第36卷第6期 数 学 进 展 Vol.36, No.6
2007年12月 ADVANCES IN MATHEMATICS Dec., 2007

偏微分方程的调和分析方法简介

苗长兴

(北京应用物理与计算数学研究所， 100088, 北京)

摘要： 本文致力于阐述调和分析与现代偏微分方程研究的关系，特别是奇异积分算子、拟微分算子、 Fourier 限制性估计、 Fourier 频率分解方法在椭圆边值问题、非线性发展方程研究中的重要作用. 对于偏微分方程研究的各种方法进行了比较与分析，指出了偏微分方程的调和分析方法的优点与局限性. 与此同时，还给出了偏微分方程的调和分析方法这一领域的最新研究进展.

关键词： 偏微分方程；边值问题； Cauchy 问题；奇异积分算子；拟微分算子； Fourier 限制性估计； Fourier 频率分解； Littlewood-Paley 分解

MR(2000) 主题分类： 35J05, 35K05, 35L05, 35Q30, 42.B20, 47G30 / **中图分类号：** O175.2

文献标识码： A **文章编号：** 1000-0917(2007)06-0641-31

0 引言

现代调和分析可以追溯到 19 世纪初 Fourier 关于热传导方程的求解. 经历了近 200 年的发展，它已经成为现代数学的核心研究领域之一，特别成为偏微分方程、解析数论、数学物理、工程科学等研究领域的重要工具. 偏微分方程的研究进程和历史表明，调和分析的许多经典结果已被充分证明是解决偏微分方程本质问题的最有效的研究手段和方法. 我们从如下诸条中可以体会调和分析在偏微分方程研究中的重要作用：

(i) $\mathcal{H}_1$ 与 BMO 空间：在建立椭圆型方程、抛物型方程解的 L^p 理论、 C^α 理论中， BMO 空间 ($\mathcal{H}_1$ 的对偶空间) 的引入和使用起着本质的作用. 借助于 L^p 理论、 C^α 理论就可以建立椭圆型方程、抛物型方程边值问题解的正则性. 另一方面，作为 L^1 和 L^∞ 空间的替代空间， Hardy 空间 $\mathcal{H}^1$ 与 BMO 空间在插值理论、算子有界性的研究中起着极其重要的作用.

(ii) 经典 Calderön–Zygmund 奇异积分理论 (第一代). 著名的 Hilbert 变换、 Riesz 变换是其典型例子，在众多的数学物理研究中都有重要的应用. 就 PDEs 而言，它在正对称双曲型方程组、位势积分估计 (单层位势、双层位势) 及椭圆边值问题的研究中起着重要的作用. 另一方面，利用 Bessel 位势、 Riesz 位势可以将整数阶的 Sobolev 空间推广到相应的分数阶函数空间.

(iii) 第二代 Calderón-Zygmund 奇异积分算子是拟微分算子的特例，它是处理变系数线性偏微分方程的有效方法. 同时，拟微分算子的 L^p 理论可视为经典位势理论的推广，可以讲它是研究一般椭圆边值问题的基本方法之一. 当然，作为拟微分算子进一步发展的 Fourier 积分算子，本质上可以视为第二型的振荡积分.

(iv) Hardy-Littlewood 极大函数理论. 在研究算子的有界性、函数的点态收敛，特别对椭圆边值问题边界值的刻画有着重要作用.

(v) 可微函数空间如 Besov 空间、 Triebel-Lizorkin 空间、通常的 Sobolev 空间，特别是它

收稿日期： 2005-03-30.
基金项目：国家重点基础研究发展规划项目 (No. G1999075107) 及国家自然科学基金 (No. 10571016).
E-mail: miao_changxing@iapcm.ac.cn

们的 Littlewood-Paley 刻画、原子分子刻画、Gauss 核刻画及 Possion 核刻画等调和分析技术，不仅为偏微分方程的研究提供了工作空间，同时也为线性估计、非线性估计提供了有效方法.

(vi) 球调和函数理论：它是偏微分方程各种定解问题的经典研究方法 (特别是基于逼近的紧致性方法) 的基础，为数值求解提供了工具. 当然，它在奇异积分理论等调和分析的核心方向的研究中亦扮演着重要角色.

(vii) 插值理论与插值方法：无论是实插方法、复插值方法还是 Stein 插值方法，都是研究空间理论、算子理论、非线性估计的主要手段. 例如： Marcinkiewicz 插值定理将端点弱型算子估计转换成内点的强型算子估计，这在偏微分方程的研究中是至关重要的.

(viii) Hörmander 平移不变算子理论、 Littlewood–Paley 的 g 函数方法、 Calderón–Stein 的 g_λ^* 函数方法是乘子理论的基础. 与此同时，乘子理论可用于判断线性发展方程的适定性 (解算子是否在所考虑的 Banach 空间 X 中生成一个 C_0 半群). 它本质上为研究对应的非线性偏微分方程的定解问题提供了合适的工作空间.

(ix) Littlewood-Paley 的分解理论在函数空间的刻画、非线性函数在分数阶 Sobolev 空间中的估计等诸多方面显示出巨大的应用潜力. Bony 的二次微局部分解与分数阶求导估计正是基于 Littlewood-Paley 的分解理论的一个典型范例.

(x) 振荡积分估计、 Fourier 变换在几何曲面上的限制性估计：藉此可建立线性发展方程解的 L^p–L^q 估计，解的 Strichartz 型时空估计、正则型的 Strichartz 时空估计、解的倒向时空估计 (极大模估计) 等. 所有这些为非线性发展方程的适定性理论、波方程及色散波方程散射性的研究提供了有力的工具.

近 30 年来，现代调和分析方法特别是限制估计及相应的 Strichartz 型时空估计，Littlewood-Paley 理论，Bony 的二次微局部分解技术与分数阶求导估计等起着决定性的作用，偏微分方程特别是发展型方程的许多突破性成果均系与此，读者可见 Stein, Ginibre-Velo, Brenner, Bourgain, Kenig 及 Tao 等人的工作，如 [1-7, 10, 14-18, 30, 31, 34, 37, 39, 40, 42, 43, 46] 等.

1 Lip 区域上的椭圆边值问题

我们以 Laplace 方程为例，说明调和分析特别是奇异积分算子在椭圆边值问题研究中的作用，并简要给出研究的背景、历史、方法.

众所周知，经典 Laplace 方程的边值问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x \in \Omega \subset R^n, \\ u = f, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \qquad \text{Dirichlet 问题}, \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x \in \Omega' = R^n \backslash \Omega, \\ u = f, & x \in \partial\Omega', \end{cases} \qquad \text{Dirichlet 外问题}, \tag{1.2}$$

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = f, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \qquad \text{Neumann 问题}, \tag{1.3}$$

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x \in \Omega' = R^n \backslash \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = f, & x \in \partial\Omega', \end{cases} \qquad \text{Neumann 外问题}, \tag{1.4}$$

分别等价于求解如下面上的积分方程 [9]

$$\frac{1}{2}\phi + T_K\phi = f, \qquad \text{Dirichlet 问题}, \tag{1.5}$$

$$-\frac{1}{2}\phi + T_K\phi = f, \qquad \text{Dirichlet 外问题}, \tag{1.6}$$

$$-\frac{1}{2}\phi + T_{K^*}\phi = f, \qquad \text{Neumann 问题}, \tag{1.7}$$

$$\frac{1}{2}\phi + T_{K^*}\phi = f, \qquad \text{Neumann 外问题}, \tag{1.8}$$

这里

$$K(x,y) = \partial_{\nu_y} N(x,y), \quad K^*(x,y) = K(y,x), \tag{1.9}$$

$$N(x,y) = N(x-y) = \begin{cases} \dfrac{|x-y|^{2-n}}{(2-n)\omega_n}, & n > 2, \\ \dfrac{1}{2\pi}\log|x-y|, & n = 2, \end{cases} \tag{1.10}$$

$$T_K\phi = \int_{\partial\Omega} K(x,y)\varphi(y)d\sigma(y), \qquad x \in \partial\Omega, \tag{1.11}$$

$$T_{K^*}\phi = \int_{\partial\Omega} K(y,x)\varphi(y)d\sigma(y), \qquad x \in \partial\Omega, \tag{1.12}$$

ω_n 表示 R^n 中单位球面的面积. 若 $\partial\Omega \in C^2$ 有界, $f \in L^p(\partial\Omega)$, $1 < p < \infty$(特别, 对 Neumann 问题 f 还需满足一些必要条件), 则积分方程 (1.5), (1.6), (1.7) 及 (1.8) 可解. 分别记它们的解为 ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 和 ϕ_4, 那么,

$$u(x) = \mathcal{D}\phi_1 = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_y} N(x,y)\phi_1(y)d\sigma(y) \triangleq \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_Q} N(P,Q)\phi_1(Q)d\sigma(Q),$$

$$u(x) = \mathcal{D}\phi_2 = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_Q} N(P,Q)\phi_2(Q)d\sigma(Q),$$

$$u(x) = S\phi_3 = \int_{\partial\Omega} N(P,Q)\phi_3(Q)d\sigma(Q),$$

$$u(x) = S\phi_4 = \int_{\partial\Omega} N(P,Q)\phi_4(Q)d\sigma(Q)$$

分别是 Dirichlet 问题 (1.1) 、 Dirichelt 外问题 (1.2) 、 Neumann 问题 (1.3) 及 Neumann 外问题 (1.4) 的解. 这里 n_Q 表示 Q 处的法向导数.

定义 1.1

$$\mathcal{D}\phi = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_Q} N(P,Q)\phi(Q)d\sigma(Q), \quad P \notin \partial\Omega, \tag{1.13}$$

$$S\phi = \int_{\partial\Omega} N(P,Q)\phi(Q)d\sigma(Q), \quad P \notin \partial\Omega \tag{1.14}$$

分别称为双层位势和单层位势.

由上面讨论可见, 椭圆边值问题的可解性本质上归结成曲面上积分方程 (1.5), (1.6), (1.7) 及 (1.8) 的可解性. 如果能证明算子 T_K(或 T_{K^*}) 是紧算子, 则可利用 Fredholm 理论或更一般的 Riesz-Schauder 理论求解积分方程, 所得的解分别代入单层位势或双层位势, 就可获得 Dirichlet(外) 问题、 Neumann(外) 问题的解.

幸运的是，当 $\partial\Omega \in C^2$ 时，T_K 及 T_{K^*} 是 $L^p(\partial\Omega)$ 及 $C(\partial\Omega)$ 上的紧算子，这里 $1<p<\infty$. 事实上，无妨设 $\partial\Omega$ 是某个 C^2 函数 $h(x)$ 的图像，记

$$P=(x,h(x)), \qquad Q=(y,h(y)), \tag{1.15}$$

则

$$K(P,Q)=\frac{\langle P-Q, n_Q\rangle}{\omega_n|P-Q|^n}, \tag{1.16}$$

$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示向量内积，这里

$$n_Q=\frac{(\nabla h(y),-1)}{\sqrt{1+|\nabla h(y)|^2}}. \tag{1.17}$$

注意到

$$h(x)=h(y)+\langle x-y,\nabla h(y)\rangle+e(x,y),$$
$$e(x,y)\sim O(|x-y|^2),$$

则

$$\begin{aligned}|K(P,Q)| \le& C\frac{|\langle P-Q,(\nabla h(y),-1)\rangle|}{|P-Q|^n}\\ \le& C\frac{|e(x,y)|}{|P-Q|^n}\le\frac{C}{|P-Q|^{n-2}}.\end{aligned} \tag{1.18}$$

由此可知 T_K 和 T_{K^*} 是弱奇积分算子. 它是 $L^p(\partial\Omega)$ 和 $C(\partial\Omega)$ 上的紧算子，这里 $1<p<\infty$, $\partial\Omega$ 是有界 C^2 边界.

注记 1.2 位势理论和变分方法是解决椭圆边值问题的一般性方法. 借助于位势理论的推广形式即拟微分算子理论，可以研究更一般的椭圆边值问题. 当然，还有一些方法适合于特殊区域上的椭圆边值问题. 下面对这些方法进行简单的评述.

(i) 上半空间上的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}\Delta u=0, & \Omega=R_+^{n+1},\\ u\big|_{\partial\Omega}=f, & \partial\Omega=R^n.\end{cases} \tag{1.19}$$

通过 Fourier 变换，可得

$$u(x,t)=\mathcal{F}^{-1}(e^{-|\xi|t}\mathcal{F}f)=P_t*f, \tag{1.20}$$

这里

$$P_t=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}\frac{t}{(|x|^2+t^2)^{\frac{n+1}{2}}} \tag{1.21}$$

是经典的 Poisson 核. 易见，对任意 $f\in L^p(R^n)$, 这里 $1<p<\infty$, $u=P_t*f$ 是半空间上的调和函数，并且

$$\lim_{t\to 0}u(x,t)\overset{a.e.}{=\!=}f(x).$$

换言之，(1.19) 确定了 $X=L^p(R^n)$ 到

$$Y=\left\{u(x,t)\big|u(x,t)\text{ 在 }R_+^{n+1}\text{ 上调和且 }\sup_{t>0}\|u(x,t)\|_p\le\|f\|_p\right\}$$

的映射. 当然,

$$u(x,t) \triangleq T(t)f(x) = P_t * f \tag{1.22}$$

关于 $t \in R^+$ 生成了 $L^p(R^n)$ $(1 \le p < \infty)$ 上的 C_0 半群, 它在 Besov 型函数空间的刻画等方面有着重要的应用.

(ii) 如果 $\Omega \subset R^n$ 是一些特殊区域, 如球、方体、$\frac{1}{4}$ 空间等特殊区域, 可通过 Newton 位势来构造相应的 Green 函数, 即寻找满足

$$\begin{cases} \Delta G = \delta(x-y), \\ G\big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{1.23}$$

的解. 当然, 亦可以通过物理或几何的方法得到 $G(x,y)$. 这样,

$$u(x) = \int_\Omega G(x,y)f(y)dy + \int_{\partial\Omega} \partial_{n_y} G(x,y)g(y)d\sigma(y) \tag{1.24}$$

就是如下边值问题:

$$\begin{cases} \Delta u = f(x), \quad x \in \Omega, \\ u\big|_{\partial\Omega} = g(x) \end{cases} \tag{1.25}$$

的解.

(iii) 对于球内或球外的 Dirichlet 问题、 Neumann 问题, 可以利用球调和函数及 Bessel 函数将其显式地表示出来, 详见 Folland 的书 [10]. 需要指出的是, 球调和函数为许多可微函数空间提供了正交基底, 在函数逼近理论、计算数学等领域均有着广泛的应用.

(iv) 对一般椭圆型方程的边值问题, 借助于拟微分算子理论即位势理论的推广形式, 将椭圆边值问题 (体上的微分方程) 转化成面上的积分方程来予以研究. 具体地讲, 给定函数 $f \in H^{s-2,p}(\Omega)$, $g \in B_*^{s-1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$, 寻求

$$\begin{cases} Au = f, \quad x \in \Omega, \\ Bu = g, \quad x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1.26}$$

的解 $u \in H^{s,p}(\Omega)$, 这里椭圆算子 A 与边界算子 B 分别为

$$Au = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a^{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^n b^i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u, \tag{1.27}$$

$$Bu = a\frac{\partial u}{\partial \nu} + bu\bigg|_{\partial\Omega} \triangleq a\gamma_1 u + b\gamma_0 u, \quad \forall u \in H^{s,p}(\Omega). \tag{1.28}$$

而

$$\frac{\partial}{\partial \nu} = \sum_{j=1}^n a^{ij} n_j \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad \vec{n}\text{是外单位法向量}. \tag{1.29}$$

这里无妨假设 $a^{ij}(x)$, $b^i(x)$, $c(x) \in C^\infty(\Omega)$, 而 $a(x)$,$b(x) \in C^\infty(\partial\Omega)$. 空间 $B_*^{s-1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ 是一个插值型的 Besov 空间, 即

$$B_*^{s-1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega) = \left\{\varphi | \varphi = a\varphi_1 + b\varphi_2, \quad \varphi_1 \in B_{p,p}^{s-1-\frac{1}{p}}(\partial\Omega), \varphi_2 \in B_{p,p}^{s-\frac{1}{p}}(\partial\Omega)\right\}, \tag{1.30}$$

其上的范数定义为

$$\|\varphi\|_{B_*^{s-1-\frac{1}{p},p}}=\inf_{\varphi=a\varphi_1+b\varphi_2}\left(\|\varphi_1\|_{B_{p,p}^{s-1-\frac{1}{p}}}+\|\varphi_2\|_{B_{p,p}^{s-\frac{1}{p}}}\right).\tag{1.31}$$

一般椭圆边值问题 (1.26) 的可解性等价于证明体算子 $\mathcal{A}=(A,B)$

$$\begin{cases}\mathcal{A}:H^{s,p}(\Omega)\longrightarrow H^{s-2,p}(\Omega)\times B_*^{s-1-\frac{1}{p},p},\\ \mathcal{A}u=\{Au,Bu\},\quad \forall u\in D(\mathcal{A})=H^{s,p}\end{cases}\tag{1.32}$$

是双射. 根据拟微分算子的理论, 它等价于证明面算子 (即面上的算子)

$$\begin{cases}\mathcal{T}:B_{p,p}^{s-\frac{1}{p}}(\partial\Omega)\longrightarrow B_{p,p}^{s-\frac{1}{p}-1}(\partial\Omega),\\ \mathcal{T}\varphi=a\Pi\varphi+b\varphi\equiv\left(a\dfrac{\partial}{\partial\nu}(P\varphi)+b\varphi\right)\Big|_{\partial\Omega}\end{cases}\tag{1.33}$$

是双射, 即证明面上积分方程

$$\mathcal{T}\varphi=a\diamond\varphi+b\varphi=f,\quad \forall f\in B_{p,p}^{s-\frac{1}{p}-1}(\partial\Omega)\tag{1.34}$$

可解. 这里 $P:B_{p,p}^{s-\frac{1}{p}}(\partial\Omega)\longrightarrow H^{s,p}(\Omega)$ 是抽象的 Poisson 算子. 换言之, 算子 $\mathcal{A}$ 是体上的 Fredholm 算子的充要条件是 $\mathcal{T}$ 是面上的 Fredholm 算子. 所谓 Fredholm 算子是指: 称 Banach 空间 X 到 Banach 空间 Y 上的稠定的闭线性算子 $\mathcal{T}$ 是 Fredholm 算子, 如果它满足

(a) $\dim N(\mathcal{T})<\infty$;

(b) $R(\mathcal{T})$ 是 Y 中的闭集;

(c) $\operatorname{codim}R(\mathcal{T})<\infty$.

如果 $\mathcal{T}$ 是 Banach 空间 X 到自身的紧算子, 可以直接利用 Riesz-Schauder 理论 (或 Fredholm 二择性原理) 求解 (1.34):

Riesz-Schauder 定理　设 $\mathcal{T}$ 是 Banach 空间 X(可换成一般的赋范线性空间) 到自身的紧线性算子, 则下面结果必有一个成立:

(i) 齐次方程 $x-\mathcal{T}x=0$ 有非平凡解 $x\in X$;

(ii) 对于每个 $y\in X$, 方程 $x-\mathcal{T}x=y$ 有唯一的解 $x\in X$. 且在此情形下, 算子 $(I-\mathcal{T})^{-1}$ 是有界的.

作为特例, 对于 Hilbert 空间 H(无妨设 $H=H^*$) 上, 有如下更细致的形式.

Fredholm 定理　设 $\mathcal{T}$ 是 Hilbert 空间 X 到自身的紧线性算子. 对任意的 $\lambda\in C$, 记 $V_\lambda=\{x\in H;\mathcal{T}x=\lambda x\}$, $W_\lambda=\{x\in H;\mathcal{T}^*x=\lambda x\}$. 则有下面结论:

(a) 使得 $V_\lambda\neq\{0\}$ 的 $\lambda\in C$ 是有限的或可数的. 在可数的情形下, 只有 0 才是 V_λ 的聚点. 另外, 对任意的 $\lambda\neq 0$, $\dim V_\lambda<\infty$;

(b) 设 $\lambda\neq 0$, $\dim V_\lambda=\dim W_{\bar\lambda}$;

(c) 设 $\lambda\neq 0$, $R(\lambda I-\mathcal{T})$ 是 H 中的闭集.

如何判断 $\mathcal{T}$ 是 Banach 空间 X 到 Banach 空间 Y 上的 Fredholm 算子? Peetre 给出了一个方法, 即

Peetre 定理　设 X, Y, Z 是 Banach 空间, $X\hookrightarrow\hookrightarrow Z$, 线性算子 $\mathcal{T}$:$X\mapsto Y$ 是具定义域 $D(\mathcal{T})$ 的闭算子. 则下面两个结论等价:

(a) $\dim N(\mathcal{T})<\infty$, $R(\mathcal{T})$ 是 Y 中的闭集;

(b) 存在一个常数 $C>0$, 使得

$$\|x\|_X \le C(\|Tx\|_Y + \|x\|_Z), \quad x \in D(T).$$

可以证明 (1.34) 中的 T 是 Fredholm 算子, (1.26) 的可解性的困难就归结为证明 T 是满射，换言之，就是证明

$$\operatorname{ind}(T) = \dim(N(T)) - \operatorname{codim}(R(T)) = 0. \tag{1.35}$$

由此就推出边值问题 (1.26) 可解，详见 Taira 书 [41].

(v) 对于边值函数 $f \in C(\partial\Omega)$ 的情形，亦可以利用调和测度的方法来研究边值问题. 例如，考虑 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = f, & f \in C(\partial\Omega). \end{cases} \tag{1.36}$$

对任意 $x \in \Omega$, 由极大值原理，映射： $f \longrightarrow u(x)$ 是 $C(\partial\Omega)$ 上的连续线性泛函. 由 Riesz 表现定理，存在唯一的正的 Borel 测度 w^x, 使得

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} f(Q) d\omega^x(Q), \tag{1.37}$$

此处称 ω^x 是在 x 处的调和测度. 作为 Harnack 原理的直接结果， ω^{x_1} 与 ω^{x_2} 是相互绝对连续的，进而可以证明 $u(x)$ 就是 (1.36) 的解，详见 Kenig 的专著 [16].

下面从奇异积分算子的发展进程，来考察它在椭圆边值问题研究中的作用和联系.

1. 第一代的 Calderón-Zygmund 奇异积分算子

粗略地讲，第一代 Calderón-Zygmund 奇异积分算子是卷积型的奇异积分算子， Hilbert 变换、 Riesz 变换等就是其典型例子. 利用 Calderón-Zygmund 算子是 (p,p) 型算子，可以方便地证明解的正则性. 例如：已知

$$\Delta u = f, \quad f(x) \in L^2(R^n), \tag{1.38}$$

证明

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(R^n), \quad 1 \le i,j \le n.$$

事实上，由 Fourier 变换，可见

$$\widehat{\Delta u} = \hat{f} \quad \Longrightarrow \quad \hat{u} = -\frac{1}{|\xi|^2}\hat{f}(\xi),$$

于是

$$\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right\|_2 = \left\|\frac{\xi_i\xi_j}{|\xi|^2}\hat{f}(\xi)\right\|_2 = \left\|R_iR_j(f)\right\|_2 \le \|f\|_2, \tag{1.39}$$

此处

$$R_j(f) = \text{P.V.} \int_{R^n} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} f(y) dy, \quad j = 1,2,\cdots,n \tag{1.40}$$

就是 Riesz 变换. 进而, 由 R_j 是 (p,p) 型算子, $1<p<\infty$, 从而有

$$\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right\|_p \leq C\|f\|_p, \quad f\in L^p, \quad 1<p<\infty. \tag{1.41}$$

下面从乘子的观点, 给出第一代 Calderón-Zygmund 算子的等价定义.

注记 1.3 习惯上, 上一节定义的经典的 C-Z 算子

$$Tf=\int_{R^n} K(x-y)f(y)dy=(K*f)(x) \tag{1.42}$$

称为第一代 Calderón-Zygmund 奇异积分算子. 用乘子的观点, T 可以写成

$$Tf=\mathcal{F}^{-1}m(\xi)*f. \tag{1.43}$$

此时, 乘子 $m(\xi)$ 应满足

(i) $m(\xi)=m(\lambda\xi)$, $\lambda>0$;

(ii) $m(\xi)\in C^\infty(R^n\backslash\{0\})$;

(iii) $\int_{\Sigma^n} m(\xi)d\sigma(\xi)=0$, Σ^n 是 R^n 中单位球面.

注记 1.4 第一代 Calderón-Zygmund 奇异积分算子所对应的核函数 $K(x)=\mathcal{F}^{-1}m(\xi)$ 满足

$$K(x,y)\triangleq K(x-y)\sim O(|x-y|^{-n}). \tag{1.44}$$

现将 Calderón-Zygmund 奇异积分算子的概念予以推广. 设卷积型算子 (1.43) 对应的核函数满足

$$K(x,y)\sim O(|x-y|^{-n+\alpha}), \tag{1.45}$$

我们引入如下概念:

(i) 当 $\alpha=0$, $K(x-y)$ 对应的算子就是第一代 Calderón-Zygmund 奇异积分算子;

(ii) 当 $0<\alpha<n$, $K(x-y)$ 对应的卷积型算子称为弱奇异积分算子;

(iii) 当 $\alpha<0$, $K(x-y)$ 对应的卷积型算子称为强奇异积分算子.

我们发现, 在 Ω 是 R^n 中有界的光滑区域时, Laplace 方程的 Dirichlet 问题、 Neumann 问题 (及其相应的外问题) 所对应的积分方程中出现的算子 (见 (1.11) 及 (1.12)) 的核函数满足

$$|K(x,y)|=|K^*(x,y)|\sim O(|x-y|^{-n+2}), \tag{1.46}$$

这说明 T_K,T_{K^*} 是弱奇异积分算子. 注意到定义在有界光滑的边界 $\partial\Omega$ 上弱奇异积分算子 T_K 或 T_{K^*} 是紧算子, 借助于 Fredholm 原理就可以建立椭圆边值问题的可解性. 由此可见, 第一代奇异积分算子在处理常系数椭圆边值问题中起着关键作用.

2. 第二代 Calderón-Zygmmund 奇异积分算子

在处理变系数的椭圆型方程的边值问题时, 无法利用第一代 Calderón-Zygmund 奇异积分算子. 其原因在于变系数的椭圆型方程的解算子不再是卷积型算子, 这就诱导出第二代的奇异积分算子.

在 R^n 中考虑变系数的椭圆算子

$$Lu=-\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}.$$

由 Fourier 变换，可将 Lu 改写成

$$\begin{aligned}
Lu &= -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right)^{\wedge}\right)^{\vee}(x) \\
&= \int_{R^n}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\hat{u}(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi \\
&= \int_{R^n}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\int_{R^n} u(y)e^{-iy\cdot\xi}dye^{ix\cdot\xi}d\xi \\
&= \int_{R^n}\int_{R^n}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j u(y)e^{i(x-y)\cdot\xi}dyd\xi \\
&= \int_{R^n}\int_{R^n}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j e^{i(x-y)\cdot\xi}d\xi u(y)dy \\
&\triangleq \int_{R^n} L(x, x-y)u(y)dy.
\end{aligned}$$

粗糙地来看，线性偏微分方程 $Lu=g$ 的可解性就归结为如下奇异积分算子的有界性及可逆性研究.

定义 1.5 算子

$$Tf = \mathrm{P.V.}\int_{R^n} L(x, x-y)f(y)dy \tag{1.47}$$

称为第二代 Calderón–Zygmund 奇异积分算子，如果

(i) $L(x,\lambda z)=\lambda^{-n}L(x,z)$, $\forall\lambda>0$;

(ii) $L(x,z)\in C^\infty(R^n\times R^n\setminus\{0\})$;

(iii) $\int_{\Sigma^n} L(x,z)d\sigma(z)=0$, $\forall x\in R^n$, 这里 Σ^n 是 R^n 中单位球面.

采用球调和函数的展开技术，可以证明:

命题 1.6 对任意 $1<p<\infty$, 由 (1.47) 确定的第二代 Calderón-Zygmund 奇异积分算子 T 是 (p,p) 型算子.

注记 1.7 (i) 从形式上来看，第二代 Calderón-Zygmund 奇异积分算子是半卷积型算子.

(ii) 第二代 Calderón-Zygmund 奇异积分算子就是拟微分算子原始模型，拟微分算子是第二代 Calderón-Zygmund 奇异积分算子及位势的推广. 一般地说，拟微分算子可表示成

$$Tf = \int_{R^n}\sigma(x,\xi)\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi,$$

这里 σ 是 T 所对应的象征或符号. 拟微分算子的分类是按照象征 σ 及其导函数的增长尺寸来进行的. 椭圆型算子的分类是：对于任意 $m\in N$, 称 $\sigma(x,\xi)\in S^m$, 如果

$$|\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha\sigma(x,\xi)|\le C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-|\alpha|}.$$

可以证明， $\sigma(x,\xi)\in S^m$ 对应的拟微分算子可以写成

$$Tf = \mathrm{P.V.}\int_{R^n} R(x, x-y)f(y)dy$$

的形式. 更一般地, $\sigma(x,\xi)\in S^m_{\rho,\delta}$ 是指:

$$|\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha\sigma(x,\xi)|\le A_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}.$$

拟微分算子是处理一般变系数的线性偏微分方程理论最有效的工具之一, 有兴趣的读者可见 Hörmander 的专著 [12].

3. **第三代 Calderón-Zygmund 奇异积分算子**

我们发现, 在研究 Laplace 方程的边值问题时, 边界的光滑度对于证明积分算子

$$T_K\varphi=\int_{\partial\Omega}K(x,y)\varphi d\sigma(y)$$

是弱奇异 Calderón-Zygmund 积分算子起着重要作用. 借助于弱奇异积分算子的紧性, 可用 Fredholm 理论来求解边值问题. 若放宽 $\partial\Omega$ 为 Lip 边界 (即 $\partial\Omega$ 局部地可表示成 Lip 函数的图像), 是否能求解椭圆边值问题? 这也是诱发人们研究第三代 Calderón-Zygmund 奇异积分算子的一个动因之一. 在表述问题之前, 先回忆几个概念:

(i) 称函数 φ: $R^{n-1}\to R$ 是 Lip 函数, 如果 $\exists M>0$ 使得

$$|\varphi(x)-\varphi(y)|\le M|x-y|,\quad \forall x,y\in R^{n-1}.\tag{1.48}$$

(ii) 称 Ω 是 Lip 区域, 如果 $\partial\Omega$ 可局部地表示成某个 Lip 函数的图像.

(iii) 设 $P\in\partial\Omega$, 称 Γ 是以 P 为顶点的非切向锥, 如果总存在另一个锥 Γ' 和某个 $\delta>0$ 使得

$$\emptyset\ne\overline{\Gamma}\cap B_\delta(P)\setminus\{P\}\subset\Gamma'\cap B_\delta(P)\subset\Omega,\tag{1.49}$$

这里 $B_\delta(P)$ 是以 P 为心, δ 为半径的球.

(iv) 非切向极大函数: $\forall\beta>1$, $P\in\partial\Omega$, 定义非切向极大函数为:

$$\mathcal{M}_\beta u(P)=\sup\{u(Q):\ \ |Q-P|<\beta\,\mathrm{dist}\,(Q,\partial\Omega),\quad Q\in\Omega\},\tag{1.50}$$

这里 u 是定义在 Lip 区域 Ω 上的函数.

与通常记号相同, 仍用

$$\mathcal{M}g(P)=\sup_{r>0}\frac{1}{\mu(\partial\Omega\cap B_r(P))}\int_{\partial\Omega\cap B_r(P)}|g(Q)|d\sigma(Q),\quad P\in\partial\Omega\tag{1.51}$$

表示 Hardy-Littlewood 极大函数, 这里 $\mu(A)$ 表示集合 A 的测度. 类似地, $\forall P\in\partial\Omega$, 定义

$$\mathcal{M}^*g(P)=\sup_{\substack{P\in B_r(Q)\\ r>0}}\frac{1}{\mu(\partial\Omega\cap B_r(Q))}\int_{\partial\Omega\cap B_r(Q)}|g(Q')|d\sigma(Q').\tag{1.52}$$

容易看出, $\mathcal{M}$ 与 $\mathcal{M}^*$ 等价, 即

$$\mathcal{M}g\le\mathcal{M}^*g\le C\mathcal{M}g.\tag{1.53}$$

由 Hardy-Littlewood 极大函数理论, $\mathcal{M},\mathcal{M}^*$ 均为 $L^p(\partial\Omega)$ 上的有界算子 $(1<p<\infty)$.

现在我们来考虑 Lip 区域 Ω 上的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}\Delta u=0, & x\in\Omega\subset R^n,\\ u\big|_{\partial\Omega}=f, & \partial\Omega\,\text{具有界的 Lip 边界}\end{cases} \tag{1.54}$$

与 Neumann 问题

$$\begin{cases}\Delta u=0, & x\in\Omega,\\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}=f, & \partial\Omega\,\text{具有界的 Lip 边界}.\end{cases} \tag{1.55}$$

设 $f\in L^2(\partial\Omega)$, 来说明 Dirichlet 问题及 Neumann 问题适定性的内涵.

Dirichlet 问题 存在唯一的 $u(x)$ 在 Ω 内调和，对几乎处处 $P\in\partial\Omega$, $u(Q)$ 非切向几乎收敛于 $f(P)$ 且满足 $M_\beta u\in L^2(\partial\Omega)$.

Neumann 问题 存在唯一的 $u(x)$, 它在 Ω 内调和，在边界上满足 $\mathcal{M}_\beta(\nabla u)\in L^2(\partial\Omega)$, 并且

$$n_P\cdot\nabla u(Q)\to f(P),\quad Q\,\text{以非切向收敛于}\,P.$$

例如，考虑上半空间的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}\Delta u=0, & (x,t)\in R^{n-1}\times R^+,\\ u|_{t=0}=f, & f\in L^p(R^{n-1}),\quad 1<p<\infty.\end{cases} \tag{1.56}$$

那么， $u=P_t(x)*f$ 就是 (1.56) 的唯一解，并且

$$\sup_{t>0}\|u(x,t)\|_p\le\|f\|_p, \tag{1.57}$$

$$\lim_{t\to0}u(x,t)\overset{\text{a.e.}}{=\!=}f. \tag{1.58}$$

这与前面所讲的 Dirichlet 问题的适定性含义完全吻合.

与光滑区域的边值问题类似，考虑双层位势和单位位势

$$\mathcal{D}g=\frac{1}{\omega_n}\int_{\partial\Omega}\frac{\langle P-Q,n_Q\rangle}{|P-Q|^n}g(Q)d\sigma(Q),\quad P\in\Omega, \tag{1.59}$$

$$Sg=\frac{-1}{\omega_n(n-2)}\int_{\partial\Omega}\frac{g(Q)}{|P-Q|^{n-2}}d\sigma(Q). \tag{1.60}$$

注意到 $\partial\Omega$ 的具体表达式，可将 $P=(z,y)$, $Q=(x,\varphi(x))$ 代入 (1.59), (1.60), 就得

$$\mathcal{D}g(z,y)=\frac{1}{\omega_n}\int_{R^{n-1}}\frac{y-\varphi(x)-(z-x)\cdot\nabla\varphi(x)}{[|x-z|^2+|\varphi(x)-y|^2]^{\frac{n}{2}}}g(x)dx, \tag{1.61}$$

$$Sg(z,y)=\frac{-1}{\omega_n(n-2)}\int_{R^{n-1}}\frac{\sqrt{1+|\nabla\varphi(x)|^2}}{[|x-z|^2+|\varphi(x)-y|^2]^{\frac{n-2}{2}}}g(x)dx, \tag{1.62}$$

这里用到

$$n_Q=\frac{(\nabla\varphi(x),-1)}{\sqrt{|\nabla\varphi(x)|^2+1}} \tag{1.63}$$

及 $\nabla\varphi$ 几乎处处存在. 可直接验证， (1.61), (1.62) 所确定的函数在 Ω 上调和且满足如下结论:

命题 1.8 设 $1 < p < \infty$, 则有

(i) $\mathcal{M}_\beta(\nabla Sg)$, $\mathcal{M}_\beta(\mathcal{D}g) \in L^p(\partial\Omega)$ 且

$$\|\mathcal{M}_\beta(\nabla Sg)\|_{L^p(\partial\Omega)}, \|\mathcal{M}_\beta(\mathcal{D}g)\|_{L^p(\partial\Omega)} \le C\|g\|_{L^p(\partial\Omega)}. \tag{1.64}$$

(ii)

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\omega_n}\int_{|x-z|>\varepsilon}\frac{\varphi(z)-\varphi(x)-(z-x)\cdot\nabla\varphi(x)}{[|x-z|^2+|\varphi(x)-\varphi(z)|^2]^{n/2}}g(x)\,dx \overset{\text{a.e.}}{=} Tg, \tag{1.65}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\omega_n}\int_{|x-z|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)-\varphi(z)-(x-z)\cdot\nabla\varphi(x)}{[|x-z|^2+|\varphi(x)-\varphi(z)|^2]^{n/2}}g(x)\,dx \overset{\text{a.e.}}{=\!=} T^*g, \tag{1.66}$$

$$\|Tg\|_{L^p(\Omega)}, \quad \|T^*g\|_{L^p(\Omega)} \le C\|g\|_{L^p(\partial\Omega)}. \tag{1.67}$$

(iii)

$$(\mathcal{D}g)^{\pm}(Q) = \pm\frac{1}{2}g(Q) + Tg(Q), \tag{1.68}$$

$$(n_Q\cdot\nabla Sg)^{\pm}(Q) = \mp\frac{1}{2}g(Q) + T^*g(Q), \tag{1.69}$$

这里"+"表示从 Ω 内取非切向极限, "-"表示从 Ω 的外部取非切向极限, T^* 是 T 的共轭算子. 因此 (1.54) 及 (1.55) 的求解归结为求解面上的积分方程

$$\frac{1}{2}g(Q) + Tg(Q) = f, \tag{1.71}$$

$$-\frac{1}{2}g(Q) + T^*g(Q) = f. \tag{1.72}$$

由于 T 及 T^* 是非紧算子, 故无法利用 Fredholm 理论来处理 (1.71) 和 (1.72). 然而, T 及 T^* 属于第三代 Calderón-Zygmund 奇异积分算子. Coifman, McIntosh 及 Meyer[5] 证明了形如

$$T_j\varphi = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x-y|>\varepsilon}K_j(x,y)\varphi(y)dy \tag{1.73}$$

的算子是 $L^p \to L^p$ 上的有界算子 $(1 < p < \infty)$, 这里

$$K_j(x,y) = \frac{\big((x,\varphi(x))-(y,\varphi(y))\big)_j}{|(x,\varphi(x))-(y,\varphi(y))|^n}. \tag{1.74}$$

由此亦就推得 T 及 T^* 是 (p,p) 型算子. 进而, 利用 Rellich 等式

$$\int_{\partial\Omega}\langle n_Q, e_n\rangle|\nabla u|^2 d\sigma = 2\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma, \quad e_n=(0,1),$$
$$u\in \mathrm{Lip}\,(\overline{\Omega}), \quad \Delta u = 0 \quad x\in\Omega. \tag{1.75}$$

可以证明

$$\int_{\partial\Omega}|\nabla_t u|^2 d\sigma \approx \int_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|^2 d\sigma, \tag{1.76}$$

这里

$$|\nabla_t u|^2 = \sum_{j=1}^{n-1} \big|\langle \nabla u, T_j(x)\rangle\big|^2,$$

$(T_1(x), \cdots, T_{n-1}(x))$ 是 $\partial\Omega$ 在 $(x, \varphi(x))$ 处切平面的正交基底. 进而, 利用连续性方法可以证明算子 $\pm\frac{1}{2}I + T$ 及 $\pm\frac{1}{2}I + T^*$ 在 $L^2(\partial\Omega)$ 是可逆的. 从而建立了 (1.70), (1.71) 的可解性, 即 Dirichlet 及 Neumann 问题的适定性结果.

注记 1.9 关于 Lip 区域 Ω 上边值问题的研究. 1977 年 Dahlberg 利用调和测度方法, 首先解决了 Dirichlet 问题在 $L^p(\Omega)$ 上的可解性, 其中 $2-\varepsilon(\Omega) < p < \infty$. Dahlberg 的方法依赖于积分的正性、Harnack 不等式及极大值原理. 故无法用此方法求解 Neumann 问题、高阶椭圆型方程的边值问题及椭圆方程组相关边值问题. Fabes, Jodeit 及 Riviere[8], 利用 Calderón 在 [3] 中建立的 Cauchy 型积分在 C^1 曲线上的 L^p $(1 < p < \infty)$ 有界性, 解决了 C^1 区域上的椭圆边值问题. 1981 年, Coifman, McIntosh 及 Meyer[5] 推广了 Calderón 的结果, 建立 Cauchy 积分在 Lip 曲线上的 L^p 有界性, 为解决 Lip 区域 Ω 上一般椭圆边值问题打开了大门. Verchota[46] 发现 Rellich 恒等式及其相应结果可以取代边界算子的紧性, 从而建立了 Lip 区域上一般椭圆边值问题的可解性, 也可见 Dahlberg 及 Kenig 的工作 [7].

Laplace 方程在 Lip 区域 Ω 上边值问题, 有如下一般结果:

定理 1.10 对任意的 Lip 区域 Ω, 总存在 $\varepsilon = \varepsilon(\Omega) > 0$, 对任意的

$$2 - \varepsilon(\Omega) < p < \infty \tag{1.77}$$

及 $f \in L^p(\partial\Omega)$, 存在 u 满足

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x \in \Omega, \\ u\big|_{\partial\Omega} = f, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

这里边界取值是在非切向极限意义所取, 进而 $\mathcal{M}_\beta u \in L^p(\partial\Omega)$ 且

$$\|\mathcal{M}_\beta u\|_p \le C\|f\|_p, \quad C = C(\beta, \Omega), \quad \beta > 1. \tag{1.78}$$

定理 1.11 设 Ω 是任意的 Lip 区域, 总存在 $\varepsilon(\Omega) > 0$ 使得对所有

$$1 < p < 2 + \varepsilon(\Omega) \tag{1.79}$$

及 $f \in L^p(\partial\Omega)$, 存在 $u(x)$ 满足

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = f, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

这里边界条件意指: 当 P 非切向趋向于 Q 时, 有

$$n_Q \cdot \nabla u(P) \xrightarrow{\text{a.e.}} f(Q). \tag{1.80}$$

进而, $\mathcal{M}_\beta(\nabla u) \in L^p(\partial\Omega)$ 且

$$\|\mathcal{M}_\beta(\nabla u)\|_p \le C\|f\|_p, \quad C = C(\beta, \Omega), \quad \beta > 1.$$

注记 1.12 (i) 定理 1.11 的结果是最优的. 事实上, 即使对于光滑区域 Ω,

$$\begin{cases} \|\mathcal{M}_\beta(\nabla u)\|_1 \le C\|f\|_1, \\ \|\mathcal{M}_\beta(\nabla u)\|_p \le C\|f\|_p, \quad \forall p > 2 \end{cases} \tag{1.81}$$

都可能失败. 同理, 对于 Dirichlet 问题, 亦有类似的结果.

(ii) 用上面方法, 可以处理驻定 Navier-Stokes 方程的边值问题

$$\begin{cases} \Delta u = \nabla P, & x \in \Omega, \\ \operatorname{div} u = 0, & x \in \Omega, \\ u\big|_{\partial\Omega} = f, & \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.82}$$

其中 $u = (u_1, \cdots, u_n)$, P 是纯量函数, 具体可见 [16].

下面给出第三代 Calderón-Zygmund 奇异积分算子的形式定义, 本质上就是 Lip 曲线上的 Cauchy 积分算子, 它是非卷积型算子 [6, 22, 37].

定义 1.13 T: $\mathcal{D}(R^n) \mapsto \mathcal{D}'(R^n)$ 称为第三代 Calderón-Zygmund 奇异积分算子, 如果:

(i) $Tf(x) = \int_{R^n} K(x,y)f(y)dy$, $f(x) \in \mathcal{D}(R^n)$, $x \notin \operatorname{supp} f$;

(ii) $K(x,y)$ 是满足如下条件的分布核: 存在 $\varepsilon > 0$, 满足

(a) $|K(x,y)| \le C|x-y|^{-n}$, $x \ne y$;

(b) $|K(x,y) - K(x,y')| \le |y-y'|^{\varepsilon}|x-y|^{-n-\varepsilon}$, $|y-y'| \le \frac{1}{2}|x-y|$;

(c) $|K(x,y) - K(x',y)| \le |x-x'|^{\varepsilon}|x-y|^{-n-\varepsilon}$, $|x-x'| \le \frac{1}{2}|x-y|$.

定理 1.14[12, 22, 37] 设 T 是第三代 Calderón-Zygmund 奇异积分算子, 且是 $L^2(R^n)$ 上的有界线性算子. 则

(i) 对于任意的 $1 < p < \infty$, T 是 (p,p) 型算子, 即 $\|T(f)\|_p \le C\|f\|_p$.

(ii) T 是弱 $(1,1)$ 型算子, 即

$$m\{x \in R^n: \quad |T(f)(x)| > \lambda\} \le \frac{\|f\|_1}{\lambda}.$$

定义 1.15[22] 称算子 $Tf(x) = \int_{R^n} K(x,y)f(y)dy$ 是弱有界算子 (WBP), 如果对于 $C_c^{\ell(n)}(R^n)$ 的任意有界集 S, 存在 $C = C(S)$ 使得

$$\left|\int_{R^n} T\varphi^{x,\varepsilon}(z)\psi^{x,\varepsilon}(z)dz\right| < C\varepsilon^n, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad x \in R^n, \quad \varphi(x), \psi(x) \in S,$$

这里 $\ell(n)$ 是一个充分大的整数, $\varphi^{x,\varepsilon}(y) = \varphi\big(\frac{y-x}{\varepsilon}\big)$.

我们知道, 消失性条件在证明第一代 Calderón-Zygmund 奇异积分算子是 $(2,2)$ 型算子是至关重要的, 对于第三代 Calderón-Zygmund 奇异积分算子而言, 相应的替代条件是什么? 这就是著名的 $T(1)$ 定理, 它回答了上面的问题.

定理 1.16(David-Journé 的 $T1$ 定理 [12, 22, 37]) 设 $K(x,y)$ 是第三代 Calderón-Zygmund 奇异积分算子

$$Tf(x) = \int_{R^n} K(x,y)f(y)dy$$

对应的核函数. 则第三代 Calderón-Zygmund 奇异积分算子是 $(2,2)$ 型算子充要条件是:

(i) $T1 \in \mathrm{BMO}(R^n)$, $T^*1 \in \mathrm{BMO}(R^n)$;

(ii) T 是 WBP 型算子.

2 非线性发展方程的 Fourier 限制性方法

本节我们从宏观的层面给予非线性发展方程的研究提供一个考察，说明调和分析方法在近代发展型方程研究中的作用. 众所周知，非线性发展方程的定解问题 (Cauchy 问题、初边值问题等) 均可归结为如下抽象 Cauchy 问题

$$\begin{cases} u_t + Au = F(u), & x \in R^n,\ t \in R^+(\text{或 } R), \\ u(0) = \varphi(x). \end{cases} \tag{2.1}$$

它的研究主要涉及如下研究领域：

(A) 适定性问题.

(B) 解的性态 (含有限时刻 Blow-up 、解的分歧、解的奇性传播、解的奇性结构).

(C) 解的散射性理论 (主要针对波方程、色散波方程) 与解的渐近行为 (主要针对耗散型方程如抛物型方程).

适定性具体内涵是：给定初始函数 $\varphi \in X$, 问题 (2.1) 是否确定一个唯一的连续流 $u(t) \in C((-T,T);X)$ 或 $u(t) \in C((0,T);X)$. 特别，当 $T=\infty$ 时，$u(t) \in C(R;X)$ 或 $u(t) \in C(R^+;X)$ 就变成了整体流，即问题 (2.1) 的整体适定性. 这里要求 Banach 空间 X 确保算子 A 在 X 生成一个 C_0 半群 (或 C_0 群). 换言之，与 (2.1) 相应的自由系统

$$\begin{cases} v_t + Av = 0, & x \in R^n,\ t \in R^+\ (\text{或} R), \\ v(0) = \varphi(x) \end{cases} \tag{2.2}$$

有唯一解 $v(t) = e^{-At}\varphi$, 这里 e^{-At} 就是 A 生成的 C_0- 算子半群.

如果 (2.1) 不能决定唯一的整体流，解在什么时刻发生 Blow-up? 解在什么时刻发生分歧现象？解的奇性是如何传播的？解的奇性结构如何？是否可以给出这一奇性的特征刻画？如果 (2.1) 决定了一个连续的整体流，当 $t \to \infty$ 或 $t \to \pm\infty$ 时，$u(t)$ 的渐近状态如何？这就是 (B) 要研究的问题. 特别，对于波动方程及色散波方程，当解整体适定时，派生出著名的散射性理论. 散射性理论主要涉及波算子的存在性及渐近完备性.

调和分析处理解的层次介于光滑解与弱解之间的解，换言之，就是在合适的函数空间中求解如下的积分方程 (习惯上，称通过 Picard 方法求解积分方程 (2.3) 所得的解是温和解称 (mild-solution)):

$$u(t) = e^{-At}\phi + \int_0^t e^{-A(t-\tau)} f(u(\tau))d\tau. \tag{2.3}$$

注记 2.1 (i) 广义解是在较大的空间中求解，容易获得，但是未必是唯一的. 因此亦未必就是我们所寻求的物理解. 我们认为，只有可以正则化的弱解才有可能是唯一的，也才可能是真正的物理解.

(ii) 光滑解是在较小的空间中求解，在证明存在性时难度最大，但是一旦获得，它就是满足物理意义的唯一解.

(iii) mild 解是介于光滑解与广义解之间的解，具有可正则化的特点，可以理解 mild 解是与守恒量中出现的正则性相同的解 (描述物质运动、相互作用的 PDEs 都是服从一定的守恒律的),

即能量层次的解. 进而, 可以在比能量空间更弱的空间中研究积分方程 (2.3), 这就是低正则性问题, 这是当前调和分析与偏微分方程研究领域的热门研究方向.

一般来讲, (2.1) 适定性的研究是通过研究如下积分方程 (2.3) 来实现的. 为清楚起见, 先引入一些概念:

定义 2.1[25](局部适定性) 称 (2.1) 或 (2.3) 在函数空间 X 中局部适定, 如果满足如下条件:

(i) 给定 $\varphi \in X$, 存在 $T = T(\|\varphi\|_X)$(当 X 是临界空间时, $T = T(\varphi)$) 和 (2.1) 或 (2.3) 的唯一解

$$u(t) \in \mathcal{X}(I) \equiv C(I; X) \cap \cdots \tag{2.4}$$

这里 $\cdots$ 表示一些合适的时空 Banach 空间, 而 $T(\delta)$ 满足

$$\lim_{\delta \to 0} T(\delta) = \infty. \tag{2.5}$$

(ii) 存在 $r = r(\|\varphi\|_X)$ 及 $M(\|\varphi\|_X) > 0$, 对任意 $\tilde{\varphi} \in X$ 满足

$$\|\tilde{\varphi} - \varphi\|_X < r(\|\varphi\|_X), \tag{2.6}$$

则

$$\|\tilde{u}(t) - u(t)\|_{\mathcal{X}(I)} \le M(\|\varphi\|_X)\|\tilde{\varphi} - \varphi\|_X, \tag{2.7}$$

这里 $\tilde{u}(t)$,$u(t)$ 分别是以 $\tilde{\varphi}, \varphi$ 为初值函数时所对应的解, $I = [0, T)$ 是两者的公共存在区间. 换言之, 解算子 $\tilde{\varphi} \longmapsto \tilde{u}(t)$ 决定了 $\{\tilde{\varphi}(x) : \|\tilde{\varphi} - \varphi\|_X < r\}$ 到 $\mathcal{X}(I)$ 的局部 Lip 映射.

(iii) 如果 $\varphi \in Y \hookrightarrow X$, 则相应的解 $u(t)$ 满足

$$u(t) \in \mathcal{Y}(I) \equiv C(I; Y) \cap \cdots\cdots \tag{2.8}$$

注记 2.2 (a) 通过 Picard 方法研究积分方程 (2.3) 而获得的解通常称为 mild 解, (i) 意味着 mild 解的存在唯一性. (ii), (iii) 本质上意味着 mild 解就是强解, 它可以通过经典解在 $\mathcal{X}(I)$ 模意义下的极限而得到. 当初始函数足够光滑时, 相应的解就是经典解.

(b) 如果直接在 $C(I; X)$ 中求解 (2.1)(具体地说, 直接用在 $C(I; X)$ 范数诱导的度量意义下构造不动点) 是困难的. 利用紧致法或其它方法得到的解 $u(t) \in L^\infty(I; X)$, 未必唯一, 也不能直接得到解的连续依赖性. 事实上, 求解积分方程 (2.3), 一般来讲是在 $C(I; X)$ 的子空间中进行, 即 $C(I; X)$ 与某些时空 Banach 空间的交中进行. 换句话说, 就是要充分考虑到解的时空可积性.

(c) 当 X 是临界空间时, 总存在 $\eta > 0$, 当 $\|\varphi\|_X < \eta$ 时, 可以获得解的整体适定性, 即

$$u(t) \in C(R; X) \cap \cdots \text{ 或 } \quad u(t) \in C(R^+; X) \cap \cdots. \tag{2.9}$$

散射性理论 对于整体适定的非线性波方程 (或色散波方程), 解的长时间形态如何? 是否成立所谓的散射性理论. 下面以非线性 Schrödinger 方程

$$\begin{cases} iu_t + \dfrac{1}{2}\Delta u = \lambda |u|^{p-1}u, \\ u(0) = \varphi(x) \end{cases} \tag{2.10}$$

为例，给出散射性理论的概念．对其它色散波方程、经典的波动方程、 Klein-Gordon 方程，散射性理论的概念是完全类似的．

问题的动因 设 (2.10) 存在整体解

$$u(t,x)\in C(R;H^1(R^n))\cap X^1_{loc}(R), \tag{2.11}$$

这里

$$X^1_{loc}(R)=L^q_{loc}(R;W^{1,r}(R^n)),\quad (q,r)\in\Lambda. \tag{2.12}$$

当 $t\to\pm\infty$ 时，$u(t)$ 具有什么样的渐近行为？是否在某种意义下趋向于相应的自由 Schrödinger 方程的解 $u_0(t)=S(t)\varphi$, 即

$$\lim_{t\to\pm\infty}\|u(t)-S(t)\varphi\|_{H^1}=0. \tag{2.13}$$

一般来讲，回答是否定的．事实上，当 $1<p\le 1+\frac{2}{n}$, 存在 $\varphi(x)\in S(R^n)$, 无论 $\|\varphi\|_{H^1}$ 多么小，总有

$$\lim_{t\to\pm\infty}\|u(t)-S(t)\varphi\|_{H^1}\neq 0, \tag{2.14}$$

这里 $u(t)$ 是 (2.10) 的整体解，参见 [11]. 基于上述原因，我们有必要寻找合适的条件，在此条件下寻求整体解 $u(t)$ 在 $t\to\pm\infty$ 时的渐近态．

一般来讲，与 (2.10) 等价的积分方程是

$$u(t)=S(t)\varphi-i\int_0^t S(t-\tau)f(u(\tau))d\tau,\quad f(u)=\lambda|u|^{p-1}u. \tag{2.15}$$

虽然在 $t\to\pm\infty$ 时与 $S(t)\varphi$ 不接近，但是 $u(t)$ 很可能与

$$v_\pm(t)=S(t)\varphi_\pm(x) \tag{2.16}$$

在 $t\to\pm\infty$ 时充分接近，这里 $v_\pm(t)$ 是

$$iv_t+\frac{1}{2}\Delta v=0,\quad v(0)=\varphi_\pm(x) \tag{2.17}$$

的解．

散射性理论主要涉及以下两个方面的内容 [25, 32]:

(a) 波算子 $\Omega_\pm$: 设 $v_\pm(t)=S(t)\varphi_\pm(x),\varphi_\pm(x)\in Y$(或 Y 的稠子集). 若总存在非线性 Schrödinger 方程 (2.10) 的解 $u(t)$, 使得

$$\|u(t)-v_\pm(t);Y\|=\|u(t)-S(t)\varphi_\pm(x);Y\|\to 0,\quad t\to\pm\infty, \tag{2.18}$$

或

$$\|S(-t)u(t)-\varphi_\pm(x);Y\|\to 0, \tag*{(2.18)$'$}$$

这里 $Y\subset L^2(R^n)$ 是一个合适的 Banach 空间．当 $S(t)$ 不在 Y 上生成有界的算子群时，常用 (2.18)$'$ 来代替 (2.18) 式，就诱导出波算子的定义：

$$\Omega_\pm:\varphi_\pm(x)\longmapsto u(0)\overset{\Delta}{=\!=}\varphi(x), \tag{2.19}$$

它是 Y (或 Y 的子空间) 到 Y 的映射，特别称 Ω_+ 是正向波算子， Ω_- 是负向波算子. 通常称 $\varphi_\pm(x)$ 是 $u(t)$ 在 $t=\pm\infty$ 处的渐近态.

(b) 渐近完备性: 设 $u(t)$ 是 (2.10) 的整体解, 问是否存在渐近态 $\varphi_\pm(x)$, 使得 (2.18) 或 (2.18)$'$ 成立？对 $\forall\varphi(x)\in Y$ (或 Y 的子空间), 总存在固定 $\varphi_\pm(x)\in Y$, 使得 (2.18) 或 (2.18)$'$ 成立，就称 (2.10) 是渐近完备的.

若 (a), (b) 都成立，则映射 $\Omega_\pm$ 满足

$$\Omega_+(\varphi_+)=\Omega_-(\varphi_-)=\varphi(x). \tag{2.20}$$

根据非线性 Schrödinger 方程的 Cauchy 问题的整体适定性理论，若 $\varphi\in Y$(例如 $Y=L^2$, H^1 或其子空间), 问题 (2.10) 决定唯一整体解，这样就诱导出散射算子

$$S=\Omega_+^{-1}\circ\Omega_-:\quad Y\longmapsto Y. \tag{2.21}$$

在散射性理论中，研究散射算子 S 的连续性、解析性及它是否是一个同胚映射等也是散射性理论中富有挑战性的课题.

用具体的数学语言来讲，波算子的存在性等价于求解如下终值问题

$$u(t)=S(t)\varphi_\pm(x)+i\int_t^{\pm\infty}S(t-\tau)f(u(\tau))d\tau \tag{2.22}$$

的适定性. 另一方面，由于 (2.15), 可改写成

$$\begin{aligned}u(t)=S(t)&\left[\varphi(x)-i\int_0^{\pm\infty}S(-\tau)f(u(\tau))d\tau\right]\\&+i\int_t^{\pm\infty}S(t-\tau)f(u(\tau))d\tau,\end{aligned} \tag{2.23}$$

渐近完备性就等价于证明 (2.10) 的整体解 $u(t)$ 满足:

$$\begin{cases}\varphi(x)-i\displaystyle\int_0^{\pm\infty}S(-\tau)f(u(\tau))d\tau\in Y,\\ \left\|\displaystyle\int_t^{\pm\infty}S(t-\tau)f(u(\tau))d\tau\right\|_Y\to 0,\quad t\to\pm\infty.\end{cases} \tag{2.24}$$

由此看出散射算子 S 的复合过程如下:

$$\begin{aligned}S:\quad \varphi_-(x)&\xrightarrow{\Omega_-}\Omega_-(\varphi_-)=\varphi_-(x)+i\int_0^{-\infty}S(-\tau)f(u(\tau))d\tau\\&\xrightarrow{\Omega_+^{-1}}\varphi(x)-i\int_0^{+\infty}S(-\tau)f(u(\tau))d\tau=\varphi_+(x).\end{aligned} \tag{2.25}$$

注记 2.2 (i) 在小解的散射理论中，波算子的存在性就意味着渐近完备性. 然而，在通常情形下，渐近完备性是一个较波算子存在问题更为困难的问题，它要求非线项 $f(u)$ 具有相斥性及非线性波或色数发展方程解的整体时空估计. 而波算子的存在性具有较统一的处理方法.

(ii) 一般来说，对于低增长的非线性函数 $f(u)$, 建立散射性理论是很困难的，这反映了如下事实:

非线性函数 $f(u)$ 高 — 建立整体适定性理论困难. 但是，一旦整体适定性成立，散射性理论的建立就简单一些.

非线性函数 $f(u)$ 低 — 建立整体适定性理论容易. 但是，散射性理论要么不成立，要么建立散射性理论非常困难.

研究问题 (2.1) 或 (2.3) 的适定性及散射性 (渐近行为), 需要做些什么？调和分析方法与经典的研究方法在其中的作用如何？

关键问题 (1): 选择合适的工作空间 X, 确保自由系统是整体适定的.

关键问题 (2): 寻求合适的时空 Banach 空间，以适应非线性问题在

$$C(I;X)\cap L^q(I;L^r(R^n))$$

中求解，这本质上也就开发了线性方程的解所满足的时空可积性即 Strichartz 估计.

关键问题 (3): 建立散射性就归结为建立解的整体时空估计，即

$$\|u(t);L^q(R;L^r(R^n))\|<\infty,\quad (q,r)\in\Lambda. \tag{2.26}$$

问题 1 的考察. 对 $\forall\phi\in X$, 确保自由 Cauchy 问题

$$v_t+Av=0,\quad v(0)=\varphi(x) \tag{2.27}$$

在 X 中适定 (在 X 中生成一个整体连续强流), 即

$$v(t)=e^{-At}\phi\in C(R,X)\quad 或\quad C([0,\infty],X)$$

$\Longleftrightarrow -A$ 在 X 中生成 C_0 群 $\Longleftrightarrow \mathcal{F}^{-1}e^{-At}=e^{-A(i\xi)t}$ 是 X 上的乘子.

例如，考虑自由热传导方程的 Cauchy 问题

$$v_t-\Delta v=0,\quad v(0)=\phi(x), \tag{2.28}$$

其解

$$v(t)=e^{t\Delta}\phi=\mathcal{F}^{-1}(e^{-t|\xi|^2}\hat{\phi})=G(x,t)*\phi,\quad G(x,t)=(4\pi t)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}. \tag{2.29}$$

易见有如下的基本结果:

(a) $e^{t\Delta}$ 在 $L^r(1<r<\infty)$ 中生成一个 C_0 半群 (且是解析半群), 即：不仅是代数意义下的“半群”，即

$$e^{t\Delta}\cdot e^{s\Delta}=e^{(t+s)\Delta},\quad e^{0\Delta}=I, \tag{2.30}$$

更重要的是满足

$$\lim_{t\to\infty}\|e^{t\Delta}\phi-\phi\|_{L^r(R^n)}=0.$$

此恰好对应着 (2.28) 的连续依赖性，这是 (2.28) 适定性所不能缺少的.

(b) 从乘子的角度来讲，有

$$\|e^{-|\xi|^2t}\|_{\mathcal{M}_p^p}=\|e^{-|\xi|^2}\|_{\mathcal{M}_p^p}=\sup_{\substack{\|\phi\|_p=1\\ \phi\in L^p(R^n)}}\|\mathcal{F}^{-1}e^{-|\xi|^2}\mathcal{F}\phi\|_p<\infty. \tag{2.31}$$

(c) 解算子是平移不变算子 (在任意的平移不变空间, 如 $L^r, 1 \leqslant r < \infty$). 故可以对 $\forall \phi \in X$, 在形如

$$\mathcal{X}(I) = C(I; X) \cap \cdots$$

中求解非线性热传导方程的 Cauchy 问题, 所容许的非线性增长则是依赖于函数空间 X 的度.

例 2 自由 Schrödinger 方程的 Cauchy 问题

$$iv_t + \Delta v = 0, \quad v(0) = 0 \tag{2.32}$$

的解

$$\begin{aligned} S(t)\varphi =& e^{it\Delta}\phi = \mathcal{F}^{-1}e^{-it|\xi|^2}\mathcal{F}\phi = \frac{1}{(4\pi it)^{\frac{n}{2}}}\int_{R^n} e^{i\frac{|x-y|^2}{4t}}\phi(y)dy \\ =& M(t)D(t)\mathcal{F}M(t)\phi. \end{aligned} \tag{2.33}$$

这里

$$M(t) = \exp\left(i\frac{|x|^2}{4t}\right), \quad (\text{波阵面})$$

$$D(t) = (it)^{-\frac{n}{2}}\phi\left(\frac{x}{t}\right). \quad (\text{复的半伸缩算子})$$

容易验证 [12,13,25]:

$$\|e^{-t|\xi|^2 i}\|_{\mathcal{M}_p^p} \sim \|e^{-|\xi|^2 i}\|_{\mathcal{M}_p^p} < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad p \equiv 2, \tag{2.34}$$

这也是对 Schrödinger 方程或其它波 (色散波) 方程而言, 总是在 $X = L^2$ 或 H^s 为基本工作空间的原因.

当 $p \neq 2$ 时, 自由 Schrödinger 方程 (2.32) 在 L^p 中是不适定的, 虽然从代数运算上: 诸如

$$e^{it\Delta} \cdot e^{is\Delta} = e^{is\Delta} \cdot e^{it\Delta} = e^{i(t+s)\Delta}$$

来讲生成一个代数意义下的群, 然而

$$\lim_{t \to 0} \|e^{it\Delta}\phi - \phi\|_p \neq 0, \quad p \neq 2.$$

因此, 连续依赖性结果失败.

下面来考察如何在 $C(I, X)$ 中研究非线性方程所对应的 Cauchy 问题 (2.1) 或 (2.3) 的适定性.

一般来讲, 直接在 $C(I, X)$ 中用不动点原理来处理 (2.1) 所确定的映射是困难的 (就非线性色散波方程, 要求 X 是 Banach 代数). 因此, 当 X 是低正则空间时尤为如此. 但是, 可在 $C(I, X)$ 的子空间 (不增加可微性的要求)

$$\mathcal{X}(I) = C(I, X) \cap L^q(I, L^r(R^n)) \tag{2.35}$$

中进行, 这就要求:

(A) 形如

$$\|e^{-tA}\phi\|_{L^q(I, L^r(R^n))} \leqslant C\|\phi\|_X \tag{2.36}$$

的 Strichartz 估计及相应的非齐次部分的 Strichartz 估计.

(B) 设非线性项 $F(u)$ 满足

$$F(\lambda^{\theta}u(\lambda x,\lambda^2 t))=\lambda^{m+\theta}F(u(\lambda x,\lambda^2 t)), \tag{2.37}$$

其中 m 是算子 A 的最高阶导数的阶数，则 X 所能容许的最高非线性增长满足

$$\deg(X)\geqslant -\theta(p),$$

由此可确定 p 的范围.

(A) 的回答与理解：先来讲 Strichartz 估计与 Fourier 限制型估计 (本质上可归结为振荡积分估计).

我们知道，由 Riemann-Lebesgue 定理知： $\mathcal{F}$: $L^1(R^n)\longmapsto C_0(R^n)$, 这里

$$C_0(R^n)=\{f(x)\in C(R^n)\quad 且\quad \lim_{|x|\to\infty}f(x)=0\}.$$

另一方面， $\mathcal{F}$ 是 $L^2(R^n)\longrightarrow L^2(R^n)$ 的等距变换 (它可以通过 $\mathcal{S}(R^n)$ 上的 Fourier 变换及延拓定理而获得). 对于一般的 L^p, $1<p<2$, 可以定义其 Fourier 变换

$$\mathcal{F}f=\mathcal{F}f_1+\mathcal{F}f_2,\quad f=f_1+f_2,\quad f_1\in L^1,\quad f_2\in L^2.$$

易见，上述定义不依赖于分解的方式.

对于 $p>2$, 无法定义 L^p 上函数的 Fourier 变换 (在通常可积函数意义下). 然而，在广义函数的意义下是可行的，其方式是：用对偶方式可以证明 $\mathcal{F}$ 是 $S'(R^n)\longrightarrow S'(R^n)$ 的同胚映射. 注意到 $L^p(R^n)\subset S'(R^n)$ $(p>2)$, 对 $f\in L^p$, $\mathcal{F}f\in S'(R^n)$ 作为一个广义函数总是有定义的.

限制性估计 对 $\forall f\in L^1(R^n)$, $\quad\mathcal{F}f=\hat{f}(\xi)\in C_0(R^n)$,

$$\forall f\in L^2(R^n),\quad \mathcal{F}f=\hat{f}(\xi)\in L^2(R^n).$$

明显地，对于任意的光滑超曲面 $\Sigma\subset R^n$ 及 $f\in L^1(R^n)$, $\hat{f}(\xi)|_\Sigma\in C(\Sigma)$ 逐点有定义. 然而，对于 $f(x)\in L^2(R^n)$, 我们知道 $\hat{f}(\xi)\in L^2(R^n)$, 它在光滑超曲面 Σ 无法逐点定义. 退一步讲，它在光滑超曲面 Σ 是否有

$$\hat{f}(\xi)|_\Sigma\in L^2(\Sigma)? \tag{2.38}$$

如果 (2.38) 不成立，能否找到一个 p_0 和满足一定条件的光滑超曲面 Σ, 使得当 $1<p\leqslant p_0<2$ 时，

$$\hat{f}(\xi)|_\Sigma\in L^2(\Sigma).$$

换言之，

$$\|\hat{f}(\xi)\|_{L^2(\Sigma)}\le C\|f\|_p,\quad 1\leqslant p\leqslant p_0<2. \tag{2.39}$$

下面来寻求 (2.39) 成立的条件. 对于 Fourier 限制型估计，要求 Σ 具有非零曲率. 如果不然，取

$$\Sigma=\{(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)|\xi_1=0\},$$

$$f(x)=u(x_1)v(x')\in L^p\quad (这里 1<p<2).$$

这样 $\hat{f}(\xi)=\hat{u}(\xi_1)\hat{v}(\xi')$ 在 Σ 上的限制是

$$\hat{f}(\xi)|_\Sigma=\hat{u}(0)\hat{v}(\xi').$$

于是，$\hat{f}(\xi)|_\Sigma$ 良定的必要条件是：

$$\hat{u}(0)=\int_R u(x_1)dx_1,\quad x_1\in R$$

有确定的意义．然而，$u(x_1)\in L^p(R)(1<p<2)$ 并不能确保积分 $\int_R u(x_1)dx_1<\infty$, 因此无法确保 $\hat{f}(\xi)|_\Sigma\in L^2(\Sigma)$.

定理 2.1(Tomas-Stein 限制性估计) 设 S 是 R^n 上具有非零高斯曲率的光滑超曲面，则有如下 L^p 限制性估计

$$\left(\int_{S_0}|\hat{f}(\xi)|^2d\sigma(\xi)\right)^{\frac{1}{2}}\le A_p(S_0)\|f\|_p,$$
$$\forall f\in L^p(R^n),\qquad 1\le p\le p_0=\frac{2n+2}{n+3},\tag{2.40}$$

这里 $S_0\subset S$ 是开集且 $\bar{S}_0$ 是 S 的紧子集．

Tomas-Stein 定理的证明可参见 [14, 25, 36-40]．本质上限制性估计就等价于一些线性发展方程解的 Strichartz 时空估计．方程不同，相应的光滑超曲面也有所不同．下面以 Schröinger 方程为例来说明．

设

$$S=\{(\xi,\tau):R(\xi,\tau)=\tau-|\xi|^2=0\}$$

是 R^{n+1} 上的抛物面．易见，自由 Schrödinger 方程的解 $S(t)f$ 可表示成为

$$S(t)f=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{R^{n+1}}e^{2i\pi\bar{x}\cdot\bar{\xi}}f(\xi)d\mu(\bar{\xi})=(2\pi)^{\frac{n}{2}}\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}d\mu),\tag{2.41}$$

这里 $d\mu(\bar{\xi})=\delta(\tau-|\xi|^2)d\tau d\xi$, $\bar{x}=(x,t)$, $\bar{\xi}=(\xi,\tau)$.

由 Tomas-Stein 限制性估计，可得

$$\left(\int_{S\cap\{\frac{1}{2}\le|\xi|\le2\}}|\hat{f}(\bar{\xi})|^2d\mu(\bar{\xi})\right)^{\frac{1}{2}}\le A_p\|f\|_p,\quad 1\le p\le\frac{2n+4}{n+4}.\tag{2.42}$$

由 Scaling 原理，可见

$$\left(\int_{S\cap\{2^{k-1}\le|\xi|\le2^{k+1}\}}|\hat{f}_k(\bar{\xi})|^2d\mu(\bar{\xi})\right)^{\frac{1}{2}}\le A_p\|f_k\|_p,\quad p=\frac{2n+4}{n+4}.\tag{2.43}$$

由 Littlewood-Paley 分解

$$f=\sum_{k\in Z}\triangle_k f\equiv\sum_{k\in Z}f_k,$$

容易推出

$$\left(\int_S |\hat{f}(\xi)|^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\sum_{k\in Z}\int_{S\cap\{2^{k-1}\le|\xi|\le 2^{k+1}\}} |\hat{f}_k|^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\le A_p\left(\sum_{k\in Z}\|f_k\|_p^2\right)^{\frac{1}{2}} \le A_p\left\|\left(\sum_{k\in Z}|f_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p \tag{2.44}$$
$$= A_p\|f\|_{\dot{F}^0_{p,2}} \le A_p\|f\|_p,\quad p=\frac{2(n+2)}{n+4}.$$

由对偶原理， (2.44) 对应的就是经典的对称 Strichartz 估计：

$$\|e^{i\Delta t}f\|_{L^q(R^{n+1})} \leqslant C\|f\|_2,\quad q=2+\frac{4}{n}.$$

这里用到：

$$\langle e^{i\Delta t}f,g\rangle = \langle f, e^{i\Delta t}g\rangle \le \|\hat{f}\|_2\|\mathcal{F}(e^{i\Delta t}g)\|_2 \le C\|f\|_2\|g\|_p. \tag{2.45}$$

由此获得对称形式的 Strichartz 的估计. 至于非齐次项的情形，它是 (2.45) 与 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式的直接结果.

注记 2.4 (i) 用守恒积分

$$\|v(t)\|_{L^2(R^n)} = \|\phi\|_2$$

及 $v(t)$ 的显示表达式 $v(t)=(4\pi it)^{-\frac{n}{2}}\int_{R^n} e^{i\frac{|x-y|^2}{4t}}\phi(y)dy$ 所满足的 L^1-L^∞ 衰减估计

$$\|v\|_{L^\infty} \leqslant C|t|^{-\frac{n}{2}}\|\phi\|_1,$$

插值可推出

$$\|v\|_p \leqslant C|t|^{-\delta(r)}\|\phi\|_{p'}\quad 2\leqslant p\leqslant\infty. \tag{2.46}$$

由泛函对称方法，可以建立一般的 Strichartz 估计

$$\|u\|_{L^q(I;L^r(R^n))} \leqslant C\|\phi\|_2, \tag{2.47}$$

$$\left\|\int_0^t e^{i(t-\tau)\Delta}f(x,\tau)d\tau\right\|_{L^{q_1}(I;L^{r_1}(R^n))} \le C\|f\|_{L^{q_2'}(I;L^{r_2'}(R^n))}, \tag{2.48}$$

这里 $(q,r),(q_1,r_1),(q_2,r_2)\in\Lambda$ 表示时空容许对，即满足

$$\frac{2}{q} = n\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\Big), \tag{2.48}$$

其中

$$\begin{cases} 2\le r\le \dfrac{2n}{n-2}, & n\ge 3,\\ 2\le r<\infty, & n=2,\\ 2\le r\le\infty, & n=1,\end{cases} \tag{2.49}$$

$q'=\frac{q}{q-1}$, $r'=\frac{r}{r-1}$, $I=R$ 或 I 是满足 $0\in\overline{I}$ 的区间.

(ii) 作为插值定理、Besov 空间的等价模刻画，我们有更一般的 Strichartz 估计：设 $(q,r)\in\Lambda$, $(q_1,r_1)\in\Lambda$, $s\in R$, $I=R$ 或 I 满足 $0\in\bar{I}$ 的区间.

$$\|S(t)\varphi\|_{L^q(I;B^s_{r,2})}\le C\|\varphi\|_{H^s},\quad (q,r)\in\Lambda, \tag{2.50}$$

$$\left\|\int_0^t e^{i(t-\tau)\Delta}f(x,\tau)d\tau\right\|_{L^q(I;B^s_{r,2})}\le C\|g(x,t)\|_{L^{q_1'}(I;B^s_{r_1',2})}. \tag{2.51}$$

(iii) 时空估计为研究非线性发展方程提供了合适的工作空间. 例如：对 $\forall\varphi\in L^2(R^n)$, 半线性 Schrödinger 方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} iu_t-\dfrac{1}{2}\Delta u=-|u|^{p-1}u, & (x,t)\in R^n\times R,\ 1<p<1+\dfrac{4}{n},\\ u(0)=\varphi, & x\in R^n \end{cases} \tag{2.52}$$

在 $L^2(R^n)$ 中生成一个整体流，即 $u(t)\in C(R;L^2(R^n))$ 且满足

$$u(t)\in C(R;L^2(R^n))\cap\bigcap_{(q,r)\in\Lambda}L^q_{\text{loc}}(R;L^r(R^n)). \tag{2.53}$$

众所周知，仅用形如 $C(I;L^2(R^n))$ 空间无法得到 (2.22) 在 L^2 中的局部适定性. 然而，可用其子间

$$X=C(I;L^2(R^n))\cap\bigcap_{(q,r)\in\Lambda}L^q(I;L^r(R^n))$$

来建立 (2.52) 在 $L^2(R^n)$ 中的局部适定性. 进而，借助于局部解满足 L^2 守恒积分，证明 (2.52) 在 $L^2(R^n)$ 中生成一个整体流，详见 [45] 或 [25]. 类似地，在波方程、Schrödinger 方程的 Cauchy 问题解的适定性、散射性等问题研究中，时空估计起着关键的作用. 最典型的例子如：借助 Strichartz 时空估计 [14, 25, 38, 39], 结合 Morawetz 估计 [26, 29], Brenner 解决了次临界 Klein-Gordon 方程解的散射理论 [2], Ginibre-Velo 解决次临界 Schrödinger 方程的散射理论 [10]. 最近， Tao, Shatah, Nakanish 等数学家解决了临界 Klein-Gordon 方程，临界 Schrödinger 方程能量解整体存在性与散射理论，详见 [5, 6, 20, 21, 30, 31, 33-35] 等.

(iv) 借助于时空可积性，可以在较弱的意义下导出能量恒等式. 例如：设 $u(t)\in C(R;H^1(R^n))$ 是如下半线性 Schrödinger 方程

$$\begin{cases} iu_t=-\dfrac{1}{2}\Delta u+f(u),\\ u(0)=\varphi(x) \end{cases} \tag{2.54}$$

的 H^1 整体解. 如果 $u\in L^q_{\text{loc}}(R;L^r(R^n))$, 这里 $(q,r)\in\Lambda$, 则总有

$$E_1(u(t))=\int_{R^n}(|\nabla u|^2+V(u))dx=E_1(\varphi), \tag{2.55}$$

这里

$$\frac{\partial V(z)}{\partial\bar{z}}=f(z). \tag{2.56}$$

再如：对于 Navier-Stokes 方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla P = 0, \\ \operatorname{div} u = 0, \\ u(0) = \varphi, \quad \varphi \in L^2(R^n) \end{cases} \tag{2.57}$$

的 Leray-Hopf 弱解 $u(t) \in L^\infty(R^+; L^2(R^n)) \cap L^2(R^+; \dot{H}^1(R^n))$, 它仅仅满足能量不等式 [19]

$$\|u(t)\|_2^2 + 2\int_0^t \|\nabla u\|_2^2 dt \le \|u_0(x)\|_2^2, \quad 0 \le t \le T < \infty. \tag{2.58}$$

然而，如果假设 Leray-Hopf 弱解 $u(t) \in L^q([0,T), L^r(R^n))$, 这里

$$\frac{2}{q} = n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right), \quad n \le r \le \infty, \tag{2.59}$$

则 Leray-Hopf 弱解满足能量等式

$$\|u(t)\|_2^2 + 2\int_0^t \|\nabla u\|_2^2 dt = \|u_0(x)\|_2^2, \quad 0 \le t \le T < \infty. \tag{2.60}$$

进而，由 Serrin-Wahl 的正则化理论， $u(t,x) \in C^\infty((0,T) \times R^n)$.

(v) 用 Scaling 的观点，亦可以看出时空容许对所满足的容许关系是自然的. 以 Schrödinger 方程为例来说明之. 可直接验证，若 $v = v(x,t)$ 是

$$iv_t = -\frac{1}{2}\Delta v, \quad v(0) = \varphi(x) \in L^2(R^n) \tag{2.61}$$

的整体解, 则 $v_\lambda(t) = v(\lambda x, \lambda^2 t)$ 是 (2.61) 将初始函数换成 $\varphi(\lambda x)$ 的解. 若 $v(x,t) \in L^q(R^+, L^p(R^n))$, $1 < p, q < \infty$, 那么， p, q 应满足什么条件？

记

$$\mathcal{E}_{p,q}(\lambda) = \|v(\lambda x, \lambda^2 t)\|_{L^q(R^+; L^r(R^n))}, \tag{2.62}$$

$$\mathcal{E}_2(\lambda) = \|\varphi(\lambda x)\|_{L^2(R^n)}. \tag{2.63}$$

那么， $v(t) \in L^q(R^+; L^r(R^n))$ 的必要条件是

$$\operatorname{order}(\mathcal{E}_{r,q}(\lambda)) = \operatorname{order}(\mathcal{E}_2(\lambda), \tag{2.64}$$

即

$$\frac{2}{q} = n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}\right). \tag{2.65}$$

对于其它类型的方程，亦有类似的结果，读者可参见 [25].

(vi) 不同类型的发展方程的时空估计是不同的. 这样，它所对应的容许对 (容许三元簇)、时空空间都有差别 [23, 24, 28]. 究其原因，区别在于相应的自由线性发展方程对应着不同的振荡积分. 换言之，对应着 Fourier 变换在不同的光滑流形上的限制性估计. 这也是调和分析中很有难度的问题. 可以讲，这是调和分析及发展型方程联系的桥梁 [25].

3 Fourier 频率分解方法与 I- 能量方法

以非聚焦的三次非线性 Schrödinger 方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u = |u|^2 u, \quad x \in R^3,\ t \in R, \\ u(0) = \varphi(x) \in H^s(R^3), \quad x \in R^3 \end{cases} \tag{2.66}$$

或等价的积分方程

$$u(t) = S(t)\varphi - i\int_0^t S(t-\tau)[|u|^2 u]d\tau \tag{3.1}$$

为例，来说明 Bourgain 的 Fourier 截断方法.

Bourgain 方法的本质是将初始函数分解成高频与低频部分

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \psi_0(x), \quad \varphi_0(x) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{\varphi}|_{|\xi|\le N}) \in S(R^3) \subset H^1(R^3). \tag{3.2}$$

在 $I = [0, \triangle T]$ 上，进行如下操作：

(a) 用自由 Schrödinger 群演化高频部分 $e^{it\Delta}\psi_0(x)$.

(b) 用非线性方程来演化低频部分

$$u_0(t) = e^{it\Delta}\varphi_0(x) - i\int_0^t e^{i(t-\tau)\Delta}\left[|u_0(t)|^2 u_0(t)\right] d\tau.$$

(c) 证明修正部分 $\omega(t) = u(t) - u_0(t) - e^{it\Delta}\psi_0(x) \in H^1$, 这里 $\omega(t)$ 满足的相差方程的 Cauchy 问题:

$$\begin{cases} i\partial_t\omega + \Delta\omega = 2|u_0(t)|^2\omega + 2u_0(t)^2\bar{\omega} + 2\bar{u}_0(t)\omega^2 + 2u_0(t)|\omega|^2 + |\omega|^2\omega, \\ \omega(0) = 0, \end{cases} \tag{3.3}$$

或

$$\omega(t) = \int_0^t e^{i(t-\tau)i}[2|u_0(\tau)|^2\omega + 2u_0(\tau)^2\bar{\omega} + 2\bar{u}_0(\tau)\omega^2 + 2u_0(\tau)|\omega|^2 + |\omega|^2\omega]d\tau. \tag{3.4}$$

这样，可在 $[\triangle T, 2\triangle T]$ 进行上述操作，此时

$$\varphi_1(x) = u_0(t_1) + \omega(t_1) \in H^1(R^3), \quad \psi_1(x) = e^{it_1\Delta}\psi_0(x).$$

换言之, 将修正部分 (等价于解的高频部分中有一些转化到低频部分) 加到低频部分后仍有 $\varphi_1(x) \in H^1(R^3)$, 此足以保证它经非线性方程演化后仍能获得 H^1 整体解，相应的高频部分 $\psi_1(x)$ 具有与 $\psi_0(x)$ 完全相同的特点，仍可用自由群来演化. 如此等等，对任意的 $T > 0$, 可获得 (2.66) 或 (2.67) 在 $[0, T]$ 的 H^s 解.

定理 3.1[1] 设 $s > \frac{11}{13}$, $\forall\varphi(x) \in H^s(R^3)$, 则 (3.1) 或 (3.2) 在 H^s 中整体适定.

注记 3.1 (i) $s > s_0 = \frac{5}{7}$, $\varphi(x) = \varphi(|x|) \in H^s$, 则 (3.1) 或 (3.2) 在 H^s 中整体适定，且在 H^s- 模意义下散射性结果成立. 但对于一般的初始函数，用 Bourgain 的 Fourier 截断方法无法获得散射性结果.

(ii) Bourgain 方法可以进行的关键在于证明如下估计：

$$u(t) - S(t)\varphi \in H^1(R^3), \quad s > \frac{11}{13}. \tag{3.5}$$

具体地说，也就是

$$\int_0^t S(t-\tau)|u(\tau)|^2u(\tau)d\tau \in H^1(R^3), \quad \forall u(\tau)\in H^s(R^3), \quad s>\frac{11}{13}. \tag{3.6}$$

故许多非线性色散波方程及波方程 (与非线性项的形式有关) 都具有这种类型的光滑效应，例如 KdV 方程， Bo 方程， Wave 方程， Kein-Gordon 方程等，可参见 [15, 17, 18, 27].

(iii) 并不是所有的发展型方程都具备类同于 (3.6) 的光滑效应. 例如：对于 Wave 映照方程

$$\begin{cases} u_{tt}-\Delta u=(|\nabla u|^2-|u_t|^2)u, \quad |u|=1, \\ u(0)=\varphi(x), \quad u_t(0)=\psi(x), \end{cases} \tag{3.7}$$

见 Keel-Tao 的文章 [15]. 再如：对于 Maxwell-Klein-Gordon 方程似乎亦没有光滑效应.

问题 对于不具备形如 (3.6) 的光滑效应的波或色散波方程，是否可以研究低正则性问题？

受 Bourgain 的 Fourier 截断方法的启示， Tao 发明了所谓的 I- 能量方法或准能量方法. Tao 的准能量方法可以用于不具类同于 (3.6) 的非线性波 (色散波) 方程的低正则性. 与此同时，即使应用到某些具有光滑效应的方程，亦可以获得更深刻的结果，例如散射性理论. Tao 方法局限于非线性函数是 u 或是 u 及其导数的多项式的情形.

Tao 的 I- 能量方法的核心

通过光滑算子 I, 来构造解 $u(t)$ 的光滑部分 Iu 满足几乎守恒积分

$$E_1(Iu)=E_1(I\varphi)+N^{-1+}C(\|\varphi\|_{H^s}), \tag{3.8}$$

这里

$$Iu=\mathcal{F}^{-1}m_N(\xi)*u, \quad m_N(\xi)=m_N(|\xi|)\in C^\infty(R^n),$$

$$m_N(\xi)=\begin{cases} 1, & |\xi|\le N, \\ \left(\dfrac{N}{|\xi|}\right)^{1-s}, & |\xi|\ge 2N, \end{cases} \quad 0\le m_N(\xi)\le 1, \tag{3.9}$$

其中 N 是充分大的待定常数. 可直接验算

$$\|u\|_{H^s}^2 \sim E_1(Iu)+\|u\|_2^2.$$

这样，通过准守恒积分、新的 Morawetz 估计、 Scaling 技术，连续性方法推出：当 $s>s_0$ 时，$\|u\|_{H^s}$ 及 u 的整体时空估计，进而建立 (3.1) 或 (3.2) 在 H^s 空间的整体适定性及散射性理论.

Tao 的 I- 能量方法的关键技术及优势表现在：

(i) 用解的光滑部分所满足的准能量等式来控制低正则性解的 $\|u(t)\|_{H^s}$ 的估计. 通过光滑解在低能量 Sobolov 模的具体估计 (关于时间变量 t 的多项式增长估计), 定性地刻画了光滑解的能量如何从高频向低频部分的转移.

(ii) Tao 的 I- 能量方法可以用来处理次临界非线性波或色散波方程的低正则性，在一些特殊情形下，比 Bourgain 的 Fourier 截断方法更有效. 例如：

(a) 就 (3.1) 而言，用 Tao 的方法可以获得：当 $s>\frac{4}{5}$ 时， H^s 的整体适定性和 H^s 散射性结果. 然而， Bourgain 的方法则仅能获得当 $s>\frac{11}{13}$ 时， (1) 在 H^s 中的整体适定性，无法同时获得散射性.

(b) 映射方程整体正则解的存在性 (目标流形是二维球面、具小能量初值).

需要指出的是 Tao 等数学家利用 Fourier 频率分解方法、相空间上的 Morawetz 估计、Scaling 技术解决了临界 Schrödinger 方程的 Cauchy 问题在能量空间的整体适定性与散射性理论这一公开问题 [5,6].

4 PDEs 的调和分析方法与经典方法的比较和思考

抽象的 Segal 定理 [32] 考虑抽象发展方程的 Cauchy 问题:

$$\begin{cases} u_t + Au = f(u) \quad (A\text{在基空间}X\text{上生成}C_0\text{半群}), \\ u(0) = \phi(x) \in D(A). \end{cases} \tag{4.1}$$

如果

$$\|f(u) - f(v)\|_{D(A)} \leq C(\|Au\|_X + \|Av\|_X)\|u - v\|_{D(A)}, \tag{4.2}$$

则 (4.1) 存在唯一解 $u(t)$

$$u(t) \in C([0, T^*); D(A)) \cap C^1([0, T^*); X), \tag{4.3}$$

满足如下二择性

$$T^* = \infty \tag{4.4}$$

或

$$T^* < \infty \quad \text{且} \quad \lim_{t \to T^*} \|Au(t)\|_X = \infty. \tag{4.5}$$

注记 4.1 对于抛物方程, 即当 A 在 X 生成解析半群时, Lip 条件 (4.2) 可以放宽成

$$\|f(u) - f(v)\|_X \leqslant C(\|A^{1-\rho}u\|_X + \|A^{1-\rho}v\|_X)\|u - v\|_{D(A)}. \tag{4.6}$$

然而, 对一般的发展型方程, 若采用抽象的 Segal 定理, 条件 (4.2) 无法放宽. 一般来说, 条件 (4.2) 相当于要求 $D(A)$ 构成一个 Banach 代数.

(A) 下面以非线性 Schrödinger 方程为例, 说明半群方法的局限性. 考虑

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u = f(u), \\ u(0) = \phi \in D(A), \end{cases} \tag{4.7}$$

取 $X = L^2(R^n)$, 则 $D(A) = H^2(R^n), A = -i\Delta$, 除了要求 $\phi(x) \in D(H) = H^2(R^n)$ 外, 还要验证 $f(u)$ 满足形如 (4.2) 的局部 Lip 条件. 因此, 起码要求 $f(u)$ 具有二阶连续导数, 但对于形如

$$f(u) = |u|^{p-1}u$$

非线性项, 当 $p \to 1$ 时, $f(u)$ 不具有二阶连续导数 (在 $u = 0$ 处). 故无法采用抽象的 Segal 定理.

调和分析方法. 借助于 Strichartz 估计, 当 $1 < p \leqslant 1 + \frac{4}{n}$ 时, 可以在 L^2- 层次上建立 (4.7) 的局部适定性. 具体地说, 可以在

$$\mathcal{X}(I) = C(I; L^2(R^n)) \cap \bigcap_{(q,r)\in\Lambda} L^q(I; L^r(R^n)), \quad I = [-T, T]$$

来求解 (4.7). 特别，对于 $1 < p < 1 + \frac{4}{n}$, 注意到 $T = T(\|\varphi\|_2)$, 利用 L^2- 守恒积分，可得整体解

$$u(t) \in C(R; L^2(R^n)).$$

对于 $p = 1 + \frac{4}{n}$(L^2- 临界增长), 可以获得小解的整体存在性.

(B) 基于有限逼近的紧致性方法 (如：差分方法， Galerkin 方法等) 可以在一般条件下研究非线性发展方程的定解问题 (特别是初边值问题) 解的存在性，但求解时在很弱的框架下进行，无法保证解的唯一性. 与此同时，具有物理意义的解的优良性质亦很难发现.

例如：

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = u^{2k+1}, & (x,t) \in R^3 \times R,\ k \in N, \\ u(0) = \phi, \quad u_t(0) = \psi,\ x \in R^3, \end{cases} \tag{4.8}$$

对 $\forall \phi \in H^1 \bigcap L^{2k+2}, \psi \in L^2(R^3)$. 采用紧致性方法，可以证明 (4.8) 至少存在一个解

$$u(t) \in (C_\omega \cap L^\infty)((-T,T); H^1(R^3))$$

满足

$$u_t(t) \in (C_\omega \cap L^\infty)((-T,T); L^2(R^3)).$$

然而，当 $2k > \frac{4}{n-2}$ 时，无法获得解的唯一性和正则性.

再如：对任意的 $p > 1$, 考虑

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u = \lambda |u|^{p-1} u, \quad \lambda > 0, \quad (x,t) \in \Omega \times R, \\ u(0) = \phi(x), \quad x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{4.9}$$

用紧致性方法，可以在形如 $(C_\omega \cap L^\infty)(I; L^{p+1} \bigcap H^1)$ 获得 (4.9) 弱解的存在性，但是，当 $p \geq 1 + \frac{4}{n-2}$ 时，唯一性、连续依赖性无法得到 (最近 Tao 等解决了当 $p = 1 + \frac{4}{n-2}$, $\Omega = R^3$ 的情形).

研究 PDEs 的方法概括的来讲，可分如下两种:

方法 I: 粘性方法 (或有限维逼近)+ 紧致性原理.

方法 II: 迭代方法 (压缩映射原理)+ 调和分析技术.

当然，还有其它方法如：有限差分方法， Glimm's 方法 (处理守恒律方程). 下面来比较上面两种方法的特点.

粘性方法 (或有限维逼近的 Galerkin 方法): 在 Fourier 空间 (相空间) 中来观察，本质上是截断频率变量 ξ, 使其限定在一个有界区域内，获得了高频截断演化方程 (粘性化方程), 对所得的近似解取极限 (然后取截断频率的半径 $r \to +\infty$), 获得原来问题的解 (可能是非物理的弱解). 此方法适用范围：频率之间较少具有相互作用的非线性项. 此方法不适用那些高频部分之间相互作用产生低频部分 (贡献给波) 的情形，这是因为截断方程不能捕获这种相互作用的信息，特别是在弱拓扑意义下无法刻画高频部分之间相互作用产生低频部分. 事实上，还没有合适的方法适用于高频 + 高频相互作用大量产生低频的非线性项，即 (high→low cascade.). 与此相对应的另一个问题是： “low-to-high cascade” 现象. 可能发生的是：初值的某一个部分脱离高频部分，最终导致解 $u(x,t)$ 产生奇性.

当截断频率的半径 $r \to +\infty$ 或粘性系数 $\varepsilon \to 0$ 时，高频截断演化方程的解不会产生解的分歧或奇性，至少对子序列的极限是如此. 然而，所得的解没有捕获得应有的奇性. 这是因为：远

离无穷的高频部分的能量将在极限过程中消失. 这样，就产生了所谓的“ Ghost Solution ”，虽然不满足能量守恒式，然而满足能量不等式 (Fatou's 引理保证).

此方法的优点是：对非线性项的要求很宽松 (非线性程度没有要求)，很容易建立弱解的存在性. 然而，需要证明所得到的解的唯一性与正则性，以确保它是我们寻求的物理解.

迭代方法 (压缩映射原理)+ 调和分析技术 从上面几节的讨论可以看出，此方法可以提供解的更多、更精确的控制估计. 然而，此方法受限于非线性的增长率. 它似乎不适用非线性程度过高的非线性项. 一般来讲，就 Hamilton 型发展方程而言，迭代方法似乎优于粘性方法.

参考文献

[1] Bourgain, J., The Global Solution of Nonlinear Schrödinger Equations American Mathematical Society, Providence Rhode Island, 1999.

[2] Brenner, P., On scattering and everywhere defined scattering operator for nonlinear Klein-Gordon equations, *J. Diff. Equations*, 1985, 56: 310-344.

[3] Calderón, A.P., Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators, *Proc. Nat. Acad. Sc. USA*, 1977, 74: 1324-1327.

[4] Coifman, R.R., McIntosh A. and Meyer Y., L'integrale de Cauchy definit un operateur borne sur L^2 pour les courbes Lipschitiennes, *Annals of Math.*, 1982, 116: 361-387.

[5] Colliander, J., Keel M., Staffilani G, Takaoka H and Tao T., Scattering for 3-D cubic NLS below the energy norm, to be appeared in C.P.A.M., 2004.

[6] Colliander, J., Keel M., Staffilani G, Takaoka H and Tao T., Global well-posedness and sacattering for the energy-critical nonlinear Schrödinger equation in R^3, preprint, 2004, 1-84.

[7] Dahlberg, B.J. and Kenig C.E., Lecture on Harmonic Analysis and Partial Differential Equations, ISSN0347-2809, 1985-1996.

[8] Fabes, E.B., Jodeit M. and Riviere N.M., Potential techniques to boundary value problem on C^1 domain, *Acta. Math.*, 1978, 141: 165-186.

[9] Folland, G.B., Introduction to the Partial Differential Equations, Second edition, Princeton University Press, 1993.

[10] Ginibre, J.& Velo G., Scattering theory in energy space for a class nonlinear Schrödinger equations *J. Math. Pure Appl.*, 1985, 64: 363-401.

[11] Glassey, R., On the blowing up of solution for nonlinear Schrödinger equations. *J. Math. Phys.*, 1977, 18: 1794-1797.

[12] Han Yongsheng., Lecture on the Harmonic Analysis. peprint, 2004.

[13] Hörmander, H., The Analysis of Linear Partial Diffential Operators, I-IV (1983-1985), Springer-Verlag.

[14] Keel, M. & Tao, T., The endpoint Strichartz estimates *Amer. J. Math.*, 1998, 120: 955-980.

[15] Keel, M. & Tao, T., Global well-posedness for nonlinear wave equation below the energy norm, preprint.

[16] Kenig, C.E., Harmonic analysis thechniques for second order elliptic boundary value problems, *CBMS of Amer.Math. Soc.*, 1994, 83.

[17] Kenig, C.E., Ponce G. and Vega L., The Cauchy problem for the KdV in Sobolev spaces of negative indices, *Duke Math. J.*, 1993, 71: 1-21.

[18] Kenig, C.E., Ponce G. and Vega L., Global well-posedness for nonlinear wave equations, *Comm. PDE.*, 2000, 25: 683-695.

[19] Leray, J., Sur le mouvement d'um liquide visqieux emlissant l'space, *Acta. Math.*, 1934, 64: 193-284.

[20] Lindbland, H.& Sogge, C.D., On the existence and scattering with minimal regularity for semilinear wave equation, *J. Func. Anal.*, 1995, 130: 357-426.

[21] Lindbland, H. and Sogge, C.D., Restriction theorems and semi-linear Klein-Gordon equations in $(1+3)$ dimisions, *Duke Math. J.*, 1996, 85: 227-252.

[22] Meyer, Y., Real Analysis and operator theory, Proccedings of sysposia in pure Mathematics, 1985, 43: 219-235.

[23] Miao C., The time-space estimates and nonlinear parabolic equations, Tokyo *Journal of Mathematics*, 2001, 22: 245-276.

[24] Miao C. The Cauchy problem of semilinear parabolic equations with weak data in homogenous space and application to the Navier-Stokes equations, *Science in China*, 2003, 46: 641-661.

[25] Miao C., Harmonic Analysis and Applications to Partial Differêntial Equations, Vol. 89 Second Edition, Science Press, Beijing, 2004.

[26] Miao C. , Modern Methods to Nonlinear Wave Equations, Lectures in Contemporary Mathematics, Vol.2 Science Press, Beijing, 2005.

[27] Miao C.& Zhang B. H^s-global well-posedness for semilinear wave equations, *J. Math. Anal. Appl.*, 2003, 283: 645-666.

[28] Miao C. & Zhang B. The Cauchy problem for the semilinear parabolic equations in Besov spaces, *Houston J. Math.*, 2004, 30: 829-878.
[29] Morawetz, C., Time decay for nonlinear Klein-Gordon equations, *Proc. Royal Soc. London A*, 1968, 306: 503-518.
[30] Nakanish, K., Scattering theory for nonlinear Klein-Gordon equations with Sobolev critical power, *Internat. Math. Res. Notices*, 1999, 31-60.
[31] Nakanish, K., Remarks on the energy scattering for nonlinear Klein-Gordon & Schrödinger equations, *Tohoku Math. J.*, 2001, 53: 285-303.
[32] Reed, M. & Simon, B., Methods of Mathematical Physics, Four volumes, Academic Press, 1972-1979.
[33] Shatah, J. & Struwe, M., Well-posedness in the energy space for semilinear wave equation with critical growth, *IMRN*, 1994, 303-309.
[34] Sogge, C.D. Fourier Integral in Classical Analysis, Cambridge Univ. Press, 1993.
[35] Sogge, C.D., Lecture on Nonlinear Wave Equations, International Press Publishcations, 1995.
[36] Stein, E.M., Singular Integal and Differential Property of Functions, Princeton University Press, 1970.
[37] Stein, E.M., Harmonic Analysis, Real-Variable Methods, Orthogonality and Oscillatroy Integrals, Princeton University Press, 1993.
[38] Strichartz, R., Multiplers in fractional Sobolev spaces, *Journal of Math. Mech.*, 1967, 16: 1031-1060.
[39] Strichartz, R., Restrictions of Fourier transforms to quadratic surface and decay of solutions of wave equations, *Duke Math. J.*, 1977, 44: 705-714.
[40] Strauss, W.A., Nonlinear Wave Equations, Reginal Conference Series in Mathematics, Vol 73, *Providence RI. Am. Math. Soc.*, 1989.
[41] Taira, "Analytic Semigroup and Semilinear Initial-Boundary Value Problem," London Math. Soc. Lect. Note Series, Vol223, Cambridge University Press.
[42] Tao, T., Low regularity semilinear wave equations, *Comm. PDE.*, 1999, 24: 599-630.
[43] Tao, T., Lecture on the Harmonic Analysis, Preprint, 2000.
[44] Triebel, H., Theory of Function Spaces, Springer-Verlag, 1983.
[45] Tsutsumi, T., L^2-solutions for nonlinear Schrödinger equations and nonlinear groups, *Ann. Inst. Henri Poincaré, Phys. Théorique*, 1985, 43: 321-347.
[46] Verchota, G.C., Layer potentials and boundary value problems for Laplace's equation in Lipschitz domain, *J. of Funct. Analysis*, 1984, 59: 572-611.

The Introduction to Harmonic Analysis Method for Partial Differential Equations

MIAO Changxing

(Institute of Applied Physis and Computational Mathematics, Beijing, 100088, P. R. China)

Abstract: This survey paper is devoted to discribe the relation between harmonic analysis and PDEs. In particular, we emphasize the important role of singular integral operators, pesudo-differential operators, Fourier restriction estimates and Fourier frequency decomposition in the study of boundary value problem for elliptic equations and Cauchy problem for nonlinear evolution equations. We also give some analysis and compare to different study methods of partial differential equations, and point out the advantage and disadvantage of harmonic analysis method for partial differential equations. At last, we present some new progress on harmonic analysis method for partial differential equations.

Key words: partial differential equations; boundary value problem, Cauchy problem; singular differential operator; pesduo-differential operator; Fourier frequency decomposition; Littlewood-Paley decomposition