{1}{|I|} \sum_{I_i \subset I} |b_i| \leqslant C \|\varphi\|_{\mathrm{BMO}}.$$

因此无妨设 $j_0(I) < \infty$. 现考虑所有的 $i > j_0(I)$. 此时 $\{T_i < \infty\}$ 中的所有原子 $I_{i,l}$, 或者满足 $I \cap I_{i,l} = \varnothing$; 或者 $I_{i,l} \subseteqq I$. 因而 $\forall i > j_0(I)$, $\{T_i < \infty\} \cap I \in \mathscr{F}_{T_i}$. 于是 $\forall i > j_0(I) + 1$, 有

$$\begin{aligned}
|\{T_i < \infty\} \cap I| &\leqslant \frac{1}{\lambda} \int_{\{T_i < \infty\} \cap I} |\varphi_{T_i}^{(i)}| d\mu \\
&= \frac{1}{\lambda} \int_{\{T_i < \infty\} \cap I} |E(\varphi - \varphi_{T_{i-1}} | \mathscr{F}_{T_i})| d\mu \\
&\leqslant \frac{1}{\lambda} \int_{\{T_{i-1} < \infty\} \cap I} E(E(|\varphi - \varphi_{T_{i-1}}| \,|\, \mathscr{F}_{T_i}) | \mathscr{F}_{T_{i-1}}) d\mu \\
&= \frac{1}{\lambda} \int_{\{T_{i-1} < \infty\} \cap I} E(|\varphi - \varphi_{T_{i-1}}| \,|\, \mathscr{F}_{T_{i-1}}) d\mu \\
&\leqslant \frac{\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}}}{\lambda} |\{T_{i-1} < \infty\} \cap I| \\
&\leqslant \left(\frac{\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}}}{\lambda}\right)^{i-j_0} |I|.
\end{aligned} \tag{21}$$

当 $i = j_0(I) + 1$, 因$|\{T_i < \infty\} \cap I\}| \leqslant |I|$, 同时

$$\frac{\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}}}{\lambda}=\frac{1}{2},$$

因此作为式(21)的补充，我们有

$$|\{T_{j_0(I)+1}<\infty\}\cap I|\leqslant 2\frac{\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}}}{\lambda}|I|. \qquad (21)'$$

现设分解中所有那些使 $I_i\subseteq I$ 的 I_i 是某些 $\{I_{j,k}\}$，则这些 j 必须满足 $j>j_0(I)$. 因为当 $j\leqslant j_0(I)$时，有一个 $I_{j,k}\supsetneqq I$，对这样的j，不可能有 $I_{j,l}\subseteq I$. 于是，注意 $\lambda=2\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}}$，我们有

$$\sum_{I_i\subset I}|I_i|\leqslant\sum_{j>j_0}|\{T_j<\infty\}\cap I|\leqslant C|I|,$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{|I|}\sum_{I_i\subset I}|b_i|&=\frac{1}{|I|}\sum_{I_i\subset I}|\varphi_{T_i}^{(i)}||I_i|\\&\leqslant C(\lambda+\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}})\leqslant C\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}}.\ \blacksquare\end{aligned}$$

5.3 BMO 鞅与 L^∞ 空间的距离

我们在本节要对$(\Omega,\mathscr{F},\mu,\{\mathscr{F}_n\}_{n\geqslant 0})$作一个正规性假定，即

$$E(f|\mathscr{F}_n)\leqslant dE(f|\mathscr{F}_{n-1}),\quad n=1,2,\cdots,\forall f\in L_+^1. \qquad (22)$$

这正是我们将要在 7.1 节中详细讨论的正规性条件.

设 $f\in\mathrm{BMO}$，则由定理 1 知

$$\begin{aligned}\alpha_f=\sup\{\alpha:\|E(\exp(\alpha|f-f_n|)|\mathscr{F}_n)\|_\infty\\\leqslant K_\alpha<\infty,\forall n\}>0.\end{aligned} \qquad (23)$$

我们先证两个引理.

引理 7 设正规性条件(22)成立. 又设 R，S 是两个停止时间，满足$R\leqslant S$，且

$$E(\mathrm{II}(\{S<\infty\})|\mathscr{F}_R)\leqslant\gamma^m,\quad 0<\gamma<1,m\in\mathbf{Z}^+.$$

则存在停止时间序列$\{T_i\}_0^m$，满足$R=T_0<T_1\leqslant\cdots\leqslant T_m=S$，且使得

$$E(\mathrm{II}(\{T_{i+1}<\infty\})|\mathscr{F}_{T_i})\leqslant d\gamma,\quad i=0,\cdots,m-1. \qquad (24)$$

证明 记

$$f=\mathrm{II}(\{S<\infty\}),\quad f_n=E(f|\mathscr{F}_n).$$

对 $i=1,\cdots,m-1$, 定义

$$T_i=\inf\{n:\ f_n>\gamma^{m-i}\},$$

$$T_0=R,\quad T_m=S.$$

显然$\{T_i\}_1^{m-1}$是停止时间的增加序列. 这因为 γ^{m-i} 是 i 的增加函数(注意 $\gamma<1$). 至于 $R<T_1$, 是因为

$$\begin{aligned}E(f|\mathscr{F}_n)\mathrm{II}(\{R\geqslant n\})&=E(E(f\mathrm{II}(\{R\geqslant n\})|\mathscr{F}_R)|\mathscr{F}_n)\\&\leqslant\gamma^m<\gamma^{m-1};\end{aligned}$$

以及 $T_{m-1}\leqslant S$, 是因为, 当 $S<\infty$ 时, 有

$$f_S=\mathrm{II}(\{S<\infty\})=1>\gamma^{m-(m-1)}.$$

最后由于

$$\begin{aligned}\gamma^{m-(i+1)}E(\mathrm{II}(\{T_{i+1}<\infty\})|\mathscr{F}_{T_i})&\leqslant E(f_{T_{i+1}}|\mathscr{F}_{T_i})\\&=f_{T_i}\leqslant df_{T_{i-1}}\leqslant d\gamma^{m-i},\end{aligned}$$

所以$\{T_i\}_0^m$是 $d\gamma$-度的. 引理获证. ▌

引理 8 设正规性条件(22)成立. 又设$\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$是一个 γ^m-度的停止时间序列, 其中 $0<\gamma<1$, $m\in\mathbf{Z}^+$, 并且 $d\gamma<1$(d 为条件(22)中的). 再设$\{b_i(\omega)\}_{i=1}^{\infty}$是由关于$\mathscr{F}_{T_i}$可测的, 并一致有界于 B 的函数组成的序列, 则存在 $d\gamma$-度的停止时间序列$\{S_j\}_{j=0}^{\infty}$, 以及可测函数序列$\{c_j(\omega)\}_0^{\infty}$, 且 c_j 一致有界于 B, 并关于 $\mathscr{F}_{S_j}$ 可测, 使得

$$\left\|\sum_{i=1}^{\infty}b_i\mathrm{II}(\{T_i<\infty\})-\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{\infty}c_j\mathrm{II}(\{S_j<\infty\})\right\|_{\infty}\leqslant B,\tag{25}$$

$$\left\|\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{\infty}c_j\mathrm{II}(\{S_j<\infty\})\right\|_{\mathrm{BMO}}\leqslant\frac{1}{m}\,\frac{2B}{1-d\gamma}.\tag{26}$$

证明 按引理 7, 存在停止时间的序列 $\{S_{i,j}\}$, 满足 $T_i=S_{i,0}<\cdots\leqslant S_{i,m}=T_{i+1}$, 以及

$$E(\mathrm{II}(\{S_{i,j+1}<\infty\})|\mathscr{F}_{S_{i,j}})\leqslant d\gamma, \quad \forall i,j.$$

重排$\{S_{i,j}\}$为$\{S_j\}_{j=0}^{\infty}$，使得

$$T_i=S_{(i-1)m}\leqslant\cdots\leqslant S_{(i-1)m+m-1}\leqslant S_{im}=T_{i+1},$$

并且定义

$$c_j=b_i, \quad 对(i-1)m\leqslant j<im.$$

那末 c_j 关于 $\mathscr{F}_{T_i}=\mathscr{F}_{S_{(i-1)m}}\subset\mathscr{F}_{S_j}$ 可测，且显然有 $\|c_j\|_\infty\leqslant B$. 现证式(25)与(26)成立.

记

$$X_\infty^{(k)}=\{\omega:\ T_1<\infty,\cdots,T_k<\infty,T_{k+1}=\infty\},$$

$$X_\infty^{(0)}=\{T_1=\infty\}, \qquad X_\infty^{(\infty)}=\{T_k<\infty,\forall k\}.$$

注意 $X_\infty^{(\infty)}$ 是零测集. 因为$\{T_i\}$是增加的，所以我们有

$$\varphi(\omega)=\sum_{i=1}^{\infty}b_i\mathrm{II}(\{T_i<\infty\})=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k}b_i\mathrm{II}(X_\infty^{(k)}).$$

现设 $\omega\in X_\infty^{(k)}$ 是任意的，则 $S_{(k-1)m}(\omega)<\infty$，而 $S_{km}(\omega)=\infty$. 又设 $S_{(k-1)m+j}<\infty$，对 $j=1,\cdots,j_0(j_0<m)$. 则经简单计算得

$$\begin{aligned}\frac{1}{m}\theta(\omega)&=\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{\infty}c_j\mathrm{II}(\{S_j<\infty\})\\&=\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{km-1}c_j+\frac{j_0-m}{m}b_k.\end{aligned}$$

从而

$$\left|\varphi(\omega)-\frac{1}{m}\theta(\omega)\right|\leqslant\left|\frac{j_0-m}{m}b_k\right|\leqslant B,$$

并且由引理 5 知

$$\left\|\frac{1}{m}\theta\right\|_{\mathrm{BMO}}\leqslant\frac{1}{m}\frac{2B}{1-\gamma}. \quad ∎$$

定理 5 (Garnett-Jones) 设正规性条件(22)成立，则存在常数 C，使$\forall f\in\mathrm{BMO}$，有

$$\frac{1}{e\alpha_f}\leqslant \operatorname{dist}(f,\ L^{\infty})\leqslant \frac{C}{\alpha_f}. \tag{27}$$

证明 设 $f\in \mathrm{BMO}$. 由 α_f 的定义，知对任意的 $\alpha<\alpha_f$，有

$$E(\exp(\alpha|f-f_n|)|\mathscr{F}_n)\leqslant K_\alpha<\infty.$$

如同定理 2 中那样作 f 的下述分解

$$f=\varphi+\psi+E(f),$$

$$\varphi=\sum_{i=1}^{\infty}f_{T_i}^{(i)}\mathrm{II}(\{T_i<\infty\}),\quad \psi=\sum_{i=1}^{\infty}f_{T_i}^{(i)}\mathrm{II}(\{T_i=\infty\}).$$

其中 $\{T_i\}_1^{\infty}$ 是一个 $K_\alpha e^{-\alpha\lambda}$-度的停止时间序列.

对任意的 $e>0$, $\delta>0$, 只要 λ 充分大，如设 $\lambda\geqslant\lambda_0$, 便有

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}}\leqslant e\lambda,$$

$$K_\alpha e^{-\alpha\lambda}\leqslant e^{-(1-\delta)\alpha\lambda}.$$

对任意的 $\beta>\frac{\log d}{(1-\delta)}$, 记 $\gamma=e^{-(1-\delta)\beta}$. 并选 $\lambda\geqslant\lambda_0$, 使 $\frac{\alpha\lambda}{\beta}=m$ 是一个正整数. 则 $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$ 便是一个 γ^m-度停止时间序列. 注意此时有 $d\gamma<1$. 记 $b_i=f_{T_i}^{(i)}$. 则 b_i 关于 $\mathscr{F}_{T_i}$ 可测，并且有

$$|b_i|\leqslant\lambda+\|f\|_{\mathrm{BMO}}\leqslant(1+e)\lambda.$$

这说明 $\{T_i\}_1^{\infty}$ 与 $\{b_i\}_1^{\infty}$ 都满足引理 8 中的条件. 故由该引理知，存在

$$\theta=\sum_{j=0}^{\infty}c_j\mathrm{II}(\{S_j<\infty\})\in\mathrm{BMO},$$

使得

$$f=E(f)+\psi+\varphi-\frac{1}{m}\theta+\frac{1}{m}\theta.$$

对于 f 的这个分解，我们有

$$\left\|E(f)+\psi+\varphi-\frac{1}{m}\theta\right\|_{\infty}\leqslant|E(f)|+\lambda+(1+e)\lambda,$$

以及

$$\left\|\frac{1}{m}\theta\right\|_{\mathrm{BMO}}\leqslant\frac{(1+\varepsilon)\lambda}{m}\ \frac{2}{1-de^{-(1-\delta)\beta}}$$

$$=(1+\varepsilon)\frac{2}{\alpha}\ \frac{\beta}{1-de^{-(1-\delta)\beta}}.$$

于是我们得

$$\operatorname{dist}(f,L^{\infty})\leqslant\inf_{\varepsilon,\delta,\alpha,\beta}(1+\varepsilon)\frac{2}{\alpha}\ \frac{\beta}{1-de^{-(1-\delta)\beta}}$$

$$=\inf_{\beta>\log d}\frac{1}{\alpha_f}\ \frac{2\beta}{1-de^{-\beta}}=C_d\ \frac{1}{\alpha_f}.$$

由此即证得式(27)的右边不等式.

现证式(27)的左边不等式. 我们用反证法, 并利用定理 1.

假设存在 $f\in\mathrm{BMO}$, 使得

$$\operatorname{dist}(f,L^{\infty})\leqslant\frac{C}{\alpha_f},\quad 其中\ C<\frac{1}{e}.$$

则存在 f 的分解 $f=g+h$, 使得 $g\in L^{\infty}$, 而

$$\|h\|_{\mathrm{BMO}}\leqslant\frac{C+\varepsilon}{\alpha_f}<\frac{1}{e}\ \frac{1}{\alpha_f}.$$

选 $\alpha>\alpha_f$, 使得

$$\frac{(C+\varepsilon)\alpha}{\alpha_f}<\frac{1}{e}.$$

因此有

$$\|\alpha h\|_{\mathrm{BMO}}\leqslant\frac{(C+\varepsilon)\alpha}{\alpha_f}<\frac{1}{e},$$

则由定理 1 知

$$\begin{aligned}&E(\exp(\alpha|f-f_n|)|\mathscr{F}_n)\\&\leqslant\exp(2\alpha\|g\|_{\infty})E(\exp|\alpha h-\alpha h_n||\mathscr{F}_n)\\&\leqslant K_{\alpha}<\infty.\end{aligned}$$

而这与 α_f 的定义矛盾, 从而

$$\frac{1}{e}\ \frac{1}{\alpha_f}\leqslant\operatorname{dist}(f,L^{\infty}).\ \blacksquare$$

推论 1 设正规性条件(22)成立. 则 L^∞ 在 BMO 内的闭包即为$\{f\in\text{BMO}:\ \alpha_f=\infty\}$.

证明 设 f 在 L^∞ 的闭包内,则由式(27)的左边不等式, 知$\alpha_f=\infty$. 注意这一半断言的证明并不需要正规性假设, 它是 John-Nirenberg 定理的结果. 反之, 设 $f\in\text{BMO}$, 使 $\alpha_f=\infty$. 则由式(27)的右边不等式知, f 在 L^∞ 的闭包内. ▮

5.4 BMO 鞅的其他等价刻划

命题 3 设$1\leqslant a<\infty$, 则 $f\in\text{BMO}_a$, 当且仅当存在适应过程$\theta=(\theta_n)_{n\geqslant 0}$, 使得

$$\sup_n\|E(|f-\theta_{n-1}|^a|\mathscr{F}_n)\|_\infty^{1/a}=C_\theta<\infty. \tag{28}$$

并且我们有

$$\|f\|_{\text{BMO}_a}^*=\inf_\theta C_\theta\leqslant\|f\|_{\text{BMO}_a}\leqslant 2\|f\|_{\text{BMO}_a}^*. \tag{29}$$

证明 设$f\in\text{BMO}_a$, 则$(f_n)_{n\geqslant 0}$可以作为一个适应过程$(\theta_n)_{n\geqslant 0}$, 这说明

$$\|f\|_{\text{BMO}_a}^*\leqslant\|f\|_{\text{BMO}_a}.$$

反之, 设存在$(\theta_n)_{n\geqslant 0}$使式(28)成立, 则

$$\begin{aligned}
&E(|f-f_{n-1}|^a|\mathscr{F}_n)^{1/a}\\
&\quad\leqslant E(|f-\theta_{n-1}|^a|\mathscr{F}_n)^{1/a}+|\theta_{n-1}-f_{n-1}|\\
&\quad\leqslant E(|f-\theta_{n-1}|^a|\mathscr{F}_n)^{1/a}+E(|f-f_{n-1}|^a|\mathscr{F}_{n-1})^{1/a}\\
&\quad\leqslant 2C_\theta.
\end{aligned}$$

由于上式对任意的(θ_n)都成立, 因此对其取“inf”, 式(29)的最右边不等式获证. ▮

推论 2 设 $f\in\text{BMO}_a$, 则$|f|\in\text{BMO}_a$, 且

$$\||f|\|_{\text{BMO}_a}\leqslant 2\|f\|_{\text{BMO}_a}.$$

证明 因为

$$E(||f|-|f_{n-1}||^{a}|\mathscr{F}_n)^{\frac{1}{a}}\leqslant E(|f-f_{n-1}|^{a}|\mathscr{F}_n)^{\frac{1}{a}}. \blacksquare$$

推论 3 Re BMO_a 是一个格，也就是说，若 $f, g\in \mathrm{Re\,BMO}_a$，则

$$\begin{aligned}&\|f\vee g\|_{\mathrm{BMO}_a}\leqslant 2(\|f\|_{\mathrm{BMO}_a}+\|g\|_{\mathrm{BMO}_a}),\\&\|f\wedge g\|_{\mathrm{BMO}_a}\leqslant 2(\|f\|_{\mathrm{BMO}_a}+\|g\|_{\mathrm{BMO}_a}).\end{aligned}\tag{30}$$

证明 因为对任意的实数 x, y，有

$$x\vee y=\frac{x+y+|x-y|}{2},\quad x\wedge y=\frac{x+y-|x-y|}{2}.$$

因此我们得

$$\begin{aligned}&E(|f\vee g-f_{n-1}\vee g_{n-1}|^{a}|\mathscr{F}_n)^{\frac{1}{a}}\\&=E\left(\left|\frac{f+g+|f-g|}{2}-\frac{f_{n-1}+g_{n-1}+|f_{n-1}-g_{n-1}|}{2}\right|^{a}\middle|\mathscr{F}_n\right)^{\frac{1}{a}}\\&=E\left(\left|\frac{f-f_{n-1}}{2}+\frac{g-g_{n-1}}{2}+\frac{|f-g|-|f_{n-1}-g_{n-1}|}{2}\right|^{a}\middle|\mathscr{F}_n\right)^{\frac{1}{a}}\\&\leqslant E([|f-f_{n-1}|+|g-g_{n-1}|]^{a}|\mathscr{F}_n)^{1/a}\\&\leqslant E(|f-f_{n-1}|^{a}|\mathscr{F}_n)^{1/a}+E(|g-g_{n-1}|^{a}|\mathscr{F}_n)^{1/a}\\&\leqslant\|f\|_{\mathrm{BMO}_a}+\|g\|_{\mathrm{BMO}_a}.\end{aligned}$$

于是

$$\|f\vee g\|_{\mathrm{BMO}_a}\leqslant 2(\|f\|_{\mathrm{BMO}_a}+\|g\|_{\mathrm{BMO}_a}).$$

类似地，也有

$$\|f\wedge g\|_{\mathrm{BMO}_a}\leqslant 2(\|f\|_{\mathrm{BMO}_a}+\|g\|_{\mathrm{BMO}_a}). \blacksquare$$

推论 4 设 $f\in \mathrm{Re\,BMO}_a$，则对 $N>0$，有 $(f\wedge N)\vee(-N)\in \mathrm{BMO}_a$，且

$$\|(f\wedge N)\vee(-N)\|_{\mathrm{BMO}_a}\leqslant 4\|f\|_{\mathrm{BMO}_a}.\tag{31}$$

证明 这是推论 3 的直接结果. $\blacksquare$

命题 4 设 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$ 是 L^1 中的鞅，则

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}_a}=\sup_T\frac{\|f-f_{T-1}\|_a}{|\{T<\infty\}|^{1/a}},\quad 1\leqslant a<\infty. \tag{32}$$

证明 设 $\|f\|_{\mathrm{BMO}_a}<\infty$, T 是任意的停止时间. 则

$$\|f-f_{T-1}\|_a^a=\int_{\{T<\infty\}}|f-f_{T-1}|^a d\mu$$

$$=\int_{\{T<\infty\}}E(|f-f_{T-1}|^a|\mathscr{F}_T)d\mu\leqslant\|f\|_{\mathrm{BMO}_a}^a|\{T<\infty\}|,$$

这说明

$$\sup_T\|f-f_{T-1}\|_a|\{T<\infty\}|^{-\frac{1}{a}}\leqslant\|f\|_{\mathrm{BMO}_a}.$$

反之. 设

$$\beta=\sup_T\|f-f_{T-1}\|_a|\{T<\infty\}|^{-\frac{1}{a}}<\infty.$$

又设 T 是任意的停止时间, $F(\in\mathscr{F}_T)$ 也是任意的. 则若令

$$T_F=\begin{cases}T, & \omega\in F,\\ \infty, & \omega\overline{\in}F.\end{cases}$$

便有

$$\frac{1}{|F|}\int_F|f-f_{T-1}|^a d\mu\leqslant\frac{\|f-f_{T_F-1}\|_a^a}{|\{T_F<\infty\}|}\leqslant\beta^a.$$

这说明

$$E(|f-f_{T-1}|^a|\mathscr{F}_n)\leqslant\beta^a,\quad \|f\|_{\mathrm{BMO}_a}\leqslant\beta. \blacksquare$$

BMO 的一等价刻划已出现在 2.3 节中引理 3, 以及 Fefferman 对偶定理的证明中. 如下述命题 $q=\infty$ 情形所示.

命题 5 设 $2\leqslant q\leqslant\infty$, $\sigma=(\sigma_\nu)$是随机变量的一个序列, 满足

$$E\left(\left[\sum_{\nu=1}^{\infty}|\sigma_\nu|^2\right]^{\frac{q}{2}}\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant B,$$

则鞅 $\varphi=(\varphi_n)$,

$$\varphi_n=\sum_{\nu=1}^{n}\{E(\sigma_\nu|\mathscr{F}_\nu)-E(\sigma_\nu|\mathscr{F}_{\nu-1})\},\quad \varphi_0=0 \tag{33}$$

属于 ${}_2K_q$, 且 $\|\varphi\|_{{}_2K_q} \leqslant 2q'B$.

反之, 对每个 $\varphi \in {}_2K_q$ 均存在随机变量的序列 $\sigma=(\sigma_\nu)$, 使式(33)成立, 并且

$$E\left(\left[\sum_{\nu=1}^{\infty}|\sigma_\nu|^2\right]^{\frac{q}{2}}\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \sqrt{\frac{2}{q'}}\|\varphi\|_{{}_2K_q}.$$

证明 命题之前半断言即为 2.3 节中引理3. 现证后半断言. 设 $\varphi \in {}_2K_q$. 则 $\forall f \in H_{q'}$, 可通过以下关系式

$$E(f\varphi)=\lim_n E(\varphi_n f_n)=\lim_n E\left(\sum_1^n \Delta f_\nu \Delta \varphi_\nu\right)$$

在 $H_{q'}$ 上产生一个有界线性泛函 l_φ, 且

$$\|l_\varphi\| \leqslant \sqrt{\frac{2}{q'}}\|\varphi\|_{{}_2K_q}.$$

而由 2.3 节中的定理 4 的证明知, 存在 $\sigma=(\sigma_\nu) \in \mathscr{S}\mathscr{H}_q$, 使

$$\|\sigma\|_{\mathscr{S}\mathscr{H}_q} \leqslant \|l_\varphi\|,$$

且

$$l_\varphi(f_n)=E\left(\sum_{\nu=1}^{n} f_n[E(\sigma_\nu|\mathscr{F}_\nu)-E(\sigma_\nu|\mathscr{F}_{\nu-1})]\right)$$

$$=E(f_n\varphi_n), \quad \forall f \in H_{q'}.$$

因为 $f_n \in L^{q'}(\mathscr{F}_n)$ 可以是任意的, 于是可推出

$$\varphi_n=\sum_{\nu=1}^{n}\{E(\sigma_\nu|\mathscr{F}_\nu)-E(\sigma_\nu|\mathscr{F}_{\nu-1})\}, \quad \varphi_0=0.$$

此外, 上面已经得到

$$\|\sigma\|_{\mathscr{S}\mathscr{H}_q} \leqslant \|l_\varphi\| \leqslant \sqrt{\frac{2}{q'}}\|\varphi\|_{{}_2K_q}. \ \blacksquare$$

下面再给出 BMO 的一个等价刻划. 为此先证一个引理.

引理 9 设 $\mathscr{S}\mathscr{H}$ 是由随机变量的序列 $\theta=(\theta_0, \theta_1, \cdots)$ 构成的

Banach 空间，范数为

$$\|\theta\| = E(\theta^*), \quad \theta^* = \sup_{n\geqslant 0} |\theta_n|.$$

又设 $l(\theta)$是其上一个有界线性泛函. 则存在随机变量 ξ, 以及随机变量序列$\{\varepsilon_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$, 使得

$$\left\| |\xi| + \sum_{\nu=0}^{\infty} |\varepsilon_\nu| \right\|_\infty \leqslant \|l\|; \tag{34}$$

并且对一切常尾序列$(\theta_0, \theta_1, \cdots, \theta_N, \gamma, \gamma, \cdots)$, 都有

$$l(\theta) = \sum_{\nu=0}^{N} E(\varepsilon_\nu \theta_\nu) + E\left(\gamma\left(\xi + \sum_{\nu=N+1}^{\infty} \varepsilon_\nu\right)\right). \tag{35}$$

证明 显然，若将 L^1 连续地嵌入 $\mathscr{S}\mathscr{H}$, 即自然地将 L^1 与$\mathscr{S}\mathscr{H}$的第 ν 分量对应，则知 $l(\theta)$在 L^1 上产生一个有界线性泛函序列$\{l_\nu\}$, 使

$$l_\nu(\theta_\nu) = E(\varepsilon_\nu \theta_\nu), \quad \forall \theta_\nu \in L^1,$$

其中 $\varepsilon_\nu \in L^\infty$. 类似地，若将 L^1 与 $\mathscr{S}\mathscr{H}$ 的、由形如

$$\theta = (\theta_\nu), \quad \theta_0 = \cdots = \theta_N = 0, \quad \theta_{N+1} = \theta_{N+2} = \cdots = \gamma \in L^1$$

的元素构成的子空间对应，则知 $l(\theta)$在 L^1 上也产生另一个有界线性泛函序列$\{l_N\}$, 使

$$l_N(\gamma) = E(\gamma \xi_N), \quad \forall \gamma \in L^1,$$

其中 $\xi_N \in L^\infty$. 现设 θ 是如下常尾序列

$$\theta = (\theta_0, \theta_1, \cdots, \theta_N, \gamma, \gamma, \cdots).$$

则由线性泛函的线性知

$$l(\theta) = \sum_{\nu=0}^{N} E(\varepsilon_\nu \theta_\nu) + E(\gamma \xi_N). \tag{35$'$}$$

显然，对同一个 θ 也有

$$l(\theta) = \sum_{\nu=0}^{N} E(\varepsilon_\nu \theta_\nu) + E(\varepsilon_{N+1} \gamma) + E(\gamma \xi_{N+1}).$$

由于 $\gamma(\in L^1)$是任意的，这说明

$$\xi_N=e_{N+1}+\xi_{N+1}=\sum_{\nu=N+1}^{M}\varepsilon_\nu+\xi_M,\qquad \forall M>N. \tag{36}$$

现令 $\theta_\nu=\delta\operatorname{sgn}e_\nu$, $\nu=0,\cdots,N$; 以及 $\gamma=\delta\operatorname{sgn}\xi_N$, $\delta(\in L^1)$是非负任意的，则

$$l(\theta)=\sum_{\nu=0}^{N}E(|\varepsilon_\nu|\delta)+E(\delta|\xi_N|)\leqslant\|l\|E(\delta).$$

由 $\delta(\in L^1)$的任意性，知

$$\left\||\xi_N|+\sum_{\nu=0}^{N}|\varepsilon_\nu|\right\|_\infty\leqslant\|l\|,\qquad \forall N. \tag{37}$$

由此可知，级数$\sum\limits_\nu\varepsilon_\nu$绝对收敛. 从而由式(36)知$\xi=\lim\limits_n\xi_n$存在，且仍有

$$\left\||\xi|+\sum_{\nu=0}^{\infty}|\varepsilon_\nu|\right\|_\infty\leqslant\|l\|. \tag{37$'$}$$

最后，将关系式$\xi_N=\xi+\sum\limits_{\nu=N+1}^{\infty}\varepsilon_\nu$代入式(35)′，即得式(35). ▌

定理 6 每个 $\varphi\in$BMO 都可写成

$$\varphi=\xi+\sum_{\nu=0}^{\infty}E(\varepsilon_\nu|\mathscr{F}_\nu), \tag{38}$$

其中随机变量 ξ 与随机变量序列$\{\varepsilon_\nu\}_0^\infty$满足

$$\left\||\xi|+\sum_{\nu=0}^{\infty}|\varepsilon_\nu|\right\|_\infty\leqslant\sqrt{2}(2+\sqrt{5})\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}_2}. \tag{39}$$

证明 设 $\varphi\in$BMO, $f=(f_n)_{n\geqslant0}$是 H_1 中的任意元素. 则由Fefferman不等式与Davis不等式(即$\|S(f)\|_1\leqslant(2+\sqrt{5})\|f^*\|_1$)，我们得

$$|E(f_N\varphi)|\leqslant\sqrt{2}\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}_2}\|S(f)\|_1$$

$$\leqslant \sqrt{2}(2+\sqrt{5})\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}_2}\|f^*\|_1.$$

因为 H_1 的、由止于 N 的有限鞅组成的子空间，显然地也可看成 $\mathscr{SH}$ 的子空间，这个子空间由

$$\theta=(\theta_\nu),\quad \theta_\nu=E(f_N|\mathscr{F}_\nu),\quad \nu=0,1,\cdots \tag{40}$$

构成. 因此上述不等式说明 φ 可在这样的子空间上产生一个有界线性泛函，从而由 Hahn-Banach 定理，知 φ 也可在整个 $\mathscr{SH}$ 上产生一个有界线性泛函，其界不大于 $\sqrt{2}(2+\sqrt{5})\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}_2}$. 由上述引理 9 知，存在 ξ 与 $\{\varepsilon_\nu\}_0^\infty$ 使得式(35)与(39)成立，并且对式(40)中给出的 $\{\theta_\nu\}$(注意它是一个常尾序列)有

$$\begin{aligned}
E(f_N\varphi)&=\sum_{\nu=0}^{N}E(\varepsilon_\nu f_\nu)+E\left(f_N\left(\xi+\sum_{\nu=N+1}^{\infty}\varepsilon_\nu\right)\right)\\
&=\sum_{\nu=0}^{N}E(f_NE(\varepsilon_\nu|\mathscr{F}_\nu))+E\left(f_NE\left(\xi+\sum_{\nu=N+1}^{\infty}\varepsilon_\nu|\mathscr{F}^N\right)\right)\\
&=\sum_{\nu=0}^{N}E(f_NE(\varepsilon_\nu|\mathscr{F}_\nu))\\
&\qquad+E\left(f_NE\left(\xi+\sum_{\nu=N+1}^{\infty}E(\varepsilon_\nu|\mathscr{F}_\nu)|\mathscr{F}_N\right)\right)\\
&=E\left(f_NE\left(\xi+\sum_{\nu=0}^{\infty}E(\varepsilon_\nu|\mathscr{F}_\nu)|\mathscr{F}_N\right)\right).
\end{aligned}$$

又由 f_N 的任意性得

$$\varphi_N=E\left(\xi+\sum_{\nu=0}^{\infty}E(\varepsilon_\nu|\mathscr{F}_\nu)|\mathscr{F}_N\right).$$

现在令 $N\to\infty$，由于 $\xi+\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}E(\varepsilon_\nu|\mathscr{F}_\nu)$ 至少是 L^1 中函数，故上式两边各有极限为 φ 与 $\xi+\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}E(\varepsilon_\nu|\mathscr{F}_\nu)$. 由此即得式(38). ▮

注 定理的逆命题也成立，它即 2.5 节的引理 6. 定理6 与其逆命题共同构成了 BMO 的一个刻划.

推论 5 每个实值的 $\varphi\in\mathrm{BMO}$ 均可表为两个 BLO 函数的差，也就是说，有 $\varphi=g-h+\xi$，并且

$$\|\xi\|_\infty+\|g\|_{\mathrm{BLO}}+\|h\|_{\mathrm{BLO}}\leqslant C\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}_2}. \tag{41}$$

证明 同定理 6 一样，作 φ 的分解

$$\varphi=\xi+\sum_{\nu=0}^{\infty}E(\varepsilon_\nu|\mathscr{F}_\nu).$$

因为 φ 是实值的，知 ξ 与 $\{\varepsilon_\nu\}$ 都是实值的．令

$$g=\sum_{\nu=0}^{\infty}E(\varepsilon_\nu^+|\mathscr{F}_\nu),$$

$$h=\sum_{\nu=0}^{\infty}E(\varepsilon_\nu^-|\mathscr{F}_\nu).$$

现在要估计 g, h 的 BLO 范数．我们有估计

$$\begin{aligned}g_n&=\sum_{\nu=0}^{n}E(\varepsilon_\nu^+|\mathscr{F}_\nu)+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}E(E(\varepsilon_\nu^+|\mathscr{F}_\nu)|\mathscr{F}_n)\\&\leqslant\sum_{\nu=0}^{\infty}E(\varepsilon_\nu^+|\mathscr{F}_\nu)+E\left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\varepsilon_\nu^+|\mathscr{F}_n\right)\\&\leqslant g+\left\|\sum_{\nu=0}^{\infty}\varepsilon_\nu^+\right\|_\infty,\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}g_n-g_{n-1}&=\sum_{\nu=0}^{n}E(\varepsilon_\nu^+|\mathscr{F}_\nu)+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}E(\varepsilon_\nu^+|\mathscr{F}_n)\\&\quad-\sum_{\nu=0}^{n-1}E(\varepsilon_\nu^+|\mathscr{F}_\nu)-\sum_{\nu=n}^{\infty}E(\varepsilon_\nu^+|\mathscr{F}_{n-1})\\&\leqslant E\left(\sum_{\nu=n}^{\infty}\varepsilon_\nu^+|\mathscr{F}_n\right)\leqslant\left\|\sum_{\nu=0}^{\infty}\varepsilon_\nu^+\right\|_\infty,\end{aligned}$$

于是我们得

$$\|g\|_{\mathrm{BLO}} \leqslant \left\| \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_\nu^+ \right\|_\infty,$$

类似地，也有

$$\|h\|_{\mathrm{BLO}} \leqslant \left\| \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_\nu^- \right\|_\infty,$$

综合上述两个不等式与式(39)即得式(41). ▌

注 这个证明与定理 2 的证明各有利弊. 这个证明能给出明显的常数值，但对连续参量情形不适用；定理 2 的证明则相反.

正如 Garsia[1]指出的，不仅定理 6 是 Davis 下述不等式

$$E(S(f)) \leqslant CE(f^*)$$

的结果，并且反过来，由定理的结论也可推出上述不等式. 这可由下述命题说明.

命题 6 设每个 $\varphi \in \mathrm{BMO}$ 均可表为

$$\varphi = \xi + \sum_{\nu=0}^{\infty} E(\varepsilon_\nu | \mathscr{F}_\nu);$$

并且

$$\left\| |\xi| + \sum_{\nu=0}^{\infty} |\varepsilon_\nu| \right\|_\infty \leqslant C \|\varphi\|_{\mathrm{BMO}_2}.$$

则

$$E(S(f)) \leqslant 2CE(f^*).$$

证明 对任意的鞅 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$，无妨设为有限鞅，我们有下述等式

$$E(S(f)) = E\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|\Delta f_\nu|^2}{S(f)}\right) = E\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \Delta f_\nu \frac{\overline{\Delta f_\nu}}{S(f)}\right)$$

$$= E\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \Delta f_\nu \left\{ E\left(\frac{\overline{\Delta f_\nu}}{S(f)} \middle| \mathscr{F}_\nu\right) - E\left(\frac{\overline{\Delta f_\nu}}{S(f)} \middle| \mathscr{F}_{\nu-1}\right) \right\}\right)$$

$$= E\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \Delta f_\nu \overline{\Delta \varphi_\nu}\right),$$

其中

$$\varphi = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ E\left(\frac{\Delta f_\nu}{S(f)} \Big| \mathscr{F}_\nu\right) - E\left(\frac{\Delta f_\nu}{S(f)} \Big| \mathscr{F}_{\nu-1}\right)\right\}.$$

注意$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|\frac{\Delta f_\nu}{S(f)}\right|^2 = 1$, 故由命题 5 知 $\varphi \in \mathrm{BMO}$, 且$\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}_2} \leqslant 2$. 根据假设, 存在 ξ 与$\{\varepsilon_\nu\}_0^\infty$, 使

$$\varphi = \xi + \sum_{\nu=0}^{\infty} E(\varepsilon_\nu | \mathscr{F}_\nu),$$

$$\left\| |\xi| + \sum_{\nu=0}^{\infty} |\varepsilon_\nu| \right\|_\infty \leqslant 2C.$$

因为 f 是有限鞅(例如止于N), 因此有下述等式,

$$\begin{aligned} E(S(f)) &= E\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \Delta f_\nu \overline{\Delta \varphi_\nu}\right) \\ &= E\left(f E\left(\xi + \sum_{\nu=0}^{\infty} E(\varepsilon_\nu | \mathscr{F}_\nu) \,|\, \mathscr{F}_N\right)\right) \\ &= E\left(f\xi + \sum_{\nu=0}^{\infty} f E(\varepsilon_\nu | \mathscr{F}_\nu)\right) \\ &= E(f\xi) + \sum_{\nu=0}^{\infty} E(E(\varepsilon_\nu E(f | \mathscr{F}_\nu) \,|\, \mathscr{F}_\nu)). \end{aligned}$$

于是我们得

$$E(S(f)) \leqslant E\left(f^*\left(|\xi| + \sum_{\nu=0}^{\infty} |\varepsilon_\nu|\right)\right) \leqslant CE(f^*). \quad \blacksquare$$

章后注记

5.1 节 凸性引理产生于由势本身的控制推出与它相联系的古典增加过程的控制. 此时只需引进一个简单的停止时间就可以了，其原因在于所讨论的过程的非负增加性. 但如果讨论的是 BMO, 在式$E(|f-f_{n-1}||\mathscr{F}_n)\leqslant C$中, 我们所面临的过程$(f_n)_{n\geqslant 0}$, 既不是非负的, 也不是增加的, 在这种情形下, 有效的"停止时间方法"是否仍然有效呢? 引理 1 的思想是 Stroock[1]指出的, 它指出如果适当的定义两个停止时间, 则原来的讨论仍然有效. Stroock 的这个思想经过了 Meyer[1] 的整理. 本书也作了一些小的贡献, 即明确了常数值, 并且将它应用于对$_aK_\Phi$的研究, 如见 Long[3,6]. 命题 1 属于 Garsia[1].

5.2 节 古典 BLO 是 Coifman-Rochberg[1] 引进的空间. $\log A_{\alpha,\beta}$ 与 A_p 的关系早被人所知. 关于引理 5, Varopoulos[1]对 $b_i\equiv 1$ 的情形, 讨论过所谓 γ-度函数的 BMO 范数. Long[3]则对一般的$\{b_i\}$情形讨论了广义 γ-度函数的 BMO范数. 这里的引理 5 讨论得更充分一些. 定理 2 本质上属于 Varopoulos[1]. 引理 6 与定理 3 属于 Long-Peng[1]. 关于定理 4, Chao[2]对 q-进鞅情形建立了这个定理, 本书中推广到原子情形, 且无需正规性假定.

5.3 节 引理 7 以及 $b_i\equiv 1$ 时的引理 8 属于 Varopoulos[1]. 定理 5 见 Long[3], 它的古典情形属于Garnett-Jones[1], 连续参变量但满足附加的连续路线假定的情形属于 Varopoulos[1].

5.4 节 命题 3 与推论 2, 3, 4 都为人所熟知. 命题 4 似乎属于 Meyer[1]. 命题 5, 定理 6 与命题 6 均属于 Garsia[1].

第六章 权与加权Φ-不等式

关于$(\Omega, \mathscr{F}, \mu, \{\mathscr{F}_n\}_{n\geq 0})$，本章基本上不假定$\mathscr{F}_0$是平凡的。在这一章我们要讨论鞅的加权$\Phi$-不等式，为此首先要花相当的篇幅贡献于对权所施加条件本身的研究．它们是Muckenhoupt[1]的A_p条件，以及Doléans-Dade与Meyer[2]考虑的作为A_p条件推广的b_λ条件．在加权不等式理论中，我们希望于权的最重要性质是所谓逆向Hölder不等式，这将在6.3节中讨论．除加权不等式外，权还与其他对象有关，其中最重要的是A_p权与BMO的密切联系．这种联系导致了A_p权理论中某些深刻结果的出现，如Jones[1]的A_p权因子分解定理．我们将在6.4和6.5节中讨论这些问题．最后，在6.6节中将讨论鞅的加权Φ-不等式．

6.1 A_p条件及其推广b_λ

设$z=(z_n)_{0\leq n\leq\infty}$是一严格正的适应过程，所谓严格正的过程，是指每个$z_n$均严格正．我们不假定$z$是一个鞅，即不必有$z_n=E(z_\infty|\mathscr{F}_n)$．

定义1 设$\lambda\in\bar{R}$．我们称过程$z=(z_n)$满足b_λ条件，简记$z\in b_\lambda(K)$①，如果存在常数K，使

$$\frac{1}{K}z_n\leq E(z_\infty^\lambda|\mathscr{F}_n)^{1/\lambda}\leq Kz_n$$

① 此处记号$b_\lambda(K)$，以及其后的S，A_p等，既表示条件，也表示满足该条件的过程$z=(z_n)$的集合．

$$(\text{a. e.}, n=0, 1, \cdots, \lambda \neq 0, \lambda \neq \pm\infty), \tag{1}$$

$$\frac{1}{K}z_n \leqslant \exp(E(\log z_\infty | \mathscr{F}_n)) \leqslant K z_n$$

$$(\text{a. e.}, n=0, 1, \cdots, \lambda=0), \tag{1$'$}$$

$$\frac{1}{K}z_n \leqslant z_\infty \leqslant K z_n$$

$$(\text{a. e.}, n=0, 1, \cdots, \lambda=\pm\infty). \tag{1$''$}$$

条件 $b_\lambda^-(K)$ 与 $b_\lambda^+(K)$ 分别表示过程 $z=(z_n)$ 仅满足上述式的左边不等式或右边不等式.

定义 2 称过程 $z=(z_n)$ 满足 S 条件，记为 $z\in S$，如果存在常数 K，使

$$\frac{1}{K}z_{n-1} \leqslant z_n \leqslant K z_{n-1} \quad (\text{a. e.}, n=0, 1, \cdots). \tag{2}$$

同样地，条件 S^-, S^+ 分别表示过程 $z=(z_n)$ 只满足式(2)的左边或右边不等式.

定义 3 我们称过程 $z=(z_n)$ 满足 B_λ 条件，如果 $z\in b_\lambda \cap S$.

命题 1 设 $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq \pm\infty$. 则对 $\lambda>0$, $z\in b_\lambda^\pm(K)$，当且仅当 $z^\lambda \in b_1^\pm(K^\lambda)$；而对 $\lambda<0$, $z\in b_\lambda^\pm(K)$，当且仅当 $z^\lambda \in b_1^\mp(K^{-\lambda})$，其中 z^λ 是过程 (z_n^λ)①.

证明 既然

$$\frac{1}{K}z_n \leqslant E(z_\infty^\lambda | \mathscr{F}_n)^{1/\lambda} \leqslant K z_n$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{K^\lambda}z_n^\lambda \leqslant E(z_\infty^\lambda | \mathscr{F}_n) \leqslant K^\lambda z_n^\lambda, \quad \lambda>0,$$

以及

$$\frac{1}{K}z_n \leqslant E(z_\infty^\lambda | \mathscr{F}_n)^{1/\lambda} \leqslant K z_n$$

① 讨论权时，对于 $z=(z_n)$, z^λ 往往表示 $z^\lambda=(z_n^\lambda)$. 即使当 $z=(z_n)$ 是一个鞅，且 z^λ 可积时，除非特别声明，通常 z^λ 也不表示是由 z^λ 生成的鞅.

$$\Longleftrightarrow \quad K^{-\lambda} z_n^{\lambda} \geqslant E(z_\infty^{\lambda} | \mathscr{F}_n) \geqslant \frac{1}{K^{-\lambda}} z_n^{\lambda}, \quad \lambda<0,$$

因此命题成立. ▌

注 由于当 z 是鞅时, z^{λ} 不再是鞅, 故讨论条件 b_{λ} 时, 一开始就不假设z是鞅. 当然, 最主要的对象仍然是鞅, 而且是 L^1 中严格正鞅.

命题 2 设 $z \in b_{\lambda}(K)$, 则对任意的停止时间 T, 停止过程

$$z^{(T)} = (z_{n \wedge T})_{0 \leqslant n \leqslant \infty} \in b_{\lambda}(K^2).$$

证明 既然 $z \in b_{\lambda}(K) \Longleftrightarrow z^{\lambda} \in b_1(K^{|\lambda|})$. 故只需对 $\lambda=1$ 证明结论即已足够.

记 $Y = z^{(T)}$. 则 $Y_\infty = z_T$. 显然地, b_{λ} 条件中的 n 可以用任意的停止时间T 代替, 所以我们有

$$\frac{1}{K} Y_\infty = \frac{1}{K} z_T \leqslant E(z_\infty | \mathscr{F}_T).$$

从而将上式对 $\mathscr{F}_n$ 求条件期望得

$$E\left(\frac{1}{K} Y_\infty | \mathscr{F}_n\right) \leqslant E(E(z_\infty | \mathscr{F}_T) | \mathscr{F}_n)$$

$$= E(z_\infty | \mathscr{F}_{T\wedge n}) \leqslant K z_{T \wedge n} = K Y_n.$$

于是说明过程 $Y \in b_1^+(K^2)$.

类似地, 由

$$K Y_\infty = K z_T \geqslant E(z_\infty | \mathscr{F}_T)$$

得

$$E(K Y_\infty | \mathscr{F}_n) \geqslant E(E(z_\infty | \mathscr{F}_T) | \mathscr{F}_n) \geqslant \frac{1}{K} z_{T\wedge n} = \frac{1}{K} Y_n.$$

这就证明了 $Y \in b_1^-(K^2)$. ▌

现考虑 $\lambda<0$ 的情形. 此时 u^{λ} 是$[0, \infty)$上的凸函数. 对所有的非负鞅 $z = (z_n)_{0 \leqslant n \leqslant \infty}$, 自然地有

$$z_n^{\lambda} \leqslant E(z_\infty^{\lambda} | \mathscr{F}_n), \quad E(z_\infty^{\lambda} | \mathscr{F}_n)^{1/\lambda} \leqslant z_n,$$

此即 $z\in b_\lambda^+(1)$. 故此时条件 b_λ 中重要的条件是 $b_\lambda^-(K)$. 对$\lambda<0$, 记 $p=1-1/\lambda$; 对$p>1$, 记 $\lambda=-1/(p-1)$.

定义 4 设 $p>1$. 称过程 $z=(z_n)\in a_p(K)$, 如果 $z\in b_\lambda^-(K)$, 其中 p,λ 如上所述. 这就是条件

$$\frac{1}{K}z_n\leqslant E(z_\infty^{-\frac{1}{p-1}}|\mathscr{F}_n)^{-(p-1)},$$

此即

$$z_nE(z_\infty^{-\frac{1}{p-1}}|\mathscr{F}_n)^{p-1}\leqslant K,\quad \text{a. e.},\quad n=0,1,\cdots. \tag{3}$$

称过程 $z=(z_n)\in a_1(K)$, 如果

$$z_n\leqslant Kz_\infty,\quad \text{a. e.},\quad \forall n. \tag{4}$$

此外, 我们记

$$\begin{aligned} A_p&=\bigcup_k a_p(K),\quad 1\leqslant p<\infty,\\ A_\infty&=\bigcup_{p\geqslant 1}A_p. \end{aligned} \tag{5}$$

注 1 由式(3)与(4)知, 式(5)中的 A_p 即 Muckenhoupt 的A_p 条件.

注 2 对$-\infty<\lambda<0$, 我们已经定义 a_p 条件为 b_λ^- 条件, 以及 a_1 条件为 $b_{-\infty}^-$ 条件. 这里对 b_0 条件作点附注. 设 $z=(z_n)$是非负鞅, 记 $f_\infty=\log z_\infty$. 则式(1)$'$ 中右边不等式自然满足, 因 e^u是凸函数. 因此对非负鞅 z, b_0 条件只是 b_0^- 条件, 此即

$$E(e^{f_\infty-f_n}|\mathscr{F}_n)\leqslant K\quad (f_n=E(f_\infty|\mathscr{F}_n)).$$

上式比 $z_\infty=e^{f_\infty}\in A_\infty$要弱一些. (我们将在 6.4 节命题 6 中看到, $z_\infty=e^{f_\infty}\in A_\infty$ 意味着除此以外, 还存在 $\beta>0$, 使

$$E(\exp(-\beta(f_\infty-f_n))|\mathscr{F}_n)\leqslant K.)$$

这就是说, 一般地, $b_0^-(K)\neq a_\infty(K)$. 但当 $\lambda<0$, 根据定义有 $b_\lambda^-(K)=a_p(K)\left(\text{其中 }\lambda=-\dfrac{1}{p-1}\right)$. 因此 $\lambda=0$ 与 $\lambda<0$ 是两个不

同的情形.

命题 3 A_p 条件随 p 增加而减弱,此即

$$A_1 \subset A_p \subset A_q \subset A_\infty, \quad 1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty. \tag{6}$$

证明 由于 $E(x^r|\mathscr{F}_n)^{1/r}$ 是 $r \in (0, \infty)$ 的增加函数(其中 x 为非负可测函数),故

$$E\left(\left(\frac{1}{z_\infty}\right)^{\frac{1}{p-1}}\Big|\mathscr{F}_n\right)^{p-1} \geqslant E\left(\left(\frac{1}{z_\infty}\right)^{\frac{1}{q-1}}\Big|\mathscr{F}_n\right)^{q-1}, \quad 1 < p \leqslant q < \infty.$$

这就证明了 $A_p \subset A_q$, $1 < p < q < \infty$. 至于 $A_1 \subset A_p$, $1 < p$, 是由于 $a_1(K) \subset a_p(K)$. 因为,当 $z = (z_n) \in a_1(K)$ 时,

$$z_n E\left(z_\infty^{-\frac{1}{p-1}}\Big|\mathscr{F}_n\right)^{p-1} = E\left(\left(\frac{z_n}{z_\infty}\right)^{\frac{1}{p-1}}\Big|\mathscr{F}_n\right)^{p-1} \leqslant K.$$

最后 $A_q \subset A_\infty$ 是根据 A_∞ 的定义而得. ∎

现在设 $z = (z_n)_{0 \leqslant n \leqslant \infty}$ 是一严格正的鞅,此即

$$z_\infty \in L^1, \quad z_n = E(z_\infty|\mathscr{F}_n),$$

并且 z_∞ 为严格正的. 注意对鞅而言, 由 z_∞ 的严格正性推出每个 z_n 的严格正性,这是因为

$$\{f_n = 0\} \subset \{f_\infty = 0\}, \qquad \forall n.$$

为方便起见,设 $E(z_\infty) = 1$. 在测度空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ 上考虑另一个概率测度

$$\hat{\mu} = z_\infty d\mu, \quad z \text{ 如上述}.$$

显然 μ 的所有零测集都是 $\hat{\mu}$ 的零测集. 反之亦然. 事实上, 若设 $F \in \mathscr{F}$,使

$$\hat{\mu}(F) = \int_F z_\infty d\mu = 0,$$

则 $z_\infty = 0$, a. e. 于 F. 而由 z_∞ 的严格正性知 $\mu(F) = 0$. 这证明了 μ 与 $\hat{\mu}$ 是等价测度. 对等价测度, 几乎处处是一致的. 我们下面要讨论通过满足 $E(z_\infty) = 1$ 的严格正的鞅 z 联系着的一对等价测度,并讨论 z 的 b_λ 属性. 我们简称此 z (或 z_∞) 为一测度变换.

现对关于测度 $\hat{\mu}$ 的有关记号用对关于 μ 的相应记号上加"∧"表示. 如空间 $\hat{L}^p$ 表示关于 $\hat{\mu}$ 的 L^p 空间; $\hat{E}$ 表示关于 $\hat{\mu}$ 的条件期望; …… . 关于这两个测度的条件期望有下述关系.

命题 4 当下述条件期望存在时, 我们有

$$\left.\begin{aligned}\hat{E}(f|\mathscr{F}_n)&=\frac{1}{z_n}E(fz_\infty|\mathscr{F}_n),\\ E(f|\mathscr{F}_n)&=z_n\hat{E}\left(f\frac{1}{z_\infty}\middle|\mathscr{F}_n\right).\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

证明 对任意的 $F\in\mathscr{F}_n$, 有

$$\begin{aligned}\int_F\hat{E}(f|\mathscr{F}_n)d\hat{\mu}&=\int_F fd\hat{\mu}=\int_F fz_\infty d\mu\\ &=\int_F E(fz_\infty|\mathscr{F}_n)d\mu=\int_F\frac{1}{z_n}E(fz_\infty|\mathscr{F}_n)d\hat{\mu}.\end{aligned}$$

这就证明了

$$\hat{E}(f|\mathscr{F}_n)=\frac{1}{z_n}E(fz_\infty|\mathscr{F}_n).$$

注意, 在上面的证明中我们用到了事实: $\forall F\in\mathscr{F}_n$,

$$\int_F d\hat{\mu}=\int_F z_\infty d\mu=\int_F E(z_\infty|\mathscr{F}_n)d\mu=\int_F z_n d\mu.$$

式 (7) 的第二式可由第一式推出. 这只需在第一式中令 f 为 gz_∞^{-1}, 则得

$$E(g|\mathscr{F}_n)=\frac{1}{z_n}\hat{E}\left(g\frac{1}{z_\infty}\middle|\mathscr{F}_n\right).\quad\blacksquare$$

注 1 我们指出式(7)中两式在地位上是完全平等的. 如果我们把 $\hat{\mu}$ 看成是 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的基本概率测度, 而把 $\mu=z_\infty^{-1}\hat{\mu}$ 看成为一个测度变换, 并注意

$$\hat{E}(z_\infty^{-1}|\mathscr{F}_n)=z_n^{-1}E(z_\infty^{-1}z_\infty|\mathscr{F}_n)=z_n^{-1},$$

则这种情形下的第一式就是第二式. 这个观点在下面还会出现.

注 2 用停止时间 T 代替 n 时式(7)也成立. 现在我们验证第

一式:

$$\hat{E}(f|\mathscr{F}_T)=\sum_0^\infty \hat{E}(f|\mathscr{F}_T)\mathrm{II}(\{T=n\})$$

$$+\hat{E}(f|\mathscr{F}_T)\mathrm{II}(\{T=\infty\})$$

$$=\sum_0^\infty \hat{E}(f|\mathscr{F}_n)\mathrm{II}(\{T=n\})+f\mathrm{II}(\{T=\infty\})$$

$$=\sum_0^\infty \frac{1}{z_n}E(fz_\infty|\mathscr{F}_n)\mathrm{II}(\{T=n\})+\frac{1}{z_\infty}fz_\infty\mathrm{II}(\{T=\infty\})$$

$$=\frac{1}{z_T}E(fz_\infty|\mathscr{F}_T)\mathrm{II}(\{T<\infty\})$$

$$+\frac{1}{z_T}E(fz_\infty|\mathscr{F}_T)\mathrm{II}(\{T=\infty\})$$

$$=\frac{1}{z_T}E(fz_\infty|\mathscr{F}_T).$$

平行于 z 的 A_p 条件, Bonami-Lepingle[1]还考虑了如下$\tilde{A}_p$条件. 但这类条件不是新的. 实际上是 $b_{p'}^+$ 条件.

定义 5 设 z 是测度变换. 称鞅 $z=(z_n)\in\tilde{a}_p(K)$, 如果过程

$$\frac{1}{z}=\left(\frac{1}{z_n}\right)\in\hat{a}_p(K),\quad 1\leqslant p<\infty.$$

也就是, 如果

$$\frac{1}{z_n}\hat{E}(z_\infty^{\frac{1}{p-1}}|\mathscr{F}_n)^{p-1}\leqslant K,\ \text{a.e.},\quad \forall n. \tag{8}$$

我们记

$$\begin{aligned}\tilde{A}_p&=\bigcup_K \tilde{a}_p(K),\quad 1\leqslant p<\infty,\\ \tilde{A}_\infty&=\bigcup_{p\geqslant 1}\tilde{A}_p.\end{aligned}\tag{9}$$

注 式(8)等价于

$$\frac{1}{z_n}\frac{1}{z_n^{p-1}}E(z_\infty^{\frac{1}{p-1}+1}|\mathscr{F}_n)^{p-1}\leqslant K,$$

也即

$$E(z_\infty^{p'}|\mathscr{F}_n)^{1/p'}\leqslant K^{1/p}z_n,\quad \forall n. \tag{8$'$}$$

这正是 $b_{p'}^+(K^{1/p})$条件，其中 p' 是 p 的相伴数．一个形如(8)′的不等式称为逆向 Hölder 不等式，其中左边指数 $p'=\frac{p}{p-1}>1$. 之所以称为“逆向”是因为其反向不等式就是 Hölder 不等式的特殊情形．由此注我们有

命题 5 测度变换 $z\in\tilde{A}_\infty$，当且仅当 z 满足逆向 Hölder 不等式(或简称为 L_+^1 中函数 z_∞ 满足逆向 Hölder 不等式)：

$$E(z_\infty^r|\mathscr{F}_n)^{1/r}\leqslant KE(z_\infty|\mathscr{F}_n),\quad \text{a.e.},\ \forall n,\ \text{对某 } r>1.$$

6.2 $\lambda<0$ 与 $\lambda>1$ 时的条件 b_λ

对非负鞅 $z=(z_n)$，由于当 $\lambda<0$ 与 $\lambda>1$ 时 u^λ 是 $u(\in\boldsymbol{R}^+)$的凸函数，则此时的 b_λ 条件，当 $\lambda<0$ 时 b_λ^+与 $\lambda=q>1$ 时 b_q^- 都是平凡的．剩下需要讨论的只是 $\lambda<0$ 时的 b_λ^- 与 $\lambda=q>1$ 时的 b_q^+. 我们已将 b_λ^- 改记为 a_p，并且由定义 5 知，$z\in b_q^+$ 等价于 $z\in\tilde{a}_{q'}$，即过程$\frac{1}{z}\in\hat{a}_{q'}(1<q\leqslant\infty)$．所以条件 b_λ 中最主要的是 a_p 条件，此即b_λ^-条件，其中 $\lambda=-\frac{1}{(p-1)}$.

命题 6 设$1\leqslant p<\infty$．则过程 $z\in b_\lambda^-(K)=a_p(K)$，当且仅当算子序列

$$\tau_n:\ f\rightarrow z_n^{1/p}E(fz_\infty^{-1/p}|\mathscr{F}_n),\quad n=0,1,\cdots$$

是 L^p 中一致有界的．且当 $z\in a_p(K)$时，可以推出$\|\tau_n\|\leqslant K^{1/p}$；而当 τ_n 一致有界时，可推出 $z\in a_p(\sup\limits_n\|\tau_n\|^p)$.

证明 设 $z\in a_p(K)$．则

$$|E(fz_\infty^{-1/p}|\mathscr{F}_n)|\leqslant E(|f|^p|\mathscr{F}_n)^{1/p}E(z_\infty^{-p'/p}|\mathscr{F}_n)^{1/p'},$$

$$z_n|E(fz_\infty^{-1/p}|\mathscr{F}_n)|^p\leqslant E(|f|^p|\mathscr{F}_n)z_nE(z_\infty^{-\frac{1}{p-1}}|\mathscr{F}_n)^{p-1}$$
$$\leqslant KE(|f|^p|\mathscr{F}_n).$$

这样我们有

$$\|\tau_nf\|_p\leqslant K^{1/p}\|E(|f|^p|\mathscr{F}_n)\|_1^{1/p}\leqslant K^{1/p}\|f\|_p.$$

反之，当 $p=1$ 时，由

$$E(z_n|E(fz_\infty^{-1}|\mathscr{F}_n)|)\leqslant\|\tau_n\|E(|f|),\qquad\forall f\in L^1$$

可推出，对 $f\geqslant 0$, $f\in L^1$, 有

$$E\left(f\frac{z_n}{z_\infty}\right)\leqslant\|\tau_n\|E(f).$$

由此又推出

$$z_n\leqslant\|\tau_n\|z_\infty,\qquad\text{a. e. }\forall n,$$

此即 $z\in a_1(\sup\limits_n\|\tau_n\|)$.

当$1<p<\infty$ 时，由 τ_n 在 L^p上有界，即

$$E(z_n|E(fz_\infty^{-1/p}|\mathscr{F}_n)|^p)\leqslant\|\tau_n\|^pE(|f|^p),\qquad\forall f\in L^p,$$

特别地，我们令

$$f=z^{-\frac{1}{p(p-1)}}\mathrm{II}(\{z_\infty>a\})\mathrm{II}(A),$$

其中 $a>0$ 与 $A(\in\mathscr{F}_n)$都为任意的，则得

$$\int_A z_nE(z_\infty^{-\frac{1}{p-1}}\mathrm{II}(\{z_\infty>a\})|\mathscr{F}_n)^pd\mu$$
$$\leqslant\|\tau_n\|^p\int_A z_\infty^{-\frac{1}{p-1}}\mathrm{II}(\{z_\infty>a\})d\mu.$$

既然 $A(\in\mathscr{F}_n)$为任意的，由此推出

$$z_nE(z_\infty^{-\frac{1}{p-1}}\mathrm{II}(\{z_\infty>a\})|\mathscr{F}_n)^p$$
$$\leqslant\|\tau_n\|^pE(z_\infty^{-\frac{1}{p-1}}\mathrm{II}(\{z_\infty>a\})|\mathscr{F}_n).$$

既然 $E(z_\infty^{-\frac{1}{p-1}}\mathrm{II}(\{z_\infty>a\})|\mathscr{F}_n)<\infty$, a. e.， 以及 $a(>0)$ 为任意

的，我们又推出

$$z_n E(z_\infty^{-\frac{1}{p-1}}|\mathscr{F}_n)^{p-1} \leqslant \|\tau_n\|^p,$$

此即 $z \in a_p(\sup_n \|\tau_n\|^p)$. ∎

注 1 在上述讨论中可以看到，“τ_n 在 L^p 中一致有界”与“τ_n 局限于 L^p_+ 中一致有界”是等价的，且

$$\sup_n \|\tau_n\| = \sup_n \|\tau_n|_{L^p_+}\|.$$

注 2 命题 6 已暗示式(4)中 $a_1(K)$ 的定义，同时也暗示式(1)″ 中 $b_{\pm\infty}(K)$ 的定义. 因为根据 $a_p(K) = b_\lambda^-(K)$，由 $a_1(K)$ 的定义知，$b_{-\infty}^-(K)$ 自然应定义为

$$\frac{1}{K} z_n \leqslant z_\infty.$$

因此 $b_{-\infty}^+(K)$ 便是 $z_\infty \leqslant K z_n$. 至于 $b_{+\infty}(K)$ 的定义，是因为对有限 λ，

$$z \in b_\lambda(K) \iff \frac{1}{z} \in b_{-\lambda}(K), \quad \frac{1}{z} = \left(\frac{1}{z_n}\right).$$

故 $z \in b_{+\infty}(K)$ 应定义为

$$\frac{1}{K z_n} \leqslant \frac{1}{z_\infty} \leqslant \frac{K}{z_n}.$$

这正是 $\frac{z_n}{K} \leqslant z_\infty \leqslant K z_n$.

注 3 既然 $b_\lambda^-(K) = a_p(K)$ 的定义中的 n 可用任意的停止时间 T 代替，因此命题 6 中的结论当用停止时间 T 代替 n 时也成立. 这就是说，$z \in a_p(K)$，当且仅当算子集合 $\{\tau_T\}$

$$\tau_T:\ f \to z_T^{1/p} E(f z_\infty^{-1/p}|\mathscr{F}_T) \tag{10}$$

是 L^p 中一致有界的，这里 T 遍历所有停止时间.

推论 1 设 z 是一个测度变换. 则 $z \in a_p(K)$，$1 \leqslant p < \infty$，当且仅当对一切非负可测函数 Y_∞，及一切停止时间 T，有

$$E(Y_\infty|\mathscr{F}_T)^p \leqslant K\hat{E}(Y_\infty^p|\mathscr{F}_T). \tag{11}$$

证明 先证明: $z\in a_p(K)$, 当且仅当

$$z_T Y_T^p \leqslant KE(z_\infty Y_\infty^p|\mathscr{F}_T). \tag{12}$$

设 $z\in a_p(K)$, 则式(10)中 τ_T 是 L^p 有界的, 特别

$$E(z_T E(fz_\infty^{-1/p}|\mathscr{F}_T)^p) \leqslant KE(f^p), \quad f\geqslant 0. \tag{13}$$

在式(13)中用 $f\mathrm{II}(A)$ 代替 f, 其中 $A(\in\mathscr{F}_T)$ 为任意的, 则得

$$z_T E(fz_\infty^{-1/p}|\mathscr{F}_T)^p \leqslant KE(f^p|\mathscr{F}_T). \tag{14}$$

任给一非负可测函数 Y_∞, 在式(14)中取 $f=Y_\infty z_\infty^{1/p}$, 则得

$$z_T Y_T^p \leqslant KE(z_\infty Y_\infty^p|\mathscr{F}_T).$$

由此式(12)获证.

反之, 设式(12)成立. 在其中令 $Y_\infty = fz_\infty^{-1/p}$, 这里 f 为任意给定的非负可测函数, 则得式(14). 将式(14)积分得(13). 这说明 $\{\tau_T\}$ 局限于 L_+^p 中是一致有界的算子集合. 由命题 6 之注 1 即知 $z\in a_p(K)$. 且式(12)中的K与 $a_p(K)$ 中的K可以取相同的常数.

最后式(11)与(12)等价是根据命题 4 的注. ▮

注 完全平行地, 我们有: $z\in\tilde{a}_p(K)$, 当且仅当

$$\hat{E}(Y_\infty|\mathscr{F}_T)^p \leqslant KE(Y_\infty^p|\mathscr{F}_T) \tag{11}'$$

对一切非负可测函数 Y_∞ 与一切停止时间T成立.

当 z 是一个测度变换时, 命题 6 还可以改述为:

定理 1 设 z 是一个测度变换. 则 $z\in a_p(K)$, $1\leqslant p<\infty$, 当且仅当条件期望算子序列

$$E_n:\ f\to E(f|\mathscr{F}_n), \quad n=0,1,\cdots$$

是 $\hat{L}^p$ 中一致有界的. 且当$z\in a_p(K)$时可以推出$\|E_n\|\leqslant K^{1/p}$; 而当 $\{E_n\}$ 一致有界时, 可以推出 $z\in a_p(\sup\limits_n\|E_n\|^p)$.

证明 这只需证明命题 6 中算子序列$\{\tau_n\}$在 L^p 中的一致有界性等价于$\{E_n\}$在 $\hat{L}^p$ 中的一致有界性. 事实上, 因为当 $f=Yz_\infty^{1/p}$ 时,

$$E(z_n|E(fz_\infty^{-1/p}|\mathscr{F}_n)|^p)\leqslant KE(|f|^p)$$
$$\Longleftrightarrow\ E(z_n|E(Y|\mathscr{F}_n)|^p)\leqslant KE(|Y|^p z_\infty). \qquad (15)$$

而上式中第二个不等式正是

$$\hat{E}(|E(Y|\mathscr{F}_n)|^p)\leqslant K\hat{E}(|Y|^p). \quad \blacksquare$$

注 同样地，$\{E_n\}$在 $\hat{L}^p$ 中的有界性可用局限于 $\hat{L}^p_+$ 中的有界性来代替，此外，用停止时间T代替 n 时定理的结论也对．因为命题 6 的注 3 已指出 $z\in a_p(K)$ 与算子

$$\tau_T:\ f\to z_T^{1/p}E(fz_\infty^{-1/p}|\mathscr{F}_T)$$

在 L^p 中的一致有界性等价．而后者又与算子

$$E_T:\ f\to E(f|\mathscr{F}_T)$$

在 $\hat{L}^p$ 中的一致有界性等价．

现在，对于 b_q^+ 的一个刻划可以作为这个定理的一个推论而得出．

推论 2 设 z 是一个测度变换，$1<q\leqslant\infty$．则 $z\in b_q^+(K)$，当且仅当算子集合$\{\hat{E}_T\}$(T 遍历所有停止时间)是在 $L^{q'}$ 中一致有界的，其中

$$\hat{E}_T:\ f\to\frac{1}{z_T}E(fz_\infty|\mathscr{F}_T)=\hat{E}(f|\mathscr{F}_T). \qquad (16)$$

且由 $z\in b_q^+(K)$ 可以推出$\sup\limits_T\|\hat{E}_T\|\leqslant K$；而由$\{\hat{E}_T\}$的一致有界性也可推出 $z\in b_q^+(\sup\limits_T\|\hat{E}_T\|)$．

证明 我们已在定义 5 中指出

$$z\in b_q^+(K)\Longleftrightarrow\frac{1}{z}\in\hat{a}_{q'}(K^{q'}),\quad 1<q\leqslant\infty.$$

现在把$(\Omega,\mathscr{F},\hat{\mu})$作为基本概率空间，而把

$$\mu=\frac{1}{z_\infty}\hat{\mu}$$

作为一个新的与 $\hat{\mu}$ 等价的概率测度．则根据定理 1 知

$$\hat{E}_T:\ f \to \hat{E}(f|\mathscr{F}_T)$$

是在 $L^{q'}$ 中一致有界的，当且仅当$\frac{1}{z}\in\hat{a}_{q'}(K^{q'})$. 且$\sup\limits_T\|\hat{E}_T\|$与 K 有下列关系

$$\begin{aligned}&\sup_T\|\hat{E}_T\|\leqslant K,\\&K^{q'}\leqslant\sup_T\|\hat{E}_T\|^{q'}，\text{即 } K\leqslant\sup_T\|\hat{E}_T\|.\end{aligned}\tag{17}$$

这样，我们得到 $z\in b_q^+(K) \Longleftrightarrow \sup\limits_T\|\hat{E}_T\|<\infty$，且 $K=\sup\limits_T\|\hat{E}_T\|$. ∎

下面给出A. Uchiyama关于 $a_p(K)$的一个刻划. 即$z\in a_p(K)$等价于"鞅的极大算子关于测度 $\hat{\mu}=z_\infty\mu$ 是弱(p,p)型的."

定理 2 设 z 是一个测度变换，$1\leqslant p<\infty$. 则 $z\in A_p$，当且仅当极大算子关于测度 $\hat{\mu}=z\mu$ 是弱(p,p)型的.

我们将在 6.6 节中定理 8 给出定理 2 的两权类似的证明.

6.3 Gehring 引理，逆向 Hölder 不等式

F. W. Gehring 在讨论 $\boldsymbol{R}^n$ 上非负局部可积函数在方块上的 q 次积分平均时建立了Gehring引理(如见 Reimann-Rychener[1]). Coifman-Fefferman[1] 在讨论 $\boldsymbol{R}^n$ 上的加权不等式时建立了 A_p 权的逆向 Hölder 不等式. 这两者都是下面即将建立的统一结果的特殊情形. 它们分别对应于这个统一结果中"$\lambda=1$, $\nu>1$"以及"$\lambda<0$, $\nu=1$"两种情形. 这个统一的结果属于 Doléans-Dade 与 Meyer[2]，正是服务于这个统一的目的，他们除了考虑 A_p 条件以外，还考虑与之密切相关的 b_q^+条件①，并将它们统一在条件 b_λ 中. 我们已在 6.1 和 6.2 节中介绍了 b_λ 条件及其初步的性质，本节要

① Reimann-Rychener[1]也讨论了 b_q^+ 条件(那里称为 B_q 条件)，但并没有系统的讨论.

讨论的是他们在这方面更深刻一些的工作.

先证一个引理.

引理1 设U是一非负随机变量. 假设存在常数$K\geqslant 0$, $\beta>0$, $\varepsilon(0<\varepsilon\leqslant 1)$, 使得

$$\int_{\{U>\lambda\}} Ud\mu\leqslant K\lambda^{\varepsilon}\int_{\{U>\beta\lambda\}} U^{1-\varepsilon}d\mu,\quad \forall\lambda>0. \tag{18}$$

则存在数$r>1$与常数C(均仅依赖于K,β,ε), 使得

$$E(U^{r})^{1/r}\leqslant CE(U). \tag{19}$$

证明 既然当β减小时, 式(18)中不等号的右边是增大的, 故总可设$\beta<1$. 此外, 如果U满足式(18), 则对任意的$t>0$, tU也满足式(18). 因为

$$\begin{aligned}\int_{\{tU>\lambda\}} tUd\mu &= t\int_{\{U>\lambda/t\}} Ud\mu\\ &\leqslant tK\left(\frac{\lambda}{t}\right)^{\varepsilon}\int_{\{U>\beta\lambda/t\}} U^{1-\varepsilon}d\mu\\ &=K\lambda^{\varepsilon}\int_{\{tU>\beta\lambda\}} (tU)^{1-\varepsilon}d\mu.\end{aligned}$$

那末我们只需证明存在$r(>1)$与常数C, 使得只要U满足式(18), 并且$E(U)=1$时, 便有

$$E(U^{r})^{1/r}\leqslant C. \tag{19$'$}$$

现在来证明这个断言. 首先假设式(18)成立, 其中μ是一个有界测度, U可积且有界(当然指本性有界).

我们在式(18)两边乘$a\lambda^{a-1}(a>0$待定), 并对λ在$[1,\infty)$上积分得, 左边为

$$\int_{\{U>1\}} U\int_{1}^{U}a\lambda^{a-1}d\lambda d\mu=\int_{\{U>1\}}(U^{1+a}-U)d\mu;$$

右边为

$$K\int_{\{U>\beta\}} U^{1-\varepsilon}\int_{1}^{U/\beta} a\lambda^{a-1+\varepsilon}d\lambda d\mu$$

$$=\frac{Ka}{a+\varepsilon}\int_{\{U>\beta\}}U^{1-\varepsilon}\left(\left(\frac{U}{\beta}\right)^{a+\varepsilon}-1\right)d\mu$$

$$\leqslant\frac{Ka}{a+\varepsilon}\frac{1}{\beta^{a+\varepsilon}}\int_{\{U>\beta\}}U^{1+a}d\mu$$

$$=k\int_{\{U>1\}}U^{1+a}d\mu+k\int_{\{\beta<U\leqslant 1\}}U^{1+a}d\mu$$

$$\leqslant k\int_{\{U>1\}}U^{1+a}d\mu+k\|\mu\|.$$

注意

$$k=\frac{Ka}{a+\varepsilon}\frac{1}{\beta^{a+\varepsilon}},\quad \lim_{a\to 0}k=0.$$

故只要 a 充分小，便有 $k<1$. 既然 U 有界，则 $E(U^{1+a})<\infty$. 那末由上述估计得

$$(1-k)\int_{\{U>1\}}U^{1+a}d\mu\leqslant\int_{\{U>1\}}Ud\mu+k\|\mu\|,$$

$$\begin{aligned}(1-k)\int_{\Omega}U^{1+a}d\mu&\leqslant\int_{\{U>1\}}Ud\mu+k\|\mu\|\\&\quad+(1-k)\int_{\{U\leqslant 1\}}U^{1+a}d\mu\\&\leqslant E(U)+(1-k)\|\mu\|+k\|\mu\|\\&=E(U)+\|\mu\|,\end{aligned}$$

$$E(U^{1+a})\leqslant\frac{E(U)+\|\mu\|}{1-k}. \tag{20}$$

如果 $\|\mu\|=1$, $E(U)=1$, 若取 $r=1+a$, 则式(20)即为式(19)′. 但式 (20) 的获得是在"U 有界" (关于 μ 几乎处处) 的附加假定下进行的.

现除去这个附加假定. 假设式(18)成立, 并且 $\|\mu\|=1$, $E(U)=1$. 假设 U 关于 μ 不是 a.e. 有界的, 则对任意大的 m, 总存在 $\omega\in\Omega$, 使 $U(\omega)=m$. 现考虑一个新的测度

$$\mu'=\mu\text{II}(\{U<m\})+j\varepsilon_{\omega},$$

其中 ε_ω 是只在 ω 的质量为 1 的点测度，

$$j=\frac{1}{m}\int_{\{U\geqslant m\}}Ud\mu.$$

注意因为 $E(U)=1$，因此有

$$\lim_{m\to\infty}j=0,\quad \lim_{m\to\infty}\|\mu'\|=\|\mu\|.$$

现在，U 是关于 μ' 几乎处处有界的，其界为 m，且 U 关于 μ' 满足式(18)．这后一断言是因当 $\lambda\geqslant m$ 时，式(18)中不等号的左边为 0；故只需考虑 $\lambda<m$ 的情形．而此时我们有

$$\int_{\{U>\lambda\}}Ud\mu'=\int_{\{U>\lambda\}}Ud\mu, \tag{21}$$

$$\int_{\{U>\beta\lambda\}}U^{1-\varepsilon}d\mu'\geqslant\int_{\{U>\beta\lambda\}}U^{1-\varepsilon}d\mu. \tag{21$'$}$$

式(21)的验证是直接的．现验证式(21)$'$．

$$\begin{aligned}
&\int_{\{U>\beta\lambda\}}U^{1-\varepsilon}d\mu'\\
&=\int_{\{U\geqslant m\}}U^{1-\varepsilon}d\mu'+\int_{\{\beta\lambda<U<m\}}U^{1-\varepsilon}d\mu'\\
&=U(\omega)^{1-\varepsilon}j+\int_{\{\beta\lambda<U<m\}}U^{1-\varepsilon}d\mu\\
&=\frac{1}{m^{\varepsilon}}\int_{\{U\geqslant m\}}Ud\mu+\int_{\{\beta\lambda<U<m\}}U^{1-\varepsilon}d\mu\\
&\geqslant\int_{\{U>\beta\lambda\}}U^{1-\varepsilon}d\mu.
\end{aligned}$$

由此证明了 U 关于 μ' 满足式(18)．

于是，根据上面已经证明的式(20)，得

$$E'(U^{1+a})\leqslant\frac{E'(U)+\|\mu'\|}{1-k}.$$

当然更有

$$\int_{\{U<m\}}U^{1+a}d\mu\leqslant\frac{E'(U)+\|\mu'\|}{1-k}.$$

令 $m\to\infty$ 即得

$$E(U^{1+\alpha})\leqslant\frac{2}{1-k}.$$

式(19)′因而获证．引理证毕．∎

引理 1 的另外一个形式叙述如下．

引理 1′ 设 z 是一非负随机变量，$q>1$．假设存在常数 K 与 $h(0<h<1)$，使得

$$\int_{\{z>\nu\}} z^q d\mu\leqslant K\nu^{q-1}\int_{\{z>h\nu\}} z d\mu,\quad \forall\nu>0, \tag{22}$$

则存在 $p(>q)$ 以及常数 C，使

$$\|z\|_p\leqslant C\|z\|_q. \tag{23}$$

证明 令 $U=z^q$, $\lambda=\nu^q$, $\beta=h^q$，则式(22)成为

$$\int_{\{U>\lambda\}} U d\mu\leqslant K\lambda^{(q-1)/q}\int_{\{U>\beta\lambda\}} U^{1/q}d\mu.$$

因此取 $\varepsilon=1-1/q$ 时应用引理 1，并令 $p=rq$，即得

$$E(z^p)=E(U^r)\leqslant C^rE(U)^r=C^rE(z^q)^{p/q},$$

$$\|z\|_p\leqslant C^{1/q}\|z\|_q.\ ∎$$

注 当 $\varepsilon\neq1$ 时由引理 1′ 可以得到引理 1．这只需对给定的 U,ε,λ 与 β，令 $z=U^{1/q}$，$q=\dfrac{1}{1-\varepsilon}$，$\nu=\lambda^{1/q}$ 与 $h=\beta^{1/q}$，则由式(18)成立知式(22)成立．从而由式(23)成立，即得式(19)，其中 $r=p/q$．

下面是本节的主要定理，它同时概括了 Gehring 引理与逆向 Hölder 不等式．

定理 3 假设非负过程 $z\in S^+\cap b_\lambda^-\cap b_\nu^+$，其中 $\lambda<\nu$, $\nu>0$．则存在 $\varepsilon>0$，使得 $z\in b_{\nu+\varepsilon}^+$．

证明 1）设 $0<\lambda<\nu$．若考虑过程 $z^\lambda=(z_n^\lambda)$，则问题便化为 $\lambda=1$, $\nu=q>1$ 的情形．此即 Gehring 引理的情形．

定义停止时间 $T=\inf\{n;\ z_n>\lambda\}$，则（仍记 $|\cdot|$ 为 μ 测度）

$$\lambda|\{T<\infty\}|\leqslant\int_{\{T<\infty\}}z_T d\mu\leqslant K_1\int_{\{T<\infty\}}z_\infty d\mu$$

$$=K_1\left(\int_{\{T<\infty,\ z_\infty>h\lambda\}}z_\infty d\mu+\int_{\{T<\infty,\ z_\infty\leqslant h\lambda\}}z_\infty d\mu\right)$$

$$\leqslant K_1\int_{\{z_\infty>h\lambda\}}z_\infty d\mu+K_1 h\lambda|\{T<\infty\}|.$$

因此，若选 h 使 $K_1h<1$，则有

$$\lambda|\{T<\infty\}|\leqslant\frac{K_1}{1-K_1h}\int_{\{z_\infty>h\lambda\}}z_\infty d\mu.$$

上面我们已经用了 $z\in b_1^-(K_1)$ 这个条件．现在同时利用 $z\in b_q^+$ 与 $z\in S^+$ 这两个条件，将它们合在一起即为

$$E(z_\infty^q|\mathscr{F}_T)\leqslant K_2 z_{T-1}^q,$$

则得

$$\int_{\{z_\infty>\lambda\}}z_\infty^q d\mu\leqslant\int_{\{T<\infty\}}z_\infty^q d\mu$$

$$=\int_{\{T<\infty\}}E(z_\infty^q|\mathscr{F}_T)d\mu$$

$$\leqslant K_2\lambda^q|\{T<\infty\}|$$

$$\leqslant K_2\frac{K_1\lambda^{q-1}}{1-K_1h}\int_{\{z_\infty>h\lambda\}}z_\infty d\mu.$$

由引理 1′ 知存在 $p(>q)$ 与常数 C，使

$$\|z_\infty\|_p\leqslant C\|z_\infty\|_q.$$

如由上面的不等式希望得到条件 b_p^+，只需考虑新的概率空间与新的 σ-代数族，即 $(\Omega',\mathscr{F}',\mu',\{\mathscr{F}'_m\}_{m\geqslant0})$，其中

$$\Omega'=A\in\mathscr{F}_n,\quad \mathscr{F}'=\mathscr{F}\cap A,$$

$$\mu'=\frac{1}{|A|}\mu\Big|_{\mathscr{F}'},\quad \mathscr{F}'_m=\mathscr{F}_{m+n},\ m\geqslant0,$$

以及新的过程

$$z'=(z'_m)_{m\geqslant 0},\qquad z'_m=\frac{z_{m+n}}{z_n}\mathrm{II}(A).$$

则显然仍有 $z'\in b_1^-\cap b_q^+\cap S^+$(关于新的概率空间$(\Omega', \mathscr{F}', \mu', \{\mathscr{F}'_m\})$),并且其中常数相同. 由于式(23)(以及式(19))的获得与 $\mathscr{F}_0$ 是否平凡无关,我们又有

$$E'((z'_\infty)^p)^{1/p}\leqslant CE'((z'_\infty)^q)^{1/q},$$

此即

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{|A|}\int_A\left(\frac{z_\infty}{z_n}\right)^p d\mu\right)^{1/p} &\leqslant C\left(\frac{1}{|A|}\int_A\left(\frac{z_\infty}{z_n}\right)^q d\mu\right)^{1/q}\\ &=C\left(\frac{1}{|A|}\int_A\frac{1}{z_n^q}E(z_\infty^q|\mathscr{F}_n)d\mu\right)^{1/q}\\ &\leqslant CK_2,\end{aligned}$$

$$E(z_\infty^p|\mathscr{F}_n)^{1/p}\leqslant CK_2z_n.$$

也就是 $z\in b_p^+(CK_2)$,这就完成了 $0<\lambda<\nu$ 时定理的证明.

2) 设 $\lambda<0<\nu$. 若考虑 $z^\nu=(z_n^\nu)$,则问题便化为 $\lambda<0$, $\nu=1$ 的情形. 回忆定义 $b_\lambda^-=a_p$, $p=1-1/\lambda$. 因此, 这正是Coifman-Fefferman[1]所考虑的逆向 Hölder 不等式的情形.

因为过程 $z=(z_n)\in a_p(K)$,故对一切停止时间 T, 及一切非负鞅 (U_n),有(根据 6.2 节中式(12))

$$z_TU_T^p\leqslant KE(z_\infty U_\infty^p|\mathscr{F}_T).$$

现在令

$$U_\infty=\mathrm{II}(\{z_\infty\leqslant\beta z_T\})\quad(\beta<1).$$

则

$$\begin{aligned}z_TE(\mathrm{II}(\{z_\infty\leqslant\beta z_T\})|\mathscr{F}_T)^p &\leqslant KE(z_\infty\mathrm{II}(\{z_\infty\leqslant\beta z_T\})|\mathscr{F}_T)\\ &\leqslant K\beta z_T.\end{aligned}$$

因为 $0<z_T<\infty$, a. e., 故

$$E(\mathrm{II}(\{z_\infty\leqslant\beta z_T\})|\mathscr{F}_T)^p\leqslant K\beta.$$

如果 β 充分小，则存在 $a(0<a<1)$，使

$$E(\mathrm{II}(\{z_\infty>\beta z_T\})|\mathscr{F}_T)\geqslant a>0,$$

当然也有

$$\begin{aligned}E(\mathrm{II}(\{z_\infty>\beta z_T\})\mathrm{II}(\{T<\infty\})|\mathscr{F}_T)\\ \geqslant a\mathrm{II}(\{T<\infty\}).\end{aligned}\tag{24}$$

现在我们令 $T=\inf\{n;z_n>\lambda\}$. 注意

$$z_T\mathrm{II}(\{T<\infty\})\geqslant\lambda,$$

$$z_T\leqslant C\lambda\quad(\text{根据条件 } z\in S^+).$$

再利用条件 b_1^+，即得

$$\begin{aligned}E(z_\infty\mathrm{II}(\{z_\infty>\lambda\}))&\leqslant E(z_\infty\mathrm{II}(\{T<\infty\}))\\&=E(E(z_\infty\mathrm{II}(\{T<\infty\})|\mathscr{F}_T))\\&\leqslant KE(z_T\mathrm{II}(\{T<\infty\}))\\&\leqslant KC\lambda|\{T<\infty\}|\leqslant\frac{KC\lambda}{a}|\{z_\infty>\beta z_T,T<\infty\}|\\&\leqslant\frac{KC\lambda}{a}|\{z_\infty>\beta\lambda\}|.\end{aligned}$$

又利用引理 1($\varepsilon=1$ 的情形)，即知存在 $r>1$，使

$$E(z_\infty^r)^{1/r}\leqslant CE(z_\infty).$$

同 1) 中证明最后部分一样，由上不等式即得

$$E(z_\infty^r|\mathscr{F}_n)^{1/r}\leqslant CKz_n.$$

此即 $z\in b_r^+=b_{1+\varepsilon}^+$. 由此证明了 $\lambda<0<\nu$ 情形的定理.

3) 设 $\lambda=0<\nu$. 这种情形的结论可由 $0<\lambda<\nu$ 情形推出. 因为条件 b_0^- 比 $b_\lambda^-(\forall\lambda>0)$ 都强. 事实上，由 b_0^- 可推出 b_1^-:

$$\begin{aligned}z_n&\leqslant K\exp(E(\log z_\infty|\mathscr{F}_n))\\&\leqslant KE(\exp(\log z_\infty)|\mathscr{F}_n)\\&=KE(z_\infty|\mathscr{F}_n).\end{aligned}$$

类似地，由 b_0^- 可推出 $z^\alpha\in b_1^-, \forall\alpha>0$:

$$z_n^\alpha\leqslant K^\alpha\exp(\alpha E(\log z_\infty|\mathscr{F}_n))$$
$$\leqslant K^\alpha E(z_\infty^\alpha|\mathscr{F}_n).$$

于是，我们有

$$z\in b_0^- \Rightarrow z^\lambda\in b_1^- \Rightarrow z\in b_\lambda^-, \quad \forall\lambda>0.$$

从上述讨论可知，由情形 1)的证明可推出情形 3)的结论.

定理至此证毕. ∎

推论 3 设过程 $z=(z_n)\in S^-\cap a_p\cap b_\theta^+$，其中 $\theta>-1/(p-1)$，$p>1$. 则存在 $q(1<q<p)$，使 $z\in a_q$.

证明 考虑过程 $\frac{1}{z}=\left(\frac{1}{z_n}\right)$. 易知 $z\in b_\lambda^\pm(K)$，当且仅当 $\frac{1}{z}\in b_{-\lambda}^\mp(K)$，因此

$$\frac{1}{z}\in S^+\cap b_{-\theta}^-\cap b_{-\lambda}^+, \quad \text{其中}\lambda=-\frac{1}{p-1}.$$

既然 $-\theta<1/(p-1)=-\lambda$，故由定理 3 知

$$\frac{1}{z}\in b^+_{\frac{1}{p-1}+\varepsilon}, \quad \text{对某个 } \varepsilon>0.$$

也就是 $z\in b^-_{-\left(\frac{1}{p-1}+\varepsilon\right)}=a_q$，其中

$$q=1+((p-1)^{-1}+\varepsilon)^{-1}<p. \ ∎$$

注 当 $z=(z_n)$ 是一个鞅时，总有 $z\in b_\theta^+$，$\theta=1>-1/(p-1)$. 故当 $z\in S^-$ 时，

$$z\in a_p \Rightarrow z\in a_q, \quad \text{对某个 } q, 1<q<p.$$

对于古典情形，总有

$$z\in A_p \Rightarrow z\in A_{p-\varepsilon}, \quad \text{对某个 } \varepsilon>0;$$

对于鞅论情形，则需要附加条件 S^-.（条件 S^- 不是一个自然的条件.）

现在假设 $z=(z_n)$ 是一个测度变换，意即 z 是一个严格正的、

满足 $E(z_\infty)=1$ 的鞅. 则 $\hat{z}=1/z$ 也是一个测度变换, 但却交换了μ 与 $\hat{\mu}$ 的位置. 我们有

推论 4 假设 $z\in S$. 则下述断言等价:

1) $z\in a_p=b_\lambda^-$, 对某个 $p>1\left(\lambda=-\dfrac{1}{p-1}\right)$;

2) $z\in b_\mu^+$, 对某个 $\mu>1$;

3) $\hat{z}\in\hat{a}_p=\hat{b}_\lambda^-$, 对某个 $p>1\left(\lambda=-\dfrac{1}{p-1}\right)$;

4) $\hat{z}\in\hat{b}_\mu^+$, 对某个 $\mu>1$.

证明 1) $\Rightarrow$ 2). 既然 $z\in S^+\cap b_\lambda^-\cap b_1^+$, 故由定理 3 知 $z\in b_{1+\varepsilon}^+$.

2) $\Rightarrow$ 3). 由定义 5 知, $\hat{z}\in\hat{a}_p(K)$ 当且仅当 $z\in b_{p'}^+(K^{1/p})$, $1\leqslant p<\infty$.

3) $\Rightarrow$ 4). 同 1)$\Rightarrow$2). 然而此时是利用 $1/z\in S^+$, 即 $z\in S^-$.

4) $\Rightarrow$ 1). 同 2)$\Rightarrow$ 3). ∎

推论 5 设 $z\in a_p\cap S$, 则存在 $\varepsilon>0$ 使 $z_\infty^{1+\varepsilon}$ 生成的鞅也属于 $a_p\cap S$.

证明 记 $U_\infty=z_\infty^{-1/(p-1)}$, $U_n=E(U_\infty|\mathscr{F}_n)$. 则易知, $z\in a_p$ 当且仅当 $U\in a_{p'}$, 且此时有

$$\begin{aligned}1&=E(z_\infty^{1/p}z_\infty^{-1/p}|\mathscr{F}_n)^p\leqslant E(z_\infty|\mathscr{F}_n)E(z_\infty^{-p'/p}|\mathscr{F}_n)^{p/p'}\\&=E(z_\infty|\mathscr{F}_n)E(U_\infty|\mathscr{F}_n)^{p-1}=z_nU_n^{p-1}\leqslant K.\end{aligned}\tag{25}$$

由此说明 $z\in S\Longleftrightarrow U\in S$. 总之,

$$z\in a_p\cap S\Longleftrightarrow U\in a_{p'}\cap S.$$

又由于 z, U 都是鞅, 故由定理 3 之第二部分知, 存在 α, $\beta>0$, 使

$$z\in b_{1+\alpha}^+,\quad U\in b_{1+\beta}^+.$$

此即

$$
\begin{aligned}
&E(z_\infty^{1+\alpha}|\mathscr{F}_n)^{\frac{1}{1+\alpha}}\leqslant K_1 z_n;\\
&E(U_\infty^{1+\beta}|\mathscr{F}_n)^{\frac{1}{1+\beta}}\leqslant K_2 U_n.
\end{aligned}
\tag{26}
$$

因此当 $\varepsilon=\min(\alpha,\beta)$时，有 $z\in b^+_{1+\varepsilon}$, $U\in b^+_{1+\varepsilon}$. 于是

$$
\begin{aligned}
&\{E(z_\infty^{1+\varepsilon}|\mathscr{F}_n)E(U_\infty^{1+\varepsilon}|\mathscr{F}_n)^{p-1}\}^{\frac{1}{1+\varepsilon}}\\
&\quad\leqslant K_1 z_n(K_2U_n)^{p-1}\leqslant KK_1K_2^{p-1},
\end{aligned}
$$

即

$$
\begin{aligned}
&E(z_\infty^{1+\varepsilon}|\mathscr{F}_n)E(z_\infty^{-(1+\varepsilon)/(p-1)}|\mathscr{F}_n)^{p-1}\\
&\quad\leqslant K^{1+\varepsilon}K_1^{1+\varepsilon}K_2^{(p-1)(1+\varepsilon)}=K.
\end{aligned}
$$

此外，关于 $z^{1+\varepsilon}$ 生成的鞅也属于 S，这是因为由式 (26) 及 Hölder 不等式知

$$
E(z_\infty^{1+\varepsilon}|\mathscr{F}_n)\sim z_n^{1+\varepsilon},
$$

因此，由 $z\in S$ 即知 $z^{1+\varepsilon}$ 生成的鞅属于 S. ▌

最后作为一个例子，我们对即将在 7.1 节中要讨论的正规鞅情形，列举其有关 a_p, b_q^+ 条件的一些结论. 所谓正规性是指$(\Omega, \mathscr{F}, \mu, \{\mathscr{F}_n\}_{n\geqslant 0})$满足

$$
f_n=E(f|\mathscr{F}_n)\leqslant dE(f|\mathscr{F}_{n-1}),\quad \forall f\in L^1_+,
\tag{27}
$$

其中 $d\geqslant 1$ 是一个常数. 特别地，二进鞅即属此类.

根据定理 3、推论 3 及推论 5，我们有如下断言.

断言 1 (Gehring) 设正规性条件成立. 则所有那些严格正的鞅 $z=(z_n)$，当它属于 $b_q^+(q>1)$时，也一定属于 $b^+_{q+\varepsilon}$，对某个$\varepsilon>0$.

证明 根据定理 3 的第一部分的证明即得. 因为

$$
z\in S^+\cap b_1^-\cap b_q^+.\ ▌
$$

断言 2 (Muckenhoupt) 设正规性条件成立. 则所有那些严格正的鞅 $z=(z_n)$，当它属于 $a_p(p>1)$时，也一定属于 $a_{p-\varepsilon}$，对某个 ε，且 $0<\varepsilon<p-1$.

证明　设 $U_\infty=z_\infty^{-\frac{1}{p-1}}$, $U_n=E(U_\infty|\mathscr{F}_n)$. 则根据正规性知

$$U_n\leqslant dU_{n-1}.$$

再由式(25), 即得

$$z_{n-1}\leqslant K\left(\frac{1}{U_{n-1}}\right)^{p-1}\leqslant K\left(\frac{d}{U_n}\right)^{p-1}\leqslant Kd^{p-1}z_n.$$

这说明 $z\in S^-$. 故由推论 3 知, $z\in a_{p-\varepsilon}$, $1<p-\varepsilon$. ▮

断言 3（逆向 Hölder 不等式）　设正规性条件成立. 则所有那些严格正的鞅 $z=(z_n)$, 当它属于 $a_p(p>1)$ 时, 必满足逆向 Hölder 不等式, 即

$$E(z_\infty^{1+\varepsilon}|\mathscr{F}_n)^{1/(1+\varepsilon)}\leqslant KE(z_\infty|\mathscr{F}_n)=Kz_n.$$

证明　根据定理 3 的第二部分证明即得. 因为

$$z\in S^+\cap b_\lambda^-\cap b_1^+,\quad \lambda=-\frac{1}{p-1}.$$ ▮

断言 4　设正规性条件成立. 则 $z\in A_\infty\Rightarrow z\in\tilde{A}_\infty$. 但反之一般不真.

证明　设 $z\in A_\infty$, 则存在 $p>1$ 使 $z\in a_p$. 故由断言 3 知, 对某个 $\varepsilon>0$, $z\in b_{1+\varepsilon}^+$, 由定义 5 知, 这就是 $z\in\tilde{a}_{(1+\varepsilon)'}$, 从而 $z\in\tilde{A}_\infty$. 第一部分结论获证.

反之不成立可由如下反例知. 考虑 $(0,1]$ 带 Lebesgue 测度 dx. 定义 $\mathscr{F}_1$ 是平凡的; $\mathscr{F}_2$ 由原子 $(0,1/2]$, $(1/2,1]$ 生成; $\mathscr{F}_n$ 由原子

$$\left\{\left(\frac{1}{2^k},\frac{1}{2^{k-1}}\right]\right\}_1^{n-1},\ \text{以及}\left(0,\frac{1}{2^{n-1}}\right]$$

生成; $\mathscr{F}=\bigvee\mathscr{F}_n$. 记

$$I_k=\left(\frac{1}{2^k},\frac{1}{2^{k-1}}\right].$$

设 $\{c_k\}_1^\infty$ 是一个严格正的递减数列. 又定义

$$z=(z_n),$$

$$z_\infty=\sum_1^\infty c_k \mathrm{II}(I_k),$$

$$\begin{aligned} z_n&=E(z_\infty|\mathscr{F}_n)\\ &=\sum_{k=1}^{n-1}c_k\mathrm{II}(I_k)+2^{n-1}\sum_{k\geqslant n}c_k|I_k|\,\mathrm{II}\left(\left(0,\frac{1}{2^{n-1}}\right]\right).\end{aligned}$$

我们有

$$E(z_\infty^2|\mathscr{F}_n)=\sum_{k=1}^{n-1}c_k^2\,\mathrm{II}(I_k)+2^{n-1}\sum_{k\geqslant n}c_k^2|I_k|\mathrm{II}\left(\left(0,\frac{1}{2^{n-1}}\right]\right).$$

$$z_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}c_k\mathrm{II}(I_k)+2^n\sum_{k\geqslant n+1}c_k|I_k|\,\mathrm{II}\left(\left(0,\frac{1}{2^n}\right]\right).$$

注意，因$\{c_k\}$为非负递降数列，则对$a=1,2$，有

$$\begin{aligned} c_n^a&\leqslant 2^n\sum_{k\geqslant n}c_k^a 2^{-k}\\ &\leqslant c_n^a+2^n c_{n+1}^a\sum_{k\geqslant n+1}2^{-k}\\ &\leqslant 2c_n^a.\end{aligned}$$

这说明

$$\begin{aligned} 2^{n-1}\sum_{k\geqslant n}c_k^2 2^{-k}&\leqslant c_n^2\\ &\leqslant\left(2^n\sum_{k\geqslant n}c_k 2^{-k}\right)^2.\end{aligned}$$

因此

$$E(z_\infty^2|\mathscr{F}_n)^{1/2}\leqslant 2E(z_\infty|\mathscr{F}_n).$$

于是得$z\in b_2^+$. 但若将$\{c_k\}$选得恰当，使得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{c_{n+1}}=\infty,$$

则因在$(0,2^{-n}]$上有

$$\frac{z_n}{z_{n+1}} \geqslant \frac{1}{2} \frac{c_n}{c_{n+1}} \to \infty,$$

因而 $z \bar{\in} S^-$. 由此即能推出对任意的 $p>1$, 有 $z \bar{\in} a_p$. 因为此时正规性条件是满足的,而在正规性条件下,对任意的 p, 由 a_p 属性可推出 S 属性. 第二部分结论因而获证. ▌

注 1 若将 $\{\mathscr{F}_n\}$ 换为二进系,上例显然也是适用的.

注 2 上例说明,当用正规性条件代替 S 时,推论 4 的结论不再成立. 虽然仍然有(甚至无需正规性)

$$z \in a_p \Longleftrightarrow z \in \tilde{b}_q^+ \quad (q>1),$$

$$z \in b_q^+ \Longleftrightarrow z \in \tilde{a}_p \quad (q>1).$$

断言 5(Muckenhoupt) 设正规性条件成立. 则对所有严格正的鞅 $z=(z_n)$, 当它属于 a_p 时,也一定使 $z_\infty^{1+\varepsilon}$ 生成的鞅属于 a_p, 对某个 $\varepsilon>0$.

证明 由正规性条件及 $z \in a_p$ 即可推出 S. 再由推论 5 即获断言之证明. ▌

最后作为本节的结束, 我们用 Bonami-Lepingle[1] 的一个例子说明对不正规情形问题要复杂得多. 这个例子说明: 对任意给定的 $p>1$, 存在 $z \in A_p$, 使得 $\forall \varepsilon>0$, $z \bar{\in} A_{p-\varepsilon}$.

例 取 $\Omega=(0,1]$, μ 为 Lebesgue 测度, $\mathscr{F}=\vee \mathscr{F}_n$, $\mathscr{F}_n$ 由原子

$$\left\{\left(\frac{1}{(k+1)!}, \frac{1}{k!}\right]\right\}_1^n \quad \text{以及} \quad \left(0, \frac{1}{(n+1)!}\right]$$

生成, $\mathscr{F}_0$ 为平凡的. 既然 $\mathscr{F}$ 由原子 $\left\{\left(\frac{1}{(k+1)!}, \frac{1}{k!}\right]\right\}_1^\infty$ 生成,故关于 $\mathscr{F}$ 可测的函数均由在

$$I_k=\left(\frac{1}{(k+1)!}, \frac{1}{k!}\right]$$

上的取值决定. 令

$$z=\sum_{1}^{\infty} z_k \mathrm{I\!I}(I_k),$$

$$z_k=b\frac{2^k}{k!}, \quad b^{-1}=\sum_{1}^{\infty}\frac{2^k}{k!}|I_k|<\infty.$$

记

$$U=z^{-1}=b^{-1}\sum_{1}^{\infty} k!2^{-k}\mathrm{I\!I}(I_k).$$

则 $\forall \gamma>1$, 都有

$$E(U^\gamma)=b^{-\gamma}\sum_{1}^{\infty}(k!)^\gamma 2^{-k\gamma}\frac{k}{(k+1)!}$$

$$\geqslant\frac{1}{2}b^{-\gamma}\sum_{1}^{\infty}(k!)^{\gamma-1}2^{-k\gamma}=\infty.$$

这说明 $\forall \varepsilon>0$, $z\overline{\in} A_{2-\varepsilon}$, 否则将有 $E(U^{1/(1-\varepsilon)})<\infty$, 因而得出矛盾. 现在我们来证明 $z\in A_2$.

注意 $I_k\in\mathscr{F}_n$, $k\leqslant n$. 此外$\left(0,\frac{1}{(n+1)!}\right]\in\mathscr{F}_n$. 我们有

$$\frac{1}{|I_k|}\int_{I_k} zdx\frac{1}{|I_k|}\int_{I_k} Udx=b\frac{2^k}{k!}b^{-1}\frac{k!}{2^k}=1.$$

故剩下只需证

$$n!\int_0^{1/n!} zdx\, n!\int_0^{1/n!} Udx\leqslant C.$$

因为

$$b^{-1}\int_0^{1/n!} zdx=\sum_{k\geqslant n}\frac{2^k}{k!}|I_k|$$

$$\leqslant\sum_{k\geqslant n}\frac{2^k}{(k!)^2}\leqslant 2\frac{2^n}{(n!)^2},$$

$$b\int_0^{1/n!} Udx=\sum_{k\geqslant n}\frac{k!}{2^k}|I_k|$$

$$\leqslant \sum_{k \geqslant n} \frac{1}{2^k} = 2^{-n+1}.$$

因此

$$n! \int_0^{1/n!} z\,dx\, n! \int_0^{1/n!} U\,dx \leqslant 4.$$

于是我们便证明了断言 $z \in A_2$.

对 $p>1$, 上述例子可稍加改造, 使得 $z \in A_p$, 但

$$z \overline{\in} A_{p-\varepsilon}, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

这只需令

$$z_k = b\left(\frac{2^k}{k!}\right)^{p-1}, \quad b^{-1} = \sum_1^\infty \left(\frac{2^k}{k!}\right)^{p-1} |I_k|.$$

此时 $\forall \gamma > 1$, 都有

$$E\left(z^{-\frac{\gamma}{p-1}}\right) = b^{-\gamma/(p-1)} \sum_1^\infty \left(\frac{2^k}{k!}\right)^{-\gamma} |I_k|$$

$$\geqslant C \sum_1^\infty (k!)^{\gamma-1} 2^{-k\gamma} = \infty.$$

故 $z \overline{\in} A_{p-\varepsilon}, \forall \varepsilon > 0$. 但正如下面将要指出的, 确有 $z \in A_p$. 为验证 $z \in A_p$, 只需验证(如同验证 $z \in A_2$ 一样)

$$\frac{1}{|I_k|}\int_{I_k} z\,dx \left(\frac{1}{|I_k|}\int_{I_k} z^{-1/(p-1)}\,dx\right)^{p-1} \leqslant C, \quad \forall k,$$

以及

$$n! \int_0^{1/n!} z\,dx \left(n! \int_0^{1/n!} z^{-1/(p-1)}\,dx\right)^{p-1} \leqslant C, \quad \forall n.$$

上两式中的第一个恒为 1. 第二个不等式的左边估计为

$$\leqslant C(n!)^p \sum_{k \geqslant n} \left(\frac{2^k}{k!}\right)^{p-1} \frac{1}{k!} \left(\sum_{k \geqslant n} \frac{k!}{2^k} \frac{1}{k!}\right)^{p-1}$$

$$\leqslant C(n!)^p \frac{2^{n(p-1)}}{(n!)^p} \frac{1}{2^{n(p-1)}} = C.$$

这里用到一个初等不等式

$$\sum_{k\geqslant n}\frac{2^{k(p-1)}}{(k!)^p}\leqslant C\frac{2^{n(p-1)}}{(n!)^p},\quad 1<p<\infty.$$

事实上，若记这个级数的一般项为 a_k，则因为

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{2^{p-1}}{(k+1)^p}\leqslant\frac{1}{2},$$

可得

$$a_k\leqslant 2^{-(k-n)}a_n,$$

因此

$$\sum_{k\geqslant n}a_k\leqslant a_n\sum_{k\geqslant n}2^{-(k-n)}\leqslant Ca_n.$$

至此，$z\in A_p$ 的断言证毕.

6.4 A_p 类的权与 BMO 鞅

设实鞅 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}\in$BMO，我们可以用三种方式构造与之相关的过程 $z=(z_n)_{n\geqslant 0}\in A_p$. 反之，由过程 $z\in A_p$，在附加条件 $z\in S$ 下，也可构造过程 $f\in$BMO. 三种方式的前两个方式是很自然的，此即：其一，对 $f\in$ BMO，适当选取 $\lambda>0$，定义 $z_\infty=e^{\lambda f_\infty}$，然后考虑 z_∞ 生成的鞅 $z=(z_n)_{n\geqslant 0}$；其二，对 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}\in$BMO，定义 $z=(z_n)$，$z_n=e^{\lambda f_n}$；第三种方式是纯粹概率论的，它的两个互逆步骤分别称为随机对数与随机指数，它们是由随机积分而来的，其确切含意将在下面给出.

首先我们讨论自然方式下 A_p 与 BMO 的关系. 先对 A_p 条件作一点注记.

命题 7 L^1 中的严格正的函数 $z=e^f\in A_p$，当且仅当 $f\in\log A_{1,(p-1)^{-1}}$，其中 $1<p<\infty$.

证明 先说明一下，当 $z\in A_p$ 时，$f_n=E(f_\infty|\mathscr{F}_n)$确实有意义．因为对 $z\in A_p$，由$\log u$ 是 $u\in(0,\infty)$的凹函数，则

$$E(\log z_\infty|\mathscr{F}_n)\leqslant\log E(z_\infty|\mathscr{F}_n)<\infty,\quad \text{a. e.},$$

$$-\frac{1}{p-1}E(\log z_\infty|\mathscr{F}_n)\leqslant\log E(z_\infty^{-\frac{1}{p-1}}|\mathscr{F}_n)<\infty,\quad \text{a. e.},$$

因此

$$f_n=E(f|\mathscr{F}_n)=E(\log z_\infty|\mathscr{F}_n)\neq\pm\infty,\quad \text{a. e.}.$$

现在由 6.1 节中的定义 4 给出的 A_p 条件

$$E(z_\infty|\mathscr{F}_n)E(z_\infty^{-\frac{1}{p-1}}|\mathscr{F}_n)^{p-1}\leqslant K<\infty,\ \text{a. e.},\ \forall n,\quad (*)$$

以及由 5.2 节中引理 3 给出的 $\log A_{1,(p-1)^{-1}}$ 条件的等价形式

$$E(e^f|\mathscr{F}_n)E(e^{-f/(p-1)}|\mathscr{F}_n)^{p-1}\leqslant K<\infty,\quad \text{a. e.},\ \forall n,\quad (*)'$$

即知 $z=e^f\in A_p$ 与 $f\in\log A_{1,(p-1)^{-1}}$ 是等价的．▋

定理 4 $\forall f\in\text{BMO}$，一定存在 $\alpha,\beta>0$，使

$$\begin{aligned} z_1&=e^{\alpha f}\in A_{p_1}\cap S, & p_1&=1+\frac{\alpha}{\beta},\\ z_2&=e^{-\beta f}\in A_{p_2}\cap S, & p_2&=1+\frac{\beta}{\alpha}. \end{aligned}\tag{28}$$

反之，若存在实数 $\lambda\neq0$，使

$$e^{\lambda f}\in A_p\cap S,\quad \text{对某个 } p>1,\tag{28$'$}$$

则 $f\in\text{BMO}$．

证明 我们在 5.2 节中已指出

$$\text{Re BMO}=\bigcup_{\alpha,\ \beta>0}\log A_{\alpha,\beta}\cap\text{BD}.$$

故若实函数 $f\in\text{BMO}$，则存在 $\alpha,\beta>0$，使 $f\in\log A_{\alpha,\beta}$．此即

$$\alpha f\in\log A_{1,\beta/\alpha},\quad -\beta f\in\log A_{1,\alpha/\beta}.$$

由命题 7 知

$$e^{\alpha f}\in A_{p_1},\quad e^{-\beta f}\in A_{p_2}.$$

至于 $e^{\alpha f}$(或 $e^{-\beta f}$)$\in S$ 是因为(如看 S^+ 条件)

$$\begin{aligned}E(\exp(\alpha f)\,|\,\mathscr{F}_n) &\leqslant K\exp(\alpha f_n)\\ &\leqslant K\exp(\alpha f_{n-1})\\ &\leqslant KE(\exp(\alpha f)\,|\,\mathscr{F}_{n-1}).\end{aligned}$$

反之,若存在 $\lambda\neq 0$,使 $e^{\lambda f}\in A_p\cap S$,则 $\lambda f\in\log A_{1,(p-1)^{-1}}$. 并且有

$$\begin{aligned}\exp(\lambda f_{n-1}) &\leqslant E(e^{\lambda f}\,|\,\mathscr{F}_{n-1})\leqslant KE(e^{\lambda f}\,|\,\mathscr{F}_n)\\ &\leqslant K\exp(\lambda f_n)=\exp(\lambda f_n+K).\end{aligned}$$

由此说明

$$\lambda(f_{n-1}-f_n)\leqslant K.$$

类似地可证

$$\lambda(f_n-f_{n-1})\leqslant K.$$

因此 $f=(f_n)\in\mathrm{BD}$. 又由于条件 $\log A_{\alpha,\beta}$ 蕴含

$$E(\exp(\varepsilon|f-f_n|)\,|\,\mathscr{F}_n)\leqslant K,$$

故 $f\in\mathrm{BMO}$. 定理获证. ∎

现在讨论在上述方式下,A_1 与 BLO 的关系. 为此先对 A_1 条件作点注记. 回忆一下,称 L^1 中严格正的函数 $z\in A_1$,是指由它产生的鞅 $z=(z_n)_{n\geqslant 0}\in A_1$. 此即

$$z_n\leqslant Kz_\infty,\quad \text{a. e.},\ \forall n, \tag{29}$$

或者等价地,

$$z^*\leqslant Kz_\infty,\quad \text{a. e.}. \tag{29$'$}$$

命题 8 设 L^1 中严格正的鞅 $z\in A_1\cap S$(实际上,$A_1\cap S=A_1\cap S^+$). 则存在非负的 $g\in L^1$(g 满足 $g^*<\infty$, a. e.),$\delta(0<\delta<1)$, 以及 h(满足 $0<a\leqslant h\leqslant b<\infty$),使得

$$z=hg^{*\delta}. \tag{30}$$

证明 既然任意的 $z\in A_p\cap S^+$ 都满足逆向 Hölder 不等式,因此对此 z 一定存在 $\varepsilon>0$,使

$$E(z^{1+\varepsilon}|\mathscr{F}_n)^{1/(1+\varepsilon)} \leqslant KE(z|\mathscr{F}_n) \leqslant Kz_\infty, \quad \forall n.$$

于是有

$$z_\infty^{1+\varepsilon} \leqslant (z^{1+\varepsilon})^* \leqslant Kz_\infty^{1+\varepsilon}.$$

令 $\delta = 1/(1+\varepsilon)$, $g = z^{1+\varepsilon}$, $h = z_\infty(g^*)^{-\delta}$, 则

$$z_\infty = z_\infty(g^*)^{-\delta}(g^*)^\delta = hg^{*\delta},$$

即为式(30). 事实上, $g^* \leqslant Kz_\infty^{1+\varepsilon} < \infty$, a. e., 并且 $\frac{1}{K} \leqslant h \leqslant 1$. ∎

注 这个命题的古典情形属于 Coifman-Rochberg[1]. 他们还考虑了这个问题的逆命题, 即建立了: 若非负的 $g(\in L^1)$, 使得 $g^* < \infty$, a. e., 则 $\forall\delta(0<\delta<1)$ 都有 $g^{*\delta} \in A_1$. 这个逆命题在鞅论中是否成立, 我们尚不知道. 但是我们可以加一个附加条件来证明逆命题成立. 为此, 先作一点准备. 对于 $\mathscr{F}_0$ 不一定为平凡的族 $\{\mathscr{F}_n\}_{n\geqslant 0}$, 我们将极大算子的弱(1, 1)型改叙为下述引理 2. 设 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$ 是一个关于此族的 L^1 中的鞅, f_0 可以不为 0. 记 $E_0(\cdot)=E(\cdot|\mathscr{F}_0)$.

引理 2 $\forall\lambda>0$, 有

$$E_0(\mathrm{II}(\{f^*>\lambda\})) \leqslant \frac{1}{\lambda}E_0(|f_\infty|). \tag{31}$$

并且 $\forall\delta(0<\delta<1)$ 及 $\forall F \in \mathscr{F}_0$, 有

$$\frac{1}{|F|}\int_F f^{*\delta}d\mu \leqslant C_\delta\left(\frac{1}{|F|}\int_F |f_\infty|\,d\mu\right)^\delta. \tag{31$'$}$$

证明 对 $\lambda>0$ 定义停止时间

$$\tau = \inf\{n:\ |f_n|>\lambda\}.$$

则

$$\mathrm{II}(\{f^*>\lambda\}) \leqslant \frac{1}{\lambda}|f_\tau|\mathrm{II}(\{f^*>\lambda\})$$

$$= \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}|f_n|\mathrm{II}(\{\tau=n\}),$$

$$
\begin{aligned}
&E_0(\mathrm{II}(\{f^*>\lambda\})\\
&\quad\leqslant\frac{1}{\lambda}\sum_0^\infty E_0(|f_n|\mathrm{II}(\{\tau=n\}))\\
&\quad\leqslant\frac{1}{\lambda}\sum_0^\infty E_0(E(|f_\infty|\mathrm{II}(\{\tau=n\})|\mathscr{F}_n))\\
&\quad=\frac{1}{\lambda}E_0(|f_\infty|\mathrm{II}(\{f^*>\lambda\}))\\
&\quad\leqslant\frac{1}{\lambda}E_0(|f_\infty|).
\end{aligned}
$$

由此证明了式(31). 再由式(31)还可得到 $\forall F\in\mathscr{F}_0$,

$$|F\cap\{f^*>\lambda\}|=\int_F\mathrm{II}(\{f^*>\lambda\})d\mu\leqslant\frac{1}{\lambda}\int_F|f_\infty|d\mu.$$

现设 $0<\delta<1$, 任取一个 $F\in\mathscr{F}_0$. 则有

$$
\begin{aligned}
\int_F f^{*\delta}d\mu&=\delta\int_0^\infty\lambda^{\delta-1}|\{f^*\mathrm{II}(F)>\lambda\}|d\lambda\\
&=\delta\int_0^\infty\lambda^{\delta-1}|\{f^*>\lambda\}\cap F|d\lambda\\
&\leqslant\delta\int_0^\alpha\lambda^{\delta-1}|F|d\lambda+\delta\int_\alpha^\infty\lambda^{\delta-2}\int_F|f_\infty|d\mu\\
&=2\left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^\delta\frac{1}{|F|^{\delta-1}}\left(\int_F|f_\infty|\,d\mu\right)^\delta.
\end{aligned}
$$

其中令

$$\alpha=\frac{\delta}{1-\delta}\frac{1}{|F|}\int_F|f_\infty|d\mu.$$

于是完成了式(31)′的证明. ▌

现在我们讨论命题 8′ 的逆命题. 但需附加如下条件: 设存在集合系的族 $\{\mathscr{I}_n\}_{n\geqslant0}$, $\mathscr{I}_n\subset\mathscr{F}_n$, 使 $\forall f(\in L_+^1)$都有

$$f_n(\omega)\leqslant C\sup_{F:\ \omega\in F\in\mathscr{I}_n}\frac{1}{|F|}\int_F fd\mu,\quad \text{a.e.,}\tag{32}$$

$$\sup_{F:\,\omega\in F\in\bigcup\limits_n \mathscr{I}_n}\frac{1}{|F|}\int_F f d\mu\leqslant Cf^*(\omega),\quad \text{a.e.}.\tag{32)$'$ (}$$

命题 9 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu,\{\mathscr{F}_n\}_{n\geqslant 0})$使式(32)与(32)$'$成立. 若非负的 $g(\in L^1)$, 使 $g^*<\infty$, a.e., 则 $\forall\delta(0<\delta<1)$都有 $g^{*\delta}\in A_1$, 并且

$$(g^{*\delta})^*\leqslant C_\delta g^{*\delta},\quad \text{a.e.}.\tag{33}$$

证明 对任意的 n, 考虑新 σ-代数族$\{\mathscr{F}'_m\}_{m\geqslant 0}=\{\mathscr{F}_{n+m}\}_{m\geqslant 0}$. 对定理中给定的 g, 以及这个新族应用式(31)$'$, 并利用式(32)与(32)$'$得

$$\begin{aligned}E\left(\left(\sup_{m\geqslant n} g_m\right)^\delta \Big|\mathscr{F}_n\right)&\leqslant C\sup_{\omega\in F\in\mathscr{I}_n}\frac{1}{|F|}\int_F(\sup_{m\geqslant n} g_m)^\delta d\mu\\&\leqslant C_\delta\sup_{\omega\in F\in\mathscr{I}_n}\left(\frac{1}{|F|}\int_F g d\mu\right)^\delta\\&\leqslant C_\delta g^{*\delta},\quad\forall n.\end{aligned}$$

于是, $\forall n$, 都有

$$\begin{aligned}E(g^{*\delta}|\mathscr{F}_n)&\leqslant E((\sup_{m<n} g_m)^\delta|\mathscr{F}_n)+E((\sup_{m\geqslant n} g_m)^\delta|\mathscr{F}_n)\\&\leqslant g^{*\delta}_{n-1}+C_\delta g^{*\delta}.\end{aligned}$$

由此推出

$$(g^{*\delta})^*\leqslant C_\delta g^{*\delta}.\ \blacksquare$$

注 当所有 $\mathscr{F}_n$ 都是由原子生成时, 若取 $\mathscr{I}_n$ 是$\mathscr{F}_n$ 的所有原子的系, 则易知式(32)与(32$'$)自然成立.

定理 5 $f\in$BLO, 当且仅当对某个 $\lambda>0$, 有 $z=e^{\lambda f}\in A_1\cap S$.

证明 设 $f\in$BLO. 则存在 $\lambda>0$, 使

$$E(\exp(\lambda(f-f_n))|\mathscr{F}_n)\leqslant K_1.$$

于是

$$E(e^{\lambda f}|\mathscr{F}_n)\leqslant K_1e^{\lambda f_n}\leqslant K_1\exp(\lambda(f+\|f\|_{\text{BLO}}))=Ke^{\lambda f}.$$

这就证明了 $z=e^{\lambda f}\in A_1$. 至于 $z\in S$, 是因为(如只看 S^+)

$$E(e^{\lambda f}|\mathscr{F}_n)\leqslant K_1e^{\lambda f_n}\leqslant Ke^{\lambda f_{n-1}}\leqslant KE(e^{\lambda f}|\mathscr{F}_{n-1}).$$

反之,设 $z=e^{\lambda f}\in A_1\cap S$. 则由 Jensen 不等式得

$$e^{\lambda f_n}\leqslant E(e^{\lambda f}|\mathscr{F}_n)\leqslant Ke^{\lambda f}=e^{\lambda f+K},$$

因此,

$$f_n\leqslant f+\frac{K}{\lambda},\qquad \text{a. e.}, \forall n. \tag{34}$$

此外,我们已在定理 4 中证明了,由 $z=e^{\lambda f}\in A_p\cap S(p>1)$可推出 $f\in\mathrm{BMO}$. 既然 $A_1\cap S\subset A_p\cap S$, 故由式(34),以及 $f=(f_n)\in\mathrm{BD}$, 即得 $f\in\mathrm{BLO}$. ▮

注 在定理 4 与定理 5 的第二部分中,由于都附加了条件$z=e^{\lambda f}\in S$, 才能由 $z\in A_p$(或 A_1) 推出 $f\in\mathrm{BMO}$(或 BLO). 必须指出,条件 $z\in S$ 不能除去. 譬如在$\{\mathscr{F}_n\}_{n\geqslant 0}$满足

$$\mathscr{F}_0\text{平凡},\quad \mathscr{F}_1=\mathscr{F}_2=\cdots=\mathscr{F}$$

这个不正规情形(对任意概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$) 时,都有 $\mathrm{BMO}=\mathrm{BLO}=L^\infty$. 但

$$A_p=\{\text{非负 } f: f\in L^1, f^{-1}\in L^{1/(p-1)}\};$$
$$A_1=\{\text{非负 } f: f\in L^1, f\geqslant a>0\}.$$

此时,对 $z\in A_p$(或 A_1), 当然不一定有 $\log z\in L^\infty$. 这说明当 $z\overline{\in}S$ 时,结论就不一定成立.

现在讨论在第二种自然方式下 A_p 与 BMO 的关系. 此时我们将一个实过程 $f=(f_n)_{0\leqslant n\leqslant\infty}$与一个严格正过程$\tilde{z}=(\tilde{z}_n)_{0\leqslant n\leqslant\infty}$, 通过关系 $\tilde{z}_n=e^{f_n}$互相对应,来讨论 f 的 BMO 属性与 $\tilde{z}^\lambda$(对某个$\lambda>0$)的 A_p 属性之间的关系. 这种方式与第一种方式基本上是类似的.

命题 10 设 $f=(f_n)$ 是 L^1 中的实鞅, $\lambda>0$, $z=(z_n)$, $z_n=E(e^{\lambda f}|\mathscr{F}_n)$. 则 $z\in A_p\cap S$, 当且仅当$z\in b^+_\lambda\cap b^-_{-\frac{\lambda}{p-1}}\cap S$, $1\leqslant p<\infty$.

证明 先看 $1<p<\infty$. 设 $z\in A_p$, 则根据命题 7 知

$$E(\exp(\lambda(f-f_n))|\mathscr{F}_n)\leqslant K^{\lambda}, \tag{35}$$

$$E\left(\exp\left(-\frac{\lambda}{p-1}(f-f_n)\right|\mathscr{F}_n\right)^{p-1}\leqslant K^{\lambda}. \tag{35'}$$

此即 $\tilde{z}\in b_{\lambda}^{+}\cap b_{-\frac{\lambda}{p-1}}^{-}$. 反之, 由式(35)与(35)$'$可推出 $z\in A_p$. 现讨论两个过程的 S 属性. 因为由式(35)及下式

$$e^{\lambda f_n}\leqslant E(e^{\lambda f}|\mathscr{F}_n)$$

即推出

$$z_n=E(e^{\lambda f}|\mathscr{F}_n)\sim\tilde{z}_n^{\lambda}=e^{\lambda f_n}.$$

这说明两者的 S 属性当式(35)成立时是等价的. 而 $z\in A_p$ 与 $\tilde{z}\in b_{\lambda}^{+}$ 都保证了式(35)成立. 所以 $z\in A_p\cap S$ 当且仅当 $\tilde{z}\in b_{\lambda}^{+}\cap S$. 即 $p>1$ 的情形获证.

现看 $p=1$. 当 $z\in A_1$ 时, 式(35)仍然成立, 且

$$e^{\lambda f_n}\leqslant E(e^{\lambda f}|\mathscr{F}_n)\leqslant Ke^{\lambda f},$$

此即 $\tilde{z}\in b_{-\infty}^{-}\cap b_{\lambda}^{+}$. 反之, 由 $\tilde{z}\in b_{\lambda}^{+}\cap b_{-\infty}^{-}$ 推出 $z\in A_1$. 此外, 关于 S 属性的证明同上面完全一样, 不再另述. ▮

最后, 我们考虑第三种方式, 即讨论随机指数的 A_p 属性与随机对数的 BMO 属性之间的关系.

定义 6 设 $f=(f_n)_{n\geqslant0}$ 是满足 $f_0=0$ 以及 $1+\Delta f_n\geqslant h>0$ 的鞅. 定义 $\mathscr{E}f=z=(z_n)_{n\geqslant0}$ 为如下鞅

$$z_n=\prod_{k\leqslant n}(1+\Delta f_k),\quad z_0\equiv1. \tag{36}$$

z 被称为 f 的随机指数. 设 $z=(z_n)_{n\geqslant0}$ 是非负鞅, 满足 $z_0\equiv1$, $z\in S^{-}$. 定义 $\mathscr{L}z=f=(f_n)_{n\geqslant0}$ 为如下鞅

$$f_n=\sum_{1}^{n}\frac{\Delta z_k}{z_{k-1}},\quad f_0=1. \tag{37}$$

f 被称为 z 的随机对数.

注 1 易知上述 f 与 z 是通过如下方程

$$\Delta z_n = z_{n-1}\Delta f_n, \quad \forall n$$

被互相给出. 对于连续参变量的情形, z, f 分别是下述随机积分方程的解:

$$z_t = 1 + \int_0^t z_{u^-}\, df_u, \tag{36$'$}$$

$$f_t = \int_0^t \frac{1}{z_{u^-}} dz_u. \tag{37$'$}$$

注 2 先给定 f, 然后通过式(36)定义 z; 与先给定 z, 然后通过式(37)定义 f, 这两个步骤是互逆的. 这就是说, 如连续作用这两个步骤则得恒等算子. 譬如, 我们先给定鞅 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$ 且满足 $f_0\equiv 0$ 以及 $1+\Delta f_n \geqslant h > 0$. 通过式(36)我们得到了 $z=(z_n)_{n\geqslant 0}$. 我们指出, z 是一个非负鞅, 且满足 $z_0\equiv 1$ 以及 $z\in S^-$. 事实上, 有

$$z_n = z_{n-1}(1+\Delta f_n) \geqslant h z_{n-1}, \quad \forall n.$$

$$E(z_n | \mathscr{F}_{n-1}) = z_{n-1}E(1+\Delta f_n | \mathscr{F}_{n-1}) = z_{n-1}, \quad \forall n.$$

第一式说明 $z\in S^-$, 第二式说明 z 是一个鞅. 将所得之 z, 再利用式(37)定义出 f, 则所得的 f 即为原来的 f, 因为它们满足相同的方程

$$\Delta f_n = \frac{z_n}{z_{n-1}} - 1, \quad \forall n, \text{ 以及 } f_0 \equiv 0.$$

同样, 如先给定非负鞅 $z=(z_n)_{n\geqslant 0}$, 满足 $z_0\equiv 1$, $z\in S^-$. 通过式(37)定义出来的 f, 一定是一个满足 $f_0\equiv 0$ 与 $1+\Delta f_n \geqslant h > 0$ 的鞅. 再由式(36)定义出来的 z 一定也是原来的 z.

现在我们来讨论由定义 6 所定义的随机指数的 A_p 属性与随机对数的 BMO 属性之间的关系. 我们有

定理 6 设 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$ 与 $z=(z_n)_{n\geqslant 0}$ 是通过式(36)与(37)联系的一对鞅. 若 $z\in S^+\cap a_p (p>1)$, 则 $f\in$BMO; 若 $f\in$BMO, 则对某个 $p>1$, $z\in S\cap a_p$. 并且此时 $z=(z_n)_{n\geqslant 0}$ 还是 $L^{1+\varepsilon}(\varepsilon>0)$ 中

有界的鞅.

证明 注意 $z\in S^-$ 与 $1+\Delta f_n\geqslant h$ 是先决条件. 如果还满足 $z\in S^+$ 或 $f\in\mathrm{BMO}$, 则都有

$$-1+h\leqslant\Delta f_n\leqslant H,\quad \forall n.\tag{38}$$

首先考虑 $z\in S\cap a_p$ 的情形. 由 $z\in a_p(K)$ 可证对所有的 n, 停止于 n 的鞅 $z^{(n)}\in a_{p+1}(K)$. 事实上, 因 $(z_n)_{n\geqslant0}$ 是非负的鞅. 当然是一个 L^1 有界的非负上鞅, 故 z_∞ 存在, 且 $(z_n)_{0\leqslant n\leqslant\infty}$ 仍是一个非负上鞅. 因此

$$\begin{aligned}E\left(\left(\frac{z_k}{z_n}\right)^{\frac{1}{p}}\middle|\mathscr{F}_k\right)^p&\leqslant E\left(\left(\frac{z_k}{z_\infty}\right)^{\frac{p'}{p}}\middle|\mathscr{F}_k\right)^{\frac{p}{p'}}E\left(\frac{z_\infty}{z_n}\middle|\mathscr{F}_k\right)\\&=E\left(\left(\frac{z_k}{z_\infty}\right)^{\frac{1}{p-1}}\middle|\mathscr{F}_k\right)^{p-1}E\left(E\left(\frac{z_\infty}{z_n}\middle|\mathscr{F}_n\right)\middle|\mathscr{F}_k\right)\\&\leqslant K,\quad\forall k\leqslant n.\end{aligned}$$

当用 $z^{(n)}$ 代替 z 时, 通过式(37)得到的即是停止于 n 的 f. 因为它是有限鞅, 故是 L^1 中的鞅. 上面的讨论说明, 我们无妨开始就设, 由给定的 $z=(z_n)$ 通过式(37)所得到的 $f=(f_n)$ 就是一个 L^1 中的鞅, 特别地 f_∞ 是a.e.存在的, 同时 $S(f)<\infty$, a.e., 再由式(38)知, $f=(f_n)$ 是跳跃有界的, 因此为证 $f\in\mathrm{BMO}$, 只需证明

$$E(S^2(f)-S_n^2(f)\mid\mathscr{F}_n)\leqslant C<\infty,\quad\forall n.$$

由 $z=(z_n)$ 的 $a_{p+1}(K)$ 属性(实际上, 已将 z 变成了停止于有限时刻的鞅), 我们有

$$E\left(\left(\frac{z_n}{z_\infty}\right)^{\frac{1}{p}}\middle|\mathscr{F}_n\right)\leqslant K,$$

$$E\left(\exp\left(\frac{1}{p}\left(f_n-f_\infty\right)\right)\prod_{k>n}\left(\frac{\exp\Delta f_k}{1+\Delta f_k}\right)^{\frac{1}{p}}\middle|\mathscr{F}_n\right)\leqslant K.$$

利用如下初等不等式(其证明见后)

$$\frac{e^x}{1+x}\geqslant e^{jx^2},\quad x\in[-1+h,H], \text{对某个} j,\tag{39}$$

我们得

$$E\left(\exp\left(\frac{1}{p}(f_n-f_\infty)\right)\exp\left(\frac{j}{p}\sum_{k=n+1}^{\infty}|\Delta f_k|^2\right)\Big|\mathscr{F}_n\right)$$

$$\leqslant E\left(\exp\left(\frac{1}{p}(f_n-f_\infty)\right)\prod_{k>n}\left(\frac{\exp\Delta f_k}{1+\Delta f_k}\right)^{\frac{1}{p}}\Big|\mathscr{F}_n\right)\leqslant K.$$

再利用 Jensen 不等式得

$$\exp\left(E\left(\frac{1}{p}(f_n-f_\infty)+\frac{j}{p}(S^2(f)-S_n^2(f))\Big|\mathscr{F}_n\right)\right)\leqslant K,$$

即

$$E(|f-f_n|^2|\mathscr{F}_n)=E(S^2(f)-S_n^2(f)|\mathscr{F}_n)\leqslant\frac{p}{j}\log K.$$

由此，定理的第一部分获证.

现设 $f\in\mathrm{BMO}$，满足 $1+\Delta f_n\geqslant h>0$. 则显然有 $z\in S$，因为

$$h\leqslant\frac{z_n}{z_{n-1}}\leqslant 1+\|f\|_{\mathrm{BMO}}.$$

利用下面的初等不等式(其证明见后)

$$\frac{e^x}{1+x}\leqslant e^{jx^2},\quad x\in[-1+h,H],\ \text{对某个}\ j, \tag{39$'$}$$

对待定的 $\varepsilon>0$，我们有

$$E\left(\left(\frac{z_n}{z_\infty}\right)^{\varepsilon}\Big|\mathscr{F}_n\right)$$

$$=E\left(\exp(\varepsilon(f_n-f_\infty))\prod_{k>n}\left(\frac{\exp\Delta f_k}{1+\Delta f_k}\right)^{\varepsilon}\Big|\mathscr{F}_n\right)$$

$$\leqslant E(\exp(\varepsilon(f_n-f_\infty)+j\varepsilon(S^2(f)-S_n^2(f)))|\mathscr{F}_n)$$

$$\leqslant E(\exp(2\varepsilon|f_n-f_\infty|)|\mathscr{F}_n)^{\frac{1}{2}}$$

$$\cdot E(\exp(2j\varepsilon(S^2(f)-S_n^2(f)))|\mathscr{F}_n)^{\frac{1}{2}}.$$

因为 $f\in\mathrm{BMO}$，只要 $\varepsilon>0$ 充分小便有(见 5.1 节的定理 1 与 1′)

$$E(\exp(2\varepsilon|f-f_n|)|\mathscr{F}_n)^{1/2}\leqslant C_1,$$

$$E(\exp(2j\varepsilon(S^2(f)-S_n^2(f)))|\mathscr{F}_n)^{1/2}\leqslant C_2.$$

因而有

$$E\left(\left(\frac{z_n}{z_\infty}\right)^\varepsilon\middle|\mathscr{F}_n\right)\leqslant C_1C_2<\infty,\quad \text{a.e.}, \forall n.$$

此即 $z\in A_p$, $p=1+1/\varepsilon$. 定理之第二部分获证.

现证明定理的最后部分结论,即:当 f 与 z 通过式(36)与(37)互相联系,并且等价条件之一

"$f\in\mathrm{BMO}$, $1+\Delta f_n\geqslant h>0$"或"$z\in S\cap a_p$"

成立时,则 $z=(z_n)_{n\geqslant 0}$ 是 $L^{1+\varepsilon}(\varepsilon>0)$ 有界的. 事实上,因为

$$z=(z_n)\in b_1^+(1)\,(因(z_n)_{0\leqslant n\leqslant\infty}是非负上鞅);$$

$$z\in S\cap a_p=S\cap b_\lambda^-,\quad \lambda=-\frac{1}{p-1}.$$

因此由定理 3 之第二部分知,存在 $\varepsilon>0$, 使

$$E(z_\infty^{1+\varepsilon})^{1/(1+\varepsilon)}\leqslant CE(z_\infty).$$

现在对任意的 n, 考虑 z 的停止鞅 $z^{(n)}$. 则对 n 一致地有

$$z^{(n)}\in b_1^+\cap S\cap b_{-1/p}^-,$$

这里"一致"意味着,三个条件中出现的所有常数都是与 n 无关的. 这样,由上面的讨论知,对一切 n 存在同样的常数 ε 与 C, 使每个 $z_n(=z_\infty^{(n)})$ 都满足同样的不等式,即

$$E(z_n^{1+\varepsilon})^{1/(1+\varepsilon)}\leqslant CE(z_n)=C,\quad \forall n.$$

于是证明了 $z=(z_n)_{n\geqslant 0}$ 是 $L^{1+\varepsilon}$ 中有界的. ∎

注 现在我们补充证明式(39)与(39)′. 因为

$$e^x-1-x\leqslant(e-2)x^2,\quad x\leqslant 1,$$

因此有

$$\frac{e^x}{1+x}\leqslant 1+\frac{e-2}{1+x}x^2\leqslant e^{x^2/h},\quad h\leqslant 1+x\leqslant 2.$$

但当 $x>1$ 时,只要取 j 适当的大,便有

$$\frac{e^x}{1+x} \leqslant e^{jx^2}.$$

因此对此 j 有

$$\frac{e^x}{1+x} \leqslant e^{jx^2}, \quad h \leqslant 1+x < \infty.$$

这就证明了式(39)′. 现证式(39). 因为

$$e^x - 1 - x \geqslant \frac{x^2}{e}, \qquad x \geqslant -1,$$

因此对 $x \in (-1, H]$, 我们有

$$\frac{e^x}{1+x} \geqslant 1 + \frac{x^2}{e(1+x)} \geqslant 1 + \frac{x^2}{e(1+H)}.$$

注意在$(-1, 0]$上, $e^{jx^2} \sim 1 + jx^2$, 故只要适当地取 j 小于$(e(1+H))^{-1}$, 便有

$$\frac{e^x}{1+x} \geqslant e^{jx^2};$$

而在$[0, H]$上, 因为

$$\log\left(1 + \frac{x^2}{e(1+H)}\right) \geqslant \frac{\log(1+b)}{b} \frac{x^2}{e(1+H)}, \quad b = \frac{H^2}{e(1+H)},$$

故使得不等式

$$\frac{e^x}{1+x} \geqslant e^{jx^2}$$

成立的 j 是显然存在的. 这就完成了式(39)的证明.

6.5 A_p 权的因子分解

我们已经指出对 L^1 中严格正的 z (此后我们简称这样的 z 为权), 它们的 A_p 属性是一个随 p 增大而减弱的性质, 其中 A_1 属性是一个最强而又最好用的性质. Jones[1]指出, 如能实现将每个 A_p 权因子分解为 A_1 中权的幂的乘积, 则许多重要的事实便能作为推

论而得出. 当然, Jones[1]已成功地实现了这个分解. 我们将在本节建立 Jones 的这个定理在鞅论中的类似. 它的准备工作已在 5.2 节中作过. 事实上, 正如6.4 节中命题 7 指出的, $z=e^f\in A_p$, 当且仅当 $f\in\log A_{1,(p-1)^{-1}}$, 因而, 权$z\in A_p$的因子分解与 $f=\log z$的和差分解有密切关系. 而我们已对 $f\in\log A_{\alpha,\beta}\cap\mathrm{BD}$ 作过将它表为 BLO 鞅的差的分解. 因此, 在本节的任务主要是应用这个结果.

定理 7 设 $1\leqslant p<\infty$. 则权 $z\in A_p\cap S$, 当且仅当存在 $z_1, z_2\in A_1\cap S$, 使

$$z=z_1z_2^{1-p}. \tag{40}$$

证明 设 $1\leqslant p<\infty$, $z_i\in A_1\cap S$, $i=1,2$. 则易知 $z=z_1z_2^{1-p}\in A_p\cap S$. 事实上, 因为

$$\begin{aligned}
&E(z_1z_2^{1-p}|\mathscr{F}_n)E((z_1z_2^{1-p})^{-(p-1)^{-1}}|\mathscr{F}_n)^{p-1}\\
&=E(z_1z_{2,n}^{p-1}z_2^{1-p}|\mathscr{F}_n)z_{2,n}^{1-p}\\
&\quad\cdot E(z_1^{-1/(p-1)}z_{1,n}^{1/(p-1)}z_2|\mathscr{F}_n)^{p-1}z_{1,n}^{-1}\\
&\leqslant K_2E(z_1|\mathscr{F}_n)z_{1,n}^{-1}K_1E(z_2|\mathscr{F}_n)^{p-1}z_{2,n}^{1-p}\\
&=K_1K_2,
\end{aligned}$$

故 $z=z_1z_2^{1-p}\in A_p$. 此外, 若记 $z_i=e^{f_i}$, $i=1,2$, 则由 6.4 节的定理 5知, $f_i\in\mathrm{BLO}$, 故

$$\log z=f_1+(1-p)f_2\in\mathrm{BMO},$$

于是 $z\in S$. 从而 $z\in A_p\cap S$ 得证.

现证其逆, 这是本定理的主要部分. 我们已在 6.3 节的推论5指出, 由 $z\in A_p\cap S$ 知, 存在 $\varepsilon>0$, 使 $z^{1+\varepsilon}\in A_p\cap S$. 由 6.4 节的定理 4 与命题 7 知

$$f\in\mathrm{BMO},\quad (1+\varepsilon)f\in\log \mathrm{A}_{1,(p-1)^{-1}},$$

此即 $f\in\log A_{1+\varepsilon,\frac{1+\varepsilon}{p-1}}$. 现在我们应用5.2节定理3中关于 $\log A_{\alpha,\beta}\cap \mathrm{BD}$ 鞅的分解来分解 $f=\log z$, 其中 $z\in A_p\cap S$ 为已知.

根据5.2节的定理3知, 存在 $g, h\in\mathrm{BLO}$, $\psi\in L^\infty$, 使得

$$g\in\log A_{1+\delta,\tau},\quad h\in\log A_{\frac{1+\delta}{p-1},\tau},$$

其中 $\tau>0$ 与 $\delta<\varepsilon$ 都为任意的, 并且

$$f=g-h+\psi=f_1-f_2,$$

其中 $f_1=g+\psi, f_2=h$(也可将 $h-\psi$ 看成 f_2). 当然仍有

$$f_1\in\log A_{1+\delta,\tau},\ f_2\in\log A_{\frac{1+\delta}{p-1},\tau},\ f_i\in\mathrm{BLO}, i=1,2.$$

但是, 由6.4节定理5的证明知, 若 $f\in\mathrm{BLO}$, 且

$$E(e^{\lambda(f-f_n)}|\mathscr{F}_n)\leqslant K<\infty,\quad \forall n,$$

则 $e^{\lambda f}\in A_1\cap S$. 这样

$$e^{(1+\delta)f_1}\in A_1\cap S,\quad e^{\frac{1+\delta}{p-1}f_2}\in A_1\cap S,\quad \delta>0.$$

当然更有

$$z_1=e^{f_1}\in A_1\cap S,\ \ z_2=e^{\frac{1}{p-1}f_2}\in A_1\cap S.$$

(因若 $z\in A_1$, 则 $\forall 0<\alpha<1$, $z^\alpha\in A_1$, 这是 Hölder 不等式的结果.) 于是我们得到了关于 z 的因子分解

$$z=e^f=e^{f_1}e^{-f_2}=z_1z_2^{1-p}.\ \blacksquare$$

6.6 鞅的加权Φ-不等式

设 z 是一个测度变换, $\hat{\mu}=z_\infty\mu$. 又设 $\Phi(u)$是$[0,\infty)$上满足 $\Phi(0)=0$ 的限制增长的连续增加函数, 有时也考虑 $\Phi(u)$是凸或凹的情形. 我们要讨论关于$(\{\mathscr{F}_n\}_{n\geqslant0},\mu)$的鞅的极大算子的、均方根算子的以及条件均方根算子的$\hat{L}^p$ 有界性, 或它们之间的$\hat{L}^\Phi$等价性. 讨论上述问题时所设条件主要是条件 A_∞与条件 S (或者它们

中的一部分）．这两个条件在讨论加权问题时是十分方便的，可以说有了它们就没有太多本质的困难了．但是要想用更弱的条件来代替它们，即使在古典情形（此时 S 条件是自然满足的）也恐怕还不到时候．此外，本节仍然假定 $\mathscr{F}_0$ 为平凡的，及鞅 $(f_n)_{n\geq 0}$ 的初值 $f_0\equiv 0$．

首先我们对极大算子 $M: f\to f^*$ 的加权弱型不等式进行刻划，这甚至在两权情形也是解决了的．设 U, V 是两个非负随机变量，$1\leq p<\infty$．我们称鞅 $f=(f_n)_{n\geq 0}\in L^p(Ud\mu)$，如序列 (f_n) 在 $L^p(U)$ 中收敛于某极限，仍记此极限为 f．我们要刻划 (U, V) 使 M 是弱 $(L^p(U), L^p(V))$ 型①的，简称为弱 (p, p) 型．可以证明：为了使得 M 关于 (U, V) 是弱 (p, p) 型的，则必须

$$\int_\Omega V d\mu<\infty, \tag{41}$$

$$U^{-\frac{1}{p-1}}\in L^1(d\mu),\ \text{当} p>1;\quad U^{-1}\in L^\infty,\ \text{当}\ p=1. \tag{42}$$

又为了使得问题为非平凡的，则应有 $U\not\equiv\infty$，而且 $V\not\equiv 0$．必须指出，在条件(42)下，$L^p(U)$ 中的鞅也是 $L^1(d\mu)$ 中的鞅．现在定义两个权情形下的 A_p 条件，记为 $A_{p,p}$．

定义 7 (U, V) 称为满足 $A_{p,p}$ 条件，如

$$\begin{cases} E(V|\mathscr{F}_n)E(U^{-\frac{1}{p-1}}|\mathscr{F}_n)^{p-1}\leq C_p, & \text{a.e.}\ \forall n,\ 1<p<\infty, \\ E(V|\mathscr{F}_n)\leq CU, & \text{a.e.}\ \forall n,\ p=1. \end{cases} \tag{43}$$

定理 8 设 $1\leq p<\infty$．则下述等价

---

① 设 M 是由测度空间 (X, dx) 上的可测函数空间到 (Y, dy) 上的可测函数空间内的拟线性算子，$0<p, q<\infty$．称 M 是弱 (p, q) 型的，如

$$|\{y: |Mf|>\lambda\}|_{dy}\leq\left(\frac{C}{\lambda}\left(\int_X |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\right)^q,\quad \forall\lambda>0,\quad \forall f;$$

称 M 是强 (p, q) 型的，如

$$\left(\int_Y |Mf|^q dy\right)^{\frac{1}{q}}\leq C\left(\int_X |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}},\quad \forall f.$$

1) 设T是停止时间, E_T是条件期望算子: $f \to f_T$. 有

$$\sup_T\left(\int_{\{T<\infty\}}|f_T|^p V d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant C_p^{(1)}\left(\int_\Omega |f|^p U d\mu\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall f\in L^p(U), \tag{44}$$

2) M是弱(p,p)型, 即

$$|\{f^*>\lambda\}|_V^{1/p} \leqslant C_p^{(2)}\lambda^{-1}\left(\int_\Omega |f|^p U d\mu\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\forall f\in L^p(U), \forall \lambda>0, \tag{45}$$

3) $(U,V)\in A_{p,p}$, 即(式(43)中两式合为一式)

$$E(V|\mathscr{F}_n)E(U^{-\frac{1}{p-1}}|\mathscr{F}_n)^{p-1}\leqslant C_p^{(3)p}. \tag{46}$$

证明 1) $\Rightarrow$ 2). 设$f=(f_n)_{n\geqslant 0}\in L^p(U)$. 任给$\lambda>0$, 定义停止时间

$$T=\inf\{n:\ |f_n|>\lambda\}.$$

我们有

$$|\{f^*>\lambda\}|_V=\int_{\{T<\infty\}}V d\mu\leqslant\lambda^{-p}\int_{\{T<\infty\}}|f_T|^p V d\mu$$

$$\leqslant\left(C_p^{(1)}\lambda^{-1}\left(\int_\Omega |f|^p U dx\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p.$$

2) $\Rightarrow$ 1). 对任意的n与$B\in\mathscr{F}_n$, 以及$f\in L^p(U)$, 我们令$g=f\mathrm{II}(B)$. 则

$$E(g|\mathscr{F}_n)=E(f|\mathscr{F}_n)\mathrm{II}(B), |f_n|\mathrm{II}(B)\leqslant g^*.$$

这样由2), 对任意的$\lambda>0$, 有

$$|\{|f_n|>\lambda\}\cap B|_V\leqslant|\{g^*>\lambda\}|_V$$

$$\leqslant\left(C_p^{(2)}\lambda^{-1}\left(\int_B |f|^p U d\mu\right)^{1/p}\right)^p,$$

$$\lambda^p\int_{B\cap\{|f_n|>\lambda\}}V d\mu\leqslant C_p^{(2)p}\int_B |f|^p U d\mu.$$

对所有的$k\in\mathbf{Z}$, 令

$$B_k=\{2^k<|f_n|\leqslant 2^{k+1}\}\subset\{|f_n|>2^k\}.$$

则我们有

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f_n|^p V\,dx &\leqslant 2^p\sum_{-\infty}^{\infty}\int_{B_k\cap\{|f_n|>2^k\}} 2^{kp}V\,d\mu\\ &\leqslant 2^pC_p^{(2)p}\sum_{-\infty}^{\infty}\int_{B_k}|f|^pU\,d\mu\\ &\leqslant (2C_p^{(2)}\|f\|_{L^p(U)})^p.\end{aligned}\tag{47}$$

由式(47)即可直接推出式(44).

1)⇒3). $p>1$ 时, 对任意的 n, 令 $T=n$,

$$f=U^{-\frac{1}{p-1}}\mathrm{II}(B),\quad \forall B\in\mathscr{F}_n.$$

则

$$\begin{aligned}&\int_B E(U^{-\frac{1}{p-1}}|\mathscr{F}_n)^pE(V|\mathscr{F}_n)\,d\mu\\ &=\int_B E(U^{-\frac{1}{p-1}}|\mathscr{F}_n)^pV\,d\mu\\ &\leqslant C_p^{(1)p}\int_B U^{-\frac{1}{p-1}}d\mu=C_p^{(1)p}\int_B E(U^{-\frac{1}{p-1}}|\mathscr{F}_n)\,d\mu,\end{aligned}$$

由此即得式(43)之第一式. $p=1$ 时, $\forall f\in L_+^1(U)$, 有

$$\int fV_n\,d\mu=\int f_nV\,d\mu\leqslant C_1^{(1)}\int fU\,d\mu.$$

由 f 的任意性, 即得式(43)的第二式.

3)⇒1). 设 $f\in L^p(U)$. 则(不论是否 $p=1$)对任意的 n, 有

$$|E(f|\mathscr{F}_n)|^p\leqslant E(|f|^pU|\mathscr{F}_n)E(U^{-\frac{1}{p-1}}|\mathscr{F}_n)^{p-1}.\tag{48}$$

于是我们有

$$\begin{aligned}\int|f_n|^pV\,d\mu&=\int|f_n|^pE(V|\mathscr{F}_n)\,d\mu\\ &\leqslant\int E(|f|^pU|\mathscr{F}_n)E(V|\mathscr{F}_n)E(U^{-\frac{1}{p-1}}|\mathscr{F}_n)^{p-1}d\mu\end{aligned}$$

$$\leqslant C_p^{(3)p}\int E(|f|^p U|\mathscr{F}_n)d\mu$$

$$=C_p^{(3)p}\int |f|^p U d\mu.$$

由此知，对一切停止时间 T，我们有式(44)。

至此我们完成了定理的证明．证明中同时获得

$$C_p^{(2)}\leqslant C_p^{(1)}=C_p^{(3)}\leqslant 2C_p^{(2)}. \blacksquare$$

定理 9 设 $1<p<\infty$，z 是一个测度变换，并且 $z\in S^-$．则关于 $(\{\mathscr{F}_n\}_{n\geqslant 0},\mu)$ 的鞅的极大算子是 $\hat{L}^p$ 中有界算子，当且仅当 $z\in A_p$。

证明 在 $U\equiv V\equiv z$ 的特殊情形，定理 8 指出，$(\{\mathscr{F}_n\},\mu)$ 中的鞅极大算子关于测度 $\hat{\mu}$ 是弱 (p,p) 型的，当且仅当 $z\in A_p$．因此由极大算子是(强) (p,p) 型的，自然可以推出 $z\in A_p$。

现证由 $z\in A_p$，推出极大算子是 (p,p) 型的，$p>1$．由 6.3 节的推论 3 知，由 $z\in a_p\cap S^-$ 可推出 $z\in a_{p-\varepsilon}$，$\varepsilon>0$．再由 6.2 节的推论 1 知，此时有

$$E(Y_\infty|\mathscr{F}_n)^{p-\varepsilon}\leqslant K\hat{E}(Y_\infty^{p-\varepsilon}|\mathscr{F}_n),\quad \forall n,$$

其中 Y_∞ 是任意的非负可测函数．显然，由此可以推出对一切可测函数 f，使得 $|f|^{p-\varepsilon}\in\hat{L}^1$，也有

$$|E(f|\mathscr{F}_n)|^{p-\varepsilon}\leqslant K\hat{E}(|f|^{p-\varepsilon}|\mathscr{F}_n),\quad \forall n.$$

从而

$$f^{*(p-\varepsilon)}\leqslant K\sup_n\hat{E}(|f|^{p-\varepsilon}|\mathscr{F}_n).\tag{49}$$

特别地，对所有满足 $f\in\hat{L}^{\frac{p}{p-\varepsilon}}$ 的函数 f，式(49)成立．现应用相对于 $(\{\mathscr{F}_n\}_{n\geqslant 0},\hat{\mu})$ 的鞅的 Doob 极大不等式得

$$\|f^{*(p-\varepsilon)}\|^{\wedge}_{p/(p-\varepsilon)}\leqslant K\|\sup_n\hat{E}(|f|^{p-\varepsilon}|\mathscr{F}_n)\|^{\wedge}_{p/(p-\varepsilon)}\leqslant K\||f|^{p-\varepsilon}\|^{\wedge}_{p/(p-\varepsilon)},$$

此即

$$\|f^*\|^{\wedge}_p\leqslant K\|f\|^{\wedge}_p. \blacksquare$$

注 定理中的附加条件 $z\in S^-$，是为了保证由 $z\in A_p$ 推出

$z\in A_{p-\varepsilon}(\varepsilon>0)$而设的。如果没有这个附加条件，当然$z\in A_{p-\varepsilon}(\varepsilon>0)$不再成立。但是它对这个定理的结论并非必需，正如Bonami-Lepingle[1]在举出$z\in A_p$，但$z\overline{\in}\bigcup_{\varepsilon>0}A_{p-\varepsilon}$的例子时指出的，这个例子并没有破坏极大算子关于测度$\hat{\mu}$仍然是(强)(p,p)型的结论。

我们回到6.3节断言5后面举出的例子。设

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}x_k\mathrm{II}(I_k),\quad I_k=\left(\frac{1}{(k+1)!},\frac{1}{k!}\right]$$

为$((0,1],dt,\{\mathscr{F}_n\}_{n\geq 0})$上的$L^1$中实函数，其中$\mathscr{F}_n$为

$$\{I_k\}_{k\leq n}\quad 与\quad \left(0,\frac{1}{(n+1)!}\right]$$

生成的σ-代数，$n=0,1,\cdots$；z为在A_2中但不在$A_{2-\varepsilon}$中的权。则

$$\begin{aligned}\hat{E}(x^2)&=\int_0^1 x^2z\,dt=\sum_{k=1}^{\infty}x_k^2\ \frac{2^k}{k!}\ \frac{k}{(k+1)!}\\&\geq\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}x_k^2 2^k(k!)^{-2}\\&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}y_k^2 2^{-k}=\frac{1}{2}\int_0^{1/2}y^2\,dt,\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}&y=\sum_{k=1}^{\infty}y_k\mathrm{II}(J_k),\quad J_k=(2^{\frac{1}{k+1}},2^{\frac{1}{k}}],\\&y_k=x_k2^k(k!)^{-1},\quad k=1,2,\cdots.\end{aligned}\tag{$*$}$$

现在我们在$(0,1/2]$上考虑与二进情形类似的鞅，即$\mathscr{G}_n$由$\{J_k\}_1^n$与$\left(0,\dfrac{1}{2^{n+1}}\right]$生成的情形。记此时的条件期望算子为$E'$、上面的讨论指出，对任意的$x\in\hat{L}^2$，由式$(*)$中给出的$y$是$(0,1/2]$上的$L^2$函数，它当然生成一个关于$((0,1/2],dt,\{\mathscr{G}_n\})$的$L^2$中鞅。

记

$$y^*=\sum_{k=1}^{\infty} y_k^* \mathrm{II}(J_k),$$

$$y_k^*=\max\left(|y_k|, \max_{n\leqslant k}\left|2^n\int_0^{2^{-n}} y\,dt\right|\right),$$

$$x^*=\sum_{k=1}^{\infty} x_k^* \mathrm{II}(I_k);$$

$$x_k^*=\max\left(|x_k|, \max_{n\leqslant k}\left|n!\int_0^{(n!)^{-1}} x\,dt\right|\right).$$

易知 y^*, x^* 分别是 y 与 x 生成的鞅的极大函数. 如果我们能够证明

$$x_k^*\leqslant k!2^{-k}y_k^*, \tag{50}$$

则我们便有

$$\hat{E}(x^{*2})\leqslant\sum_{k=1}^{\infty} x_k^{*2}2^k(k!)^{-2}\leqslant\sum_{k=1}^{\infty} y_k^{*2}2^{-k}$$
$$=E'(y^{*2})\leqslant CE'(y^2)\leqslant C\hat{E}(x^2).$$

于是即完成所需要的结论: 极大算子关于 $\hat{\mu}$ 是(强)(2, 2)型的.

现在再回来证明式(50). 这只需注意下面的两个估计

$$|x_k|=k!2^{-k}|y_k|,$$

$$\left|n!\int_0^{(n!)^{-1}} x\,dt\right|\leqslant n!\sum_{m\geqslant n}|x_m|(m!)^{-1}=n!\sum_{m\geqslant n}|y_m|2^{-m}$$
$$\leqslant n!2^{-n}\left(2^n\int_0^{2^{-n}}|y|\,dt\right)$$
$$\leqslant k!2^{-k}2^n\int_0^{2^{-n}}|y|\,dt,\quad \forall n\leqslant k.$$

因此式(50)成立.

完全一样地, 对 $1<p<\infty$, 若令

$$z=\sum_{1}^{\infty} z_k \mathrm{II}(I_k),\quad z_k=b(2^k(k!)^{-1})^{p-1};$$

对任给的 $x=\sum_{1}^{\infty}x_k\mathrm{II}(I_k)\in\hat{L}^p$, 类似地, 考虑 $y=\sum_{1}^{\infty}y_k\mathrm{II}(J_k)$. 则可证 $z\in A_p$, 但对任意的 $e>0$, $z\bar{\in}A_{p-e}$. 而同时关于$(\{\mathscr{F}_n\},\mu)$的鞅极大算子 $f\to f^*$ 仍然是 $\hat{L}^p$ 上的有界算子.

因此, 定理中的条件 $z\in S^-$ 是否能取消仍是一个遗留问题.

现在讨论极大算子与均方根算子的 $\hat{L}^\Phi$ 范数不等式. 先证一个引理.

引理 3 设 $z\in\tilde{A}_\infty$. 再设 $f=(f_n)_{n\geqslant0}$, $f_0\equiv0$ 是使得存在非负增加适应过程 $D=(D_n)_{n\geqslant0}$ 满足 $|\Delta f_n|\leqslant D_{n-1}$ 的鞅. 则函数配对 $(S(f), f^*+D_\infty)$ 与 $(f^*, S(f)+D_\infty)$ 都对测度 $\hat{\mu}=z_\infty\mu$ 满足 4.5 节中意义下的"好 λ 不等式".

证明 由 $|\Delta f_n|\leqslant D_{n-1}$, 我们有

$$|f_n|\leqslant f_{n-1}^*+D_{n-1}=\rho_{n-1}.$$

$\forall\lambda>0$, 与待定的 $\beta>0$ 定义停止时间

$$\tau=\inf\{n:\ \rho_n>\beta\lambda\}.$$

则 $f_\tau^*\leqslant\rho_{\tau-1}\leqslant\beta\lambda$. 考虑停止鞅 $f^{(\tau)}=(f_{n\wedge\tau})_{n\geqslant0}$, 以及非负增加适应过程$(S_n(f^{(\tau)}))_{n\geqslant0}$. 对同一个 λ 定义停止时间

$$T=\inf\{n: S_n(f^{(\tau)})>\lambda\}.$$

当 $\alpha>1$ 时, 我们有

$$\{S(f)>\alpha\lambda, f^*+D_\infty\leqslant\beta\lambda\}\subset\{S(f^{(\tau)})>\alpha\lambda\},$$

$$\{S(f^{(\tau)})>\alpha\lambda\}\subset\{S^2(f^{(\tau)})-S_{T-1}^2(f^{(\tau)})>(\alpha^2-1)\lambda^2\}.$$

因此得

$$\begin{aligned}&E(\mathrm{II}(\{S(f^{(\tau)})>\alpha\lambda\})\,|\,\mathscr{F}_T)\\&\qquad\leqslant\frac{1}{(\alpha^2-1)\lambda^2}E(S^2(f^{(\tau)})-S_{T-1}^2(f^{(\tau)})\,|\,\mathscr{F}_T)\\&\qquad=\frac{1}{(\alpha^2-1)\lambda^2}E(|f^{(\tau)}-f_{T-1}^{(\tau)}|^2\,|\,\mathscr{F}_T)\leqslant\frac{4\beta^2}{\alpha^2-1}.\end{aligned}$$

但是因为 $z\in\tilde{A}_\infty$，故根据 6.2 节的推论 1 后的注，即式(11)′知，存在 $p>1$，使

$$\hat{E}(\mathrm{II}(\{S(f^{(\tau)})>\alpha\lambda\})|\mathscr{F}_T)\leqslant C_p E(\mathrm{II}(\{S(f^{(\tau)})>\alpha\lambda\})|\mathscr{F}_T)^{1/p}$$
$$\leqslant C_p\left(\frac{4\beta^2}{\alpha^2-1}\right)^{1/p}=\varepsilon_{\alpha,\beta}.$$

既然 $\{S(f^{(\tau)})>\alpha\lambda\}\subset\{T<\infty\}\in\mathscr{F}_T$，我们有

$$\hat{\mu}(\{S(f^{(\tau)})>\alpha\lambda\})=\int_{\{T<\infty\}}\hat{E}(\mathrm{II}(\{S(f^{(\tau)})>\alpha\lambda\})|\mathscr{F}_T)d\hat{\mu}$$
$$\leqslant\varepsilon_{\alpha,\beta}\hat{\mu}(\{T<\infty\})=\varepsilon_{\alpha,\beta}\hat{\mu}(\{S(f^{(\tau)})>\lambda\}).$$

从而

$$\hat{\mu}(\{S(f)>\alpha\lambda,\ f^*+D_\infty\leqslant\beta\lambda\})\leqslant\varepsilon_{\alpha,\beta}\hat{\mu}(\{S(f)>\lambda\}).$$

注意对固定的 $\alpha>1$，有 $\lim\limits_{\beta\to0}\varepsilon_{\alpha,\beta}=0$，这就证明了函数配对$(S(f),\ f^*+D_\infty)$满足“好 λ 不等式”。

完全类似地，我们有

$$S_n(f)\leqslant S_{n-1}(f)+D_{n-1}=\rho_{n-1}.$$

定义停止时间

$$\tau=\inf\{n:\ \rho_n>\beta\lambda\},\quad T=\inf\{n:\ |f_n^{(\tau)}|>\lambda\},$$

其中 $f^{(\tau)}=(f_n^{(\tau)})_{n\geqslant0}=(f_{n\wedge\tau})_{n\geqslant0}$ 是停止鞅．注意

$$f^{(\tau)*}-f_{T-1}^{(\tau)*}\leqslant\sup_{m\geqslant T}\big||f_m^{(\tau)}|-|f_{T-1}^{(\tau)}|\big|\leqslant\sup_{m\geqslant T}|f_m^{(\tau)}-f_{T-1}^{(\tau)}|,$$

并利用 Davis 不等式得

$$E(\mathrm{II}(\{f^{(\tau)*}>\alpha\lambda\})|\mathscr{F}_T)\leqslant\frac{C}{(\alpha-1)\lambda}E(S(f^{(\tau)}-f_{T-1}^{(\tau)})|\mathscr{F}_T)$$
$$\leqslant\frac{C\beta}{\alpha-1}.$$

再利用条件 $z\in\tilde{A}_\infty$，同前一样，可证函数配对$(f^*,\ S(f)+D_\infty)$满足“好 λ 不等式”．∎

推论 6 设 $z\in\widetilde{A}_\infty$. 并且设 $\Phi(u)$是$[0,\infty)$上满足 $\Phi(0)=\Phi(0^+)=0$ 的限制增长的连续增加函数. 则对所有这样的鞅, 即允许存在非负增加适应过程 $D=(D_n)_{n\geqslant0}$, 满足$|\Delta f_n|\leqslant D_{n-1}$的鞅, 都有

$$\left.\begin{aligned}&\hat{E}(\Phi(S(f)))\leqslant C\hat{E}(\Phi(f^*+D_\infty)),\\&\hat{E}(\Phi(f^*))\leqslant C\hat{E}(\Phi(S(f)+D_\infty)).\end{aligned}\right\}\tag{51}$$

定理 10 设 $z\in\widetilde{A}_\infty\cap S^-$. 又设 $\Phi(u)$是$[0,\infty)$上满足 $\Phi(0)=0$ 的限制增长的凸函数. 则对一切关于 $(\{\mathscr{F}_n\}_{n\geqslant0},\mu)$ 的鞅 $f=(f_n)_{n\geqslant0}$, 我们有

$$C\hat{E}(\Phi(f^*))\leqslant\hat{E}(\Phi(S(f)))\leqslant C\hat{E}(\Phi(f^*)).\tag{52}$$

证明 设 $f=(f_n)_{n\geqslant0}$ 是任意给定的, 无妨设 $f_0=0$. 记$\Delta f_n=d_n$, $D=(D_n)_{n\geqslant0}$, $D_n=d_n^*$, $D_\infty=d^*$. 如 2.4 节引理 5 中那样, 作 f 的 Davis 分解 $f=g+h$, 其中 g,h 分别满足

$$|\Delta g_n|\leqslant 4D_{n-1},\quad\forall n,$$

$$\sum_1^\infty|\Delta h_n|\leqslant\sum_1^\infty\{2(D_n-D_{n-1})+2E(D_n-D_{n-1}|\mathscr{F}_{n-1})\}.$$

注意, 由于 $z\in S^-$, 我们有

$$\begin{aligned}E(D_n-D_{n-1}|\mathscr{F}_{n-1})&=z_{n-1}\hat{E}\left((D_n-D_{n-1})\frac{1}{z_n}\middle|\mathscr{F}_{n-1}\right)\\&\leqslant K\hat{E}(D_n-D_{n-1}|\mathscr{F}_{n-1}).\end{aligned}$$

再注意容易验证的事实

$$D_\infty\leqslant\min(2f^*,S(f)),$$

$$\max(h^*,S(h))\leqslant\sum_1^\infty|\Delta h_n|.$$

利用引理 3, 我们得

$$\begin{aligned}\hat{E}(\Phi(f^*))&\leqslant C\hat{E}(\Phi(g^*))+C\hat{E}(\Phi(h^*))\\&\leqslant C\hat{E}(\Phi(S(g)+D_\infty))+C\hat{E}\left(\Phi\left(\sum_1^\infty|\Delta h_n|\right)\right)\end{aligned}$$

$$\leqslant C\hat{E}(\Phi(S(f)))+C\hat{E}\left(\Phi\left(\sum_{1}^{\infty}E(D_n-D_{n-1}|\mathscr{F}_{n-1})\right)\right)$$

$$\leqslant C\hat{E}(\Phi(S(f))).$$

由此证得式(52)的左边不等式. 在上面推导中, 我们已经利用了如下事实(见 4.3 节的引理 6):

$$\hat{E}\left(\Phi\left(\sum_{1}^{\infty}\hat{E}(D_n-D_{n-1}|\mathscr{F}_{n-1})\right)\right)\leqslant p_\Phi\hat{E}\left(\Phi\left(\sum_{1}^{\infty}(D_n-D_{n-1})\right)\right)$$

$$=p_\Phi\hat{E}(\Phi(D_\infty))\leqslant Cp_\Phi\hat{E}(\Phi(S(f))).$$

完全类似地, 可得式(52)之右边不等式. ▌

推论 7 设 $1<p<\infty$, $z\in A_p\cap S$. 则关于$(\{\mathscr{F}_n\}_{n\geqslant 0},\mu)$的鞅的均方根算子是 $\hat{L}^p$ 上有界算子.

证明 注意, 当 $z\in S$ 时, $z\in A_\infty\Longleftrightarrow z\in\widetilde{A}_\infty$. 故由定理 10 知, 极大函数与均方根函数有等价的 $\hat{L}^\Phi$ 范数. 而由定理 9 知, 当 $z\in A_p\cap S$ 时, 极大算子是 $\hat{L}^p$ 中有界的, 故均方根算子亦是 $\hat{L}^p$ 中有界的. ▌

现在对任意的鞅 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$, 考虑

$$M(f)=\max(f^*,S(f)),\quad m(f)=\min(f^*,S(f)).$$

定理 11 设 $z\in\widetilde{A}_\infty$, $\Phi(u)$是 $u\in[0,\infty)$上的满足 $\Phi(0)=0$ 的连续增加函数. 则对所有那些鞅 $f=(f_n)$, 它们允许存在非负增加适应过程 $D=(D_n)$, 满足 $|\Delta f_n|\leqslant D_{n-1}$, 都有

$$\hat{E}(\Phi(M(f)))\leqslant C\hat{E}(\Phi(m(f)+D_\infty)).\tag{53}$$

证明同不加权的对应定理一样, 不再另述.

定理 12 设 $z\in\widetilde{A}_\infty\cap S^-$, $\Phi(u)$是$[0,\infty)$上满足 $\Phi(0)=0$ 的限制增长凸函数. 则对一切鞅 $f=(f_n)$,

$$\hat{E}(\Phi(M(f)))\leqslant C\hat{E}(\Phi(m(f))).\tag{54}$$

证明 同 4.2 节的定理 4 一样, 仍然作 f 的 Davis 分解 $f=g+h$, 并对其中的 g 使用定理 10 中的结论. 注意当 $z\in S^-$ 时 h 满

足

$$\sum_{1}^{\infty}|\Delta h_n|\leqslant 2D_\infty+K\sum_{1}^{\infty}\hat{E}(D_n-D_{n-1}|\mathscr{F}_{n-1}).$$

于是有

$$\hat{E}\left(\Phi\left(\sum_{1}^{\infty}|\Delta h_n|\right)\right)\leqslant C\hat{E}(\Phi(D_\infty))\leqslant C\hat{E}(\Phi(m(f))).\quad \blacksquare$$

对于正鞅，4.5 节定理 13 中建立的一个 Φ-不等式也可在加权的情形建立．如下面定理所示．

定理 13 设 $z\in\tilde{A}_\infty$, $\Phi(u)$是满足 $\Phi(0)=0$ 的限制增长的连续增加函数．则对一切正鞅 $f=(f_n)$，有

$$\hat{E}(\Phi(S(f)))\leqslant C\hat{E}(\Phi(f^*)).\tag{55}$$

证明 如同 4.5 节一样，若令

$$\tau=\inf\{n:\ f_n>\beta\lambda\},$$

$$T=\inf\left\{n:\ \sum_{k=1}^{n}\mathrm{II}(\{k<\tau\})|\Delta f_k|^2>\lambda^2\right\},$$

则可得

$$E(\mathrm{II}(\{S_{\tau-1}(f)>\alpha\lambda\})|\mathscr{F}_T)\leqslant\frac{2\beta^2}{\alpha^2-1-\beta^2}.$$

由 $z\in\tilde{A}_\infty$，又可得

$$\hat{E}(\mathrm{II}(\{S_{\tau-1}(f)>\alpha\lambda\})|\mathscr{F}_T)\leqslant C_p\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2-1-\beta^2}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\varepsilon_{\alpha,\beta}.$$

这样即得“好 λ 不等式”

$$\hat{\mu}(\{S(f)>\alpha\lambda,f^*\leqslant\beta\lambda\})\leqslant\hat{\mu}(\{S_{\tau-1}(f)>\alpha\lambda\})$$

$$\leqslant\varepsilon_{\alpha,\beta}\hat{\mu}(\{S(f)>\lambda\}).\quad\blacksquare$$

现在我们讨论包含 $\sigma(f)$的加权 Φ-不等式．设 $\Phi(u)$ 是满足 $\Phi(0)=0$ 的限制增长的增加凸(或凹)函数．先证一个引理．

引理 4 设 $z\in S$. 则对一切关于$(\{\mathscr{F}_n\}_{n\geq 0},\mu)$的鞅 $f=(f_n)$, 有

$$C\hat{E}(\sigma^2(f))\leqslant\hat{E}(S^2(f))\leqslant C\hat{E}(\sigma^2(f)). \tag{56}$$

证明 设 $z_{n-1}\leqslant Kz_n$, 则有

$$\begin{aligned}\hat{E}(\sigma^2(f))&=\sum_1^\infty\hat{E}(E(|\Delta f_n|^2|\mathscr{F}_{n-1}))\\&=\sum_1^\infty\hat{E}\left(z_{n-1}\hat{E}\left(|\Delta f_n|^2\frac{1}{z_n}\middle|\mathscr{F}_{n-1}\right)\right)\\&\leqslant K\sum_1^\infty\hat{E}(\hat{E}(|\Delta f_n|^2|\mathscr{F}_{n-1}))\\&=K\hat{E}(S^2(f));\end{aligned}$$

类似地, 当 $z_n\leqslant Kz_{n-1}$, 有

$$\begin{aligned}\hat{E}(S^2(f))&=\sum_1^\infty\hat{E}(\hat{E}|\Delta f_n|^2|\mathscr{F}_{n-1}))\\&=\sum_1^\infty\hat{E}\left(\frac{1}{z_{n-1}}E(|\Delta f_n|^2z_n|\mathscr{F}_{n-1})\right)\\&\leqslant K\hat{E}(\sigma^2(f)). \blacksquare\end{aligned}$$

定理 14 设 $z\in S^-$, Φ是如上所述之凸函数. 则

$$\hat{E}(\Phi(\sigma^2(f)))\leqslant C\hat{E}(\Phi(S^2(f))). \tag{57}$$

证明 定义停止时间 $\tau=\inf\{n:\ \sigma_{n+1}^2(f)>\lambda\}$. 则

$$\begin{aligned}\hat{E}(\sigma^2(f)-\lambda|\mathscr{F}_\tau)&\leqslant\hat{E}\left(\sum_{k=\tau+1}^\infty E(|\Delta f_k|^2|\mathscr{F}_{k-1})|\mathscr{F}_\tau\right)\\&\leqslant K\hat{E}\left(\sum_{\tau+1}^\infty\hat{E}(|\Delta f_k|^2|\mathscr{F}_{k-1})|\mathscr{F}_\tau\right)\\&=K\sum_1^\infty\hat{E}(\hat{E}(\mathrm{II}(\{\tau\leqslant k-1\})|\Delta f_k|^2|\mathscr{F}_{k-1})|\mathscr{F}_\tau)\end{aligned}$$

$$=K\hat{E}\left(\sum_{\tau+1}^{\infty}|\Delta f_k|^2|\mathscr{F}_\tau\right)\leqslant K\hat{E}(S^2(f)|\mathscr{F}_\tau).$$

于是我们得

$$\int_{\{\sigma^2(f)>\lambda\}}(\sigma^2(f)-\lambda)d\hat{\mu}\leqslant\int_{\{\sigma^2(f)>\lambda\}}S^2(f)d\hat{\mu}.$$

由4.2 节之凸性引理，即得式(57). ▮

定理 14′ 设 $z\in A_\infty\cap S$, Φ 如定理 13. 则

$$\hat{E}(\Phi(\sigma^2(f)))\leqslant C\hat{E}(\Phi(f^{*2})). \tag{57$'$}$$

证明 因在给定条件下，式(52)与(57)成立，由它们即得式(57)′. ▮

注 特别对 $\Phi(u)=u^{p/2}$, $p\geqslant2$, 则当 $z\in A_p\cap S$ 时有

$$\hat{E}(\sigma^p(f))\leqslant C\hat{E}(|f|^p). \tag{58}$$

定理 15 设 $z\in S^+$, Φ 是如上所述之凹函数. 则

$$\hat{E}(\Phi(S^2(f)))\leqslant C\hat{E}(\Phi(\sigma^2(f))). \tag{59}$$

证明 记

$$W=\sigma^2(f)=\sum_1^\infty w_k=\sum_1^\infty E(|\Delta f_k|^2|\mathscr{F}_{k-1}),$$

$$W_n=\sum_1^n w_k,$$

$$Y=S^2(f)=\sum_1^\infty|\Delta f_k|^2,\qquad Y_n=\sum_1^n|\Delta f_k|^2.$$

定义停止时间 $\tau=\inf\{n:\ W_{n+1}>\lambda\}$. 因为

$$Y_\tau=S^2(f^{(\tau)}),\quad W_\tau=\sigma^2(f^{(\tau)}),$$

以及

$$\{\tau<\infty\}=\{W>\lambda\},\quad W_\tau\leqslant W\wedge\lambda,$$

$$Y\wedge\lambda\leqslant Y_\tau+\lambda\mathrm{I}(\{\tau<\infty\}),$$

那末利用式(56)的右边不等式得

$$\hat{E}(Y_\tau)=\hat{E}(S^2(f^{(\tau)}))\leqslant C\hat{E}(\sigma^2(f^{(\tau)}))=C\hat{E}(W_\tau)$$
$$\leqslant C\hat{E}(W\wedge\lambda);$$

既然也有

$$\hat{E}(\lambda \mathrm{II}(\{\tau<\infty\}))=\lambda\hat{\mu}(\{\tau<\infty\})\leqslant\hat{E}(W\wedge\lambda),$$

那末

$$\hat{E}(Y\wedge\lambda)\leqslant C\hat{E}(W\wedge\lambda),\quad \forall\lambda>0.$$

从而由 4.4 节引理 7 知式(59)成立. ∎

定理 15′ 设 $z\in A_\infty\cap S$, Φ 如定理 15 所设. 则

$$\hat{E}(\Phi(f^{*2}))\leqslant C\hat{E}(\Phi(\sigma^2(f))).\tag{59$'$}$$

证明 类似于定理 15, 定义 $W=(W_n)$ 如前, 但 $Y=(Y_n)$ 为 $Y_n=f_n^{*2}$. 则

$$Y_\tau=(f^{(\tau)*})^2.$$

利用式(56)的右边不等式, 以及 $\hat{E}(f^{*2})\sim\hat{E}(S^2(f))$, 即得

$$\hat{E}(Y_\tau)=\hat{E}((f^{(\tau)*})^2)\leqslant C\hat{E}(S^2(f^{(\tau)}))$$
$$\leqslant C\hat{E}(W_\tau)\leqslant C\hat{E}(W\wedge\lambda).$$

其他步骤与定理 15 的证明是相同的, 于是定理获证. ∎

注 特别对 $\Phi(u)=u^{p/2}$, $0<p\leqslant 2$, 当 $z\in A_\infty\cap S$ 时, 则得

$$\hat{E}(f^{*p})\leqslant C\hat{E}(\sigma^p(f)).\tag{59$''$}$$

附带指出, 当 $\Phi(u)=u^{p/2}$ 时, 式(59)与(59)′的证明可以更直接一些. 即定义停止时间 $\tau=\inf\{n;\ \sigma_{n+1}(f)>\lambda\}$. 有

$$\hat{\mu}(\{f^*>\lambda\})\leqslant\hat{\mu}(\{f^{(\tau)*}>\lambda\})+\hat{\mu}(\{\tau<\infty\})$$
$$\leqslant\frac{C}{\lambda^2}\int_\Omega\sigma^2(f^{(\tau)})d\hat{\mu}+\hat{\mu}(\{\tau<\infty\})$$
$$\leqslant\frac{C}{\lambda^2}\int_{\{\sigma(f)\leqslant\lambda\}}\sigma^2(f)d\hat{\mu}+\frac{C}{\lambda^2}\int_{\{\tau<\infty\}}\sigma_\tau^2(f)d\mu$$
$$+\hat{\mu}(\{\tau<\infty\})$$
$$\leqslant\frac{C}{\lambda^2}\int_{\{\sigma(f)\leqslant\lambda\}}\sigma^2(f)d\hat{\mu}+C\hat{\mu}(\{\tau<\infty\}).$$

这里用到

$$\{\tau=\infty\}\subset\{\sigma(f)\leqslant\lambda\},\quad \sigma_{\tau}(f)\leqslant\lambda.$$

将上面所得到的不等式中两边乘 λ^{p-1}，$0<p<2$，然后再对 λ 在 $(0,\infty)$ 上积分即得式(59)′. 类似地可证式(59).

章后注记

6.1—6.3 节 除已作声明外，结果均属于 Doléans-Dade 与 Meyer[2]. 引理 1 中当 $\varepsilon=1$ 时，古典情形由 Coifman-Fellerman[1] 首先获得，鞅论中首先出现在 Izumisawa-Kazamaki[1].

6.4 节 A_p 与 BMO 的关系早为人所熟知. 随机指数由C. Doléans-Dade 引进. 关于定理 6，其演变过程大致如下：Kazamaki[1] 首先对连续鞅，通过 f 的随机指数的 A_p 属性给出了 f 的 BMO 属性的刻划. Doléans-Dade 与 Meyer[1]，以及 Kazamaki 将此结果推广到只是具有右连续性的鞅. Izumisawa-Sekeguchi-Shiota[1] 也作了贡献，他们取消了对 $f(\in\mathrm{BMO})$ 跳跃的限制. 至于判断 f 的随机指数 z 的一致可积性，是 I. V. Girsanov 于 1960 年提出的问题. 用 f 的BMO 属性作为对这个问题的回答分别是由 Kazamaki 以及 Izumisawa-Sekeguchi-Shiota 等给出的. 定理 6 的证明取自于 Doléans-Dade 与 Meyer[1,2].

6.5 节 A_p 权的因子分解，古典情形属于 Jones[1]；鞅论中在连续路线假定下 A_p 权的因子分解属于 Varopoulos[1]；一般情形属于 Long-Peng[1].

6.6 节 定理 8 属于 Long-Peng[2]，并且还讨论了 (p,q) 型. 定理 9 属于 Izumisawa-Kazamaki[1]. 引理 3 属于 Bonami-Lepingle[1]. 定理 10 属于 Bonami-Lepingle[1] 以及几位日本学者. 定理 11 与 12 在此书以前似乎未曾用书面形式出现过. 定理 13

的不加权情形属于Burkholder[2]. 定理14, 14′, 15, 15′属于Long[4], 其中对$\Phi(u)=u^{p/2}$的特殊情形之式(58)与(59)″由Kazamaki[2]首先得到.

第七章 正规鞅论

在以上各章，我们已经多次遇到过一种极端不正规情形，即当$\mathscr{F}_0$为平凡的，$\mathscr{F}_1=\mathscr{F}_2=\cdots=\mathscr{F}$的情形．此时所有鞅都是$L^1$中的鞅，根本没有$p<1$时的$H_p$理论可言．此外，它还具有许多奇异性质，能为许多问题提供十分简单的反例．我们已经陆续指出：此时总有，$\mathscr{D}_p=L^\infty$，因而$\mathscr{D}_1$的对偶空间不是想象中的JN_1；此时总有

$$\mathrm{JN}_a={}_a\mathscr{K}_p={}_a\mathscr{L}_p=L^a,\quad \forall p\geqslant a,$$

因而JN_a中的元素没有想象中的指数可积性；以及此时总有

$$\Sigma_p=L^2,\quad 0<p<\infty,$$

因而Σ_p空间同与它类似的H_p空间迥然不同等等．因此，在一些问题中为获得合乎情理的结果，常常需要附加所谓正规性条件．这一章中我们将给出一类正规性条件，它不仅十分简单方便，并且在为数众多的问题中能够取代“连续路线”假设．我们已在以前几章中几次接触过这类正规性条件．如1.3节中当$\lambda\to\infty$时用f^*或$S(f)$的分布函数是否为$o(1/\lambda)$来刻划L^1有界鞅是否是L^1中的鞅；5.3节中讨论BMO鞅与L^∞的距离；以及6.3节中讨论权函数的某些问题等都用到过这种正规性条件．本章中我们还将讨论另一些问题，如f^*, $S(f)$与$\sigma(f)$之间的加权Φ-不等式、正规H_p鞅论（如原子分解、对偶空间、内插理论等），以说明这种正规性确实对许多问题十分有效．值得指出的是，这种正规鞅论虽然很象二进鞅情况，但它所概括的对象却不止是这个特殊对象．在这一章的最后，我们将介绍一个具体的鞅，即Gundy-Varopoulos[1]

鞅，它满足正规性条件，同时$\{\mathscr{F}_n\}_{n\geq 0}$中每个$\mathscr{F}_n$又都是散$\sigma$-代数.

我们设$(\Omega, \mathscr{F}, \mu, \{\mathscr{F}_n\}_{n\geq 0})$仍然满足通常的假定，即$\mathscr{F}_0$是完备的，$\bigvee_n \mathscr{F}_n=\mathscr{F}$. 但一般不再假定$\mathscr{F}_0$是平凡的.

7.1 一类正规性条件

定义 1 $(\Omega, \mathscr{F}, \mu, \{\mathscr{F}_n\}_{n\geq 0})$如上所述. 我们说

1）它满足正规性条件(R)，如果

$$\Pi(F)\leqslant dE(\Pi(F)\,|\,\mathscr{F}_{n-1}), \quad \forall F\in\mathscr{F}_n, n=1, 2, \cdots; \tag{1}$$

2）它满足弱正规性条件(R_w)，如果$\forall F_n\in\mathscr{F}_n$，存在至少一个$G_n\in\mathscr{F}_{n-1}$，满足

$$F_n\subset G_n, \quad |G_n|\leqslant d|F_n|, \quad \forall n=1, 2, \cdots; \tag{2}$$

3）它满足"停止时间可预报性"，如果对任意不取零值的停止时间T，存在停止时间τ，使

$$\text{在}\{T<\infty\}\text{上}0\leqslant\tau<T, \quad \text{且}|\{\tau<\infty\}|\leqslant d|\{T<\infty\}|; \tag{3}$$

4）它满足"弱的好停止时间性"，如果对所有非负适应过程$(\gamma_n)_{n\geq 0}$，$\forall\lambda\geqslant\|\gamma_0\|_\infty$，存在停止时间$\tau_\lambda$，使

$$\left.\begin{aligned}&\{\gamma^*>\lambda\}\subset\{\tau_\lambda<\infty\},\\&|\{\tau_\lambda<\infty\}|\leqslant d|\{\gamma^*>\lambda\}|,\\&\sup_{n\leqslant\tau_\lambda}\gamma_n=\gamma^*_{\tau_\lambda}\leqslant\lambda\text{①};\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

5）它满足"逆向极大不等式"，如果对所有的$f\in L^1_+$，$\forall\lambda\geqslant\|f_0\|_\infty$，有

$$\int_{\{f^*>\lambda\}}fd\mu\leqslant d\lambda|\{f^*>\lambda\}|; \tag{5}$$

---

① 设τ是任意的停止时间. 我们自始至终作如下约定：对任意的过程(γ_n)，$\gamma^*_\tau=\sup_{n\leqslant\tau}|\gamma_n|$；对任意的鞅$f=(f_n)$，$f_\tau=(f_{\tau\wedge n})_{n\geq 0}$；对任意的$f\in L^1$，$f_\tau=E(f\,|\,\mathscr{F}_\tau)$. 所有这些理解当然是相容的.

6) 它满足“强的好停止时间性”，如果除式(4)中性质外，还使得当$\lambda_1\leqslant\lambda_2$时，也有$\tau_{\lambda_1}\leqslant\tau_{\lambda_2}$.

注 上述各式中出现的d是一个$\geqslant1$的常数. 此外，这里的集合包含是指模零测集意义下的包含. 况且，式(1)与下式等价

$$E(f|\mathscr{F}_n)\leqslant dE(f|\mathscr{F}_{n-1}),\quad \forall f\in L_+^1,\ n=1,2,\cdots. \tag{1)'$$

其等价性论证如下. 设式(1)成立，$f\in L_+^1(\mathscr{F}_n)$. 构造有限和序列

$$\{f^{(m)}\}=\{\Sigma c_i \mathrm{II}(F_i)\}$$

使其在L^1中收敛于f，其中$c_i\geqslant0$, $F_i\in\mathscr{F}_n$. 则对每个$f^{(m)}$，有

$$\begin{aligned}f^{(m)}&=\Sigma c_i\mathrm{II}(F_i)\leqslant d\Sigma c_iE(\mathrm{II}(F_i)|\mathscr{F}_{n-1})\\&=dE(\Sigma c_i\mathrm{II}(F_i)|\mathscr{F}_{n-1})=dE(f^{(m)}|\mathscr{F}_{n-1}).\end{aligned}$$

取适当的子序列，使两边都几乎处处收敛，并取极限，即得对$f(\in L^1(\mathscr{F}_n))$的式(1)′. 现对任意的$f(\in L_+^1)$，应用上面的不等式于每个$f_n=E(f|\mathscr{F}_n)$即得结论.

例1 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu,\{\mathscr{F}_n\}_{n\geqslant0})$是正规原子的，意即每个$\mathscr{F}_n$都是由原子生成的，并且具有性质：设$\{I_i^{(n)}\}$是$\mathscr{F}_n$的全部(有限个)原子，每个$I_i^{(n)}$又剖分成$\mathscr{F}_{n+1}$的有限个原子$\{I_{i,j}^{(n+1)}\}$，并且使得，对常数$\alpha>0$，$|I_{i,j}^{(n+1)}|\geqslant\alpha|I_i^{(n)}|$. 则此时正规性条件(R)成立. 因为$\forall f\in L_+^1$，在$I_{i,j}^{(n+1)}\subset I_i^{(n)}$上有

$$\begin{aligned}E(f|\mathscr{F}_{n+1})&=\frac{1}{|I_{i,j}^{(n+1)}|}\int_{I_{i,j}^{(n+1)}}fd\mu\\&\leqslant\frac{1}{\alpha}\frac{1}{|I_i^{(n)}|}\int_{I_i^{(n)}}fd\mu\\&=\frac{1}{\alpha}E(f|\mathscr{F}_n).\end{aligned}$$

这说明当取常数$d=\dfrac{1}{\alpha}$时条件(R)成立. 这个正规原子族是Y. S. Chou[1]首先考虑的.

例2 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu,\{\mathscr{F}_n\}_{n\geqslant0})$在如下意义下满足Burkholder

-Gundy的正规性条件(如见Gundy[2]):即所有非负鞅$f=(f_n)_{n\geq 0}$均可写为

$$\Delta f_n=f_n-f_{n-1}=\sum_{j=1}^{N}V_n^{(j)}\gamma_n^{(j)},$$

其中$V_n^{(j)}$是关于$\mathscr{F}_{n-1}$可测的,$\gamma_n^{(j)}$满足

$$\|\gamma_n^{(j)}\|_\infty\leqslant B,\quad E(\gamma_n^{(j)}|\mathscr{F}_{n-1})=0,$$
$$E(\gamma_n^{(j)}\bar{\gamma}_n^{(l)}|\mathscr{F}_{n-1})=\delta_{j,l}.$$

(函数$\{V_n^{(j)}\}$, $\{\gamma_n^{(j)}\}$可以依赖于f, 但N, B不依赖于f.)则此种情况下,正规性条件(R)成立. 事实上,若记

$$W=\left(\sum_{j=1}^{N}|V_n^{(j)}|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

则W关于$\mathscr{F}_{n-1}$可测,并且

$$|\Delta f_n|\leqslant\left(\sum_{j=1}^{N}|V_n^{(j)}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=1}^{N}|\gamma_n^{(j)}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant N^{\frac{1}{2}}BW,$$
$$E(|\Delta f_n|^2|\mathscr{F}_{n-1})=W^2.$$

于是我们有

$$|\Delta f_n|\leqslant N^{\frac{1}{2}}B\frac{1}{W}E(|\Delta f_n|^2|\mathscr{F}_{n-1})$$
$$\leqslant NB^2E(|\Delta f_n||\mathscr{F}_{n-1}),$$
$$f_n\leqslant f_{n-1}+|\Delta f_n|\leqslant f_{n-1}+NB^2E(|\Delta f_n||\mathscr{F}_{n-1})$$
$$\leqslant(1+2NB^2)f_{n-1}.$$

这说明当取常数$d=1+2NB^2$时条件(R)成立。

现在我们证明上述六个性质互相等价.

定理1 上述性质1)—6)是等价的.

证明 1)⇒2). 设条件(R)成立. 对任意的$F_n\in\mathscr{F}_n$,令

$$G_n=\left\{E(\mathrm{II}(F_n)|\mathscr{F}_{n-1})\geqslant\frac{1}{d}\right\}.$$

则$G_n \in \mathscr{F}_{n-1}$，以及

$$|G_n| \leqslant dE(E(\mathrm{II}(F_n)|\mathscr{F}_{n-1})) = d|F_n|.$$

此外，由条件(R)(即式(1))知$F_n \subset G_n$. 故2)成立.

2)$\Rightarrow$3). 设T是一个不取零值的停止时间. $\forall n \geqslant 1$, 对集合$\{T=n\}$任意取一个 2)中的集合G_n. 再定义停止时间 $\tau = \inf\{n:\ \omega \in G_{n+1}\}$. 则 τ 便为所求. 因

$$T(\omega) = n \Rightarrow \omega \in G_n \Rightarrow \tau(\omega) \leqslant n-1 = T(\omega)-1,$$

此即

$$\tau < T,\ \text{在}\{T<\infty\}\text{上}.$$

此外

$$\begin{aligned}|\{\tau<\infty\}| &\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |G_{n+1}| \\ &\leqslant d\sum_{n=1}^{\infty} |\{T=n\}| = d|\{T<\infty\}|.\end{aligned}$$

3)$\Rightarrow$4). 设$(\gamma_n)_{n\geqslant 0}$是任意的非负适应过程, $\forall \lambda \geqslant \|\gamma_0\|_\infty$, 定义停止时间

$$T = \inf\{n:\ \gamma_n > \lambda\},$$

则T不取零值, 由性质 3) 知, 存在停止时间 τ_λ 满足式(3). 即有

$$\{\gamma^* > \lambda\} = \{T<\infty\} \subset \{\tau_\lambda < \infty\},$$

$$|\{\tau_\lambda<\infty\}| \leqslant d|\{T<\infty\}| = d|\{\gamma^*>\lambda\}|.$$

因此式(4)的前两式成立. 至于式(4)中的第三式也成立, 是因为

$$\gamma^*_{\tau_\lambda}\mathrm{II}(\{\tau_\lambda<\infty\}) \leqslant \gamma^*_{T-1}\mathrm{II}(\{\tau_\lambda<\infty\}) \leqslant \lambda,$$

$$\gamma^*_{\tau_\lambda}\mathrm{II}(\{T=\infty\}) \leqslant \gamma^*_T\mathrm{II}(\{T=\infty\}) \leqslant \lambda.$$

4)$\Rightarrow$5). 设非负的$f \in L^1$. 考虑 f 生成的鞅$(f_n)_{n\geqslant 0}$, 对它与$\lambda \geqslant \|f_0\|_\infty$, 如同 4)中那样定义停止时间 T. 则

$$\int_{\{f^*>\lambda\}} f d\mu \leqslant \int_{\{T<\infty\}} f d\mu = \int_{\{T<\infty\}} f_T d\mu$$

$$\leqslant\lambda|\{T<\infty\}|\leqslant d\lambda|\{f^*>\lambda\}|.$$

5)⇒1). 假设式(1)不成立. 则对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 n 以及 $B\in\mathscr{F}_n$, 使

$$|\{\omega\in B: E(\mathrm{II}(B)|\mathscr{F}_{n-1})\leqslant\varepsilon\mathrm{II}(B)\}|>0.$$

这等价于说, 对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 n 以及 $A\in\mathscr{F}_n$, 使

$$|A|>0,\quad E(\mathrm{II}(A)|\mathscr{F}_{n-1})\leqslant\varepsilon.$$

这个等价性可由下面看出. 令 $B=A$, 即可从后者直接推出前者. 反之, 令

$$A=\{E(\mathrm{II}(B)|\mathscr{F}_{n-1})\leqslant\varepsilon\}\cap B,$$

可从前者推出后者. 因 $|A|>0$, 且

$$\begin{aligned}E(\mathrm{II}(A)|\mathscr{F}_{n-1})&=\mathrm{II}(\{E(\mathrm{II}(B)|\mathscr{F}_{n-1})\\&\leqslant\varepsilon\})E(\mathrm{II}(B)|\mathscr{F}_{n-1})\leqslant\varepsilon.\end{aligned}$$

现任取 ε,λ, $0<\varepsilon<\lambda<1$. 并对此 ε 取 $A\in\mathscr{F}_n$ 满足上述性质. 则因

$$\mathrm{II}(A)^*=\max(\mathrm{II}(A)^*_{n-1},\mathrm{II}(A)),$$

故得

$$\int_{\{\mathrm{II}(A)^*>\lambda\}}\mathrm{II}(A)d\mu=|A|=\frac{1}{\lambda}\lambda|\{\mathrm{II}(A)^*>\lambda\}|.$$

既然

$$E(\mathrm{II}(A)|\mathscr{F}_0)\leqslant\varepsilon<\lambda,$$

且取 $1/\lambda$ 可以任意的大, 这说明式(5)不成立. 因此5)⇒1)得证.

6)⇒4). 显然.

现证 1)⇒6). 设 $(\gamma_n)_{n\geqslant 0}$ 是任一非负的适应过程. 对任意的 $\lambda\geqslant\|\gamma_0\|_\infty$, 定义停止时间

$$\begin{aligned}\tau_\lambda&=\inf\left\{n:\ \omega\in\left\{E(\mathrm{II}(\{\gamma_{n+1}>\lambda\})|\mathscr{F}_n)\geqslant\frac{1}{d}\right\}\right\}\\&=\inf\{n:\ \omega\in G_{n+1}\}.\end{aligned}\tag{6}$$

首先，我们证明$\{\gamma^*>\lambda\}\subset\{\tau_\lambda<\infty\}$. 因为，若$\omega\in\{\gamma^*>\lambda\}$，则存在$n\geqslant 0$，使$\omega\in\{\gamma_{n+1}>\lambda\}$（因为已设$\lambda\geqslant\|\gamma_0\|_\infty$），又由于$(\gamma_n)$为适应过程，所以有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{II}(\{\gamma_{n+1}>\lambda\}) &= E(\mathrm{II}(\{\gamma_{n+1}>\lambda\})\,|\,\mathscr{F}_{n+1}) \\
&\leqslant dE(\mathrm{II}(\{\gamma_{n+1}>\lambda\})\,|\,\mathscr{F}_n).
\end{aligned}
$$

从而$\{\gamma_{n+1}>\lambda\}\subset G_{n+1}$. 故$\tau_\lambda(\omega)\leqslant n<\infty$.

其次，证明$|\{\tau_\lambda<\infty\}|\leqslant d|\{\gamma^*>\lambda\}|$. 因为

$$
\begin{aligned}
\{\tau_\lambda=n\} &= G_{n+1}\cap\{\tau_\lambda=n\} \\
&= \left\{E(\mathrm{II}(\{\gamma_{n+1}>\lambda\})\,|\,\mathscr{F}_n)\mathrm{II}(\{\tau_\lambda=n\})\geqslant\frac{1}{d}\right\} \\
&= \left\{E(\mathrm{II}(\{\gamma_{n+1}>\lambda\}\cap\{\tau_\lambda=n\})\,|\,\mathscr{F}_n)\geqslant\frac{1}{d}\right\},
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
|\{\tau_\lambda<\infty\}| &= \sum_0^\infty|\{\tau_\lambda=n\}| \\
&\leqslant d\sum_0^\infty E(E(\mathrm{II}(\{\gamma_{n+1}>\lambda\}\cap\{\tau_\lambda=n\})\,|\,\mathscr{F}_n)) \\
&= d\sum_0^\infty|\{\gamma_{n+1}>\lambda\}\cap\{\tau_\lambda=n\}| \\
&\leqslant d\sum_0^\infty|\{\gamma^*>\lambda\}\cap\{\tau_\lambda=n\}|\leqslant d|\{\gamma^*>\lambda\}|.
\end{aligned}
$$

再次，证明$\gamma^*_{\tau_\lambda}\leqslant\lambda$. 当$\tau_\lambda=0$时，由$\gamma_0\leqslant\lambda$知结论成立. 当$\tau_\lambda=\infty$时，由$\{\gamma^*>\lambda\}\subset\{\tau_\lambda<\infty\}$知

$$
\{\tau_\lambda=\infty\}\subset\{\gamma^*\leqslant\lambda\};
$$

从而结论也成立. 而由

$$
\tau_\lambda=n\geqslant 1\Rightarrow\omega\overline{\in}\bigcup_{1\leqslant j\leqslant n}G_j\Rightarrow\omega\overline{\in}\bigcup_{1\leqslant j\leqslant n}\{\gamma_j>\lambda\},
$$

知$\gamma^*_n\leqslant\lambda$. 这样也有$\gamma^*_{\tau_\lambda}\mathrm{II}(\{0<\tau_\lambda<\infty\})\leqslant\lambda$. 综合上述，即完成了

证明.

最后，我们证明若$\lambda_1 \leqslant \lambda_2$，则$\tau_{\lambda_1} \leqslant \tau_{\lambda_2}$. 这个结论的证明只需用到下面等式:

$$
\begin{aligned}
&E(\mathrm{II}(\{\gamma_{n+1} > \lambda_1\}) \mid \mathscr{F}_n) \\
&\quad = E(\mathrm{II}(\{\gamma_{n+1} > \lambda_2\}) \mid \mathscr{F}_n) \\
&\qquad + E(\mathrm{II}(\{\lambda_2 \geqslant \gamma_{n+1} > \lambda_1\}) \mid \mathscr{F}_n).
\end{aligned}
$$

事实上, 当$\tau_{\lambda_2}(\omega) = n$时, 则由上式得

$$E(\mathrm{II}(\{\gamma_{n+1} > \lambda_1\}) \mid \mathscr{F}_n)(\omega) \geqslant \frac{1}{d},$$

由此得$\tau_{\lambda_1}(\omega) \leqslant n = \tau_{\lambda_2}(\omega)$. ∎

注 我们另外给出一个直接由2)推出1)的证明. 因为在这个证明过程中我们还可获得一些有关$\{\mathscr{F}_n\}_{n\geqslant 0}$的结构的信息.

2)⇒1). 设弱(R_w)成立. 我们先证明对任意的$F_n \in \mathscr{F}_n$,

$$\{E(\mathrm{II}(F_n) \mid \mathscr{F}_{n-1}) > 0\}$$

是$\mathscr{F}_{n-1}$中包含F_n的最小集合. 意即对一切$G_n \in \mathscr{F}_{n-1}$, 使得$F_n \subset G_n$, 都有

$$\{E(\mathrm{II}(F_n) \mid \mathscr{F}_{n-1}) > 0\} \subset G_n \text{(当然模零测集)}.$$

事实上, 若记$F_0 = \{E(\mathrm{II}(F_n) \mid \mathscr{F}_{n-1}) = 0\}$, 则

$$
\begin{aligned}
|F_n \cap F_0| &= \int_{F_0} \mathrm{II}(F_n)\, d\mu \\
&= \int_{F_0} E(\mathrm{II}(F_n) \mid \mathscr{F}_{n-1})\, d\mu = 0.
\end{aligned}
$$

因此$F_n \subset F_0'$. 此外, 既然

$$E(\mathrm{II}(F_n) \mid \mathscr{F}_{n-1})\mathrm{II}(G_n') = E(\mathrm{II}(F_n \cap G_n') \mid \mathscr{F}_{n-1}) = 0,$$

故$G_n' \subset F_0$, 从而$F_0' \subset G_n$. 这证明了上述断言. 也就是在弱正规性条件(R_w)下，有

$$|\{E(\mathrm{II}(F_n) \mid \mathscr{F}_{n-1}) > 0\}| \leqslant d|F_n|, \quad \forall F_n \in \mathscr{F}_n, \quad n = 1, 2, \cdots. \tag{7}$$

现设任意取定的$F_n\in\mathscr{F}_n$. 令

$$H_n=\left\{E(\mathrm{II}(F_n)\mid\mathscr{F}_{n-1})<\frac{1}{d}\right\}\cap F_n.$$

既然

$$E(\mathrm{II}(H_n)\mid\mathscr{F}_{n-1})\mathrm{II}(H_n)\leqslant E(\mathrm{II}(F_n)\mid\mathscr{F}_{n-1})\mathrm{II}(H_n)$$
$$<\frac{1}{d},$$

于是有

$$H_n\subset\{0<E(\mathrm{II}(H_n)\mid\mathscr{F}_{n-1})\}\cap\{E(\mathrm{II}(H_n)\mid\mathscr{F}_{n-1})<1/d\}$$
$$=K_n\in\mathscr{F}_{n-1},$$

并且

$$|K_n|\leqslant|\{E(\mathrm{II}(H_n)\mid\mathscr{F}_{n-1})>0\}|\leqslant d|H_n|.$$

因此，如果$|K_n|>0$, 我们将有下述矛盾:

$$|H_n|=\int_{K_n}\mathrm{II}(H_n)d\mu=\int_{K_n}E(\mathrm{II}(H_n)\mid\mathscr{F}_{n-1})d\mu$$
$$<\frac{1}{d}|K_n|\leqslant|H_n|.$$

这说明必须$|K_n|=0$, 从而$|H_n|=0$. 此即

$$F_n\subset\left\{E(\mathrm{II}(F_n)\mid\mathscr{F}_{n-1})\geqslant\frac{1}{d}\right\},$$

式(1)因而获证. ∎

现在再对上述正规性条件作一补充讨论，即考虑1)—6)中的常数d依赖于所考虑的过程或随机变量情形.

7) 我们说$(\Omega,\mathscr{F},\mu,\{\mathscr{F}_n\}_{n\geqslant0})$ 满足“弱的逆向极大不等式”性质，如果对每个$f\in L_+^1$, 存在常数d_f, 使$\forall\lambda\geqslant\lambda_f$, 都有

$$\int_{\{f^*>\lambda\}}fd\mu\leqslant d_f\lambda|\{f^*>\lambda\}|. \qquad (5)'$$

定理1′ 性质1)—7)都是等价的.

证明 只需证7)⇒1). 构造一整数序列$\{n_i\}$, 以及正数序列$\{\lambda_i\}$与$\{\varepsilon_i\}$, 满足

$$1+n_1+\cdots+n_{i-1}<\lambda_i<n_i\nearrow\infty,$$

$$\lambda_i=0(n_i),\quad \Sigma n_i\varepsilon_i\leqslant 1.$$

若式(1)不成立, 则存在整数序列$\{k_i\}$与集合序列$\{A_i\}$, $A_i\in\mathscr{F}_{k_i}$, 使

$$|A_i|>0,\ \ E(\mathrm{II}(A_i)\,|\,\mathscr{F}_{k_i-1})\leqslant\varepsilon_i.$$

无妨设

$$\sum_{j\geqslant i}|A_j|\leqslant 2|A_i|.$$

(否则取子序列: 如令$A_{i_1}=A_1$. 既然$\Sigma|A_i|\leqslant\Sigma\varepsilon_i<\infty$, 可截去$A_1$后的有限个集合, 使余下集合的测度和$\leqslant|A_1|$. 再取这余下集合中的第一个为$A_{i_2}$. 如此继续.)现令

$$g=\sum_1^\infty n_i\mathrm{II}(A_i),$$

则$g\in L^1$, 且

$$g^*\leqslant\sum_1^\infty n_i\mathrm{II}(A_i)^*\leqslant \sum_1^\infty n_i(\varepsilon_i+\mathrm{II}(A_i))\leqslant g+1.$$

注意 $\{g>\lambda_i-1\}\subset\bigcup_{j\geqslant i}A_j\left(因在\bigcap_{j\geqslant i}A'_j上,\ g\leqslant\sum_1^{i-1}n_j\leqslant\lambda_i-1\right)$. 于是

$$|\{g^*>\lambda_i\}|\leqslant|\{g>\lambda_i-1\}|\leqslant\sum_{j\geqslant i}|A_j|\leqslant 2|A_i|.$$

但是我们也有(注意$A_i\subset\{n_i\mathrm{II}(A_i)>\lambda_i\}$)

$$n_i|A_i|=\int_{\{n_i\mathrm{II}(A_i)>\lambda_i\}}n_i\,d\mu\leqslant\int_{\{g>\lambda_i\}}g\,d\mu$$

$$\leqslant d_g\lambda_i|\{g^*>\lambda_i\}|\leqslant 2d_g\lambda_i|A_i|,$$

由此说明

$$d_g\geqslant\frac{n_i}{2\lambda_i}\to\infty.$$

这是不可能的. ▌

现在我们可以统称条件 1)—7) 中任意之一皆为正规性条件(R). 并且在今后的讨论中,除非作特别的声明,都假定正规性条件(R)是满足的.

7.2 正规H_p $(0<p\leqslant 1)$鞅

设$(\Omega,\ \mathscr{F},\ \mu,\ \{\mathscr{F}_n\}_{n\geqslant 0})$满足正规性条件(R),$f=(f_n)_{n\geqslant 0}$是关于它的鞅. 现在我们定义Hardy空间$H_p$.

定义2 设$0<p<\infty$. 定义

$$H_p=\{f=(f_n)_{n\geqslant 0}:\ \|f\|_{H_p}=\|f^*\|_p<\infty\}. \tag{8}$$

注 当$p>1$, 由Doob定理知$H_p=L^p$; H_1是Banach空间; 当$p<1$, H_p是拟赋范空间. 其中$\|\cdot\|_{H_p}$满足正齐性与广义三角不等式, 而$\|\cdot\|_{H_p}^p$满足三角不等式. 我们将在7.3节中证明H_p的几个通常定义都是等价的. 由此容易看出,某些通常空间在H_p稠密. 此外当$p<1$时L^1连续地嵌入H_p. 这由极大算子是弱(1,1)型即知.

本节的前三小节讨论H_p的原子分解、对偶空间与内插理论. 主要对$(H_p)_0=\{f\in H_p,\ f_0\equiv 0\}$来讨论. 为简单计,略去下标零.

7.2.1 原子分解

我们已在2.7节中定义了鞅论中的原子概念,并证明了1-原子生成的空间是$\mathscr{D}_1$, 而不是普通的H_1. 因此若不附加正规性假定,则H_p的原子分解是不可能的. 但在正规性条件(R)下, 原子分解

是可能的. 对 H_p的一个稠密子集的所有元素,分解所得的无穷级数点态地且在 H_p中收敛于这个元素.

定理2 设$f\in L^1\subset H_p(p<1)$或$f\in H_1$, 且两者均满足$f_0\equiv 0$. 则存在正实数的序列$\{\lambda_j\}$与 p-原子的序列$\{a_j\}$, 使得

$$f=\sum_1^{\infty}\lambda_j a_j, \tag{9}$$

此级数在H_p中以及几乎处处地绝对地收敛到f. 而且

$$\|f\|_{H_p}^p\leqslant\sum_1^{\infty}\lambda_j^p\leqslant C_p d\|f\|_{H_p}^p. \tag{10}$$

证明 设$(f_n)_{n\geqslant 0}$是f生成的鞅. 对过程 $(|f_n|)_{n\geqslant 0}$与$\lambda=2^k$, $k\in Z$, 得到满足7.1节定义1的6)中所述性质的停止时间τ_k. 则由$|\{\tau_k<\infty\}|\to 0$与$\{\tau_k\}$单调增加知

$$\lim_{k\to\infty}f_{\tau_k}=f\quad(\text{因}\lim_k\tau_k=\infty,\ \text{a.e.}).$$

此外也有

$$\lim_{k\to-\infty}|f_{\tau_k}|\leqslant\lim_{k\to-\infty}2^k=0.$$

这样我们得到点态地收敛于f的下述分解

$$f=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(f_{\tau_k}-f_{\tau_{k-1}}). \tag{11}$$

记

$$\lambda_k=2^{k+1}|\{\tau_{k-1}<\infty\}|^{1/p},$$
$$a_k=\lambda_k^{-1}(f_{\tau_k}-f_{\tau_{k-1}})\mathrm{II}(\{\tau_{k-1}<\infty\}).$$

则a_k都是p-原子. 事实上,因

$$\|a_k\|_\infty\leqslant|\{\tau_{k-1}<\infty\}|^{-1/p},$$

$$(a_k)_n\mathrm{II}(\{n\leqslant\tau_{k-1}\})=\lambda_k^{-1}(f_{\tau_k\wedge n}-f_{\tau_{k-1}\wedge n})\mathrm{II}(\{n\leqslant\tau_{k-1}\})$$
$$=0.$$

记$\sigma(\lambda)=|\{f^*>\lambda\}|$. 则有

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\lambda_k^p\leqslant d\sum_{-\infty}^{\infty}2^{(k+1)p}|\{f^*>2^k\}|$$

$$\leqslant C_p d\sum_{-\infty}^{\infty}\int_{2^{k-1}}^{2^k}\lambda^{p-1}\sigma(\lambda)d\lambda$$

$$=C_p d\|f\|_{H_p}^p.$$

剩下需证明式(10)的左边不等式,以及级数在H_p中收敛. 首先注意,对所有p-原子a, 总有

$$\int_\Omega a^{*p}d\mu\leqslant 1.$$

事实上,若设a是与停止时间T联系的一个p-原子,则

$$a^*\mathrm{II}(\{T=\infty\})=0.$$

故

$$\int_\Omega a^{*p}d\mu\leqslant|\{T<\infty\}|^{-1}|\{T<\infty\}|=1.$$

其次注意,我们不仅有式(11),而且还有

$$f_n=\sum_{-\infty}^{\infty}(f_{\tau_k\wedge n}-f_{\tau_{k-1}\wedge n})=\sum_{-\infty}^{\infty}\lambda_k(a_k)_n,\quad\forall n,\tag{11}$$

其中级数也是点态地收敛的. 因为

$$\lim_{k\to\infty}f_{\tau_k\wedge n}=f_n,$$

$$\lim_{k\to-\infty}|f_{\tau_k\wedge n}|\leqslant\lim_{k\to-\infty}2^k=0.$$

因此我们有

$$f^*=\sup_n|f_n|\leqslant\sum_{k=-\infty}^{\infty}\lambda_k a_k^*,$$

$$\|f\|_{H_p}^p\leqslant\sum_{-\infty}^{\infty}\lambda_k^p\int_\Omega a_k^{*p}d\mu\leqslant\sum_{-\infty}^{\infty}\lambda_k^p.$$

根据同样的理由,我们有

$$(f-f_{\tau_{N-1}})_n=\sum_{k=N}^{\infty}\lambda_k(a_k)_n,\quad \forall n,$$

$$(f_{\tau_M})_n=\sum_{k=-\infty}^{M}\lambda_k(a_k)_n,\quad \forall n.$$

于是,

$$\lim_{N\to\infty}\|f-f_{\tau_{N-1}}\|_{H_p}^p\leqslant\lim_{N\to\infty}\sum_{N}^{\infty}\lambda_k^p=0,$$

$$\lim_{M\to-\infty}\|f_{\tau_M}\|_{H_p}^p\leqslant\lim_{M\to-\infty}\sum_{-\infty}^{M}\lambda_k^p=0.$$

这就证明了$\sum\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda_k a_k$在$H_p$中收敛到$f$.

最后将$\sum\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda_k a_k$改写为$\sum\limits_{1}^{\infty}\mu_j b_j$,即得我们需要的如同式(9)的形式. ▮

现在我们对正规原子的H_p进行更为细致的原子分解.

定义 3 考虑正规原子的$(\Omega,\mathscr{F},\ \mu,\{\mathscr{F}_n\}_{n\geqslant0})$(即7.1节例1中所设),且$0<p\leqslant1$. 称函数$a\in L^\infty(\Omega)$是一个严格的$p$-原子,如果存在$I\in\mathscr{J}$(所有原子的集合),使得

$$a\mathrm{I}(I')=0,\ \int_\Omega a\,d\mu=0,\ \|a\|_\infty\leqslant|I|^{-1/p}. \tag{12}$$

定理2′ 考虑正规原子鞅. 设$f\in H_1\subset H_p$. 则对$r=1,p$,存在正数的序列$\{\lambda_j^{(r)}\}$与严格的r-原子的序列$\{a_j^{(r)}\}$,使得$\lambda_j^{(1)}a_j^{(1)}=\lambda_j^{(p)}a_j^{(p)}$,以及

$$f=\sum_{1}^{\infty}\lambda_j^{(r)}a_j^{(r)},\quad r=1,p, \tag{9$'$}$$

其中级数在H_r中收敛,并且

$$\|f\|_{H_r}^r\leqslant\sum(\lambda_j^{(r)})^r\leqslant C_r d\|f\|_{H_r}^r,\quad r=1,p. \tag{10$'$}$$

证明 同定理2中一样，我们得到

$$f=\sum_{-\infty}^{\infty}(f_{\tau_k}-f_{\tau_{k-1}})\mathrm{II}(\{\tau_{k-1}<\infty\}).$$

注意

$$\{\tau_{k-1}<\infty\}=\bigcup_{j=1}^{\infty}I_j^{(k)},\quad I_j^{(k)}\in\mathscr{F}_{l_{k,j}}.$$

又

$$I_j^{(k)}\in\mathscr{J}\cap\mathscr{F}_{l_{k,j}}\cap\mathscr{F}_{\tau_{k-1}},$$

且当k固定时，$\{I_j^{(k)}\}$是两两不交的. 令

$$\lambda_{k,j}^{(r)}=2^{k+1}|I_j^{(k)}|^{1/r},$$

$$a_{k,j}^{(r)}=\frac{1}{\lambda_{k,j}^{(r)}}(f_{\tau_k}-f_{\tau_{k-1}})\mathrm{II}(I_j^{(k)}).$$

则每个$a_{k,j}^{(r)}$是一个联系于$I_j^{(k)}$的严格的r-原子. 事实上，既然$I_j^{(k)}\in\mathscr{F}_{\tau_{k-1}}$，我们有

$$\frac{1}{|I_j^{(k)}|}\int_{I_j^{(k)}}a_{k,j}^{(r)}\,d\mu\mathrm{II}(I_j^{(k)})=E(a_{k,j}^{(r)}\mid\mathscr{F}_{\tau_{k-1}})\mathrm{II}(I_j^{(k)})$$

$$=\frac{1}{\lambda_{k,j}^{(r)}}E((f_{\tau_k}-f_{\tau_{k-1}})\mid\mathscr{F}_{\tau_{k-1}})\mathrm{II}(I_j^{(k)})=0.$$

于是，我们得到f的下述原子分解

$$f=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_{k,j}^{(r)}a_{k,j}^{(r)}.$$

容易得到式(10)′的右边不等式. 因为我们有$\left(\text{注意式(10)}'\text{的中间项即是}\sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{1}^{\infty}(\lambda_{k,j}^{(r)})^r\right)$

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{1}^{\infty}(\lambda_{k,j}^{(r)})^r=\sum_{-\infty}^{\infty}2^{(k+1)r}|\{\tau_{k-1}<\infty\}|$$

$$\leqslant C_r d\|f\|_{H_r}^r. \tag{13}$$

现在我们要证二重级数在H_r中收敛于f，以及有估计

$$\|f\|_{H_r}^r \leqslant \sum_{k,j} (\lambda_{k,j}^{(r)})^r.$$

注意到所有严格的r-原子都在 H_r的单位球内，故由式(13)，我们有

$$\lim_{n,m,l\to\infty} \int_\Omega \sum_{(k,j)\overline{\in}[-n,m]\times[1,l]} (\lambda_{k,j}^{(r)} a_{k,j}^{(r)*})^r d\mu$$

$$\leqslant \lim_{n,m,l\to\infty} \sum_{(k,j)\overline{\in}[-n,m]\times[1,l]} (\lambda_{k,j}^{(r)})^r = 0.$$

取$r=1$，既然H_1是完备的，所以上式说明

$$g_{n,m,l} = \sum_{k=-n}^{m} \sum_{j=1}^{l} \lambda_{k,j}^{(1)} a_{k,j}^{(1)}$$

在H_1中收敛于某极限g，当然$g_{n,m,l}$也在L^1中收敛到 g. 那末

$$(g-g_{n,m,l})_i = \sum_{(k,j)\overline{\in}[-n,m]\times[1,l]} \lambda_{k,j}^{(p)} (a_{k,j}^{(p)})_i, \quad \forall i.$$

这里级数是在L^1中收敛，因为关于$\mathscr{F}_i$的条件期望是L^1上有界的算子. 由取适当的子序列使之点态地收敛，得

$$(g-g_{n,m,l})^* \leqslant \sum_{(k,j)\overline{\in}[-n,m]\times[1,l]} \lambda_{k,j}^{(p)} a_{k,j}^{(p)*}.$$

这样 $g_{n,m,l}$在 H_p中也收敛到 g. 既然$g_{n,m,l}$ 在L^1中收敛于g，并且 $\lim\limits_{l\to\infty} g_{n,m,l} = g_{n,m}$, a. e.，其中

$$g_{n,m} = \sum_{-n}^{m} (f_{\tau_k} - f_{\tau_{k-1}}),$$

故也有$g_{n,m}$在L^1中收敛于g. 但已知$\lim g_{n,m} = f$, a. e.，故$g=f$. 并且

$$\|f\|_{H_r}^r \leqslant \lim_{n,m,l\to\infty} \|g_{n,m,l}\|_{H_r}^r \leqslant \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{1}^{\infty} (\lambda_{k,j}^{(r)})^r.$$

最后适当地改写$\sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{1}^{\infty}\lambda_{k,j}^{(r)}a_{k,j}^{(r)}$为$\sum_{1}^{\infty}\lambda_j^{(r)}a_j^{(r)}$. 这便完成了定理的证明. ▌

作为这个定理的推论，我们得到在区间$[0,1)$上二进H_p鞅空间包含在古典的$H_{p,c}$(当$1/2<p\leqslant 1$)空间内的结论.

推论 1 设$([0,1),\mathscr{B},dx,\{\mathscr{F}_n\}_{n\geqslant 0})$是正规原子的，并且所有原子由区间构成. 则当$1/2<p\leqslant 1$，有$H_p\subset H_{p,c}$，其右边是古典的$H_p$空间.

证明 我们首先证明，对每个严格的p-原子a，其修改的共轭函数

$$Ra=\mathrm{P.V.}\int_0^1\frac{a(y)}{x-y}dy,$$

满足$\|Ra\|_p\leqslant C$. 设a是这样一个原子，其支柱区间含于$[0,\varepsilon]$. 则

$$\int_0^1|Ra|^p dx=\left\{\int_0^{2\varepsilon}+\int_{2\varepsilon}^1\right\}|Ra|^p dx=I_1+I_2,$$

$$I_1=\int_0^{2\varepsilon}|Ra|^p dx\leqslant\left(\int_0^{2\varepsilon}|Ra|^2\right)^{\frac{p}{2}}C\varepsilon^{(2-p)/2}$$

$$\leqslant C\left(\int_0^{2\varepsilon}|a^2|\right)^{\frac{p}{2}}\varepsilon^{(2-p)/2}\leqslant C\varepsilon^{\left(1-\frac{2}{p}\right)\frac{p}{2}}\varepsilon^{(2-p)/2}=C;$$

$$I_2=\int_{2\varepsilon}^1\left|\int_0^{\varepsilon}\left(\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x}\right)a(y)\,dy\right|^p dx$$

$$\leqslant C\int_{2\varepsilon}^1\frac{1}{x^{2p}}\left(\int_0^{\varepsilon}y|a(y)|\right)^p\leqslant C\int_{2\varepsilon}^1\frac{dx}{x^{2p}}\varepsilon^{2p-1}\leqslant C.$$

这样$\forall f\in H_1$, $f=\sum_{1}^{\infty}\lambda_j a_j$，便满足

$$\|f\|_{H_{p,c}}^p\leqslant C(\|f\|_p^p+\|Rf\|_p^p)\leqslant C\|f\|_p^p+C\sum_{1}^{\infty}\lambda_j^p$$

$$\leqslant C\|f\|_{H_p}^p.$$

既然H_1在H_p中稠密，且$H_{p,c}$是完备的，故H_1到$H_{p,c}$内的恒等算子可连续地扩张到整个H_p. 于是完成了推论的证明. ▌

7.2.2 H_p的对偶空间

我们将在7.3节指出，对正规H_p鞅，有$H_p=\Sigma_p$, $0<p<\infty$. 这样，H_p的对偶空间问题可以用已经在3.5节中解决了的Σ_p的对偶空间问题来代替. 但既然有了原子分解理论，我们可以直接讨论$H_p(0<p\leqslant 1)$的对偶空间，而且更为简单. 首先对Lipschitz空间$({}_1\Lambda^\alpha)$作一个等价刻划.

引理 1 设$\alpha\geqslant 0$, 则我们有

$$\|\varphi\|_{{}_1\Lambda^\alpha}=\sup_T\frac{\|\varphi-\varphi_T\|_1}{|\{T<\infty\}|^{1+\alpha}},\tag{14}$$

其中"sup"是对T遍历所有的停止时间而取的.

证明 设$\varphi\in({}_1\Lambda^\alpha)$. 依3.5.1节中定义(但将指标2换为指标1), 我们有

$$E(|\varphi-\varphi_n||\mathscr{F}_n)\leqslant\|\varphi\|_{{}_1\Lambda^\alpha}\omega_n^\alpha,\quad \text{a.e.},\quad \forall n.$$

其中ω_n是$\mathscr{F}_n$可测函数，它在$\mathscr{F}_n$的所有原子I上取值$|I|$，其他地方为0. 这样对一切停止时间T, 便有

$$\begin{aligned}E(|\varphi-\varphi_T||\mathscr{F}_T)&=\sum_0^\infty E(|\varphi-\varphi_n||\mathscr{F}_n)\mathrm{II}(\{T=n\})\\&\leqslant\|\varphi\|_{{}_1\Lambda^\alpha}\sum_0^\infty\omega_n^\alpha\mathrm{II}(\{T=n\}).\end{aligned}$$

既然$\forall n$, 有

$$\omega_n\mathrm{II}(\{T=n\})=\begin{cases}|I|, & \text{当}I\subset\{T=n\},\ I\text{是}\mathscr{F}_n\text{的原子},\\0, & \text{否则}.\end{cases}$$

故我们得到，$\forall$停止时间T,

$$E(|\varphi-\varphi_T||\mathscr{F}_T)\leqslant\|\varphi\|_{{}_1\Lambda^\alpha}|\{T<\infty\}|^\alpha.$$

于是我们得到

$$\frac{\|\varphi-\varphi_T\|_1}{|\{T<\infty\}|^{1+\alpha}}=\frac{1}{|\{T<\infty\}|^{1+\alpha}}\int_{\{T<\infty\}}|\varphi-\varphi_T|\,d\mu$$

$$=\frac{1}{|\{T<\infty\}|^{1+\alpha}}\int_{\{T<\infty\}}E(|\varphi-\varphi_T||\mathscr{F}_T)\,d\mu$$

$$\leqslant\|\varphi\|_{1\Lambda^\alpha}.$$

这证明了式(14)的一半.

现设 $\beta=\sup\limits_T\frac{\|\varphi-\varphi_T\|_1}{|\{T<\infty\}|^{1+\alpha}}<\infty$. 对任意的 n 与 $F\,(\in\mathscr{F}_n)$, 若定义停止时间

$$T_F=\begin{cases}n, & \omega\in F,\\ \infty, & \omega\overline{\in}F.\end{cases}$$

则有

$$\frac{1}{|F|^{1+\alpha}}\int_F|\varphi-\varphi_n|\,d\mu=\frac{1}{|F|^{1+\alpha}}\int_\Omega|\varphi-\varphi_{T_F}|\,d\mu$$

$$=\frac{1}{|\{T_F<\infty\}|^{1+\alpha}}\|\varphi-\varphi_{T_F}\|_1\leqslant\beta.$$

同3.5.1节定理 9 的证明中所指出的一样, 意味着

$$E(|\varphi-\varphi_n||\mathscr{F}_n)\leqslant\beta\omega_n^\alpha,$$

$$\|\varphi\|_{1\Lambda^\alpha}\leqslant\beta.$$

由此证明了式(14)要求的另外一半.

于是引理 1 得证. ▮

我们还要证与2.7节命题 2 类似的下述引理.

引理2 设$0<p\leqslant1$, $\alpha=\frac{1}{p}-1$. 则

$$\frac{1}{\alpha}\|\varphi\|_{1\Lambda^\alpha}\leqslant\sup_{a:p-\text{原子}}|E(a\varphi)|\leqslant\|\varphi\|_{1\Lambda^\alpha}. \tag{15}$$

证明 设T是任意的停止时间, φ 是L^1中任意的函数. 令

$$f=\operatorname{sgn}(\varphi-\varphi_T);$$

$$a=\frac{f-f_T}{2|\{T<\infty\}|^{1+\alpha}}.$$

则 a 是一个 p-原子. 因

$$a_n \mathrm{II}(\{n\leqslant T\})=\frac{(f_n-f_{n\wedge T})\mathrm{II}(\{n\leqslant T\})}{2|\{T<\infty\}|^{1+\alpha}}=0,$$

$$\|a\|_\infty\leqslant|\{T<\infty\}|^{-1/p}.$$

我们有

$$E(|\varphi-\varphi_T|)=E(f(\varphi-\varphi_T))=E(\varphi(f-f_T))$$
$$=2|\{T<\infty\}|^{1+\alpha}E(\varphi a),$$

$$\sup\frac{\|\varphi-\varphi_T\|_1}{|\{T<\infty\}|^{1+\alpha}}\leqslant 2\sup|E(\varphi a)|.$$

因此证明了式(15)的左边不等式.

设 $\varphi\ (\in({}_1\Lambda^\alpha))$ 为任意的, a 是任意的一个 p-原子. 则

$$|E(a\varphi)|=|E((a-a_T)\varphi)|=|E(a(\varphi-\varphi_T))|$$
$$\leqslant\|a\|_\infty\|\varphi-\varphi_T\|_1\leqslant|\{T<\infty\}|^{-1/p}\|\varphi-\varphi_T\|_1$$
$$=\frac{\|\varphi-\varphi_T\|_1}{|\{T<\infty\}|^{1+\alpha}}.\ \blacksquare$$

定理 3 设条件 (R) 成立, $0<p\leqslant 1$, $\alpha=\frac{1}{p}-1$. 则 $H'_p=({}_1\Lambda^\alpha)$. 更确切地说, $({}_1\Lambda^\alpha)$ 到 H'_p 内的映射: $\varphi\to l_\varphi$ 满足

$$\frac{1}{\alpha}\|\varphi\|_{{}_1\Lambda^\alpha}\leqslant\|l\|\leqslant C_p\|\varphi\|_{{}_1\Lambda^\alpha}. \tag{16}$$

证明 先证 $({}_1\Lambda^\alpha)\subset H'_p$, 即每个 $\varphi(\in({}_1\Lambda^\alpha))$ 均可在 H_p 上产生一个有界线性泛函 l_φ. 设 φ 为给定的. 且设 $f\in H_1\subset H_p$, 它有原子分解 $\sum_1^\infty\lambda_j a_j$, 使得 $\sum_1^n\lambda_j a_j$ 在 H_1 与 H_p 中收敛到 f, 并且

$$\sum_1^\infty\lambda_j^p\leqslant C_p d\|f\|_{H_p}^p.$$

则

$$\left|E\left(\varphi\sum_1^n\lambda_j a_j\right)\right|=\left|\sum_1^n\lambda_j E(\varphi a_j)\right|\leqslant\sum_1^n\lambda_j|E(\varphi a_j)|$$

$$\leqslant\|\varphi\|_{{}_1\Lambda^\alpha}\sum_1^n\lambda_j\leqslant\|\varphi\|_{{}_1\Lambda^\alpha}\left(\sum_1^n\lambda_j^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant C_p\|\varphi\|_{{}_1\Lambda^\alpha}\|f\|_{H_p}.$$

既然正规性条件(R)是满足的，因此有

$$E(|\varphi-\varphi_n|\,|\mathscr{F}_{n+1})\leqslant dE(|\varphi-\varphi_n|\,|\mathscr{F}_n)$$

$$\leqslant d\|\varphi\|_{{}_1\Lambda^\alpha}.$$

这说明$\varphi\in({}_1\Lambda^\alpha)\subset\mathrm{BMO}$. 并且因为$\sum_1^n\lambda_j a_j$在$H_1$中收敛于$f$，故$\lim_n E\left(\varphi\sum_1^n\lambda_j a_j\right)$是不依赖于$f$的分解而一意存在的. 因此可以对$f\in H_1\subset H_p$定义

$$l_\varphi(f)=\lim_n E\left(\varphi\sum_1^n\lambda_j a_j\right),$$

并且有

$$|l_\varphi(f)|\leqslant C_p\|\varphi\|_{{}_1\Lambda^\alpha}\|f\|_{H_p}.$$

由此说明l_φ可连续地延拓为整个H_p上的一个有界线性泛函，并且

$$\|l_\varphi\|\leqslant C_p\|\varphi\|_{{}_1\Lambda^\alpha}.$$

从而证明了$({}_1\Lambda^\alpha)$连续地嵌入H'_p.

现设$l(\in H'_p)$为任意的. 既然H_2连续地嵌入H_p，故l也是H_2上有界线性泛函. 因此存在$\varphi\in H_2$，使

$$l(f)=E(f\varphi),\quad\forall f\in H_2.$$

特别地，$\forall p$-原子a，有

$$|E(\varphi a)|=|l(a)|\leqslant\|l\|\,\|a\|_{H_p}\leqslant\|l\|.$$

由式(15)之左边不等式，知$\|\varphi\|_{{}_1\Lambda^\alpha}\leqslant 2\|l\|$. 因而证明了$H'_p$连续地嵌入$({}_1\Lambda^\alpha)$. ∎

注 设$0<p<1$. 我们定义

$$B_p=\left\{f=\sum_1^\infty \lambda_j a_j:\ a_j\text{是}p\text{-原子},\ \sum_1^\infty \lambda_j<\infty\right\},$$

$$\|f\|_{B_p}=\inf\left\{\sum_1^\infty \lambda_j:\text{遍历所有表示}\ f=\sum_1^\infty \lambda_j a_j\right\}.$$

这里级数$\sum\limits_1^\infty \lambda_j a_j$可以理解为$({}_1\Lambda^\alpha)'$中的元素. 因为根据式(15), 所有$p$-原子$a$都在$({}_1\Lambda^\alpha)'$的一个有界球内. 故$\sum\limits_1^\infty \lambda_j a_j$在$({}_1\Lambda^\alpha)'$中收敛. 此外, B_p是一赋范空间. $\|\cdot\|_{B_p}$之齐次与次可加性是显然的. $\|f\|_{B_p}=0 \Rightarrow f=0$ 是因为

$$\|f\|_{({}_1\Lambda^\alpha)'}\leqslant\|f\|_{B_p}.$$

定理 3 的证明也给出$({}_1\Lambda^\alpha)$是B_p的对偶空间, 其中$\alpha=\dfrac{1}{p}-1$. 事实上, 在证明$({}_1\Lambda^\alpha)\subset H_p'$的过程中, 我们得到了更强的不等式

$$\left|E\left(\varphi\sum_1^n \lambda_j a_j\right)\right|\leqslant\|\varphi\|_{{}_1\Lambda^\alpha}\sum_1^n \lambda_j.$$

这就可以推出$({}_1\Lambda^\alpha)\subset B_p'$. 因而$B_p$提供了$H_p$的包含Banach空间的一个候选者(当然$B_p$的完备性待证).

7.2.3 H_p的内插理论

设$0<p<\infty$, $0<q\leqslant\infty$, $0<\theta<1$. 本小节我们要讨论在K-方法下, (H_{p_1}, H_{p_2})的内插空间. 当$1<p\leqslant\infty$, H_p就是L^p. 但既然我们更主要的是讨论$p\leqslant1$, 故仍然要假定正规性条件(R)成立. 仅在这一小节中, 我们用M表示鞅的极大算子, 而用“$*$”表示非增加重排算子. 即对任意的可测函数$g(x)$, 用$g^*(t)$表示它的非增加右连续重排函数. 定义Lorentz空间为

$$
\left.\begin{aligned}
&L^{p,q}=\{f:\ \|f\|_{p,q}=\left(\frac{q}{p}\int_0^\infty (t^{1/p}f^*(t))^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}<\infty\},\\
&\qquad\qquad 0<p,q<\infty,\\
&L^{p,\infty}=\{f:\ \|f\|_{p,\infty}=\sup_{t>0}t^{1/p}f^*(t)<\infty\},\\
&\qquad\qquad 0<p<\infty.
\end{aligned}\right\} \tag{17}
$$

定义鞅的一类空间为

$$
\begin{gathered}
H_{p,q}=\{\text{鞅}f=(f_n)_{n\geqslant 0}:\ \ Mf\in L^{p,q}\},\\
0<p<\infty,0<q\leqslant\infty.
\end{gathered} \tag{18}
$$

我们要指出 $H_{p,q}$在内插K-方法下封闭．由于内插的稳定性定理，只需刻划出$(H_p,H_\infty)_{\theta,q}$ 就够了.

引理 3 设$0<p<\infty$．则存在常数C_p,使

$$
\begin{aligned}
C_p\int_0^{t^p}(Mf)^{*p}(\tau)d\tau&\leqslant K(t,f,H_p,H_\infty)^p\\
&\leqslant C_p\int_0^{dt^p}(Mf)^{*p}(\tau)d\tau,\ \forall t>0.
\end{aligned} \tag{19}
$$

其中$K(t,f,H_p,H_\infty)$(简记为$K(t,f)$)定义为

$$
K(t,f,H_p,H_\infty)=\inf_{f=f_0+f_1}\{\|f\|_{H_p}+t\|f\|_\infty\}. \tag{20}
$$

证明 令$f=(f_n)(\in H_p+H_\infty)$为任给的．设$f=f_0+f_1$是$f$在$H_p+H_\infty$中的任一分解，其中

$$
f_0=(f_{0,n})_{n\geqslant 0},f_1=(f_{1,n})_{n\geqslant 0},f_n=f_{0,n}+f_{1,n},n\geqslant 0.
$$

注意,

$$
Mf\leqslant Mf_0+Mf_1,\quad (Mf)^*(t)\leqslant(Mf_0)^*(t)+\|Mf_1\|_\infty.
$$

因此我们有

$$
\begin{aligned}
\int_0^{t^p}(Mf)^{*p}(\tau)d\tau&\leqslant C_p\int_0^{t^p}\{(Mf_0)^{*p}(\tau)+\|Mf_1\|_\infty^p\}d\tau\\
&\leqslant C_p(\|f_0\|_{H_p}^p+t^p\|f_1\|_\infty^p).
\end{aligned}
$$

对f的所有分解取inf即得不等式(19)的左边不等式.

现设 $f\ (\in H_p+H_\infty)$（注意我们考虑的实际上是$(H_p)_0$，故$f_0\equiv 0$），以及$t\,(>0)$皆为任给的．令$\lambda=(Mf)^*(t^p)$．对非负适应过程$(|f_n|)_{n\geqslant 0}$与此λ作停止时间τ，使得它们满足

$$|f_\tau|\leqslant\lambda,\quad |\{\tau<\infty\}|\leqslant d|\{f^*>\lambda\}|.$$

再作 f 的分解

$$f=(f-f_\tau)+f_\tau=f_0+f_1,$$

其中

$$f_0=(f_{0,n})=(f_n-f_{n\wedge\tau})_{n\geqslant 0},\quad f_1=(f_{1,n})=(f_{\tau\wedge n})_{n\geqslant 0}.$$

因而，f_1是一个有界鞅，$\|f_1\|_\infty\leqslant\lambda=(Mf)^*(t^p)$．此外，因为

$$|f_{0,n}|\mathrm{II}(\{\tau=\infty\})=|f_n-f_{n\wedge\tau}|\mathrm{II}(\{\tau=\infty\})=0,$$

所以，

$$Mf_0\mathrm{II}(\{\tau=\infty\})=0.$$

再注意

$$Mf_0\leqslant Mf+\|Mf_1\|_\infty,$$
$$|\{\tau<\infty\}|\leqslant d|\{Mf>(Mf)^*(t^p)\}|\leqslant dt^p.$$

于是我们得

$$\begin{aligned}K(t,f)^p&\leqslant C_p(\|f_0\|_{H_p}^p+t^p\|f_1\|_\infty^p)\\&\leqslant C_p\left\{\int_{\{\tau<\infty\}}(Mf_0)^p d\mu+t^p(Mf)^{*p}(t^p)\right\}\\&\leqslant C_p\left\{\int_{\{\tau<\infty\}}(Mf)^p d\mu+t^p(Mf)^{*p}(t^p)\right\}\\&\leqslant C_p\int_0^{dt^p}(Mf)^{*p}(\tau)d\tau.\ \blacksquare\end{aligned}$$

定理 4　设$0<p<\infty$, $0<q\leqslant\infty$, $0<\theta<1$．记$r=\dfrac{p}{1-\theta}$．则

$$(H_p,H_\infty)_{\theta,q}=H_{r,q}. \tag{21}$$

证明　应用式(19)的左边不等式，对$f\in H_p+H_\infty$，有

$$(Mf)^*(t^p)\leqslant\left(t^{-p}\int_0^{t^p}(Mf)^{*p}(\tau)d\tau\right)^{1/p}$$

$$\leqslant Ct^{-1}K(t,f).$$

$$\|Mf\|_{r,q}=C\left(\int_0^\infty (t^{(1-\theta)/p}(Mf)^*(t))^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=C\left(\int_0^\infty (t^{1-\theta}(Mf)^*(t^p))^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant C\left(\int_0^\infty (t^{-\theta}K(t,f))^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=C\|f\|_{(H_p,H_\infty)_{\theta,q}}.$$

即证明了$(H_p, H_\infty)_{\theta,q}$连续地嵌入到$H_{r,q}$内.

现证$H_{r,q}$连续地嵌入到$(H_p, H_\infty)_{\theta,q}$内. 也就是要证明

$$\|f\|_{(H_p,H_\infty)_{\theta,q}}\leqslant C\|Mf\|_{r,q}.$$

当$q=\infty$时, 有

$$t^{-\theta}K(t,f)\leqslant Ct^{-\theta}\left(\int_0^{dt^p}\tau^{\theta-1}(\tau^{(1-\theta)/p}(Mf)^*(\tau))^pd\tau\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant\sup_{\tau>0}\{\tau^{(1-\theta)/p}(Mf)^*(\tau)\}Ct^{-\theta}\left(\int_0^{dt^p}\tau^{\theta-1}d\tau\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant C\|Mf\|_{r,\infty}.$$

当$q<\infty$时, 我们应用式(19)的右边不等式, 以及下面即将证明的Hardy不等式的变形(引理4)而得:

$$\left(\int_0^\infty t^{-\theta q}K(t,f)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant C\left\{\int_0^\infty t^{-\theta q}\left(\int_0^{dt^p}(Mf)^{*p}(\tau)d\tau\right)^{q/p}\frac{dt}{t}\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$=C\left\{\int_0^\infty t^{(1-\theta)q/p}\left(\frac{1}{t}\int_0^t(Mf)^{*p}(\tau)d\tau\right)^{q/p}\frac{dt}{t}\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant C\left(\int_0^\infty t^{(1-\theta)\frac{p}{q}}(Mf)^{*p}(t)\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=C\|Mf\|_{r,q}. \blacksquare$$

引理 4 设$0<r<q\leqslant\infty$, $f(\geqslant 0)$在$(0,\infty)$上单调下降. 则(记$q_0=\min(1,q)$)

$$\left(\int_0^\infty\left(\frac{1}{t}\int_0^t f(s)\,ds\right)^q t^r\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant\left(\frac{q}{q-r}\right)^{\frac{1}{q_0}}\left(\int_0^\infty f(t)^q t^{r-1}\,dt\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{22}$$

证明 $q\geqslant 1$时即为Hardy不等式原来的形式，且无需 f 单调下降. 现设$q<1$. 因 $f(t)$单调下降，故当

$$\int_0^\infty f(t)^q t^{r-1}\,dt<\infty$$

时，有

$$f(t)^q t^r\leqslant 2\int_{t/2}^t f(\tau)^q\tau^{r-1}\,d\tau=o(1),\qquad t\to 0.$$

现记

$$F(t)=\int_0^t f(\tau)\,d\tau.$$

则

$$F(t)^q=o(t^{q-r}),\qquad t\to 0.$$

因而有

$$\int_0^\infty F(t)^q t^{r-q-1}\,dt$$

$$=\frac{t^{r-q}}{r-q}F(t)^q\Big|_0^\infty+\frac{q}{q-r}\int_0^\infty F(t)^{q-1}f(t)t^{r-q}\,dt$$

$$\leqslant\frac{q}{q-r}\int_0^\infty\left(\frac{tf(t)}{F(t)}\right)^{1-q}f(t)^q t^{r-1}\,dt$$

$$\leqslant\frac{q}{q-r}\int_0^\infty f(t)^q t^{r-1}\,dt.$$

即证明了式(22). ▌

现在回到内插理论.

定理 5 设$0<p_i<\infty$, $p_0\neq p_1$, $0<q_i\leqslant\infty$, $i=0, 1$, $0<\theta<1$, $0<q\leqslant\infty$. 又设

$$\frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1}.$$

则

$$(H_{p_0,q_0}, H_{p_1,q_1})_{\theta,q}=H_{p,q}. \tag{23}$$

证明 任选$r<\min(p_0, p_1)$. 则存在$\theta_i\in(0, 1)$, $\theta_0\neq\theta_1$, 使

$$p_i=\frac{r}{1-\theta_i},\quad i=0, 1.$$

由定理4, 我们有

$$H_{p_i,q_i}=(H_r, H_\infty)_{\theta_i,q_i},\quad i=0, 1.$$

由稳定性定理, 我们知道$\delta=(1-\theta)\theta_0+\theta\theta_1$使得

$$\begin{aligned}(H_{p_0,q_0}, H_{p_1,q_1})_{\theta,q}&=((H_r, H_\infty)_{\theta_0,q_0}, (H_r, H_\infty)_{\theta_1,q_1})_{\theta,q}\\&=(H_r, H_\infty)_{\delta,q}=H_{\frac{r}{1-\delta},q}=H_{p,q}.\end{aligned}$$

这里$p=r/(1-\delta)$由下面的等式推出

$$\frac{r}{p_i}=1-\theta_i,\quad i=0, 1,\quad \delta=(1-\theta)\theta_0+\theta\theta_1. \quad ∎$$

定理6 设 $0<p_i$, $\tilde{p}_i<\infty$, $p_0\neq p_1$, $\tilde{p}_0\neq\tilde{p}_1$, $0<q_i, \tilde{q}_i$, $q\leqslant\infty$, $0<\theta<1$. 再设T是一个由 H_{p_i,q_i} 到 $H_{\tilde{p}_i,\tilde{q}_i}$ 内, 或者到 $L^{\tilde{p}^i,\tilde{q}^i}$ 内有界的拟线性算子, $i=0, 1$. 则T也是由 $H_{p,q}$ 到 $H_{\tilde{p},\tilde{q}}$ 内, 或者到 $L^{\tilde{p},\tilde{q}}$内的有界算子. 这里

$$\frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1},\qquad \frac{1}{\tilde{p}}=\frac{1-\theta}{\tilde{p}_0}+\frac{\theta}{\tilde{p}_1}.$$

这是内插理论的自然结果.

注 当 $p_0=1<p_1$, 正规性条件(R)可能是不必要的. Okada[1]在讨论涉及到 H_1 的弱型算子内插问题时没有作正规性假定. 至于强型内插问题, 当 $1\leqslant p_0<p_1$ 时也无需正规性假定, 并且较弱型内插问题更容易.

命题1 设 $1\leqslant p_0<p_1\leqslant\infty$, $1\leqslant q_1<\infty$. 无需假定正规性, 并

且只考虑初值为 0 的鞅. 又设 T 是线性算子, 它同时是$(H_1, L^{p_0'})$型与$(L^{q_1'}, L^{p_1'})$型的("$'$"表共轭指标); 或者设 S 是一线性算子, 它同时是(L^{p_0}, BMO)型与(L^{p_1}, L^{q_1})型的. 则 T 也是$(L^{q'}, L^{p'})$型; 或者, S 是(L^p, L^q)型的. 这里$\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right)$是平面上两点$\left(\frac{1}{p_0}, 0\right)$与$\left(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{q_1}\right)$的连线上的任意点.

证明 只需对 S 证明就可以了, 因为, 一个简单的对偶讨论便可以把对 T 的讨论化为对 S 的讨论. 定义次线性算子 $\bar{S}$ 如下:

$$\bar{S}f=(Sf)^{\#}=\sup_n E(|Sf-(Sf)_{n-1}|\mathscr{F}_n). \tag{24}$$

则 $\bar{S}$ 是(L^{p_0}, L^{∞})型与(L^{p_1}, L^{q_1})型的. 事实上, 因

$$\|\bar{S}f\|_{\infty}=\|Sf\|_{\mathrm{BMO}}\leqslant C_1\|f\|_{p_0},$$

$$\|\bar{S}f\|_{q_1}\leqslant C\|Sf\|_{q_1}\leqslant C_2\|f\|_{p_1}.$$

于是由只涉及到 Lebesgue 空间的算子内插即知 $\bar{S}$ 是(L^p, L^q)型的. 再根据 3.3 节式 (16) (它说#-函数与它自己有相同的 L^q 可积性), 即得

$$\|Sf\|_q\leqslant C\|\bar{S}f\|_q\leqslant C\|f\|_p.$$

这就证明了 S 是(L^p, L^q)型的. 命题证完. ▌

利用原子分解我们可以使得算子内插问题的讨论变得十分简单, 从而回避比较深入一些的空间内插理论. 仅以一个涉及到正规 H_p 的弱型内插为例. 先证一个弱型估计的叠加原理.

引理 5 设$\{f_k\}$是可测函数的序列, 满足

$$|\{|f_k|>\lambda\}|\leqslant\frac{1}{\lambda^p}, \quad \forall\lambda>0, \ 0<p<\infty. \tag{25}$$

以及$\{m_k\}$是正数序列. 则

$$\left|\left\{\sum_k m_k|f_k|>\lambda\right\}\right|$$

$$\leqslant \begin{cases} (2-p)(1-p)^{-1}\sum\limits_k m_k^p/\lambda^p, & 0<p<1; \\ 4\sum\limits_k m_k\left(1+\log\left(\sum\limits_l m_l/m_k\right)\right)\Big/\lambda, & p=1; \\ p'\,2^p\left(\sum\limits_k m_k\right)^p\Big/\lambda^p, & p>1. \end{cases} \tag{26}$$

证明 首先，看 $0<p<1$. 设任给的$\lambda>0$. 令

$$g_k=|f_k|\,\mathrm{II}\left(\left\{|f_k|\leqslant\frac{\lambda}{m_k}\right\}\right),\quad h_k=|f_k|-g_k,$$

$$E_\lambda=\bigcup\{h_k\neq 0\}.$$

则有

$$|\{h_k\neq 0\}|=\left|\left\{|f_k|>\frac{\lambda}{m_k}\right\}\right|\leqslant\frac{m_k^p}{\lambda^p},\quad |E_\lambda|\leqslant\frac{\sum\limits_k m_k^p}{\lambda^p}.$$

此外，若记$\sigma_k(t)=|\{|f_k|>t\}|$，则有

$$\begin{aligned} E(g_k)&=\int_{\{|f_k|\leqslant\frac{\lambda}{m_k}\}}|f_k| \\ &\leqslant\int_0^{\frac{\lambda}{m_k}}\sigma_k(t)\,dt\leqslant\frac{1}{1-p}\left(\frac{m_k}{\lambda}\right)^{p-1}. \end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned} \left|\left\{\sum_k m_k|f_k|>\lambda\right\}\right|&\leqslant|E_\lambda|+\left|\left\{x\bar{\in}E_\lambda:\ \sum_k m_k|f_k|>\lambda\right\}\right| \\ &\leqslant|E_\lambda|+\left|\left\{\sum_k m_kg_k>\lambda\right\}\right| \\ &\leqslant(2-p)(1-p)^{-1}\sum_k m_k^p/\lambda^p. \end{aligned}$$

即得式(26)的第一式.

其次，看 $p=1$. 无妨设 $\sum\limits_l m_l=1$. 因此 $m_k\leqslant 1$. 对任意的 $\lambda>0$，令

$$
\begin{aligned}
|f_k|=|f_k|\Big\{&\mathrm{II}(\{|f_k|\leqslant\lambda\})+\mathrm{II}\Big(\Big\{\lambda<|f_k|\leqslant\frac{\lambda}{m_k}\Big\}\Big)\\
&+\mathrm{II}\Big(\Big\{|f_k|>\frac{\lambda}{m_k}\Big\}\Big)\Big\}\\
=\,&\theta_k+g_k+h_k,
\end{aligned}
$$

$$\sum_k m_k|f_k|=\theta+g+h.$$

既然 $\theta\leqslant\lambda\sum\limits_l m_l=\lambda$. 故

$$\Big\{\sum_k m_k|f_k|>2\lambda\Big\}\subset\Big\{h=0,\ \sum_k m_k g_k>\lambda\Big\}\cup\{h\neq 0\}.$$

于是我们有

$$
\begin{aligned}
|\{h\neq 0\}|=|\cup\{h_k\neq 0\}|&\leqslant\sum_k\Big|\Big\{|f_k|>\frac{\lambda}{m_k}\Big\}\Big|\\
&\leqslant\frac{1}{\lambda}\sum_k m_k=\frac{1}{\lambda}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Big|\Big\{h=0,\ \sum_k m_k g_k>\lambda\Big\}\Big|&\leqslant\Big|\Big\{\sum_k m_k g_k>\lambda\Big\}\Big|\\
&=\Big|\Big\{\sum_k m_k|f_k|\,\mathrm{II}\Big(\Big\{\lambda<|f_k|\leqslant\frac{\lambda}{m_k}\Big\}\Big)>\lambda\Big\}\Big|\\
&\leqslant\frac{1}{\lambda}\sum_k m_k\int_{\{\lambda<|f_k|\leqslant\frac{\lambda}{m_k}\}}|f_k|\\
&\leqslant\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}\sum_k m_k\log\frac{1}{m_k},
\end{aligned}
$$

$$\Big|\Big\{\sum_k m_k|f_k|>2\lambda\Big\}\Big|\leqslant\frac{2}{\lambda}\sum_k m_k\log\frac{1}{m_k}.$$

当$\sum_l m_l \neq 1$时考虑$\left\{m_k \Big/ \sum_l m_l\right\}$，则得式(26)之第二式。

最后，我们看 $p>1$. 仍设 $\sum_l m_l=1$. 记

$$g_k=|f_k|\mathrm{II}(\{|f_k|\leqslant\lambda\}),\quad h_k=|f_k|-g_k.$$

则因 $g\leqslant\lambda$，有

$$\left|\left\{\sum_k m_k|f_k|>2\lambda\right\}\right|\leqslant\left|\left\{\sum_k m_kh_k>\lambda\right\}\right|\leqslant\frac{1}{\lambda}\sum_k m_kE(h_k)$$

$$=\frac{1}{\lambda}\sum_k m_k\left[-t\sigma_k(t)\Big|_\lambda^\infty+\int_\lambda^\infty\sigma_k(t)dt\right]$$

$$\leqslant\frac{1}{\lambda}\sum_k m_k\left[\frac{1}{\lambda^{p-1}}+\int_\lambda^\infty\frac{dt}{t^p}\right]=p'\frac{1}{\lambda^p}.$$

当$\sum_l m_l\neq 1$时可得

$$\left|\left\{\sum_k m_k|f_k|>\lambda\right\}\right|=\left|\left\{\sum_k\frac{m_k}{\sum_l m_l}|f_k|>\frac{\lambda}{\sum_l m_l}\right\}\right|$$

$$\leqslant p'2^p\left(\frac{\sum_l m_l}{\lambda}\right)^p.$$

此即为式(26)的第三式.

因此，引理 5 得证. ▌

推论 2 设T是一个可列次线性算子①，$0<p\leqslant1$, $0<q<\infty$, $q\neq1$, $p\leqslant q$. 则T是弱(H_p,q)型的，当且仅当

$$|\{|Ta|>\lambda\}|\leqslant\frac{C}{\lambda^q},\quad\forall p\text{-原子 } a. \tag{27}$$

---

① 所谓一个可列次线性算子是指满足如下性质的次线性算子：

$$|Tf|\leqslant\sum\lambda_j|Ta_j|,\quad\forall f\in H_1\subset H_p.$$

证明 必要性是容易的．只需证充分性．设式(27)成立．对 $f\in H_1\subset H_p$ 作如定理 2 中之原子分解 $f=\sum\lambda_j a_j$．则既然部分和也在 H_1 中收敛于 f，故由 T 之可列次线性得

$$|Tf|\leqslant\sum\lambda_j|Ta_j|.$$

从而由引理 5 即得

$$|\{|Tf|>\lambda\}|=\begin{cases}K\left(\dfrac{\sum\lambda_j}{\lambda}\right)^q, & q>1,\\ K\dfrac{\sum\lambda_j^q}{\lambda^q}, & q<1.\end{cases}$$

因 $p\leqslant q$，上述不等式的右边可被 $K\|f\|_{H_p}^q/\lambda^q$ 控制．即 T 是弱(H_p, q)型的算子．▮

定理 7 设 $0<p_1<\min(1,p_2)\leqslant p_2\leqslant\infty$，$q_1\neq q_2$，$p_i\leqslant q_i$，$i=1, 2$．又设 T 是弱(H_{p_i}, q_i)型可列次线性算子，$i=1,2$．则对于 p, q，其中

$$\frac{1}{p}=t\frac{1}{p_1}+(1-t)\frac{1}{p_2}\geqslant1,\quad \frac{1}{q}=t\frac{1}{q_1}+(1-t)\frac{1}{q_2},$$

$0<t<1$，T 也是(H_p, q)型算子．

证明 我们只需证明$\|Ta\|_q\leqslant C$，$\forall$ p-原子 a 就可以了．事实上，若能如此，则由 H_p 之原子分解，T 之可列次线性，以及 $p\leqslant q$，即得，当 $q\leqslant1$ 时有

$$\|Tf\|_q^q\leqslant\int_\Omega\sum\lambda_j^q|Ta_j|^q d\mu\leqslant C\sum\lambda_j^q$$

$$\leqslant C(\sum\lambda_j^p)^{\frac{q}{p}}\leqslant C\|f\|_{H_p}^q;$$

而当 $q>1$ 时有

$$\|Tf\|_q\leqslant\sum\lambda_j\|Ta_j\|_q\leqslant C\sum\lambda_j\leqslant C(\sum\lambda_j^p)^{\frac{1}{p}}\leqslant C\|f\|_{H_p}.$$

因此定理 7 得证．现补证$\|Ta\|_q\leqslant C$．

首先，考虑 $q_1, q_2<\infty$ 的情形．现设 a 是任一与某停止时间 τ

相联系的 p-原子. 我们有

$$\|a\|_{H_{p_1}}^{p_1}=\int_{\Omega}a^{*p_1}d\mu\leqslant|\{\tau<\infty\}|^{1-\frac{p_1}{p}},$$

$$\|a\|_{H_{p_2}}^{p_2}\leqslant|\{\tau<\infty\}|^{1-\frac{p_2}{p}}.$$

这样, 我们有(无妨设 $q_1<q<q_2$)

$$\begin{aligned}\frac{1}{q}\|Ta\|_q^q&=\int_0^\infty\lambda^{q-1}|\{|Ta|>\lambda\}|d\lambda\\&\leqslant\int_0^\sigma\lambda^{q-1}\left(\frac{M_1}{\lambda}\|a\|_{H_{p_1}}\right)^{q_1}d\lambda\\&\quad+\int_\sigma^\infty\lambda^{q-1}\left(\frac{M_2}{\lambda}\|a\|_{H_{p_2}}\right)^{q_2}d\lambda\\&\leqslant C\sigma^{q-q_1}|\{\tau<\infty\}|^{\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p}\right)q_1}\\&\quad+C\sigma^{q-q_2}|\{\tau<\infty\}|^{\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p}\right)q_2}.\end{aligned}$$

取 $\sigma=|\{\tau<\infty\}|^\alpha$, 其中 α 满足

$$(q_1-q)\alpha=\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p}\right)q_1.$$

这样确定的 α 也一定满足 $(q_2-q)\alpha=\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p}\right)q_2$, 这是因为

$$\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{q_2}\right)\Big/\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{q_1}\right)=\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_2}\right)\Big/\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}\right)=t/(t-1).\tag{28}$$

于是, 我们得

$$\|Ta\|_q\leqslant C.$$

当 q_1, q_2之一为∞时(无妨设 $q_2=\infty$), 证明同上面一样. 它相当于在上述证明中形式地令 $q_2=\infty$. 严格地说, 此时有

$$\|Ta\|_\infty\leqslant M_2\|a\|_{H_{p_2}}\leqslant M_2|\{\tau<\infty\}|^{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p}},$$

$$\frac{1}{q}\|Ta\|_q^q=\int_0^{\|Ta\|_\infty}\lambda^{q-1}(M_1\lambda^{-1}\|a\|_{H_{p_1}})^{q_1}d\lambda$$

$$\leqslant C\int_0^{M_2|\{\tau<\infty\}|^{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p}}}\lambda^{q-q_1-1}d\lambda|\{\tau<\infty\}|^{(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p})q_1}$$

$$\leqslant C|\{\tau<\infty\}|^{(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p})q_1}$$

$$\cdot|\{\tau<\infty\}|^{(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p})(q-q_1)}\leqslant C.$$

当 $p_2=\infty$时，必须也有 $q_2=\infty$. 此时的证明相当于在上述证明中形式地再令 $p_2=\infty$. ▮

现在讨论正规鞅的一种分解，它也可以应用于算子内插. 设 $0<p_0\leqslant p\leqslant p_1<\infty$. 则对所有的 $f\in L^p$, 及任意的$\lambda>0$, 都存在f的分解 $f=g+h$, 使

$$\|h\|_{p_0}^{p_0}\leqslant\lambda^{p_0-p}\|f\|_p^p,\quad \|g\|_{p_1}^{p_1}\leqslant\lambda^{p_1-p}\|f\|_p^p.$$

这只需令

$$h=f\mathrm{I}(\{|f|>\lambda\}),\quad g=f\mathrm{I}(\{|f|\leqslant\lambda\}).$$

现在我们指出在正规鞅论中亦有类似的分解.

定理 8 设正规性条件(R)成立，$0<p_0\leqslant1<p\leqslant p_2<\infty$. 则对任意的 $f\in L^p$, 及任意的 $\lambda>0$, 都存在 f 的分解 $f=g+h$, 使得

$$\begin{aligned}&\|h\|_{H_{p_0}}^{p_0}\leqslant C\lambda^{p_0-p}\|f\|_p^p,\\&\|g\|_{p_1}^{p_1}\leqslant C\lambda^{p_1-p}\|f\|_p^p.\end{aligned}\tag{29}$$

证明 首先设 $f=(f_n)_{n\geqslant0}\in H_p$ 满足 $f_0\equiv0$. 对非负适应过程 $(|f_n|)_{n\geqslant0}$ 与 $\lambda>0$ 定义停止时间 τ, 满足

$$|f_\tau|\leqslant\lambda,\quad |\{\tau<\infty\}|\leqslant d|\{f^*>\lambda\}|.$$

则将 f 分解为 $f=f_\tau+(f-f_\tau)=g+h$, 这便是所求的分解. 事实上，有

$$\|g\|_{p_1}^{p_1}=\int|f_\tau|^{p_1}d\mu\leqslant\lambda^{p_1-p}\int|f_\tau|^p d\mu\leqslant\lambda^{p_1-p}\|f\|_p^p.$$

此外，注意到 $h^* \mathrm{I}(\{\tau=\infty\})=0$，则又有

$$\begin{aligned}\|h^*\|_{p_0}^{p_0}&\leqslant\left(\int_{\{\tau<\infty\}}h^{*p}d\mu\right)^{p_0/p}|\{\tau<\infty\}|^{1-p_0/p}\\&\leqslant d^{1-p_0/p}\left(\frac{p}{p-1}\right)^{p_0}\left(\int_\Omega|h|^p d\mu\right)^{p_0/p}|\{f^*>\lambda\}|^{1-p_0/p}\\&\leqslant C\|f\|_p^{p_0}(\lambda^{-p}\|f\|_p^p)^{1-p_0/p}\leqslant C\lambda^{p_0-p}\|f\|_p^p.\end{aligned}$$

当 $f_0 \not\equiv 0$ 时，$f-f_0$ 可按刚才的方法分解，而 f_0 的分解是平凡的，如我们已指出的．▌

注 对事先给定的 $p>1$ 与 $\lambda>0$，上述分解对满足条件的一切 p_0, p_1 适用．

作为本小节的结束，我们对 7.2.1—7.2.3 节中几个主要结果，当鞅 $f=(f_n)_{n\geqslant0}$ 不满足 $f_0\equiv0$ 时将会发生什么变化作些讨论．

对于定理 2 与 3，当 $\mathscr{F}_0$ 不平凡时它们似无合适的对应；当 $\mathscr{F}_0$ 平凡时，可以将常数函数 1 视为一个特殊原子，从而 H_p 的原子分解就是，$(H_p)_0$ 的原子分解再加一个常数原子的倍数；此时 H_p 的对偶就是 $(H_p)_0$ 的对偶与 $\mathbf{C}$ 的直和，或者说

$$H_p'=({}_1\Lambda^\alpha,\|\cdot\|_{{}_1\Lambda^\alpha}^{**}),$$

其中

$$\|\varphi\|_{{}_1\Lambda^\alpha}^{**}=|E(\varphi)|+\|\varphi\|_{{}_1\Lambda^\alpha},\quad \alpha=\frac{1}{p}-1\geqslant0.$$

定理 4, 5, 6 同定理 8 一样，它们与 $\mathscr{F}_0$, f_0 都无关．我们只以定理 4 为例，并述之为命题．

命题 2 设 p, q, r, θ 如定理 4 中所述．考虑 H_p 代替定理4中的 $(H_p)_0$．则仍有 $(H_p, H_\infty)_{\theta,q}=H_{r,q}$．

证明 如同引理 3 中证明所表明的，我们总有

$$\int_0^{t^p}(Mf)^{*p}(\tau)d\tau\leqslant C_pK(t,f,H_p,H_\infty)^p,$$

从而

$$\|Mf\|_{r,q}\leqslant C\|f\|_{(H_p,H_\infty)_{\theta,q}},\quad \forall f\in H_p+H_\infty.$$

这说明 $(H_p,H_\infty)_{\theta,q}\subset H_{r,q}$. 现设 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}(\in H_{r,q})$ 为任意给定的. 则 $f_0\in L^{r,q}(\mathscr{F}_0)$, 且

$$\|f_0\|_{r,q}\leqslant\|f\|_{H_{r,q}}.$$

将 f 分解为 $f=f-f_0+f_0$, 并注意到

$$\|f-f_0\|_{H_{r,q}}\leqslant C(\|f\|_{H_{r,q}}+\|f_0\|_{r,q})\leqslant C\|f\|_{H_{r,q}},$$

$$\begin{aligned}K(t,f,H_p,H_\infty)\leqslant C(&K(t,f-f_0,H_p,H_\infty)\\&+K(t,f_0,H_p,H_\infty)),\end{aligned}$$

则得

$$\begin{aligned}&\left(\int_0^\infty(t^{-\theta}K(t,f))^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}\\&\leqslant C\left(\int_0^\infty(t^{-\theta}K(t,\ f-f_0))^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}\\&\quad+C\left(\int_0^\infty(t^{-\theta}K(t,f_0))^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}\\&\leqslant C(\|M(f-f_0)\|_{r,q}+\|f_0\|_{r,q})\\&\leqslant C\|f\|_{H_{r,q}}.\end{aligned}$$

这说明 $H_{r,q}\subset(H_p,H_\infty)_{\theta,q}$. 命题证完. ∎

7.2.4 H_1 与 $L\log^+L$

在古典 H_1 理论中，关于 H_1 与 $L\log^+L$ 的关系，有著名的 Zygmund 定理. 在正规鞅 H_1 理论中有如下类似的定理.

定理 9 设 L^1 中鞅使得 $f_\infty\in L\log^+L$, 则 $f\in H_1$. 反之，在正

规性条件(R)下，每个 H_1 中的非负鞅 $f=(f_n)_{n\geq 0}$，并且使得 $f_0\in L\log^+L$，则必有 $f\in L\log^+L$.

证明 定理的前一半是关于非负下鞅的 Kolmogorof 不等式的结果. 事实上，对 L^1 中任意的鞅 $f=(f_n)$，有

$$|\{f^*>\lambda\}|\leqslant\frac{1}{\lambda}\int_{\{f^*>\lambda\}}|f|d\mu,\quad \forall\lambda>0.$$

将上式关于 λ 在 $(1,\infty)$ 上积分即得

$$\begin{aligned}E((f^*-1)^+)&\leqslant\int_{\{f^*>1\}}|f|\log f^*d\mu\\&=E(|f|\log^+f^*).\end{aligned}$$

但因 $\forall\, b>a>0$，有

$$a\log^+b\leqslant a\log^+a+a\log^+\frac{b}{a}\leqslant a\log^+a+\frac{b}{e},$$

故得

$$E((f^*-1)^+)\leqslant E(|f|\log^+|f|)+\frac{1}{e}E(f^*),$$

$$E(f^*)\leqslant\frac{e}{e-1}E(|f|\log^+|f|)+\frac{e}{e-1}.$$

反之，设 $f=(f_n)_{n\geq 0}$ 是 H_1 中非负鞅，$f_0\in L\log^+L$，任给 $\lambda>0$. 定义停止时间 $\tau=\inf\{n:\ f_n>\lambda\}$. 则由正规性条件(R)，得

$$f_\tau\,\mathrm{II}(\{\tau>0\})\leqslant d\lambda. \tag{30}$$

于是我们有

$$\begin{aligned}\int_{\{f>\lambda\}}fd\mu&\leqslant\int_{\{\tau<\infty\}}f_\tau d\mu\\&=\int_{\{\tau=0\}}f_0d\mu+\lambda|\{0<\tau<\infty\}|\\&\leqslant\int_{\{f_0>\lambda\}}f_0d\mu+\lambda d|\{f^*>\lambda\}|.\end{aligned}\tag{31}$$

任取 $\lambda_0>0$，将不等式(31)关于 λ 在 (λ_0,∞) 上积分，得

$$\int_{\{f>\lambda_0\}} f\log\frac{f}{\lambda_0}d\mu = \int_{\lambda_0}^{\infty}\frac{1}{\lambda}\int_{\{f>\lambda\}} fd\mu d\lambda$$

$$\leqslant d\|f\|_{H_1}+\int_{\{f_0>\lambda_0\}} f_0\log\frac{f_0}{\lambda_0}d\mu<\infty,$$

由此得

$$E(f\log^+ f)\leqslant E\left(f\log^+\frac{f}{\lambda_0}\right)+E(f)\log^+\lambda_0+d\|f\|_{H_1}<\infty. \blacksquare$$

注 现在我们给出定理前一半的另外一个证明. 这个证明适用于一切(L^∞, L^∞)型与弱$(1, 1)$型的拟线性算子. 设T是这样一个同时是(L^∞, L^∞)型与弱$(1, 1)$型的拟线性算子. 对任意的$\lambda>0$, 令

$$f=f\,\mathrm{II}(\{|f|\leqslant\lambda\})+f\,\mathrm{II}(\{|f|>\lambda\})=f_1+f_2.$$

根据对T的假设, 有

$$Tf\leqslant k(Tf_1+Tf_2)\leqslant C\lambda+kTf_2,$$

$$\{Tf>2C\lambda\}\subset\{Tf_2>k^{-1}C\lambda\},$$

$$|\{Tf>\lambda\}|\leqslant|\{Tf_2>C\lambda\}|\leqslant\frac{C}{\lambda}\int_{\{|f|>\lambda\}}|f|d\mu,$$

于是得

$$E((Tf-1)^*)\leqslant CE(|f|\log^+|f|). \blacksquare$$

7.2.5 $H_p\cap\mathrm{Re}\,L^1$ 中函数的重排

现在我们按照 Davis[2] 的思想讨论$H_p\cap\mathrm{Re}\,L^1$中的分布函数的一个性质. 这是对H_1中非负函数必须属于$L\log^+L$的性质的一种推广. 我们仍然假设正规性条件(R)成立.

设f是定义在Ω上的一个实可测函数. 又设f_d是f在$[-1, 1]$上的一个如下重排:

$$\left.\begin{array}{l}\text{在}[0,1]\text{上，}f_d\geqslant 0\text{，下降；}\\ \text{在}[-1,0]\text{上，}f_d<0\text{，下降；}\\ \text{对}R\text{ 的任意的 Borel 集 }B\text{，}\\ \qquad |\{\omega:\ f\in B\}|=|\{x:\ f_d\in B\}|\\ \text{(其中右边的}|\cdot|\text{表示 Lebesgue 测度)。}\end{array}\right\}\tag{32}$$

定理 10 设正规性条件(R)成立；$f\in H_p\cap\operatorname{Re}L^1$, $0\leqslant p\leqslant 1$, $f_0\equiv 0$. 则我们有

$$\int_0^1\left|\frac{1}{x}\int_{-x}^{x}f_d(t)\,dt\right|^p dx\leqslant C_{p,d}\|f\|_{H_p}^p.\tag{33}$$

证明 记.

$$f_n=E(f|\mathscr{F}_n),\quad f^*=\sup|f_n|;$$
$$g_n=(f_n)^+,\quad g^*=(\sup f_n)^+;$$
$$h_n=(f_n)^-,\quad h^*=(-\inf f_n)^+.$$

对非负适应过程$(g_n)_0^\infty$与$\lambda>0$定义定理 1 中停止时间τ_λ，满足

$$|\{\tau_\lambda<\infty\}|\leqslant d|\{g^*>\lambda\}|,$$
$$\{f>\lambda\}\subset\{\sup_n f_n>\lambda\}=\{g^*>\lambda\}\subset\{\tau_\lambda<\infty\},$$
$$f_{\tau_\lambda}\mathrm{II}(\{\tau_\lambda<\infty\})\leqslant g_{\tau_\lambda}\mathrm{II}(\{\tau_\lambda<\infty\})\leqslant\lambda.$$

因此我们有

$$\begin{aligned}\int_{\{\tau_\lambda<\infty\}}fd\mu&=\int_{\{\tau_\lambda<\infty\}}f_{\tau_\lambda}d\mu\leqslant\lambda|\{\tau_\lambda<\infty\}|\\&\leqslant d\lambda|\{g^*>\lambda\}|=d\lambda\sigma(\lambda).\end{aligned}\tag{34}$$

记

$$\theta_\lambda=\sup\{x:\ f_d(x)>\lambda\}.$$

注意，函数$\int_\varphi^{\theta_\lambda}f_d(x)dx$与$\lambda(\theta_\lambda-\varphi)$是$\varphi\in[-1,0]$上的连续函数；且当$|\varphi|$($\varphi\leqslant 0$)增加时，前者下降，后者增加；而当$\varphi=0$时，

$$\int_0^{\theta_\lambda}f_d(x)\,dx>\lambda\theta_\lambda;$$

再由于 $E(f)=0$，故

$$-\int_{-1}^{0} f_d(x)\,dx=\int_{0}^{1} f_d(x)\,dx\geqslant\int_{0}^{\theta_\lambda} f_d(x)\,dx.$$

这些事实说明，存在唯一的 $\varphi_\lambda<0$，使

$$\int_{\varphi_\lambda}^{\theta_\lambda} f_d(x)\,dx=\lambda(\theta_\lambda-\varphi_\lambda). \tag{35}$$

记 $\psi_\lambda=\theta_\lambda-\varphi_\lambda$，则易知 ψ_λ 是 $\lambda\in(0,\infty)$ 的下降函数.

根据式(35)，我们可以构造集合 E，

$$E=\{f>\lambda\}\cup\{f<\beta\}\cup F,\quad F\subset\{f=\beta\},\beta\leqslant 0,$$

使得 $|\{f<\beta\}\cup F|=-\varphi_\lambda$. 这样我们有

$$\int_E f\,d\mu=\int_{\varphi_\lambda}^{\theta_\lambda} f_d(x)\,dx=\lambda\psi_\lambda=\lambda|E|, \tag{35$'$}$$

$$\int_E f\,d\mu=\inf\left\{\int_F f\,d\mu,F:F\supset\{f>\lambda\},\ |F|\leqslant|E|\right\}. \tag{36}$$

又由式(34)，(35)′与(36)，我们可以推得

$$\psi_\lambda\leqslant d|\{g^*>\lambda\}|=d\sigma(\lambda). \tag{37}$$

事实上，当

$$\int_E f\,d\mu\leqslant\int_{\{\tau_\lambda<\infty\}} f\,d\mu,$$

式(37)是显然的，它由式(34)与(35)′即得；当

$$\int_E f\,d\mu>\int_{\{\tau_\lambda<\infty\}} f\,d\mu,$$

由 $\{f>\lambda\}\subset\{\tau_\lambda<\infty\}$ 即知 $|E|<|\{\tau_\lambda<\infty\}|$，这来源于式(36)所表达的集合 E 的“极小性”. 总之，式(37)成立. 现记

$$\alpha_n=\left(2^{n-1}\int_{-2^{-n}}^{2^{-n}} f_d(x)\,dx\right)^+.$$

则易知，当 $\alpha_n>0$ 时，有 $\psi_{\alpha_n}\geqslant 2^{-n}$. 事实上，当 $\theta_{\alpha_n}\geqslant 2^{-n}$ 时，这是显然的；而当 $0<\theta_{\alpha_n}<2^{-n}$ 时，我们有

$$\int_{-2^{-n}}^{\theta_{\alpha_n}} f_d(x)\,dx = \int_{-2^{-n}}^{2^{-n}} - \int_{\theta_{\alpha_n}}^{2^{-n}} \geqslant \alpha_n(\theta_{\alpha_n} + 2^{-n}).$$

这说明 $\varphi_{\alpha_n} \leqslant -2^{-n}$, 从而

$$\psi_{\alpha_n} = \theta_{\alpha_n} - \varphi_{\alpha_n} \geqslant 2^{-n}.$$

设 $j_0=0$; $j_1(>j_0)$ 是最小的满足 $\alpha_{j_1} > 2\alpha_{j_0}$ 的整数; … ; $j_i(>j_{i-1})$ 是满足 $\alpha_{j_i} > 2\alpha_{j_{i-1}}$ 的最小整数; …. 我们有

$$\begin{aligned}\sum_0^\infty 2^{-n}\alpha_n^p &\leqslant (1+2^p)\sum_{i=0}^\infty 2^{-j_i}\alpha_{j_i}^p \\ &\leqslant (1+2^p)\sum_{i=0}^\infty \psi_{\alpha_{j_i}}\alpha_{j_i}^p \\ &\leqslant C_p\sum_{i=0}^\infty \int_{\frac{\alpha_{j_i}}{2}}^{\alpha_{j_i}} \psi_\lambda \lambda^{p-1}\,d\lambda \leqslant C_{p,d}\|g^*\|_p^p.\end{aligned}$$

于是, 我们得

$$\sum_0^\infty 2^{-n}\left(\left(2^{n-1}\int_{-2^{-n}}^{2^{-n}} f_d(t)\,dt\right)^+\right)^p \leqslant C_{p,d}\|f\|_{H_p}^p.$$

同样地, 考虑 $-f$, 我们又得

$$\sum_0^\infty 2^{-n}\left(\left(2^{n-1}\int_{-2^{-n}}^{2^{-n}} f_d(t)\,dt\right)^-\right)^p \leqslant C_{p,d}\|f\|_{H_p}^p.$$

按照 Davis[2]的一个引理所给出的不等式

$$\int_0^1\left|\frac{1}{x}\int_{-x}^{x} f_d(t)\,dt\right|^p dx \sim \sum_0^\infty 2^{n(p-1)}\left|\int_{-2^{-n}}^{2^{-n}} f_d\,dt\right|^p (\text{模}\|f\|_p^p), \tag{38}$$

立即完成定理的证明. ∎

7.2.6 H_p 的算子刻划

现在我们讨论用一些算子来刻划 H_p 空间的问题. 我们知道,

古典的 H_1 空间可以定义为

$$H_1(\mathbf{T})=\{f\in L^1: \tilde{f}\in L^1, \tilde{f}\text{ 是共轭函数.}\},$$

$$H_1(\mathbf{R}^n)=\{f\in L^1: R_jf\in L^1, j=1,\cdots,n, R_j\text{ 是 Riesz 变换.}\}.$$

自然地会问，这在鞅论中有怎样的类似？这是一个很有兴趣，然而长时期为人们所困惑的问题. H_p 鞅论之所以迟至七十年代初才发展起来，主要原因也是因为在鞅论中很难引进解析性、共轭性，以及一些奇异积分算子. 正是由 Chao-Taibleson[1]首先在局部域上的调和分析领域中开辟了用共轭函数刻划 H_1 的通路. 这为鞅论中建立类似的结果提供了希望. 此后不久，S. Janson 与 J. A. Chao 等陆续对一类比较特殊的正规鞅，即 q-鞅，建立了类似的事实. 本小节将介绍这方面的一些结果. 所谓 q-鞅（q 是正整数）是关于那样的 $\{\mathscr{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ 的鞅，其中每个 $\mathscr{F}_n$ 都是原子的，并且 $\mathscr{F}_n$ 的每个原子恰可剖分成 q 个等测度的 $\mathscr{F}_{n+1}$ 的原子. 此时我们把所有原子如下编号：

$$I_{i_1,\cdots,i_n},\quad 1\leqslant i_1,\cdots,i_n\leqslant q, n=1,2,\cdots.$$

也可考虑更广泛一些，即 $\mathscr{F}_n$ 的每个原子等测剖分成 q_{n+1} 个 $\mathscr{F}_{n+1}$ 的原子，其中 $\{q_k\}_1^\infty$ 是整数序列. 当然 $\mathscr{F}_0$ 只有原子 Ω. 不过我们只考虑 $q_k=q$ 的情况，并且只讨论对 H_1 的刻划. 先证三个引理.

引理 6 设 $x_1,\cdots,x_q$ 是满足 $\Sigma x_i=0, \min x_i=-1$ 的实数. 则存在 q-鞅 $f\in L^1, \overline{\in} H_1$，使得

$$\Delta f_n|_{I_{i_1,\cdots,i_{n-1},j}}=\lambda_{i_1,\cdots,i_{n-1}}x_j,\quad j=1,2,\cdots,q. \tag{39}$$

证明 定义 L^1 有界的非负鞅 $(g_n)_{n\geqslant 0}$ 如下：

$$g_n|_{I_{i_1,\cdots,i_n}}=\prod_{k=1}^n(1+x_{i_k}),\quad g_0=1.$$

它显然是非负的，并且是一个鞅. 后者是因为

$$g_n|_{I_{i_1,\cdots,i_n}}=(1+x_{i_n})\,g_{n-1}|_{I_{i_1,\cdots,i_{n-1}}},$$

从而有

$$\begin{aligned}
&E(g_n|\mathscr{F}_{n-1})|_{I_{i_1,\cdots,i_{n-1}}}\\
&=\frac{1}{|I_{i_1,\cdots,i_{n-1}}|}\int_{I_{i_1,\cdots,i_{n-1}}} g_n d\mu\\
&=\frac{1}{|I_{i_1,\cdots,i_{n-1}}|}\sum_{i_n=1}^{q}\int_{I_{i_1,\cdots,i_{n-1},i_n}}(1+x_{i_n})\,g_{n-1}|_{I_{i_1,\cdots,i_{n-1}}}d\mu\\
&=\frac{1}{|I_{i_1,\cdots,i_{n-1}}|}\sum_{i_n=1}^{q}|I_{i_1,\cdots,i_{n-1},i_n}|\,g_{n-1}|_{I_{i_1,\cdots,i_{n-1}}}\\
&=g_{n-1}|_{I_{i_1,\cdots,i_{n-1}}}.
\end{aligned}$$

而非负鞅都是 L^1 有界的，此处 $E(g_n)=E(g_0)=1$.

现令

$$f=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{g_k}{k^2},$$

则 $f\in L^1$. 考虑由 f 生成的鞅 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$，其中

$$f_0=1,\quad f_n=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{g_k}{k^2}+\sum_{k\geqslant n}\frac{g_n}{k^2}\geqslant\frac{g_n}{n}.$$

于是有

$$\Delta f_n=f_n-f_{n-1}=\sum_{k\geqslant n}\frac{g_n-g_{n-1}}{k^2},$$

$$\begin{aligned}
\Delta f_n|_{I_{i_1,\cdots,i_n}}&=C(g_n-g_{n-1})\,|I_{i_1,\cdots,i_n}\\
&=(Cg_{n-1}|_{I_{i_1,\cdots,i_{n-1}}})\,x_{i_n}\\
&=\lambda_{i_1,\cdots,i_{n-1}}\,x_{i_n}.
\end{aligned}$$

剩下需证明 $f\overline{\in}H_1$. 设 $x_1=-1$. 注意$\forall n$, 当至少有一个$i_k=1$(对 $k\leqslant n$)时即有

$$g_n|_{I_{i_1,\cdots,i_n}}=0.$$

若记

$$F_n=\bigcup_{i_1,\cdots,i_{n-1}\neq 1}I_{i_1,\cdots,i_{n-1},1},$$

则$\{F_n\}$关于 n 是不交的. 注意还有

$$\int_{F_n}g_{n-1}\,d\mu=\frac{1}{q}\int_{\bigcup\limits_{i_1,\cdots,i_{n-1}\neq 1}I_{i_1,\cdots,i_{n-1}}}g_{n-1}d\mu$$

$$=\frac{1}{q}E(g_{n-1})=\frac{1}{q}.$$

由此我们得

$$\int_\Omega f^*d\mu\geqslant\sum_n\int_{F_n}f^*d\mu\geqslant\sum_n\int_{F_n}\frac{g_{n-1}}{n-1}d\mu$$

$$\geqslant\frac{1}{q}\sum_n\frac{1}{n-1}=\infty.$$

这就是说 $f\overline{\in}H_1$. 引理至此证毕. ∎

现在设 V 是 C^q 内的超平面

$$V=\left\{x\in C^q\colon\ \sum_{j=1}^q x_j=0\right\}.$$

设 A 是 V 到 V 内的线性变换, A 扩张到 C^q 内去的算子用矩阵 $A=(a_{i,j})$ 表示. 又设 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$, $f_0=0$, 是一个 q-进鞅. 则对一切 n 与一切多重指标$(i_1,\cdots,i_{n-1})$,

$$(\Delta f_n|_{I_{i_1,\cdots,i_{n-1},j}})_{j=1}^q\in V.$$

故可定义 Δg_n 如下:

$$(\Delta g_n|_{I_{i_1,\cdots,i_{n-1},j}})=\left(\sum_{k=1}^{q}a_{j,k}\Delta f_n|_{I_{i_1,\cdots,i_{n-1},k}}\right)$$

$$=A((\Delta f_n|_{I_{i_1,\cdots,i_{n-1},k}})_{k=1}^{q}).$$

因为$(\Delta g_n|_{I_{i_1,\cdots,i_{n-1},j}})_{j=1}^{q}\in V$，故

$$g=(g_n)_{n\geqslant 0},\qquad g_n=\sum_{k=1}^{n}\Delta g_k,\qquad g_0=0$$

也是一个q-进鞅．记这个鞅为$g=Tf$．这样V到V内的每个线性算子按如上自然方式产生了一个定义在q-进鞅上的线性算子．注意，当f是一个终止于n的有限鞅时，Tf也是一个终止于n的有限鞅，这因为Δg_k只由Δf_k决定．于是，对有限鞅(如终止于n)而言，$f\to Tf$是$L^1(\mathscr{F}_n)$到$L^1(\mathscr{F}_n)$内的算子．并且由此知道，对于$f=(f_n)_{n\geqslant 0}$，$(Tf)_n=g_n$正是Tf_n（这由g_n的定义可直接看出）．因此，今后我们常常把鞅Tf写为$(Tf_n)_{n\geqslant 0}$.

引理 7　设$A_1,\cdots,A_m$是V到V内的线性算子，且在$\boldsymbol{R}^q\cap V$内无公共非零特征向量．则存在$p_0<1$，使$\forall p\geqslant p_0$，都有

$$\|a\|^p\leqslant\frac{1}{q}\sum_{k=1}^{q}\|(a_i+x_{i,k})_{i=0}^{m}\|^p,\tag{40}$$

其中$a=(a_i)_0^m\in\boldsymbol{C}^{m+1}$，$x_0\in V$，$x_i=A_ix_0$，$i=1,\cdots,m$ $(x_i=(x_{i,k})_{k=1}^{q})$，都是任意的，范数$\|\cdot\|$是复欧氏空间内的范数．

证明　既然$x_i\in V$，我们有

$$a_i=\frac{1}{q}\sum_{k=1}^{q}(a_i+x_{i,k}),\qquad\forall i.\tag{41}$$

因此，当$p\geqslant 1$时，我们有

$$\|a\|\leqslant\frac{1}{q}\sum_{k=1}^{q}\|(a_i+x_{i,k})_{i=0}^{m}\|$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{q}\sum_{k=1}^{q}\|(a_i+x_{i,k})_{i=0}^{m}\|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

上式即为 $p\geqslant1$ 时的式(40). 现证 $0<p<1$ 时的式(40). 分两种情况证明.

a) 设$\frac{\|x_0\|}{\|a\|}\leqslant\varepsilon$, ε 为大于零的充分小的待定的数. 这里的范数分别是 C^q 与 C^{m+1} 内的.

此时记 A_0 为恒等算子, 记

$$K_1=\left\{(a, x_0, \cdots, x_m):\ a\in C^{m+1}, x_i=A_ix_0, x_0\in V,\right.$$
$$\left.\text{并且}\|a\|=\sum_{i=0}^{m}\|x_i\|^2=1.\right\}.$$

并设 α 是连续函数$\sum_k\left(\mathrm{Re}\sum_i\bar{a}_ix_{i,k}\right)^2$在这个紧致集上的极大值. 则因在 K_1 上,

$$\sum_k\left(\mathrm{Re}\sum_i\bar{a}_ix_{i,k}\right)^2\leqslant\sum_k\sum_i|a_i|^2\sum_i|x_{i,k}|^2$$
$$\leqslant\|a\|^2\sum_i\|x_i\|^2=1,$$

故 $\alpha\leqslant1$. 假设 $\alpha=1$, 则存在$(a, x_0, \cdots, x_m)\in K_1$, 使

$$\sum_k\left(\mathrm{Re}\sum_i\bar{a}_ix_{i,k}\right)^2=1.$$

由此推出所有的 $\sum_i\bar{a}_ix_{i,k}$ 都是实的, 并且

$$x_{i,j}=\lambda_ja_i,\quad \forall i, j.$$

因此有

$$\lambda_ja_ix_{k,l}=\lambda_la_kx_{i,j},\quad \forall\ i, j, k, l.$$

特别取 $l=j$, 则当 $\lambda_j\neq0, \forall\ j$, 便有

$$a_ix_{k,j}=a_kx_{i,j},\quad \forall i, j, k. \tag{42}$$

而当对某些 j, 有 $\lambda_j=0$ 时, 则对同样的 j, 因也有 $x_{i,j}=0$, 故将这些 j 除外(相当于缩小了 j 的指标集)仍有式(42). 特别在式(42)中令 $i=0$, 则因 $a_0\neq 0$(否则, 因为至少有一个 j, 使 $x_{0,j}=0$成立. 因此由 $a_0=0$ 将推出 $a_k=0$, $\forall k$, 这与$\|a\|=1$ 矛盾), 得到

$$x_{k,j}=\frac{a_k}{a_0}x_{0,j},\quad \forall k,\ j.$$

这说明$\dfrac{x_0}{a_0}$是$A_1,\cdots,A_m$ 的公共特征向量, 并且它属于 $\boldsymbol{R}^k$. 这后一结论是因为由式(42)得

$$\bar{a}_k a_0 x_{k,j}=|a_k|^2 x_{0,j},$$

$$\frac{1}{\|a\|^2}\sum_{k=0}^{m}\bar{a}_k x_{k,j}=\frac{x_{0,j}}{a_0}.$$

因此, 我们由 $\alpha=1$ 推出$A_1,\cdots,A_m$ 在 $\boldsymbol{R}^k$ 内有公共非零特征向量, 这是一个与假设矛盾的结果, 故只能有 $\alpha<1$.

这就是说, $\forall\, a\in \boldsymbol{C}^{m+1}$, $\forall\, x_0\in V$, $x_i=A_i x_0$, 存在 $\alpha<1$, 使

$$\sum_k\left(\mathrm{Re}\sum_i\bar{a}_i x_{i,k}\right)^2\leqslant\alpha\|a\|^2\sum_i\|x_i\|^2.$$

现在再利用二项式展开, 我们有

$$\sum_k\|(a_i+x_{i,k})_{i=0}^m\|^p=\sum_k\left(\sum_i|a_i+x_{i,k}|^2\right)^{\frac{p}{2}}$$

$$=\sum_k\left(\sum_i|a_i|^2+\sum_i 2\mathrm{Re}\,\bar{a}_i x_{i,k}+\sum_i|x_{i,k}|^2\right)^{\frac{p}{2}}$$

$$=\|a\|^p\sum_k\left(1+\frac{2\mathrm{Re}\sum_i\bar{a}_i x_{i,k}+\sum_i|x_{i,k}|^2}{\|a\|^2}\right)^{\frac{p}{2}}$$

$$=\|a\|^p\sum_k\left\{1+\frac{p}{2}\frac{2\mathrm{Re}\sum_i\bar{a}_i x_{i,k}}{\|a\|^2}\right.$$

$$+\frac{p}{2}\frac{\sum_i|x_{i,k}|^2}{\|a\|^2}$$

$$+\frac{1}{2}\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-1\right)\left(\frac{2\mathrm{Re}\sum_i\bar{a}_i x_{i,k}}{\|a\|^2}\right)^2$$

$$\left.+O\left(\frac{\|x_0\|^3}{\|a\|^3}\right)\right\}$$

$$=\|a\|^p\sum_k\left(1+\frac{p}{2}\frac{\sum_i|x_{i,k}|^2}{\|a\|^2}\right.$$

$$\left.+\frac{p}{2}(p-2)\left(\frac{\mathrm{Re}\sum_i\bar{a}_i x_{i,k}}{\|a\|^2}\right)^2+O\left(\frac{\|x_0\|^3}{\|a\|^3}\right)\right).$$

此即

$$\frac{1}{\|a\|^p}\sum_k\|(a_i+x_{i,k})_{i=0}^m\|^p$$

$$\geqslant q+\frac{p}{2}\frac{\sum\|x_i\|^2}{\|a\|^2}+\frac{p}{2}(p-2)\alpha\frac{\sum\|x_i\|^2}{\|a\|^2}$$

$$+O\left(\frac{\|x_0\|^3}{\|a\|^3}\right).$$

既然 $\alpha<1$，故只要 p 充分接近于 1，譬如说对某个 $p_0<1$，$p\geqslant p_0$，并且只要 $\varepsilon(>0)$ 充分小，便有

$$\frac{p}{2}(1+(p-2)\alpha)\frac{\sum\|x_i\|^2}{\|a\|^2}+O\left(\frac{\|x_0\|^3}{\|a\|^3}\right)\geqslant 0.$$

于是，当 $\frac{\|x_0\|}{\|a\|}\leqslant\varepsilon$ 时我们证明了式(40)成立.

b) 现设 $\frac{\|x_0\|}{\|a\|}\geqslant\varepsilon$. 考虑集合

$$K_2=\left\{(a, x_0, \cdots, x_m):\ a\in \mathbf{C}^{m+1}, x_0\in V, x_i=A_i x_0,\right.$$
$$\left.\frac{\|x_0\|}{\|a\|}\geqslant\varepsilon, \frac{1}{q}\sum_k \|(a_i+x_{i,k})_{i=0}^m\|=1.\right\}$$

它是 $C^{m+1}\times V^{m+1}$ 中的紧致集. 因它是闭的, 并且由式(41) 知它是有界的:

$$\|a\|\leqslant\frac{1}{q}\sum_k\|(a_i+x_{i,k})_{i=0}^m\|=1,$$

$$\left(\sum_{i,k}|x_{i,k}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\sum_{i,k}|a_i+x_{i,k}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$+\left(\sum_{i,k}|a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant C.$$

记

$$\beta=\max\{\|a\|:\ (a, x_0, \cdots, x_m)\in K_2\}.$$

上面已知 $\beta\leqslant1$. 如果 $\beta=1$, 则由K_2 的紧致性知, 存在$(a, x_0, \cdots, x_m)(\in K_2)$, 使

$$\|a\|=\frac{1}{q}\sum_k\|(a_i+x_{i,k})_{i=0}^m\|.$$

这意味着 C^{m+1} 中的向量 qa(a 的 q 倍)的长度是 q 个向量 $(a_0+x_{0,k}, a_1+x_{1,k}, \cdots, a_m+x_{m,k})$的长度的和, 其中 $k=1, \cdots, q$. 而由式(41)知, 向量 $qa=(qa_0, \cdots, qa_m)$正是这 q 个向量的向量和. 故这 q 个向量一定同方向, 即

$$a_i+x_{i,k}=\lambda_k b_i,\quad \forall\ i, k,\quad \lambda_k\geqslant0.$$

将上式两边对 k 求和, 即得

$$qa_i=\sum\lambda_k b_i,\quad b_i=\frac{q}{\sum\lambda_k}a_i,$$

$$a_i + x_{i,k} = \lambda_k \frac{q}{\sum \lambda_k} a_i = \mu_k a_i, \quad \mu_k \geqslant 0, \quad \forall i, k.$$

因而

$$x_{i,k} = (\mu_k - 1) a_i = \frac{a_i}{a_0} x_{0,k}, \quad \forall\ i, k. \tag{43}$$

既然$\|x_0\| \geqslant \varepsilon \|a\| = \varepsilon$，说明 x_0 是非零向量，故 $a_0 \neq 0$(因为 $x_{0,k} = (\mu_k - 1) a_0$)．因而

$$\frac{x_0}{a_0} = (\mu_1 - 1, \cdots, \mu_q - 1)$$

是一个非零实向量，且由式(43)说明$\frac{x_0}{a_0}$是 A_i 的以a_i 为特征值的特征向量．这又与假设矛盾，从而说明 $\beta < 1$．也就是说

$$\forall a \in \boldsymbol{C}^{m+1}, \quad \forall x_0 \in V, \quad \|x_0\| \geqslant \varepsilon \|a\|,$$

有

$$\|a\| \leqslant \beta \frac{1}{q} \sum_k \|(a_i + x_{i,k})_{i=0}^m\|,$$

既然

$$q\left(\sum_k \|(a_i + x_{i,k})_{i=0}^m\|\right)^{-1} (a, x_0, \cdots, x_m) \in K_2,$$

$$\forall\ a \in \boldsymbol{C}^{m+1}, \quad \forall x_0 \in V.$$

因此 $\forall p < 1$，有

$$\|a\|^p \leqslant \left(\frac{\beta}{q}\right)^p \sum_k \|(a_i + x_{i,k})_{i=0}^m\|^p.$$

若取 p 充分接近于 1，如 $1 > p > \log q / \log(q/\beta)$则

$$\|a\|^p \leqslant \frac{1}{q} \sum_k \|(a_i + x_{i,k})_{i=0}^m\|^p.$$

引理至此全部证毕．▉

下面再介绍一个引理，它在算子刻划问题中也是需要的，并且

有独立的意义. 现在我们不只对 q-鞅, 而且对 7.1 节所述的满足正规性条件(R)的鞅来建立这个引理.

引理 8 设(R)成立. 又设 T 是一个对所有有限鞅有定义的次线性算子, 它是 H_2 中有界的, 也是 $L^p(\mathscr{F}_0)$ 中有界的, 对 $p\in(0,2]$, 且满足

$$Tf_\tau=(Tf)_\tau,\quad \forall \text{ 停止时间 } \tau,\quad \forall \text{ 有限鞅 } f=(f_n)_{n\geqslant 0}. \tag{44}$$

则 $\forall p\in(0,2]$, T 也是 H_p 中有界的.

证明 既然 $Tf_0=(Tf)_0$, 且

$$\|Tf_0\|_p\leqslant C\|f_0\|_p\leqslant C\|f\|_{H_p},$$

这说明我们假设 $f_0\equiv 0$, 并不失一般性. 现设 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$ 是一满足 $f_0\equiv 0$ 的有限鞅. 对非负适应过程 $(|f_n|)_{n\geqslant 0}$ 与 $\lambda>0$ 定义停止时间 τ_λ, 满足

$$|\{\tau_\lambda<\infty\}|\leqslant d|\{f^*>\lambda\}|,\quad \{f^*>\lambda\}\subset\{\tau_\lambda<\infty\},\quad f^*_{\tau_\lambda}\leqslant\lambda.$$

因为 $Tf_{\tau_\lambda}=(Tf)_{\tau_\lambda}$, 我们有

$$(Tf_{\tau_\lambda})^*=\sup_n|(Tf)_{\tau_\lambda\wedge n}|=(Tf)^*_{\tau_\lambda}. \tag{45}$$

因此我们得到

$$|\{(Tf)^*>\lambda\}|\leqslant|\{(Tf)^*>\lambda,\ \tau_\lambda=\infty\}|+|\{\tau_\lambda<\infty\}|,$$

$$\begin{aligned}|\{(Tf)^*>\lambda,\ \tau_\lambda=\infty\}|&\leqslant|\{(Tf)^*_{\tau_\lambda}>\lambda\}|\\&=|\{(Tf_{\tau_\lambda})^*>\lambda\}|\\&\leqslant\frac{C}{\lambda^2}\int_\Omega|f_{\tau_\lambda}|^2d\mu\\&=\frac{C}{\lambda^2}\left(\int_{\{\tau_\lambda=\infty\}}+\int_{\{\tau_\lambda<\infty\}}\right)\\&\leqslant\frac{C}{\lambda^2}\int_{\{f^*\leqslant\lambda\}}|f|^2d\mu+C|\{\tau_\lambda<\infty\}|.\end{aligned}$$

现设 $p\in(0,2)$, 关于 $\lambda(\in(0,\infty))$ 积分下述不等式

$$\lambda^{p-1}|\{(Tf)^*>\lambda\}|$$

$$\leqslant C\lambda^{p-3}\int_{\{f^*\leqslant\lambda\}}|f|^2d\mu+C\lambda^{p-1}|\{f^*>\lambda\}|,$$

即得所希望的

$$\|Tf\|_{H_p}\leqslant C_p\|f\|_{H_p}. \blacksquare$$

作为引理 8 的应用, 我们有

推论 3 设 A 是超平面 V 到自身的线性算子, 其矩阵表示是

$$A=(a_{k,j}),\quad \|A\|=1.$$

又设 T 如前所述, 是由 A 诱导的定义在鞅上的算子 (即对每个鞅 $f=(f_n)$, $Tf=((Tf)_n)$ 满足

$$(Tf)_{n+1}-(Tf)_n=A(\Delta f_n),\quad \forall n).$$

则 T 是 BMO 到自身的有界线性算子, 且是 H_p 到自身的 $(0<p<\infty)$ 有界线性算子.

证明 不失一般性, 可设 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$ 满足 $f_0=0$. 我们有

$$E(|\Delta(Tf_n)^2|\mathscr{F}_{n-1})|_{I_{i_1},\cdots,i_{n-1}}$$

$$=\frac{1}{q}\sum_{k=1}^{q}\left|\sum_{j=1}^{q}a_{k,j}\Delta f_n|_{I_{i_1},\cdots,i_{n-1},j}\right|^2$$

$$\leqslant\frac{1}{q}\|A\|^2\sum_{j=1}^{q}\left|\Delta f_n|_{I_{i_1},\cdots,i_{n-1},j}\right|^2$$

$$=E(|\Delta f_n|^2|\mathscr{F}_{n-1})|_{I_{i_1},\cdots,i_{n-1}}.$$

这样, $\forall n>m\geqslant 0$, 有

$$E(|\Delta(Tf_n)|^2|\mathscr{F}_m)\leqslant E(|\Delta f_n|^2|\mathscr{F}_m).$$

由此式即可推出 T 是 L^2 上的, 以及 BMO 上的有界算子. 事实上, 如看后者, 设 $f\in\mathrm{BMO}\subset L^2$, 则其推导可以如下:

$$E(|Tf-Tf_n|^2|\mathscr{F}_n)=\sum_{n+1}^{\infty}E(|\Delta(Tf_k)|^2|\mathscr{F}_n)$$

$$\leqslant\sum_{n+1}^{\infty}E(|\Delta f_k|^2|\mathscr{F}_n)$$

$$=E(|f-f_n|^2|\mathscr{F}_n)\leqslant\|f\|^2_{\mathrm{BMO}_2},$$

因此 $$\|Tf\|^2_{\mathrm{BMO}_2}\leqslant q\|f\|^2_{\mathrm{BMO}_2}.$$

现证当 $0<p<\infty$ 时 T 是 H_p 中有界的. 为了应用引理 8, 必需验证 T 满足 $Tf_\tau=(Tf)_\tau$, $\forall$ 停止时间 τ. 而这的确是成立的. 因为

$$f_\tau=(f_{\tau\wedge n})_{n\geqslant 0},\qquad f_{\tau\wedge n}=\sum_{k=0}^{n}\Delta f_k\mathrm{II}(\{k\leqslant\tau\}),$$

以及按 T 的定义,

$$Tf_\tau=((Tf_\tau)_n)_{n\geqslant 0},$$

$$(Tf_\tau)_n=\sum_{k=0}^{n}A(\Delta f_k\mathrm{II}(\{k\leqslant\tau\}))$$

$$=\sum_{k=0}^{n}A(\Delta f_k)\mathrm{II}(\{k\leqslant n\})=(Tf)_{\tau\wedge n}.$$

(注意, 我们这里已经应用了 $\mathrm{II}(\{k\leqslant\tau\})$ 关于 $\mathscr{F}_{k-1}$ 可测的事实, 从而在 $\mathscr{F}_{k-1}$ 的每个原子上为常数.) 因此, 应用引理 8, 即得当 $0<p<2$ 时 T 是 H_p 有界的.

现讨论 $p>2$ 的情形. 既然 T 的共轭算子是由 A 的共轭算子诱导的, 因此由对偶讨论, 即得 T 此时也是 H_p 有界的. 从而推论得证. ▌

现在我们可以开始进行 H_1 的算子刻划.

定理 11 设 $\{A_i\}_1^m$ 是由 V 到 V 内的线性算子族, $\{T_i\}_1^m$ 是对应的定义在鞅上的线性算子族, 其中每个 T_i 由 A_i 诱导, 如推论 3 中所述. 则

$$H_1=\{f\in L^1:\ T_if\in L^1,\ i=1,\cdots,m\}=K,\tag{46}$$

当且仅当 $\{A_i\}_1^m$ 在 $\boldsymbol{R}^q\cap V$ 中无公共非零特征向量.

证明 假设 $\{A_i\}_1^m$ 在 $\boldsymbol{R}^q\cap V$ 中有公共非零特征向量 $x=(x_k)_1^q$, λ_i 是 A_i 的对应于这个向量的特征值. 无妨设 $\min x_k=-1$. 由引

理 6 知，存在 $f\in L^1$，$\overline{\in}H_1$，使得

$$\Delta f_n|_{I_{i_1},\cdots,i_{n-1},k}=\lambda_{i_1,\cdots,i_{n-1}}x_k,\quad k=1,\cdots,q.$$

根据 T_i 的定义，我们有

$$\begin{aligned}(\Delta(T_if)_n|_{I_{i_1},\cdots,i_{n-1},k})_{k=1}^q&=A_i((\Delta f_n|_{I_{i_1},\cdots,i_{n-1},k}))\\&=\lambda_i\lambda_{i_1,\cdots,i_{n-1}}x=\lambda_i(\Delta f_n|_{I_{i_1},\cdots,i_{n-1},k})_{k=1}^q.\end{aligned}$$

这说明 $T_if=\lambda_if$. 此时的 $f\in K$，$\overline{\in}H_1$. 这就证明了必要性.

现证充分性. 由引理 8 知，总有 $H_1\subset K$. 剩下需要证 $K\subset H_1$. 我们可以证明更强的断言：如果 $\{A_i\}_1^m$ 在 $\boldsymbol{R}^q\cap V$ 中没有公共非零特征向量，并且 $f=(f_n)_{n\geq0}$ 是一个鞅，使得

$$T_if=(T_if_n)_{n\geq0}\quad(i=,1,\cdots,m)$$

都是 L^1 有界的（其中 T_0 理解为恒等算子），则必须 $f\in H_1$. 下面我们来证明这个断言. 记

$$g_n(\omega)=\|(T_if_n)_{i=0}^m\|=\left(\sum_{i=0}^m|T_if_n(\omega)|^2\right)^{\frac{1}{2}}.\tag{47}$$

对一切 n 与多重指标 $(i_1,\cdots,i_n)$，令

$$\begin{aligned}a_i&=T_if_n|_{I_{i_1},\cdots,i_n},\\x_{i,k}&=(T_if_{n+1}-T_if_n)|_{I_{i_1},\cdots,i_n,k}\\&=\Delta(T_if_{n+1})|_{I_{i_1},\cdots,i_n,k}.\end{aligned}$$

对 $p<1$，应用引理 7 得

$$\begin{aligned}g_n^p|_{I_{i_1},\cdots,i_n}=\|a\|^p&\leqslant\frac{1}{q}\sum_{k=1}^q\|(a_i+x_{i,k})_{i=0}^m\|^p\\&=\frac{1}{q}\sum_{k=1}^q\|(T_if_{n+1}|_{I_{i_1},\cdots,i_n,k})_{i=0}^m\|^p\\&=E(g_{n+1}^p|\mathscr{F}_n)|_{I_{i_1},\cdots,i_n}.\end{aligned}$$

这说明过程 $(g_n^p)_{n\geq0}$ 是一个非负下鞅. 它显然是在 $L^{1/p}$ 中有界的. 因

$$\|g_n^p\|_{1/p}=\|g_n\|_1^p=E\left(\left(\sum_i |T_i f_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^p$$

$$\leqslant\left(\sum_i \|T_i f_n\|_1\right)^p.$$

再应用 Doob 的极大不等式即得

$$\|f^*\|_1^p\leqslant\|\sup_n\ g_n^p\|_{1/p}\leqslant C_p\sup_n\|g_n^p\|_{1/p}$$

$$\leqslant C_p\sup_n\left(\sum_i\|T_i f_n\|_1\right)^p.$$

于是证明了$\{f=(f_n):\ f$ 与 $T_i f$都L^1 有界$\}\subset H_1$. ∎

定理 11′ 设$\{A_i\}_0^m$ 与$\{T_i\}_0^m$ 如定理 11 中所述. 则

$$\mathrm{BMO}=\left\{\sum_0^m T_i g_i:\ \ g_i\in L^\infty\right\}=L, \tag{48}$$

当且仅当$\{A_i^*\}_1^m$(A_i^* 是 A_i 的共轭)在 $\boldsymbol{R}^q\cap V$ 中无公共非零特征向量.

证明 只需证明

$$\mathrm{BMO}=L\Longleftrightarrow H_1=\{f\in L^1:\ \ T_i^* f\in L^1\}. \tag{49}$$

设式(49)的右边等式成立. 既然 $T_i(\mathrm{BMO})\subset\mathrm{BMO}$, 当然 $L\subset\mathrm{BMO}$. 现设 $\varphi(\in\mathrm{BMO})$为任意的. 由 Hahn-Banach 定理知, 由 φ 产生的定义在

$$H_1=\{f\in L^1; T_i^* f\in L^1\}\subset\bigoplus_{i=0}^m L^1$$

上的有界线性泛函 l_φ 可保持范数不变地延拓到整个空间 $\bigoplus\limits_{i=0}^m L^1$上去. 故存在 $g_i\in L^\infty$, $i=0,\cdots,m$, 使

$$E(f\bar{\varphi})=l_\varphi(f)=\sum_0^m E(T_i^* f\bar{g}_i)$$

$$=\sum_0^m E(f\overline{T_i g_i}),\qquad \forall f\in L^\infty\subset H_1.$$

既然 L^∞ 在 H_1 中稠密，这说明

$$\varphi=\sum_0^m T_i g_i, \quad g_i\in L^\infty.$$

此即

$$\mathrm{BMO}\subset L.$$

综合之，即知式(49)之左边等式成立．注意这个等式蕴含着如下范数之等价

$$\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}}\sim\inf\left\{\sum_0^m\|g_i\|_\infty:\ \{g_i\}\text{遍历所有可能的}\right\}.$$

因为对于 $\varphi\in\mathrm{BMO}$ 的任一形如 $\sum\limits_0^m T_i g_i$ 的表示都有

$$\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}}\leqslant K\sum_0^m\|g_i\|_{\mathrm{BMO}}\leqslant K\sum_0^m\|g_i\|_\infty;$$

而同时对于任意的 $\varphi\in\mathrm{BMO}$，的确存在表示 $\sum\limits_0^m T_i g_i$（其存在性由 Hahn-Banach 定理保证)，使其 L^∞ 范数有下述估计

$$\sum_0^m\|g_i\|_\infty\leqslant K\|l_\varphi\|\leqslant K\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}}.$$

由此完成了由式(49)的右边等式推出左边等式的证明．

现设式(49)左边等式成立(当然，空间的相等总包含范数等价的含意)．注意我们另外还知道

$$H_1\subset\{f\in L^1:\ T_i^*f\in L^1\}=B, \quad H_1'=\mathrm{BMO}.$$

由此推出，$\forall f\in L^\infty\subset H_1$，存在

$$\varphi\in\mathrm{BMO}, \quad \varphi=\sum_0^m T_i g_i, \quad g_i\in L^\infty,$$

满足

$$\|l_\varphi\|=1, \quad \sum_0^m \|g_i\|_\infty \leqslant K\|l_\varphi\|=K,$$

且使得$|E(f\overline{\varphi})|$任意地接近$\|f\|_{H_1}$, 然而

$$|E(f\overline{\varphi})|=\left|E\left(f\sum_0^m \overline{T_i g_i}\right)\right|=\left|E\left(\sum_0^m T_i^* f\bar{g}_i\right)\right|$$

$$\leqslant \sup_{g_i\in L^\infty:\ \sum_0^m \|g_i\|_\infty\leqslant K} \left|E\left(\sum_0^m T_i^* f\bar{g}_i\right)\right|$$

$$\leqslant K\sum_0^m \|T_i^* f\|_1.$$

这说明, $\forall f\in L^\infty\subset H_1$, 总有

$$\|f\|_{H_1}\leqslant K\sum_0^m \|T_i^* f\|_1.$$

但是反向不等式永远是成立的:

$$\sum_0^m \|T_i^* f\|_1\leqslant K\|f\|_{H_1}.$$

由此说明在空间 L^∞ 上, 由 H_1 与 B 诱导的范数等价, 从而知 L^∞在这两个空间内的闭包是相同的. 已知 L^∞ 在 H_1 内的闭包就是 H_1 自己, 这说明 H_1 是 B 的闭子空间. 如果 H_1 是真闭子空间, 则存在 B 上非零有界线性泛函, 也就是空间

$$\left\{\sum_0^m T_i g_i:\ g_i\in L^\infty\right\}=\mathrm{BMO}$$

中的元素 φ, 使 l_φ 能零化 H_1. 而这是不可能的. 因 H_1 的对偶是 BMO, BMO 中只有零元素能零化整个 H_1. 由此证明了 $H_1=B$. 即由式(49)之左边等式可以推出右边等式. ∎

$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ 上每个有限测度 ν 可以产生一个关于 q-进族

$\{\mathscr{F}_n\}_{n\geq 0}$ 的 q-进鞅 $f=(f_n)_{n\geq 0}$ 如下:

$$f_n|_{I_{i_1,\cdots,i_n}}=q^n\nu(I_{i_1,\cdots,i_n}).$$

它是一个鞅,是因为

$$\begin{aligned}
&E(f_n|\mathscr{F}_{n-1})|_{I_{i_1,\cdots,i_{n-1}}}\\
&=\frac{1}{q}\sum_{k=1}^{q}q^n\nu(I_{i_1,\cdots,i_{n-1},k})\\
&=q^{n-1}\nu(I_{i_1,\cdots,i_{n-1}})=f_{n-1}|_{I_{i_1,\cdots,i_{n-1}}}.
\end{aligned}$$

作为上述定理的一个推论,我们可以得到与 Riesz 兄弟定理相类似的结论.

推论 4 设 $A_1,\cdots,A_m$ 在 V 中无公共非零实特征向量. 又设 ν 与 $T_i\nu$ 都是有限测度. 则 $T_i\nu(i=0,\cdots,m)$ 都是绝对连续的.

证明 因为任意有限测度 ν 按上述方式产生的鞅总是 L^1 有界的:

$$E(|f_n|)\leqslant\sum_{i_1,\cdots,i_n}q^n|\nu|(I_{i_1,\cdots,i_n})|I_{i_1,\cdots,i_n}|=\|\nu\|.$$

由定理 11 即知,由 ν 产生的鞅属于 H_1. 这样每个 $T_i\nu$ 也属于 H_1, 因为 $T_i(H_1)\subset H_1$. H_1 中的鞅当然是 L^1 中的鞅, 故都是绝对连续的. ▮

上面的讨论只对 $q\geqslant 3$ 适用. 因当 $q=2$ 时,

$$V_2=\{x\in C^2:\ x_1+x_2=0\}$$

是一维空间,其上的所有线性算子均形如 $Ax=\lambda x$. 故其诱导的鞅上的线性算子也形如 $Tf=\lambda f$. 既然所有向量都是特征向量,故上述 H_1 的算子刻划方法在 $q=2$ 情形失效.

Chao[1]提出了另外两种算子刻划的方法. 其一简单,主要服务于 $q=2$ 情况;另一稍微复杂一些,主要服务于局部域上的调和分析中由卷积(或乘子)定义的算子的 H_1 刻划.

现在按 Chao-Janson[1] 那样考虑这两种算子刻划. 设 $\{\mathscr{F}_n\}_{n\geq 0}$ 是$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$上 q-进子 σ-代数的增加族, $f=(f_n)_{n\geq 0}$, $f_0=0$, 是$(\Omega, \mathscr{F}, \mu, \{\mathscr{F}_n\})$中的 q-进鞅. 设 $k\geq 1$ 是任意的整数, 对每个 q-进鞅 $f=(f_n)_{n\geq 0}$, 我们联系一个关于$\{\mathscr{F}_{nk}\}_{n\geq 0}$的鞅 $F=(F_n)_{n\geq 0}$, $F_n=f_{nk}$. 这个对应是一一的, 既然对于每个关于$\{\mathscr{F}_{nk}\}_{n\geq 0}$的鞅 $F=(F_n)_{n\geq 0}$, 可以中间插进子 σ-代数得到 q-进族$\{\mathscr{F}_n\}$, 同时得到 q-进鞅 $f=(f_n)_{n\geq 0}$, 使

$$F_n=f_{nk}.$$

不仅这个对应是一一的, 而且这个对应还保持 $H_p(0<p<\infty)$空间不变. 事实上, 这是因为(如 $k=2$), 我们有

$$\begin{aligned} &F^*=\sup_n|f_{nk}|\leqslant f^*, \\ &S^2(f)\leqslant(q^2+q)\sigma^2(F). \end{aligned} \tag{50}$$

其中第二个不等式是由下式

$$\begin{aligned} |f_{2n}-f_{2n-1}|^2&=E(|f_{2n}-f_{2n-1}|^2|\mathscr{F}_{2n}) \\ &\leqslant q^2E(|f_{2n}-f_{2n-1}|^2|\mathscr{F}_{2(n-1)}), \\ |f_{2n-1}-f_{2n-2}|^2&\leqslant qE(|f_{2n-1}-f_{2n-2}|^2|\mathscr{F}_{2(n-1)}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &|\Delta f_{2n}|^2+|\Delta f_{2n-1}|^2 \\ &\quad\leqslant(q^2+q)E(|f_{2n}-f_{2n-1}|^2+|f_{2n-1}-f_{2n-2}|^2|\mathscr{F}_{2(n-1)}) \\ &\quad=(q^2+q)E(|f_{2n}-f_{2(n-1)}|^2|\mathscr{F}_{2(n-1)}) \end{aligned}$$

而得到的. 又由我们将在 7.3 节中指出的事实, 即对正规鞅总有

$$\|f^*\|_p\sim\|S(f)\|_p\sim\|\sigma(f)\|_p,\quad 0<p<\infty.$$

于是证明了这个对应保持 H_p 空间不变的断言.

设 A 是 V_{q^k} 到 V_{q^k} 内的线性算子. 对每个鞅 $f=(f_n)_{n\geq 0}$, 考虑与之联系的 $F=(F_n)_{n\geq 0}=(f_{nk})_{n\geq 0}$. 则 ΔF_n 在 $\mathscr{F}_{(n-1)k}$ 的每个原子上取 q^k 个值, 并且这 q^k 个值构成的向量属于 V_{q^k}. 同前一样, 用 $A(\Delta F_n)$作为新的鞅差, 则得到关于$\{\mathscr{F}_{nk}\}$的一个新鞅 G, 记与之对应的关于$\{\mathscr{F}_n\}$的鞅为 $g=Tf$. 由 G 与 g 的 H_1 属性等价

的事实，我们得

定理 12 设 $A_j(j=1,\cdots,m)$ 是 V_{q^k} 上的线性算子，则

$$H_1=\{f:\ f,A_jf\in L^1,\ j=1,\cdots,m\},$$

当且仅当 $A_j(1\leqslant j\leqslant m)$ 在 $R^{q^k}\cap V_{q^k}$ 中没有公共非零特征向量.

现在给出另外一个算子刻划的方法. 设 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$, $f_0=0$, 是一个 q-进鞅. 令

$$E(f)=\left(\sum_{k=0}^{n}\Delta f_{2k}\right)_{n\geqslant 0},$$

$$G(f)=\left(\sum_{k=1}^{n}\Delta f_{2k-1}\right)_{n\geqslant 1}.$$

则 Ef, Gf 分别是关于 $\{\mathscr{F}_{2n}\}_{n\geqslant 0}$ 与 $\{\mathscr{F}_{2n-1}\}_{n\geqslant 1}$ 的 q^2-进鞅. 因为

$$E(f_{2n}-f_{2n-1}|\mathscr{F}_{2(n-1)})=0,$$
$$E(f_{2n-1}-f_{2n-2}|\mathscr{F}_{2(n-1)-1})=0.$$

不仅如此，Δf_{2n} 在 $\mathscr{F}_{2(n-1)}$ 的每个原子上所取的 q^2 个值构成了 $V_q^q=V_q\times\cdots\times V_q$ 中的一个向量. (因为

$$E(f_{2n}-f_{2n-1}|\mathscr{F}_{2n-1})=0$$

的缘故) 类似地，Δf_{2n-1} 在 $\mathscr{F}_{2(n-1)-1}$ 的每个原子上所取的 q^2 个值也构成了 V_q^q 中的向量. 现设 A 是 V_q^q 到 V_q^q 内的线性算子，则 $A(\Delta f_{2n})$ 与 $A(\Delta f_{2n-1})$ 仍然是 V_q^q 中的向量. 它们不仅可以生成分别关于 $\{\mathscr{F}_{2n}\}$ 与 $\{\mathscr{F}_{2n-1}\}$ 的 q^2-进鞅，而且还可生成关于 $\{\mathscr{F}_n\}$ 的两个如下的鞅.

设 d_2 是关于 $\mathscr{F}_2$ 可测的任意函数，其在 $\mathscr{F}_2$ 的 q^2 个原子上所取的值构成了 V_q^q 中的一个向量；设 d_4 是关于 $\mathscr{F}_4$ 可测的函数，其在 $\mathscr{F}_2$ 的每个原子所包含的 q^2 个 $\mathscr{F}_4$ 的原子上的取值也是 V_q^q 中的向量，…，若补充令 $d_{2k+1}\equiv 0$, 并令

$$f_n = \sum_{k=0}^{n} d_k, \quad f_0 = d_0 = 0.$$

则 $f = (f_n)_{n \geqslant 0}$ 便是一个关于$\{\mathscr{F}_n\}$的鞅. 因为

$$E(f_{2n} | \mathscr{F}_{2n-1}) = E\left(\sum_{k=0}^{n} d_{2k} | \mathscr{F}_{2n-1}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} d_{2k} = f_{2(n-1)} = f_{2n-1},$$

$$E(f_{2n-1} | \mathscr{F}_{2n-2}) = E\left(\sum_{k=0}^{n-1} d_{2k} | \mathscr{F}_{2n-2}\right) = f_{2n-2},$$

其中第一个等式用到 d_{2n} 在 $\mathscr{F}_{2n-1}$ 的每个原子上平均值为 0 的事实(它根据 d_{2n} 的性质: 在 $\mathscr{F}_{2n-2}$ 的每个原子上, d_{2n} 所取的 q^2 个数值构成的向量属于 V_q^q). 现特别考虑

$$d_{2k} = A(\Delta f_{2k}), \quad d_{2k-1} = A(\Delta f_{2k-1}),$$

则由上面指出的可得到关于$\{\mathscr{F}_n\}_{n \geqslant 0}$的两个鞅, 分别记之为$T(Ef)$与 $T(Gf)$.

定理 13 设 $A_j (j = 1, \cdots, m)$ 是 V_q^q 到 V_q^q 内的线性算子. 则

$$\boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{B} = \{f: Ef, T_j(Ef), Gf, T_j(Gf)\ (j = 1, \cdots, m) \text{ 都是 } L^1 \text{ 有界的}\},$$

当且仅当 $A_j (1 \leqslant j \leqslant m)$ 在 $\boldsymbol{R}^{q^2} \cap V_q^q$ 内无公共非零特征向量.

证明 假设$\{A_j\}$有公共非零实特征向量 x, 则由引理 6 知, 可以构造关于$\{\mathscr{F}_{2n}\}$的 q^2-进鞅 $F \in L^1$, $\overline{\in} H_1$, 并且使$T_j F = \lambda_j F$. 但由 F 的构造可知, 由 ΔF_n 在 $\mathscr{F}_{2(n-1)}$的每个原子上所取之值(q^2 个)构成的向量正是向量 x 的倍数(此倍数只依赖这个 $\mathscr{F}_{2(n-1)}$原子). 又由 $x \in V_q^q$知, 由 ΔF_n 在 $\mathscr{F}_{2(n-1)}$的每个原子上所取之值构成的向量也属于 V_q^q. 我们刚才已指出, 当令 $d_{2k} = \Delta F_k$ 以及 $d_{2k-1} \equiv 0$ 时,

$$f=(f_n)_{n\geq 0},\quad f_n=\sum_{0}d_k$$

便是一个 q-进鞅. 对此 f, 有 $Ef=f, Gf\equiv 0$. 因此有

$$T_j(Ef)=T_jf=\lambda_j f\in L^1,\quad j=0,\cdots,m,\lambda_0=1,$$
$$T_j(Gf)\equiv 0\in L^1,$$

但 $f\overline{\in}H_1$. 此即, 当$\{A_j\}$有公共非零实特征向量时, $H_1\neq B$.

现设$\{A_j\}_1^m$ 在 $R^{q^2}\cap V_q^q$内没有公共非零特征向量, 证明 $H_1=B$. $H_1\subset B$ 是易证的. 因由 $f\in H_1$ 可推出 $Ef\in H_1, Gf\in H_1$(这又因 $S(Ef)\leqslant S(f), S(Gf)\leqslant S(f)$), 以及 $T_j(H_1)\subset H_1$. 现证 $B\subset H_1$. 对任意的 $f\in B$, 令

$$g_n(\omega)=\|(T_i(Ef_n))_{i=0}^m\|,$$

则由引理 7 知, 存在 $p<1$ 使得$(g_n^p)_{n\geq 0}$是一个非负下鞅. 由$T_i(Ef)$是 L^1 有界的鞅, 知$(g_n^p)_{n\geq 0}$ 是在 $L^{1/p}$ 中有界的非负下鞅. 由Doob定理即知 $Ef\in H_1$. 同理可得 $Gf\in H_1$. 故 $f\in H_1$. 结论证完. ▮

7.3 正规鞅的加权 Φ-不等式

我们已在 4.2—4.5 节中讨论了鞅的四种 Φ-不等式, 即凸 Φ、严格凸 Φ(即 $q_\Phi>1$)、凹 Φ、限制增长的一般 Φ-不等式. 我们所讨论过的鞅论中的 Φ-不等式, 对 Φ 的成立范围基本上已不能改进. 但对正规鞅而言, Φ-不等式基本上都是最广泛的那种, 即 Φ 是限制增长的连续增加函数的情形. 本节主要讨论 $f^*, S(f), \sigma(f)$间的 Φ-不等式, 以说明对正规鞅, Φ 的确可以是本书所考虑过的最广泛的那种. 并且我们要讨论的是加权 Φ-不等式. 对权 z 所加的条件, 仍然同 6.6 节一样.

设 z 是$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$上的一个严格正的测度变换, 记 $\hat{\mu}=z\mu$. 因为有时候我们需要在$(\Omega,\mathscr{F},\hat{\mu})$上考虑问题, 故需要讨论相对于两

个测度空间的同一概念间的关系．如条件期望、正规性概念等．相对于$(\Omega,\mathscr{F},\hat{\mu})$的条件期望用$\hat{E}$表示，正规性条件用$(\hat{\mathrm{R}})$表示，以及其他的概念与记号也都分别用原有的记号加"∧"表示．正规性条件$(\hat{\mathrm{R}})$类似地定义为

$$\hat{E}(f\,|\,\mathscr{F}_n)\leqslant\hat{d}\hat{E}(f\,|\,\mathscr{F}_{n-1}),\quad \forall f\in\hat{L}^1,\ f\geqslant 0,\ n=1,2,\cdots.$$

关于条件(R)与$(\hat{\mathrm{R}})$，有下述关系．

引理 9 若$z\in S$，则条件(R)与条件$(\hat{\mathrm{R}})$等价．反之，由条件(R)可推出$z\in S^+$；由条件$(\hat{\mathrm{R}})$可推出$z\in S^-$．

证明 设条件(R)成立，并且$z\in S^-$．则$\forall F\in\mathscr{F}$，

$$\begin{aligned}\hat{E}(\mathrm{I\!I}(F)\,|\,\mathscr{F}_n)&=\frac{1}{z_n}E(\mathrm{I\!I}(F)z\,|\,\mathscr{F}_n)\\&\leqslant\frac{d}{z_n}E(\mathrm{I\!I}(F)z\,|\,\mathscr{F}_{n-1})\\&=\frac{dz_{n-1}}{z_n}\hat{E}(\mathrm{I\!I}(F)\,|\,\mathscr{F}_{n-1})\\&\leqslant dC\hat{E}(\mathrm{I\!I}(F)\,|\,\mathscr{F}_{n-1}),\quad n=1,2,\cdots.\end{aligned}$$

此即条件$(\hat{\mathrm{R}})$成立．同样地，可由条件$(\hat{\mathrm{R}})$及$z\in S^+$推出条件(R)．由此完成了引理的第一个结论的证明．

剩下两个结论也是显然的．如由条件$(\hat{\mathrm{R}})$推出$z\in S^-$：我们有$\frac{1}{z}\in\hat{L}^1$，并且

$$\frac{1}{z_n}=\hat{E}\left(\frac{1}{z}\,\middle|\,\mathscr{F}_n\right)\leqslant\hat{d}\hat{E}\left(\frac{1}{z}\,\middle|\,\mathscr{F}_{n-1}\right)=\frac{\hat{d}}{z_{n-1}}.\ \blacksquare$$

引理 10 $z\in A_\infty$并附加条件(R)等价于$\frac{1}{z}\in\hat{A}_\infty$及附加条件$(\hat{\mathrm{R}})$．

证明 设$z\in A_\infty$，譬如$z\in A_p$，$p>1$；并且条件(R)成立．由6.3节所述的逆向 Hölder 不等式(此时$z\in S^+$)知，存在$\delta>0$，使

$$E(z^{1+\delta}|\mathscr{F}_n)\leqslant Cz_n^{1+\delta}.$$

由 6.1 节的命题 5 知，此即$\frac{1}{z}\in\hat{A}_p$(或 $z\in\tilde{A}_p$)，其中 $p=(1+\delta)/\delta$. 此外，我们已在 6.3 节中多次指出，$z\in A_\infty$ 并附加条件 (R)蕴含有 $z\in S^-$. 因此，由引理 9 知，条件($\hat{\mathrm{R}}$)也成立. 因而完成了

$$“A_\infty+(\mathrm{R})” \Rightarrow “\tilde{A}_\infty+(\hat{\mathrm{R}})”$$

的证明. 反过来的证明是类似的. ▌

现在我们讨论 $f^*, S(f)$, $\sigma(f)$间的加权 Φ-不等式. 设 Φ 是 $[0,\infty)$上满足 $\Phi(0)=0$ 的限制增长的连续增加函数.

定理 14 设条件(R)成立，并且 $z\in A_\infty$, Φ 如上所设. 则对一切关于$(\mu,\{\mathscr{F}_n\}_{n\geqslant 0})$的鞅 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$, 都有

$$C\hat{E}(\Phi(f^*))\leqslant\hat{E}(\Phi(S(f)))\leqslant C\hat{E}(\Phi(f^*)). \tag{51}$$

证明 注意根据引理 10, 此时$z\in\tilde{A}_\infty$, 以及条件($\hat{\mathrm{R}}$)成立. 无妨设 $f_0\equiv 0$. 对非负适应过程$(|f_n|)_{n\geqslant 0}$与 $\beta\lambda(\beta>0,\ \lambda>0)$定义停止时间 τ, 使之满足同定理 1 中性质 4)的相类似性质

$$\hat{\mu}(\{\tau<\infty\})\leqslant\hat{d}\hat{\mu}(\{f^*>\beta\lambda\}),$$

$$f_\tau^*\leqslant\beta\lambda.$$

考虑停止鞅 $f^{(\tau)}=(f_{\tau\wedge n})_{n\geqslant 0}$, 并对非负适应过程$(S_n(f^{(\tau)}))_{n\geqslant 0}$与 λ, 同样地定义停止时间 T, 满足

$$\hat{\mu}(\{T<\infty\})\leqslant\hat{d}\hat{\mu}(\{S(f^{(\tau)})>\lambda\}),$$

$$S_T(f^{(\tau)})\leqslant\lambda.$$

对 $\alpha>1$, 我们有

$$\{S(f)>\alpha\lambda\}\subset\{S(f^{(\tau)})>\alpha\lambda\}\cup\{\tau<\infty\},$$

$$\{S(f^{(\tau)})>\alpha\lambda\}\subset\{S(f^{(\tau)})^2-S_T(f^{(\tau)})^2>(\alpha^2-1)\lambda^2\}.$$

从而

$$E(\mathrm{II}(\{S(f^{(\tau)})>\alpha\lambda\})|\mathscr{F}_T)$$

$$\leqslant\frac{1}{(\alpha^2-1)\lambda^2}E(S(f^{(\tau)})^2-S_T(f^{(\tau)})^2|\mathscr{F}_T)$$

$$=\frac{1}{(\alpha^2-1)\lambda^2}E(|f^{(\tau)}-f_T^{(\tau)}|^2|\mathscr{F}_T)$$

$$\leqslant\frac{4\beta^2}{\alpha^2-1}.$$

同 4.5 节中一样, 因为

$$\{S(f^{(\tau)})>\alpha\lambda\}\subset\{T<\infty\}\in\mathscr{F}_T,$$

以及对某个 $p>1$, $z\in\tilde{A}_p$, 我们有

$$\begin{aligned}&\hat{\mu}(\{S(f^{(\tau)})>\alpha\lambda\})\\&\quad=\int_{\{T<\infty\}}\hat{E}(\mathrm{II}(\{S(f^{(\tau)})>\alpha\lambda\})|\mathscr{F}_T)d\hat{\mu}\\&\quad\leqslant C_p\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2-1}\right)^{\frac{1}{p}}\hat{\mu}(\{T<\infty\})\\&\quad\leqslant C_{p,d,\alpha,\beta}\hat{\mu}(\{S(f^{(\tau)})>\lambda\}).\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&\hat{\mu}(\{S(f)>\alpha\lambda\})\\&\quad\leqslant\varepsilon_{\alpha,\beta}\hat{\mu}(\{S(f)>\lambda\})+\hat{d}\hat{\mu}(\{f^*>\beta\lambda\}).\end{aligned}$$

注意到对取定的$\alpha>1$, 有$\lim\limits_{\beta\to0}\varepsilon_{\alpha,\beta}=0$. 这说明$(S(f),f^*)$关于测度 $\hat{\mu}$ 满足"好 λ 不等式". 式(51)之右边不等式因而获证.

类似地, 可证明式(51)的左边不等式也成立. ▌

定理 15 在定理 14 的条件下, 我们也有

$$C\hat{E}(\Phi(\sigma(f)))\leqslant\hat{E}(\Phi(S(f)))\leqslant C\hat{E}(\Phi(\sigma(f))).\qquad(52)$$

证明 类似于定理 14, 对 $\beta>0$, $\lambda>0$, 定义停止时间

$$\tau=\inf\{n:\ \sigma_{n+1}(f)>\beta\lambda\}.$$

考虑停止鞅 $f^{(\tau)}$. 对非负适应过程$(S_n(f^{(\tau)}))_{n\geqslant0}$ 与 $\lambda>0$, 定义停止时间 T, 满足

$$\hat{\mu}(\{T<\infty\})\leqslant\hat{d}\hat{\mu}(\{S(f^{(\tau)})>\lambda\}),$$

$$S_T(f^{(\tau)})\leqslant\lambda.$$

对 $\alpha>1$, 我们有

$$\begin{aligned}
&E(\mathrm{II}(\{S(f^{(\tau)})>\alpha\lambda\})\,|\,\mathscr{F}_T)\\
&\leqslant\frac{1}{(\alpha^2-1)\lambda^2}E(S(f^{(\tau)})^2-S_T(f^{(\tau)})^2\,|\,\mathscr{F}_T)\\
&=\frac{1}{(\alpha^2-1)\lambda^2}E(\sigma(f^{(\tau)})^2-\sigma_T(f^{(\tau)})^2\,|\,\mathscr{F}_T)\\
&\leqslant\frac{1}{(\alpha^2-1)\lambda^2}E(\sigma(f^{(\tau)})^2\,|\,\mathscr{F}_T)\leqslant\frac{\beta^2}{\alpha^2-1}.
\end{aligned}$$

于是我们便得到与定理 14 中情形一样的事实. 从而定理获证. ▮

但是, 对 $S(f)$ 与 $\sigma(f)$ 间的加权 Φ-不等式, 应用条件 S 往往是更方便的. 我们有

定理 15′ 条件(R)及附加条件 $z\in S^-$(或等价地, 条件($\hat{\mathrm{R}}$)及附加条件 $z\in S^+$)对式(52)的成立是充分的.

证明 同定理 15 中一样, 定义停止时间 τ 与 T. 我们有

$$\begin{aligned}
&\hat{E}(\mathrm{II}(\{S(f^{(\tau)})>\alpha\lambda\})\,|\,\mathscr{F}_T)\\
&\leqslant\frac{1}{(\alpha^2-1)\lambda^2}\hat{E}(S(f^{(\tau)})^2-S_T(f^{(\tau)})^2\,|\,\mathscr{F}_T)\\
&=\frac{1}{(\alpha^2-1)\lambda^2}\hat{E}\left(\sum_1^\infty\mathrm{II}(\{T\leqslant n-1\})\,|\Delta f_n^{(\tau)}|^2\,|\,\mathscr{F}_T\right)\\
&=\frac{1}{(\alpha^2-1)\lambda^2}\hat{E}\left(\sum_1^\infty\hat{E}(\mathrm{II}(\{T\leqslant n-1\})\,|\Delta f_n^{(\tau)}|^2\,|\,\mathscr{F}_{n-1})\,|\,\mathscr{F}_T\right)\\
&=\frac{1}{(\alpha^2-1)\lambda^2}\hat{E}\left(\sum_1^\infty\frac{1}{z_{n-1}}E(\mathrm{II}(\{T\leqslant n-1\})\right.\\
&\qquad\qquad\left.\cdot|\Delta f_n^{(\tau)}|^2z_n\,|\,\mathscr{F}_{n-1})\,|\,\mathscr{F}_T\right)\\
&\leqslant\frac{C}{(\alpha^2-1)\lambda^2}\hat{E}(\sigma(f^{(\tau)})^2-\sigma_T(f^{(\tau)})^2\,|\,\mathscr{F}_T)
\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{C4\beta^2}{\alpha^2-1}$$

因此

$$\hat{\mu}(\{S(f^{(\tau)})>\alpha\lambda\})\leqslant \varepsilon_{\alpha,\beta}\hat{\mu}(\{S(f^{(\tau)})>\lambda\}),$$

$$\hat{\mu}(\{S(f)>\alpha\lambda\})\leqslant \varepsilon_{\alpha,\beta}\hat{\mu}(\{S(f)>\lambda\})+\hat{\mu}(\{\sigma(f)>\beta\lambda\}).$$

于是，我们不需先证$(S(f),\sigma(f))$关于μ的“好λ不等式”，就可直接得到了关于$\hat{\mu}$的“好λ不等式”，从而证明了式(52)的右边不等式. 左边不等式的证明是类似的. 定理因而获证. ▌

完全类似地，我们还可以讨论4.2与4.5节中已讨论过的$M(f)$与$m(f)$之间的加权Φ-不等式. 这需要利用4.2节定理4中结论的如下特殊情形

$$E(M(f)\,|\,\mathscr{F}_0)\leqslant CE(m(f)\,|\,\mathscr{F}_0), \tag{53}$$

其中$f=(f_n)_{n\geqslant 0}$是关于$\{\mathscr{F}_n\}_{n\geqslant 0}$的任意鞅，$f_0$, $\mathscr{F}_0$均可不受限制.

定理 16 设条件(R)成立，$z\in A_\infty$，Φ如本节所设. 则对所有关于$(\{\mathscr{F}_n\},\mu)$的鞅$f=(f_n)$，都有

$$\hat{E}(\Phi(M(f)))\leqslant C\hat{E}(\Phi(m(f))). \tag{54}$$

证明 无妨设$f_0=0$. 对非负适应过程$(m_n(f))$与$\beta\lambda$定义停止时间τ，满足

$$|\{\tau<\infty\}|\leqslant \hat{d}\,|\{m(\lambda)>\beta\lambda\}|,$$

$$m_\tau(f)\leqslant\beta\lambda.$$

考虑停止鞅$f^{(\tau)}$，并对非负适应过程$(M_n(f^{(\tau)}))$与λ定义停止时间T，满足

$$|\{T<\infty\}|\leqslant \hat{d}\,|\{M(f^{(\tau)})>\lambda\}|,$$

$$M_T(f^{(\tau)})\leqslant\lambda.$$

则我们有，$\alpha>1$，

$$\{M(f)>\alpha\lambda\}\subset\{M(f^{(\tau)})>\alpha\lambda\}\cup\{\tau<\infty\},$$

$$\{M(f^{(\tau)})>\alpha\lambda\}\subset\{M(f^{(\tau)})-M_T(f^{(\tau)})>(\alpha-1)\lambda\}.$$

如同 4.2 节定理 4 的证明一样，我们考虑新 σ-代数族 $\{\mathscr{F}'_m\}=\{\mathscr{F}_{m+T}\}$，以及关于此族的鞅 $g'=(g'_m)$，

$$g'_m=f^{(\tau)}_{m+T}-f^{(\tau)}_T,\quad m=0,1,2,\cdots.$$

注意到

$$M(f^{(\tau)})-M_T(f^{(\tau)})\leqslant M(g'),$$
$$m(g')\leqslant 2m(f^{(\tau)}),$$

并应用式(53)，它此时成为

$$E'(M(g')\mid\mathscr{F}'_0)\leqslant CE'(m(g')\mid\mathscr{F}'_0),$$

即得

$$\begin{aligned}
&E(\mathrm{II}(\{M(f^{(\tau)})>\alpha\lambda\})\mid\mathscr{F}_T)\\
&\leqslant\frac{1}{(\alpha-1)\lambda}E(M(f^{(\tau)})-M_T(f^{(\tau)})\mid\mathscr{F}_T)\\
&\leqslant\frac{C}{(\alpha-1)\lambda}E(m(f^{(\tau)})\mid\mathscr{F}_T)\\
&=\frac{C}{(\alpha-1)\lambda}E(m_\tau(f)\mid\mathscr{F}_T)\leqslant\frac{C\beta}{\alpha-1}.
\end{aligned}\tag{55}$$

以后的步骤同前一样，先推得 $(M(f),\ m(f))$ 关于 $(\Omega,\mathscr{F},\hat{\mu})$ 满足"好 λ-不等式"，然后推得所需要的加权 Φ-不等式. ▮

7.4 调和分析中的一个正规鞅例

设 $(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ 是

$$\Omega=[0,1),\ \mathscr{F}=\mathscr{B}(\text{Lebesgue 可测集系}),$$
$$\mu=dx(\text{Lebesgue 测度})$$

的概率空间. $r(>1)$ 为整数. 对 $n=0,1,\cdots$ 定义

$$\mathscr{F}_n=\left\{F\in\mathscr{B}:\ F+\frac{j}{r^n}=F(\text{模零测集}),\ \forall j\in\mathbf{Z}\right\}.\tag{56}$$

$\mathscr{F}_n$ 都是$\mathscr{B}$的子 σ-代数. 它们对集合之可列并封闭是显然的, 对集合补封闭是因为平移运算(模 1)有逆. 注意, $\{\mathscr{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ 不是增加系而是递减系, 并且满足 $\mathscr{F}_0=\mathscr{F}$, $\bigcap\limits_n \mathscr{F}_n$ 平凡. 这最后一个断言是因为, 如果存在 F, 使 $|F|\,|F'|>0$, 并且 F 是 $1/r^n$ 周期的, $\forall n$, 则将有(下面出现的加法是模 1 加法)

$$\int_0^1 |(x+F)\cap F'|\,dx=\int_0^1 \mathrm{II}_{F'}(t)\int_0^1 \mathrm{II}_F(t-x)\,dx\,dt$$
$$=|F|\,|F'|>0.$$

但因 $|(x+F)\cap F'|$ 是 x 的连续函数, 故存在 j/r^n, 使

$$\left|\left(\frac{j}{r^n}+F\right)\cap F'\right|>0,$$

这与 F 以 $1/r^n$ 为周期矛盾, 故只能有 $|F|=0$ 或 $|F|=1$. 此即 $\bigcap\limits_n \mathscr{F}_n$ 是平凡的. 关于上述 $(\Omega, \mathscr{F}, \mu, \{\mathscr{F}_n\})$的鞅称为 Gundy-Varopoulos[1]鞅.

关于递减的$\{\mathscr{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ 的鞅称为后向鞅. 我们只考虑满足$\mathscr{F}_0=\mathscr{F}$, $\bigcap\limits_n \mathscr{F}_n$ 是平凡的情况. 此时, 鞅的定义是类似的: 一个适应过程 $f=(f_n)_{n\geqslant 0}$ 称为一个鞅, 如果

$$E(f_n|\mathscr{F}_{n+1})=f_{n+1}, \quad n=0, 1, \cdots. \tag{57}$$

此外, 我们熟知的算子 f^*, $S(f)$, $\sigma(f)$等定义为

$$f^*=\sup_{n\geqslant 0}|f_n|,$$

$$S(f)=\left(|E(f)|^2+\sum_0^\infty |d_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \; d_n=f_n-f_{n+1},$$

$$\sigma(f)=\left(|E(f)|^2+\sum_0^\infty E(|d_n|^2|\mathscr{F}_{n+1})\right)^{\frac{1}{2}},$$

其中 $E(f)$ 相当于 f_∞, 因为如果(f_n)收敛的话, 其极限就是 $E(f)$.

而关于正规性的定义也是类似的，只需稍作修改，且修改之处是显然的．如定理1中性质6)需要修改为：对一切非负适应过程$(\gamma_n)_{n\geq 0}$，$\forall\lambda>|E(f)|$，都存在停止时间τ_λ，满足

a) $|\{\tau_\lambda>0\}|\leqslant d|\{\gamma^*>\lambda\}|$;

b) $\{\gamma^*>\lambda\}\subset\{\tau_\lambda>0\}$;

c) $\gamma_{\tau_\lambda}\mathrm{II}(\{\tau_\lambda>0\})\leqslant\lambda$;

d) 若$\lambda_1\geqslant\lambda_2$，则$\tau_{\lambda_1}\leqslant\tau_{\lambda_2}$.

注意对后向鞅，停止时间的定义一般是$\tau=\sup\{n;\cdots\}$．当有无穷多个指标属于花括号中的集合时，$\tau=\infty$；当是空集时，$\tau=0$．上述修改性质6)中，我们设$\lambda>|E(f)|$是为了保证$\tau>0$.

现回到Gundy-Varopoulos鞅．先看条件期望如何表示．设$f\in L^1$，$\mathscr{F}_n$是由以$1/r^n$为周期的可测集构成的σ-代数．则我们有

$$E(f|\mathscr{F}_n)(x)=\frac{1}{r^n}\sum_{j=0}^{r^n-1}f\left(x+\frac{j}{r^n}\right).\qquad(58)$$

这个等式成立是因为等号右边的函数是关于$\mathscr{F}_n$可测的（因它是以$1/r^n$为周期的函数），且它与函数f在任意的$F\in\mathscr{F}_n$上的积分相等．此外，借助Fourier系数，条件期望还有下述等价表示．设$f\in L^1$，

$$f\sim\sum_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)\exp(2\pi inx),\quad\{\hat{f}(n)\}是Fourier系数.$$

既然

$$\frac{1}{r^k}\sum_{j=0}^{r^k-1}\exp(2\pi injr^{-k})=\begin{cases}0, & r^k\nmid n,\\ 1, & r^k|n.\end{cases}$$

因此我们有

$$f_k=E(f|\mathscr{F}_k)\sim\sum_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(nr^k)\exp(2\pi inr^kx),\qquad(58)$$

$$d_k=f_k-f_{k+1}\sim\sum_{-\infty,r\nmid n}^{\infty}\hat{f}(nr^k)\exp(2\pi i n r^k x). \tag{59}$$

我们现在指出，Gundy-Varopoulos 鞅是 7.1 节意义下的正规鞅. 无论弱条件(R_w)或条件(R)都可直接验证. 如设 $f\in L^1$, $f\geqslant 0$, 则

$$f_n(x)=\frac{1}{r^n}\sum_{j=0}^{r^n-1}f\left(x+\frac{j}{r^n}\right)$$

$$\leqslant r\frac{1}{r^{n+1}}\sum_{l=0}^{r^{n+1}-1}f\left(x+\frac{l}{r^{n+1}}\right)=rf_{n+1}(x).$$

此即条件(R)成立. 因此，本章的结论对 Gundy-Varopoulos 鞅都成立. 特别地, $0<p<\infty$,

$$\|S(f)\|_p\sim\|\sigma(f)\|_p\sim\|f^*\|_p. \tag{60}$$

现列举几个与调和分析有关的结果.

命题 3(Paley) 设 f 是如下形式的可积函数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{f}(r^n)\exp(2\pi i r^n x),$$

则 $f\in L^p$, $\forall p>1$.

证明 由式(59)知, $d_k=\hat{f}(r^k)\exp(2\pi i r^k x)$, 故

$$S(f)=\left(\sum_0^{\infty}|\hat{f}(r^n)|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

从而

$$\|f\|_p\leqslant C\|S(f)\|_p=C\left(\sum_0^{\infty}|\hat{f}(r^n)|^2\right)^{\frac{1}{2}}<\infty.$$

这里用到 $f\in L^1$, 并且 f 的 Fourier 级数展开是缺项级数, 故

$$\sum_0^{\infty}|\hat{f}(r^n)|^2<\infty. \blacksquare$$

命题 4 设 $f\in L^1$. 则对任意的 $r>1$, 当 $f\in H_1$ (在 Gundy-Varopoulos 意义下), 总有

$$\sum_0^{\infty}|\hat{f}(r^k)|^2<\infty.$$

且

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}|\hat{f}(r^k)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant C\|f^*\|_1. \tag{61}$$

证明 利用对偶讨论. 既然有正规性条件, BMO 可以定义为

$$\mathrm{BMO}=\{g\in L^2:\ E(|g-g_n|^2|\mathscr{F}_n)\leqslant C\}. \tag{62}$$

特别地, 对那些

$$g\sim\sum_{n=0}^{\infty}\hat{g}(r^n)e^{2\pi i r^n x}, \tag{63}$$

仍然由式(59)得

$$E(|g-g_k|^2|\mathscr{F}_k)=E\left(\sum_0^{k-1}|d_n|^2|\mathscr{F}_k\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{k-1}|\hat{g}(r^n)|^2.$$

因此上式说明对这样的 g, 有

$$\|g\|_{\mathrm{BMO}}\leqslant C\|g\|_2.$$

现设 f 是一个三角多项式, 则由 H_1-BMO 对偶得

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}|\hat{f}(r^n)|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\sup_{g:\text{形如}(50),\|g\|_2=1}|E(fg)|$$

$$\leqslant\sup_g C\|f^*\|_1\|g\|_{\mathrm{BMO}}$$

$$\leqslant\sup_g C\|f^*\|_1\|g\|_2\leqslant C\|f^*\|_1. \blacksquare$$

下面再给出 Paley 的古典结果的一个推广. 为此, 首先对多

重指标的鞅证明一个初等事实．设$\{\mathscr{F}_n\}_{n\geq 0}$，$\{\mathscr{G}_m\}_{m\geq 0}$是两个子$\sigma$-代数的增加族．假设条件期望在如下意义下是可交换的

$$f_{n,m}=E(E(f\,|\,\mathscr{F}_n)\,|\,\mathscr{G}_m)=E(E(f\,|\,\mathscr{G}_m)\,|\,\mathscr{F}_n),\quad \forall n,m.$$

我们只考虑满足这个交换性的族$\{\mathscr{F}_n\}$与$\{\mathscr{G}_m\}$，以及由$f\in L^1$生成的鞅$f=(f_{n,m})_{n,m\geq 0}$.

引理 11 设$f=(f_{n,m})$是关于$(\Omega,\mathscr{F},\mu,\{\mathscr{F}_n\}\times\{\mathscr{G}_m\})$的$L^1$中的鞅．则

$$\|S(f)\|_p\sim\|f\|_p,\quad 1<p<\infty. \tag{64}$$

其中

$$S(f)=\left(\sum_{n,m}|d_{n,m}|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$d_{n,m}=f_{n,m}-f_{n-1,m}-f_{n,m-1}+f_{n-1,m-1}.$$

证明 定义l^2值函数

$$G=(d_1,d_2,\cdots),\quad d_k=E(f\,|\,\mathscr{F}_k)-E(f\,|\,\mathscr{F}_{k-1}),$$

与向量值过程$(G_m)_{m\geq 0}$，

$$G_m=E(G\,|\,\mathscr{G}_m)=(E(d_1\,|\,\mathscr{G}_m),E(d_2\,|\,\mathscr{G}_m),\cdots).$$

则它是一个关于$(\Omega,\mathscr{F},\mu,\{\mathscr{G}_m\})$的鞅．注意我们有

$$\|G\|_{L^p(l^2)}=\left\|\left(\sum_1^\infty|d_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p\sim\|f\|_p;$$

以及

$$\begin{aligned}d_{n,m}&=E(f_n\,|\,\mathscr{G}_m)-E(f_{n-1}\,|\,\mathscr{G}_m)-\{E(f_n\,|\,\mathscr{G}_{m-1})\\&\qquad-E(f_{n-1}\,|\,\mathscr{G}_{m-1})\}\\&=E(d_n\,|\,\mathscr{G}_m)-E(d_n\,|\,\mathscr{G}_{m-1}),\end{aligned}$$

与

$$S(G)=\left(\left(\sum_m|d_{1,m}|^2\right)^{\frac{1}{2}},\left(\sum_m|d_{2,m}|^2\right)^{\frac{1}{2}},\cdots\right).$$

由向量值的单指标鞅的已知结果，得

$$\|S(f)\|_p=\left\|\left(\sum_{n,m}|d_{n,m}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p$$

$$=\|S(G)\|_{L^p(l^2)}\sim\|G\|_{L^p(l^2)}\sim\|f\|_p.\ \blacksquare$$

现特别考虑周期为 p^n 的可测集的 σ-代数 $\mathscr{F}_n$，与周期为 q^m 的可测集的 σ-代数 $\mathscr{G}_m$，其中 p,q 是质数．设 $f\in L^1$，由式(59)得

$$d_n\sim\sum_{k:p\nmid k}\hat{f}(kp^n)\exp(2\pi ikp^nx),$$

$$E(d_n|\mathscr{G}_m)-E(d_n|\mathscr{G}_{m-1})$$

$$\sim\sum_{l:p\nmid l,q\nmid l}\hat{f}(lp^nq^m)\exp(2\pi ilp^nq^mx).$$

如果 f 形如

$$f\sim\sum_{n,m\geqslant 0}\hat{f}(p^nq^m)\exp(2\pi ip^nq^mx),\tag{65}$$

则由上面求得的 $E(d_n|\mathscr{G}_m)-E(d_n|\mathscr{G}_{m-1})$ 的表示式知，此时有

$$S^2(f)=\sum_{n,m}|\hat{f}(p^nq^m)|^2.\tag{66}$$

于是，我们有

命题 5 设 $f\in L^r$, $1<r<\infty$, p,q 是任意的两个质数．则

$$\left(\sum_{n,m}|\hat{f}(p^nq^m)|^2\right)^{1/2}\leqslant C_r\|f\|_r.\tag{67}$$

证明 考虑形如式(65)右边表示的函数，记为 g，且设 $\|g\|_2=1$．则由式(66)给出的函数 S 的表示得

$$\left(\sum_{n,m}|\hat{f}(p^nq^m)|^2\right)^{1/2}=\sup_{g\text{ 如上述}}|E(fg)|$$

$$\leqslant\sup_g\|f\|_r\|g\|_{r'}$$

$$\leqslant\sup_g C\|f\|_r\|S(g)\|_{r'}$$

$$\leqslant \sup_g C\|f\|_r\|g\|_2 \leqslant C\|f\|_r.$$

于是证明了式(67)成立. ▮

推论 5 设 $f\in L^p$, $1<p<\infty$, $a_1,\cdots,a_m$ 是正整数. 则

$$\left(\sum_{n_1,\cdots,n_m}|\hat{f}(a_1^{n_1}\cdots a_m^{n_m})|^2\right)^{1/2}\leqslant C_p\|f\|_p. \tag{68}$$

证明 显然, 命题 5 对任意有限个质数的情形也成立. 因而对每个 a_i 作质数分解, 即得推论. ▮

章后注记

7.1 节 条件(R)是一早为人知的正规性条件, 如 Neveu[1] 在讨论 H_1 的非负元素的 $L\log^+L$ 可积性时, 及 Brossard[1]在对两指标鞅证明$\|S(f)\|_p\leqslant C_p\|f^*\|_p$时, 均考虑过这个条件. 至于弱条件($R_w$), 以及性质 4)与 6)等似乎是第一次由 Long[1,2]明确地提出. 定理 1 中 4)⇒5) 属于 Gundy[1], 5)⇒1) 属于 B-H-L[1], 其它情形属于 Long[1,2]. B-H-L[1] 的补充使正规性的六个性质的等价宣告完成. 定理 1′ 也属于 B-H-L[1].

7.2 节

7.2.1 关于原子分解. B-M[1]定义了鞅论中的原子概念, 并对连续鞅的 $H_1,\mathscr{D}_1$, 以及二进鞅 H_1 建立了原子分解. 定理 2 与 2′ 属于 Long[2]. 推论 1 属于 Davis[2], 他并指出当 $p<1/2$ 时结论不再成立. Long[2]讨论了推论 1 在 $\boldsymbol{R}^k$ 上的类似.

7.2.2 关于 H_p 的对偶. 利用原子分解建立 H_p 的对偶是大家熟知的, 其思想似乎属于 C. Fefferman, C. Herz, R. Coifman 等, 更具体些的讨论见 B-M[1]. $p=1$ 时的引理 2 与定理 3 已出现在 B-M[1]中; 而对一般的 p, 似乎是在此书中才出现.

7.2.3 关于内插理论. 用 K-方法讨论 H_p 鞅之间的内插空

间似乎是在此书中第一次出现. 关于算子内插, 命题 1 的思想属于 Fefferman-Stein[1]. 引理 5 除 $p>1$ 外属于 E. M. Stein-G. Weiss. 涉及到 H_p 空间的弱型算子内插, 在古典情形始于Igari[1]. Okada[1]考虑了鞅论中的类似结果. 关于 H_p 的一个分解, 古典情形似乎很早就为人所知, 本书所叙述的形式属于 Hang(韩)[1], 鞅论情形也是在此书内第一次出现.

7.2.4 定理 9 似乎是一个大家熟知的结果. Gundy[1], Garsia[1], Neveu[1]都得到过这类结果, 只是叙述上稍有差别. 这方面的古典结果见 Zygmund[1]与 Stein[1].

7.2.5 关于 $H_p\cap\mathrm{Re}\,L^1$ 中函数的重排. Davis[2] 对古典 H_p 建立了定理 10, 他并得到如下意义的逆结果: 若 f 的 f_d 满足

$$\int_0^1\left|\frac{1}{x}\int_{-x}^{+x}f_d\,dt\right|^p dx<\infty,$$

则至少存在一个 f 的重排函数 (定义在原空间 $\boldsymbol{T}^n$ 或 $\boldsymbol{R}^n$ 上)是属于 H_p 的.

7.2.6 关于算子刻划. 引理 6 属于 Janson[1]. 引理 7 属于 Janson[1], 但其思想属于 Chao-Taibleson[1]. 引理 8 是新给出的. 推论 4, 定理 11 与 11′ 属于 Janson[1]. 定理 12 与 13 属于 Chao[1].

7.3 节 本节主要结果属于 Long[1,4]. 定理 16 是在本书第一次出现. 定理 14 与 15中当 $z\equiv1$时, 即给出B-G[1]的对应结果. 其原来的证明, 在Burkholder[2]中只对 N=1 情形给出; 在Gundy[2]中只对 $\Phi(u)=u^p$ 给出 (仅是在一个注记中指出可以得到 Φ-不等式), 并且均不如此书所述简明. 当然严格地讲, 定理 14 与 15 中概括的对象与 B-G[1]的并不完全一样. 即 B-G[1]对(Ω, $\mathscr{F}$, μ, $\{\mathscr{F}_n\}$) 没有作任何假定, 而只对鞅作了正规性假定. 本书则是对(Ω, $\mathscr{F}$, μ, $\{\mathscr{F}_n\}$)作了整体的假定, 同时得到的也是整体的结果.

7.4节 这个具体例子取自G-V[1]. 这几个结果都是Paley的古典结果的类似. 关于命题4, 古典结果是对一般缺项序列$\{\lambda_k\}_1^\infty$(即$\lambda_{k+1}\geqslant q\lambda_k, q>1$)成立, 不等式(16)的右边是古典$H_1$范数. 本节的结果是对序列$\{r^k\}_1^\infty$成立, 不等式右边是$H_1$鞅范数. 这两个范数是不等价的,因此结果互不包含.

参 考 文 献

几个杂志名称缩写

C. R. A. S. P. = C. R. Acad. Sc. Paris (Série A)

I. U. M. J. = Indiana Univ. Math. Jour.

L. N. M. = Lect. Notes in Math. (Springer Verlag)

P. A. M. S. = Proc. Amer. Math. Soc.

P. S. P. M. = Proc. of Symp. in Pure Math.

T. A. M. S. = Trans. Amer. Math. Soc.

Azema, J., Gundy, R. F., Yor, M.

[1] Sur l'intégrabilité uniforme des martingales continues, Sém. Prob. XIV, *L. N. M.*, **781** (1980), 53—61.

Bernard, A.

[1] Espaçes H_1 de martingales à deux indices. Dualité avec les martingales de type "BMO", *Bull. Sc. Math. 2ᵉ série*, **103** (1979), 297—303.

Bernard, A., Maisonneuve, B.

[1] Decomposition atomique de martingales de la classe H_1, Sém. Prob. XI, *L. N. M.*, **581** (1977), 303—323.

Bonami. A., Lepingle, D.

[1] Fonction maximale et variation quadratique des martingales en présence d'un poids, Sém. Prob. XIII, *L. N. M.*, **721** (1979), 294—306.

Brossard, J.

[1] Généralisation des inégalités de Burkholder et Gundy aux martingales régulières à deux indices, *C. R. A. S. P.*, **288** (1979), 267—270.

Bru, B., Heinich, H., Lootgieter, J. C.

[1] Sur la régularité des filtrations, *C. R. A. S. P.*, **294** (1982), Série I, 313—316.

Burkholder, D. L.

[1] Martingale transforms, *Ann. Math. Sta.*, **37** (1966), 1494—1504.

[2] Distribution function inequalities for martingales, *Ann. of Prob.*, **1** (1973), 19—42.

[3] One sided maximal functions and H_p, *J. Func. Anal*, **18** (1975), 429—454.

[4] Martingale theory and Harmonic analysis in Euclidean spaces, *P. S. P. M.* **XXXV**, **Part 2** (1979), 283—301.

Burkholder, D. L., Davis, B., Gundy, R.

[1] Integral inequalities for convex functions of operators on martingales, *Proc. 6th Berkley Symp.*, **2**, 1972.

Burkholder, D. L., Gundy, R. F.

[1] Extrapolation and interpolation of quasi-linear operators on martingales, *Acta Math.*, **124** (1970), 249—304.

Burkholder, D. L., Gundy, R. F., Silverstein, M. L.

[1] A maximal function characterization of the class H_p, *T. A. M. S.*, **157** (1971), 137—153.

Carleson, L.

[1] Two remarks on H_1 and BMO, *Adv. in Math.*, **22**(1976), 269—277.

Chang, S. Y. A.

[1] Carleson measure on the bidisk, *Ann. Math.*, **109** (1979), 613—620.

Chang, S. Y. A., Fefferman, R.

[1] The Calderón-Zygmund decomposition on product domain, *Amer. J. of Math.*, **104** no. 3 (1982), 455—468.

Chao, J. A.

[1] Triadic and Dyadic conjugate martingales, *P. S. P. M.*, **XXXV, Part 2** (1979).

[2] Hardy Spacer on regular martingales, *L. N. M.*, **939**, (1982) 18—28.

Chao, J. A., Janson, S.

[1] A note on H_1 q-martingales, *Pacific J. of Math.*, **92** (1981), 307—317.

Chao, J. A., Taibleson, M. H.

[1] A sub-regularity inequality for conjugate systems on local fields, *Studia Math.*, **46** (1973), 249—257.

Chow, C. S.

[1] Les inegalités surmartingales d'après A. M. Garsia, Sém. Prob. IX, *L. N. M.*, **465** (1975), 206—212.

Chow, Y. S.

[1] Martingales in a σ-finite measure space indexed by directed sets, *T. A. M. S.*, **97** (1960), 254—285.

Coifman, R. R.

[1] A real variable characterization of H_p, *Studia Math.*, **51** (1974), 269—274.

Coifman, R. R., Fefferman, C.

[1] Weighted norm inequalities maximal functions and singular integrals, *Studia Math.*, **51** (1974), 241—250.

Coifman, R. R., Rochberg, R.

[1] Another characterization of BMO, *P. A. M. S.*, **79** (1980), 249—254.

Coifman, R. R., Weiss, G.

[1] Extensions of Hardy spaces and their use in analysis, *Bull. A. M. S.*, **83** (1977), 569—645.

Coifman, R. R., Rochberg, R., Weiss, G.

[1] Factorization theorems for Hardy spaces in several variables, *Ann. of Math.*, **103** (1976), 611—635.

Davis, B.

[1] On the integrability of the martingales square function *Israel J. Math.*, **8** (1970), 187—190.

[2] Hardy spaces and rearrangements, *T. A. M. S.*, **261**

(1980), 211—233.

Dellacherie, C.

[1] Inégalités de convexité pour les processus croissants et les sousmartingales, Sém. Prob. XIII, *L. N. M.*, **721** (1979), 371—377.

Dellacherie, C., Meyer, P. A.

[1] Probabilités et Potentiels, 2e édition, chapitres I — IV, Hermann, Paris. (1975).

[2] Probabilités et Potentiels, 2e édition, chapitres V — VIII (1980).

Dellacherie, C., Meyer, P. A., Yor, M.

[1] Sur certains propriétés des espaces de Banach H_1 et BMO, Sém. Prob. XII, *L. N. M.*, **649** (1978).

Doléans-Dade, C., Meyer, P. A.

[1] Une caractérisation de BMO, Sém. Prob. XI, *L. N. M.*, **581** (1977), 383—389.

[2] Inégalités de norms avec poids, Sém. Prob. XIII, *L. N. M.*, **721** (1979), 313—331.

Doob, J. L.

[1] Stochastic Processes, Wiley, New York, (1953).

Duren, P. L.

[1] Theory of H_p spaces. Academic Press. New York (1970).

Duren, P. L., Romberg, B. W., Shields, A. L.

[1] Linear functionals on H_p spaces with $0<p<1$, *J. reine. angew. Math.*, **238** (1969), 32—60.

Edwards, R. E., Gaudry, G. I.

[1] Littlewood-Paley and Multiplier Theory, Erg. 90. Springer-Verlag (1977).

Fefferman, C.

[1] Characterization of bounded mean oscillation, *Bull. A. M. S.*, **77** (1971), 587—588.

Fefferman, C., Stein, E. M.

[1] H^p spaces of several variables, *Acta Math.* **129** (1972), 137—194.

Fefferman, R.

[1] Bounded Mean Oscillation on the polydisk, *Ann. Math.*, **110** (1979), 395—406.

Frazier, A. P.

[1] The dual space of H^p of the polydisc for $0<p<1$, *Duke Math. J.*, **39** (1972), 369—379.

Garnett, J. B., Jones, P. W.

[1] The distance in BMO to L^∞, *Ann. of Math.*, **108** (1978), 373—396.

Garnett, J. B., Latter, R. H.

[1] The atomic decomposition for Hardy spaces in several complex variables. (to appear in *Duke Math. J.*)

Garsia, A.

[1] Martingale Inequalities, Sem. Notes on Recent Progress, Benjamin (1973).

Getoor, R. K., Sharpe, M. J.

[1] Conformal martingales. *Invent. Math.*, **16** (1972), 271—308.

Gundy, R. F.

[1] On the class LlogL, martingales, and singular integrals, *Studia Math.*, **33** (1969), 109—118.

[2] Inégalité pour martingales, à un et deux indices. *L*'espace H^p. Cours à l'Ecole d'été de Prob. de Saint-Flour. VIII-1978, *L. N. M.*, **774** (1980).

Gundy, R. F., Varopoulos, N. Th.

[1] A martingale that occurs in harmonic analysis, *Ark. för mat.*, **14** (1976), 179—187.

Hang Y. S. (韩永生)

[1] Decomposition of function and its application in opera-

interpolation, 中国科学, **7** (1983).

Hanks, R.

[1] Interpolation by the Real Method between BMO, L^α $(0<\alpha<\infty)$ and H^α $(0<\alpha<\infty)$, *I. U. M. J.*, **26** (1977), 679—689.

Herz, C. S.

[1] Bounded mean oscillation and regulated martingales, *T. A. M. S.*, **193** (1974), 199—215.

[2] H_p-spaces of martingales, $0<p\leqslant 1$, *Zeit. Wahrscheinlichkeitstheorie*, **28** (1974), 189—205.

Igari, S.

[1] An extension of the interpolation theorem of Marcinkiewicz II. *Tôhoku Math. J.*, **15** (1963), 343—358.

Izumisawa, M., Kazamaki, N.

[1] Weighted norm inequalities for martingales, *Tôhoku Math. J.*, **29** (1977), 115—124.

Izumisawa, M., Sekiguchi, T., Shiota, Y.

[1] Remark on a characterization of BMO-martingales, *Tôhoku Math. J.*, **31** (1979), 281—284.

Jacod, J.

[1] Calcul stochastique et problèmes de martingales, *L. N. M.*, **714** (1979).

Janson, S.

[1] Characterization of H_1 by singular integral transforms on martingales and $\boldsymbol{R}^n$, *Math. Scand.*, **41** (1974), 140—152.

John, F., Nirenberg, L.

[1] On functions of bounded mean oscillation, *Comm. Pure Appl. Math.*, **14** (1961), 415—426.

Jones, P. W.

[1] Factorization of A_p weight. *Ann. of Math.*, **111** (1980), 511—530.

Kazamaki, N.

[1] A characterization of BMO-martingales, Sém. Prob. X. *L. N. M.*, **511** (1976), 536—538.

[2] Changes of law, martingales and the conditioned square function, *Tôhoku. Math. J.*, **31** (1979), 549—552.

Khanh, B. D.

[1] Intégrales singulières, commutateurs, et la fonction f^*, *Bull. Sc. Math.* 2^e, série **103** (1979), 241—253.

Koosis, P.

[1] Introduction to H_p Space, Lond. M. S. Lect. Note Series 40 (1980).

Latter, R. H.

[1] The atomic decomposition of Hardy spaces, *P. S. P. M.* XXXV (1979), 275—279.

Lenglart, E., Lépingle, D., Pratelli, M.

[1] Presentation unifiée de certaines inégalités de la theorie des martingales, Sém. Prob. XIV, *L. N. M.* **781**(1980), 26—48.

Long, J. L. (龙瑞麟) = Long, R. L.

[1] Martingale régulière et Φ-inégalités avec poids entre f^*, $S(f)$ et $\sigma(f)$, *C. R. A. S. P.*, **291** (1980), 31—34.

[2] Sur l'espace H_p de martingales régulières ($0<p\leqslant1$), *Annales Inst. H. Poincaré* (B), XVII (1981), 123—142.

[3] 关于 $f\in$BMO 与 L^∞ 的距离, 数学学报, vol. **25** (1982), no. 2, 189—201.

[4] 鞅的加权 Φ-不等式, 数学学报, **26** (1983), 173—178.

[5] A property of convex fonctions, *Kexue Tongbao*, **27** (1982), 641—642.

[6] Two classes of martingale spaces, 中国科学, A no. 11 (1982).

Long, R. L. & Peng, L. Z. (龙瑞麟, 彭立中)

[1] Decomposition of BMO functions and factorization of A_p

weights in martingale setting, *Chin. Ann. of Math.*, **4B** (1) (1983), 117—128.

[2] Two weighted maximal (p, q) inequalities in martingale setting (to appear).

Meyer, P. A.

[1] Un cours sur les integrales stochastiques, Sém. Prob. X. *L. N. M.*, **511** (1976).

Muckenhoupt, B.

[1] Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function, *T. A. M. S.*, **165** (1972), 207—226.

Neveu, J.

[1] Martingales à temps discret, Masson. Paris. (1972).

Okada, M.

[1] An interpolation of operators in the Martingale H_p-spaces, *Proc. Japan. Acad.*, **52** (1976), 55—57.

Petersen, K. E.

[1] Brownian Motion, Hardy Spaces and Bounded Mean Oscillation, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1977).

Rao, K. M.

[1] Quasi-martingales, *Math. Scand.*, **24** (1969), 79—92.

Rao, M. M.

[1] Interpolation, ergodicity and martingales, *J. Math. Mech.* **16** (1966), 543—568.

[2] Conjugate series, convergence and martingales, *Rev. Roum. Math. Pures Appl.*, **22** (1977), 219—254.

[3] Stochastic processes and integration. Sijthoff & Noordhoff (1979).

Reimann, H. M., Rychener, T.

[1] Funktionen beschränkter mitterer oszillation, *L. N. M.*, **487** (1975).

Sarason, D.

[1] Fonctions of vanishing mean oscillation, *T. A. M. S.*,

207 (1975), 391—405.

Stein, E. M.

[1] Note on the class LlogL, *Studia Math.* (1969), 305—310.

[2] Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton Univ. Press, Princeton. N. J. (1970).

Stein, E. M., Weiss, G.

[1] Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces, Princeton (1971).

Stroock, D. W.

[1] Applications of Fefferman-Stein type interpolation to probability theory and analysis, *Comm. Pure Appl. Math.*, **26** (1973).

Strömberg, J. O.

[1] Bounded Mean Oscillation with Orlicz Norms and Duality of Hardy Spaces, *I. U. M. J.*, **28** (1979), 511—544.

Varopoulos, N. Th.

[1] A probabilistic proof of the Garnett-Jones Theorem on BMO, *Pacific, J. M.*, **90** (1980), 200—221.

[2] The Helson-Szegö Theorem and A_p Functions for Brownian Motion and Several Variables, *J. of Func. Anal.*, **39** (1980), 85—121.

[3] A theorem on weak type estimates for Riesz transforms and martingale transforms, *Ann. de l'Institut Fourier.*, **XXXI** (1981), 257—264.

Weiss. G.

[1] Some problems in the theory of Hardy spaces, *P. S. P. M.*, **XXXV, Part 1** (1979), 189—200.

Yor, M.

[1] Convergence de martingale dans L^1 et H_1, *C. R. A. S. P.*, **286** (1978).

[2] Les inégalités de sous-martingales comme conséquence de la relation de domination, *Stochastics.*, Vol 3 (1979).

Yen, K. A. (严加安)

[1] 鞅与随机积分，上海科技出版社 (1981).

Zygmund, A.

[1] Trigonometric Series. Vol I, II, 2nd ed. Cambridge (1968).

索　　引

为便于读者参阅法国文献，兹将本索引中给出的某些条款的主体词之法译附后，与此同时也并列英译．本索引按主体词的英文字母顺序排列，每个条款按中、英、法顺序．

A

B

C

D

E

F

G

P

R

S

T

U

W