第66卷第5期 数学学报中文版 Vol.66, No.5
2023年9月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Sep., 2023

DOI: 10.12386/B20220229 文献标识码: A

变分积分向量值极小点的正则性

李硕洋 高 萌 高红亚

河北大学数学与信息科学学院 保定 071002
E-mail: 943819729@qq.com; 1834985084@qq.com; ghy@hbu.cn

摘 要 本文讨论具有分裂结构的变分积分

$$\mathcal{J}(u,\Omega)=\int_\Omega\sum_{i=1}^{n+1}\left\{f^i(x,Du^i)+g^i(x,(\mathrm{adj}_nDu)^i)\right\}dx$$

的向量值极小点 $u=(u^1,\ldots,u^{n+1}):\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n+1}$ 的正则性, 其中 $f^i,g^i:\Omega\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $i=1,\ldots,n+1$, 是满足结构性条件的 Carathéodory 函数. 在适当的假设条件下得到了正则性性质.

关键词 正则性; 向量值极小; 变分积分
MR(2010) 主题分类 35A15
中图分类 O176

Regularity for Vector-valued Minimizers of Some Variational Integrals

Shuo Yang LI Meng GAO Hong Ya GAO

College of Mathematics and Information Science, Hebei University, Baoding 071002*, P. R. China*
E-mail: 943819729*@qq.com*; 1834985084*@qq.com*; *ghy@hbu.cn*

Abstract This paper deals with regularity properties for vector-valued minimizers $u=(u^1,\ldots,u^{n+1}):\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n+1}$ of variational integrals with splitting structure of the form

$$\mathcal{J}(u,\Omega)=\int_\Omega\sum_{i=1}^{n+1}\left\{f^i(x,Du^i)+g^i(x,(\mathrm{adj}_nDu)^i)\right\}dx,$$

where $f^i,g^i:\Omega\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $i=1,\ldots,n+1$, are Carathéodory functions satisfying some structural conditions. Regularity properties are derived under suitable assumptions.

Keywords Regularity; vector-valued minimizer; variational integral
MR(2010) Subject Classification 35A15
Chinese Library Classification O176

收稿日期: 2022-04-19; 接受日期: 2022-09-07
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (12071021);
河北省自然科学基金 (A2019201120) 和河北省高等学校科学技术研究重点项目 (ZD2021307)
通讯作者: 高红亚

1 假设和结果

本文研究具有分裂结构的变分积分向量值极小点的正则性. 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$, 为有界区域, 函数 $f^i(x,\xi), g^i(x,\xi):\Omega\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $i=1,2,\ldots,n+1$, 满足 Carathéodory 条件 (即 $x\mapsto f^i(x,\xi)$ 和 $x\mapsto g^i(x,\xi)$ 可测, 且 $\xi\mapsto f^i(x,\xi)$, $\xi\mapsto g^i(x,\xi)$ 连续). 对于函数 $u(x)=(u^1(x),u^2(x),\ldots,u^n(x),u^{n+1}(x)):\Omega\to\mathbb{R}^{n+1}$, 考虑下面的变分积分

$$\mathcal{J}(u,\Omega)=\int_\Omega f(x,Du)dx, \tag{1.1}$$

其中

$$f(x,Du)=\sum_{i=1}^{n+1}\left\{(f^i(x,Du^i)+g^i(x,(\mathrm{adj}_nDu)^i)\right\}. \tag{1.2}$$

在 (1.2) 中, $Du^i=(\frac{\partial u^i}{\partial x_1},\frac{\partial u^i}{\partial x_2},\ldots,\frac{\partial u^i}{\partial x_n})$, $i=1,2,\ldots,n,n+1$, 是 u^i 的梯度向量:

$$Du=\begin{pmatrix} Du^1\\ Du^2\\ \vdots\\ Du^k\\ \vdots\\ Du^n\\ Du^{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial x_1} & \frac{\partial u^1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u^1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial u^2}{\partial x_1} & \frac{\partial u^2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u^2}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial u^k}{\partial x_1} & \frac{\partial u^k}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u^k}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial u^n}{\partial x_1} & \frac{\partial u^n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u^n}{\partial x_n}\\ \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_1} & \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_n}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{(n+1)\times n}$$

是一个 $(n+1)\times n$ 矩阵, adj_nDu 是一个 n 阶共轭矩阵:

$$\mathrm{adj}_nDu=\begin{pmatrix} (\mathrm{adj}_nDu)^1\\ (\mathrm{adj}_nDu)^2\\ \vdots\\ (\mathrm{adj}_nDu)^k\\ \vdots\\ (\mathrm{adj}_nDu)^n\\ (\mathrm{adj}_nDu)^{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \det\widehat{Du^1}\\ -\det\widehat{Du^2}\\ \vdots\\ (-1)^{k+1}\det\widehat{Du^k}\\ \vdots\\ (-1)^{n+1}\det\widehat{Du^n}\\ (-1)^{n+2}\det\widehat{Du^{n+1}}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n+1},$$

这里, 对矩阵 $\xi\in\mathbb{R}^{(n+1)\times n}$, $\widehat{\xi^k}$ $(k=1,2,\ldots,n+1)$ 是由 ξ 去掉第 k 行后得到的 $n\times n$ 矩阵.

注 1.1 (见文 [6, 注 5.48]) 若 $u:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n+1}$, 则 adj_nDu 表示曲面 $\{u(x):x\in\mathbb{R}^n\}$ 的法线. 在 $n=2$ 的情形, $u(x_1,x_2)=(u^1,u^2,u^3)$, 有

$$\mathrm{adj}_2Du=\begin{pmatrix} \det\widehat{Du^1}\\ -\det\widehat{Du^2}\\ \det\widehat{Du^3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\partial u^2}{\partial x_1}\frac{\partial u^3}{\partial x_2}-\frac{\partial u^2}{\partial x_2}\frac{\partial u^3}{\partial x_1}\\ \frac{\partial u^3}{\partial x_1}\frac{\partial u^1}{\partial x_2}-\frac{\partial u^1}{\partial x_1}\frac{\partial u^3}{\partial x_2}\\ \frac{\partial u^1}{\partial x_1}\frac{\partial u^2}{\partial x_2}-\frac{\partial u^1}{\partial x_2}\frac{\partial u^2}{\partial x_1}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3.$$

本文研究变分积分 (1.1) 的向量值极小点 $u=(u^1,\dots,u^{n+1})$ 的整体正则性. 文 [7] 中 De Giorgi 的反例表明极小点可能是奇异的, 因此在导出极小点的正则性时需要对 f 附加额外的条件.

许多学者研究了积分泛函向量值极小 $u:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ $(m,n\geq 2)$ 的正则性. 局部正则性结果 (即解在奇异集 Ω_0 之外的正则性和奇异集 Ω_0 性质的研究, 见文 [30, 第 4.2 节] 及 [4, 10, 12, 13]). 处处正则性的结果很少: Fusco 和 Hutchinson 在文 [11] 中证明了 $n=m=2$ 情形下的处处连续性, Cupini 和 Leonetti 在文 [5] 中证明了 $n=m=3$ 情形下的局部正则性. 整体逐点有界性的研究见 Bauman–Owen–Phillips [1], D'Ottavio–Leonetti–Musciano [8], Gao–Leonetti–Macrí–Petricca [18], Leonetti [25], Leonetti–Siepe [28, 29]. 高阶可积性研究见 Dougherty–Phillips 的文 [9].

一个值得注意的进展是 Cupini, Leonetti 和 Mascolo 的文 [5], 文中研究了一类特殊的多凸积分泛函向量值极小点的局部有界性. 相关结果见 Carozza–Gao–Giova–Leonetti [3] 和 Gao–Shan–Ren [20] 的工作.

本文考虑被积函数 f 具有分裂结构 (1.2) 的积分泛函 (1.1). Fuchs–Seregin 在文 [13] 中证明了类似的结果. 为了得到整体正则性, 需要对 (1.2) 中的 f^i 和 g^i 附加增长性条件. 假设 $f^i(x,\xi)$ 的增长速度类似 $|\xi|^p$, $g^i(x,\xi)$ 的增长速度类似 $|\xi|^q$, $0<q<\frac{p}{n}$, 见下面的 (1.4) 和 (1.5). 本文证明向量值极小的整体正则性的思想方法部分来源于文 [5]. 事实上, 文中首先证明第一个分量 u^1 的正则性, 其他分量 u^i, $i=2,\dots,n+1$, 可得类似结论.

设 $1<p<n$. 假设存在指数 $0<q<\frac{p}{n}$, 常数 $0<\nu\leq M<\infty$, $a\geq 0$ 和函数

$$b(x)\in L^{\sigma}_{\rm weak}(\Omega),\quad \sigma>1, \tag{1.3}$$

使对所有的 $\xi\in\mathbb{R}^n$, $i=1,2,\dots,n+1$, 有

$$\nu|\xi|^p-a\leq f^i(x,\xi)\leq M|\xi|^p+b(x), \tag{1.4}$$

$$-\nu|\xi|^q-a\leq g^i(x,\xi)\leq M|\xi|^q+b(x). \tag{1.5}$$

在 (1.3) 中, $L^{\sigma}_{\rm weak}(\Omega)$ 是弱 $L^{\sigma}(\Omega)$ 空间或 Marcinkiewicz 空间, 定义为所有满足以下性质的可测函数 $f:\Omega\to\mathbb{R}$: 存在常数 $\gamma>0$, 使

$$|\{x\in\Omega:|f|>k\}|\leq\frac{\gamma}{k^{\sigma}},\quad \forall\, k>0. \tag{1.6}$$

函数 $f\in L^{\sigma}_{\rm weak}(\Omega)$ 的范数定义为

$$\|f\|^{\sigma}_{L^{\sigma}_{\rm weak}(\Omega)}=\inf\{\gamma>0:(1.6)\text{ 成立}\}.$$

众所周知 (见文 [2, 命题 3.13]): 若 $b\in L^{\sigma}_{\rm weak}(\Omega)$, $\sigma>1$, 则存在常数 $c=c(\|f\|_{L^{\sigma}_{\rm weak}(\Omega)},\sigma)>0$, 使得对所有可测集 $E\subset\Omega$, 有

$$\int_E|b|dx\leq c|E|^{1-\frac{1}{\sigma}}. \tag{1.7}$$

定义 1.2 若对任意 $v\in W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^{n+1})$, 有

$$\mathcal{J}(u,\Omega)\leq\mathcal{J}(v,\Omega), \tag{1.8}$$

则称函数 $u\in W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^{n+1})$ 为 $\mathcal{J}$ 的一个向量值极小点.

本文结果如下:

定理 1.3 设积分泛函

$$\mathcal{J}(u,\Omega)=\int_\Omega f(x,Du)dx=\int_\Omega\sum_{i=1}^{n+1}\left\{f^i(x,Du^i)+g^i(x,(\mathrm{adj}_nDu)^i)\right\}$$

中的被积函数满足条件 (1.4) 和 (1.5). 令

$$t=\min\left\{\frac{1}{\sigma'},\frac{p-nq}{p-q}\right\}. \tag{1.9}$$

设 u 是 $\mathcal{J}$ 的一个极小点, 则

(i) $t>\frac{p}{p^*}\Rightarrow u\in L^\infty(\Omega)$;

(ii) $t=\frac{p}{p^*}\Rightarrow\exists\lambda=\lambda(n,q,p,\nu,a,\sigma,\|b\|_{L^\sigma_{\mathrm{weak}}(\Omega)},|\Omega|)>0$, 使得 $\mathrm{e}^{\lambda|u|}\in L^1(\Omega)$;

(iii) $t<\frac{p}{p^*}\Rightarrow u\in L^\tau_{\mathrm{weak}}(\Omega)$, $\tau=\frac{np}{n-p-nt}$.

注 1.4 本文研究的积分泛函极小点的存在性可以由附加条件 $\xi\to f_i(x,\xi)$ 和 $\xi\to g_i(x,\xi)$ 是凸的得到: 只要利用文献 [6] 中的半连续性结果即可 (见第 166 页的定理 2.4 和第 167 页的注 ii), iv); 也见第 180 页的存在性定理 2.9 和第 181 页的注 1), 3)).

2 定理 1.3 的证明

定理 1.3 的证明中将使用著名的 Stampacchia 引理, 见文 [31, 引理 4.1].

引理 2.1 设 c,α,β 是正常数, $k_0\in\mathbb{R}$. 设函数 $\varphi:[k_0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 非增, 且对任意的 $h>k\geq k_0$, 有

$$\varphi(h)\leq\frac{c}{(h-k)^\alpha}[\varphi(k)]^\beta. \tag{2.1}$$

(i) 若 $\beta>1$, 则 $\varphi(k_0+d)=0$, 其中

$$d^\alpha=c[\varphi(k_0)]^{\beta-1}2^{\frac{\alpha\beta}{\beta-1}}; \tag{2.2}$$

(ii) 若 $\beta=1$, 则对任意的 $k\geq k_0$, 有

$$\varphi(k)\leq\varphi(k_0)\mathrm{e}^{1-(c\mathrm{e})^{-1/\alpha}(k-k_0)};$$

(iii) 若 $\beta<1$, $k_0>0$, 则对任意的 $k\geq k_0$, 有

$$\varphi(k)\leq 2^{\frac{\alpha}{(1-\beta)^2}}\left\{c^{\frac{1}{1-\beta}}+(2k_0)^{\frac{\alpha}{1-\beta}}\varphi(k_0)\right\}\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{\alpha}{1-\beta}}.$$

Gao–Leonetti–Wang 在文 [19] 中给出了 Stampacchia 引理的一些注记. 引理 2.1 的应用和推广, 见文 [14–16, 21–24, 26, 27].

证明 对 $\mathcal{J}$ 的向量值极小点 $u=(u^1,u^2,\ldots,u^n,u^{n+1})\in W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^{n+1})$, 在 (1.8) 中取

$$v=(v^1,v^2,\ldots,v^n,v^{n+1})=(T_k(u^1),u^2,\ldots,u^n,u^{n+1})\in W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^{n+1}),$$

其中 $T_k(u^1)$ 是 u^1 在 k (>0) 水平上的截断, 即

$$T_k(u^1)=\max\{-k,\min\{u^1,k\}\}=\begin{cases}u^1, & |u^1|\leq k,\\ k\cdot\mathrm{sgn}(u), & |u^1|>k,\end{cases}$$

则

$$Dv^i=\begin{cases}Du^1\cdot 1_{\Omega\setminus A_k^1}, & i=1,\\ Du^i, & i=2,\ldots,n+1,\end{cases} \tag{2.3}$$

其中 $A_k^1=\{x\in\Omega:|u^1|>k\}$ 是 u^1 在 $k\ (>0)$ 上的超水平集, 1_E 是集合 E 上的特征函数, 即当 $x\in E$ 时 $1_E(x)=1$, 否则 $1_E(x)=0$. 由 u 的极小性和下列事实:

$$v=u,\ \text{当}\ \forall x\in\Omega\setminus A_k^1\ \text{时},$$

有

$$\begin{aligned}&\int_{A_k^1}\sum_{i=1}^{n+1}\{f^i(x,Du^i)+g^i(x,(\mathrm{adj}_n Du)^i)\}dx\\&\quad\le\int_{A_k^1}\sum_{i=1}^{n+1}\{f^i(x,Dv^i)+g^i(x,(\mathrm{adj}_n Dv)^i)\}dx.\end{aligned}\tag{2.4}$$

考虑 f 的特殊结构 (1.2), 由 (2.3) 得

$$f^i(x,Du^i)=f^i(x,Dv^i),\quad i=2,\dots,n+1\ \ \text{和}\ \ (\mathrm{adj}_n Du)^1=(\mathrm{adj}_n Dv)^1,$$

这样由 (2.4) 得

$$\begin{aligned}&\int_{A_k^1}\Big(f^1(x,Du^1)+\sum_{i=2}^{n+1}g^i(x,(\mathrm{adj}_n Du)^i)\Big)dx\\&\quad\le\int_{A_k^1}\Big(f^1(x,Dv^1)+\sum_{i=2}^{n+1}g^i(x,(\mathrm{adj}_n Dv)^i)\Big)dx.\end{aligned}\tag{2.5}$$

因为在 A_k^1 上几乎处处有 $Dv^1=0$, 所以由条件 (1.4) 和 (1.5) 得

$$\begin{aligned}&\int_{A_k^1}\nu|Du^1|^p dx-\nu\int_{A_k^1}\sum_{i=2}^{n+1}|(\mathrm{adj}_n Du)^i|^q dx\\&\le\int_{A_k^1}\big(f^1(x,0)+(n+1)a\big)\,dx+\int_{A_k^1}\sum_{i=2}^{n+1}\big(M|(\mathrm{adj}_n Dv)^i|^q+b(x)\big)\,dx\\&\le(n+1)\int_{A_k^1}(b(x)+a)dx+M\int_{A_k^1}\sum_{i=2}^{n+1}|(\mathrm{adj}_n Dv)^i|^q dx.\end{aligned}\tag{2.6}$$

由于 $n\times n$ 矩阵 $\widehat{Dv^i}$ 的第一行是 Dv^1, 从 (2.3) 可知 $Dv^1=0$. 注意到当 $x\in A_k^1$ 时,

$$(\mathrm{adj}_n Dv)^i=(-1)^{i+1}\det\widehat{Dv^i}=0,$$

其中 $i=2,\dots,n+1$. 所以由 (2.6) 得

$$\begin{aligned}\int_{A_k^1}|Du^1|^p dx&\le\frac{n+1}{\nu}\int_{A_k^1}(b(x)+a)dx+\int_{A_k^1}\sum_{i=2}^{n+1}(|(\mathrm{adj}_n Du)^i|)^q dx\\&\le\frac{n+1}{\nu}c|A_k^1|^{\frac{1}{\sigma'}}+\int_{A_k^1}\sum_{i=2}^{n+1}(|(\mathrm{adj}_n Du)^i|)^q dx,\end{aligned}\tag{2.7}$$

这里使用了 (1.7), $c=c(\|b(x)+a\|_{L^{\sigma}_{\mathrm{weak}}(\Omega)},\sigma)$. 因为

$$\big|(\mathrm{adj}_n Du)^i\big|=\Big|(-1)^{i+1}\det\widehat{Du^i}\Big|\le c(n)|Du^1|\cdots|\widehat{Du^i}|\cdots|Du^{n+1}|,$$

所以

$$\big|(\mathrm{adj}_n Du)^i\big|^q\le c(n,q)|Du^1|^q\cdots|\widehat{Du^i}|\cdots|Du^{n+1}|^q.$$

注意到当 $x\in A_k^1$, $i=2,\dots,n+1$ 时, 右边的每一项都包含 $|Du^1|^q$, 于是

$$\sum_{i=2}^{n+1}|(\mathrm{adj}_n Du)^i|^q\le c(n,q)|Du^1|^q|D\hat{u}|^{(n-1)q},$$

其中 $D\hat{u}$ 是从 Du 中去掉第一行得到的 $n\times n$ 矩阵. 因为 $q<\frac{p}{n}$, 所以 $\frac{(n-1)q}{p-q}<1$, 使用指数为 $\frac{p}{q}$ 和 $\frac{p}{p-q}$ 的 Young 不等式以及指数为 $\frac{p-q}{(n-1)q}$ 和 $\frac{p-q}{p-nq}$ 的 Hölder 不等式, 得

$$\begin{aligned}\int_{A_k^1}\sum_{i=2}^{n+1}|(\mathrm{adj}_n Du)^i|^q dx &\le c(n,q)\int_{A_k^1}|Du^1|^q|D\hat{u}|^{(n-1)q}dx\\ &\le \varepsilon\int_{A_k^1}|Du^1|^p dx+c(n,q,\varepsilon)\int_{A_k^1}|D\hat{u}|^{\frac{p(n-1)q}{p-q}}dx\\ &\le \varepsilon\int_{A_k^1}|Du^1|^p dx+c(n,q,\varepsilon)\Big(\int_\Omega|D\hat{u}|^p dx\Big)^{\frac{(n-1)q}{p-q}}|A_k^1|^{\frac{p-nq}{p-q}}. \end{aligned}\tag{2.8}$$

将 (2.8) 代入到 (2.7) 中, 取 $\varepsilon=\frac12$, 有

$$\int_{A_k^1}|Du^1|^p dx\le c(|A_k^1|^{\frac{1}{\sigma'}}+|A_k^1|^{\frac{p-nq}{p-q}})\le c|A_k^1|^t,\tag{2.9}$$

其中 c 是仅依赖于 $n,q,p,\nu,a,\sigma,\|b\|_{L^\sigma_{\mathrm{weak}}(\Omega)}$ 和 $|\Omega|$ 的常数, t 由 (1.9) 定义.

对于 $h>k>0$, 上式的左端可以用 Sobolev 不等式估计如下:

$$\begin{aligned}\int_{A_k^1}|Du^1|^p dx&=\int_\Omega|D(u^1-T_k(u^1))|^p dx\ge\mathcal{S}^p\Big(\int_\Omega|u^1-T_k(u^1)|^{p^*}dx\Big)^{\frac{p}{p^*}}\\ &\ge\mathcal{S}^p\Big(\int_{A_h^1}|u^1-T_k(u^1)|^{p^*}dx\Big)^{\frac{p}{p^*}}\ge\mathcal{S}^p(h-k)^p|A_h^1|^{\frac{p}{p^*}},\end{aligned}\tag{2.10}$$

其中 $\mathcal{S}$ 是仅依赖于 n,p 的 Sobolev 常数. 将 (2.10) 代入到 (2.9) 中, 得

$$|A_h^1|\le\frac{c}{(h-k)^{p^*}}|A_k^1|^{\frac{tp^*}{p}},$$

其中 c 是仅依赖于 $n,q,p,\nu,a,\sigma,\|b\|_{L^\sigma_{\mathrm{weak}}(\Omega)}$ 和 $|\Omega|$ 的常数. 因此引理 2.1 中的条件 (2.1) 对

$$k_0=0,\quad\varphi(k)=|A_k^1|,\quad\alpha=p^*,\quad\beta=\frac{tp^*}{p}$$

成立. 现在使用引理 2.1 得到:

(i) 若 $\beta>1$, 即 $t>\frac{p}{p^*}$, 则存在满足 (2.2) 的常数 $d>0$, 使得 $|A_d|=0$. 这样 $|u^1(x)|\le d$, a.e. Ω. 利用 $f(x,\xi)$ 在 (1.2) 中的对称结构可得其他分量 $u^2,\dots,u^n,u^{n+1}$ 的类似结果. 因此, 对 $i=2,\dots,n+1$, 有

$$|u^i(x)|\le d,\quad\text{a.e.}\quad\Omega.$$

因为

$$|u(x)|\le\sum_{i=1}^{n+1}|u^i(x)|\le(n+1)d,\quad\text{a.e.}\quad\Omega,$$

所以 u 是有界的.

(ii) 若 $\beta=1$, 即 $t=\frac{p}{p^*}$, 则对任意的 $k\geq 0$, 有

$$|\{|u^1|>k\}|\leq|\{|u^1|>0\}|\mathrm{e}^{1-(c\mathrm{e})^{-1/\alpha}k}\leq|\Omega|\mathrm{e}^{1-(c\mathrm{e})^{-\frac{1}{\alpha}}k}=|\Omega|\mathrm{e}\mathrm{e}^{-(c\mathrm{e})^{-1/\alpha}k}.$$

设 $(c\mathrm{e})^{-1/\alpha}=2\lambda_1$, 则 $|\{|u^1|>k\}|\leq c\mathrm{e}^{-2\lambda_1 k}$, 其中 $c=|\Omega|e$. 因此

$$|\{\mathrm{e}^{\lambda_1|u^1|}>\mathrm{e}^{\lambda_1 k}\}|=|\{|u^1(x)|>k\}|\leq c\mathrm{e}^{-2\lambda_1 k}.$$

设 $\mathrm{e}^{\lambda_1 k}=\tilde{k}$, 得到

$$|\{\mathrm{e}^{\lambda_1|u^1|}>\tilde{k}\}|\leq\frac{c}{\tilde{k}^2}.$$

使用文献 [2, 引理 3.11] 中的 $g\in L^r(\Omega)$, $r\geq 1$ 的充要条件是

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^{r-1}|\{|g|>k\}|<+\infty.$$

上面的引理中取 $g=\mathrm{e}^{\lambda_1|u^1|}$, $r=1$. 因为

$$\sum_{\tilde{k}=1}^{+\infty}|\{\mathrm{e}^{\lambda_1|u^1|}>\tilde{k}\}|\leq c\sum_{\tilde{k}=1}^{+\infty}\frac{1}{\tilde{k}^2}<+\infty,$$

所以 $\mathrm{e}^{\lambda_1|u^1|}\in L^1(\Omega)$. 同理, 存在常数 λ_i, $i=2,\dots,n+1$, 使 $\mathrm{e}^{\lambda_i|u^i|}\in L^1(\Omega),\ i=2,\dots,n,n+1$. 设 $\bar{\lambda}=\min_{1\leq i\leq n+1}\lambda_i$, 有

$$\begin{aligned}\int_\Omega \mathrm{e}^{\frac{\bar{\lambda}|u|}{n+1}}dx&\leq\int_\Omega \mathrm{e}^{\frac{\bar{\lambda}(|u^1|+\cdots+|u^{n+1}|)}{n+1}}dx\leq\int_\Omega \mathrm{e}^{\frac{\lambda_1|u^1|}{n+1}}\times\cdots\times\mathrm{e}^{\frac{\lambda_{n+1}|u^{n+1}|}{n+1}}dx\\&\leq\prod_{i=1}^{n+1}\left(\int_\Omega \mathrm{e}^{\lambda_i|u^i|}dx\right)^{\frac{1}{n+1}}<\infty,\end{aligned}$$

即 $\mathrm{e}^{\lambda|u|}\in L^1(\Omega),\ \lambda=\frac{\bar{\lambda}}{n+1}$.

(iii) 若 $\beta<1$, 即 $t<\frac{p}{p^*}$, 则对任意的 $k>0$, 有

$$|A_k^1|\leq c\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{\alpha}{1-\beta}}=c\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{np}{n-p-nt}},$$

其中 c 是一个仅依赖于 $n,q,p,\nu,a,\sigma,\|b\|_{L^\sigma_{\mathrm{weak}}(\Omega)},\sigma$ 和 $|\Omega|$ 的常数, 于是

$$u^1\in L^\tau_w(\Omega),\quad \tau=\frac{np}{n-p-nt}.$$

类似地, $u^i\in L^\tau_{\mathrm{weak}}(\Omega)$, $i=2,\dots,n+1$. 因此 $u\in L^\tau_{\mathrm{weak}}(\Omega;\mathbb{R}^{n+1})$. 定理 1.3 证毕.

致谢 感谢审稿人的有益建议.

参 考 文 献

[1] Bauman P., Owen N., Phillips D., Maximum principles and a priori estimates for a class of problems from nonlinear elasticity, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linearié*, 1991, **8**: 119–157.

[2] Boccardo L., Croce G., Elliptic Partial Differential Equations, Existence and REgularity of Distributional Sohctions De Gruyter Stud. Math., Vol. 55, Berlin, 2014.

[3] Carozza M., Gao H. Y., Giova R., et al., A boundedness result for minimizers of some polyconvex integrals, *J. Optim. Theory Appl.*, 2018, **178**: 699–725.

[4] Carozza M., Passarelli di Napoli., Model problems from nonlinear elasticity: partial regularity results, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 2007, **13**: 120–134.

[5] Cupini G., Leonetti F., Mascolo E., Local boundeness for minimizers of some policonvex integrals, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 2017, **224**: 269–289.

[6] Dacorogna B., Direct Methods in the Calculus of Variations, Applied Mathematical Sciences 78, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[7] De Giorgi E., Un esempio di estremali discontinue per un problema variazionale ditipo ellittico [An example of discontinuous extremals for an elliptic type variational problem], *Boll. Un. Mat. Ital.*, 1968, **4**: 135–137.

[8] D'Ottavio A., Leonetti F., Musciano C., Maximum principle for vector-valued mappings minimizing variational integrals, *Atti Sem. Mat. Fis. Modena.*, 1998, **46**: 677–683.

[9] Dougherty M., Phillips D., Higher gradient integrability of equilibria for certain rank-one convex integrals, *SIAM J. Math. Anal.*, 1997, **28**: 270–273.

[10] Esposito L., Mingione G., Partial regularity for minimizers of degenerate polyconvex energies, *J. Convex Anal.*, 2001, **8**: 1–38.

[11] Fusco N., Hutchinson J., Partial regularity and everywhere continuity for a model problem from non-linear elasticity, *J. Aust. Math. Soc.*, 1994, **57**: 158–169.

[12] Fusco N., Hutchinson J., Partial regularity in problems motivated by nonlinear elasticity, *SIAM J. Math. Anal.*, 1991, **22**: 1516–1551.

[13] Fuchs M., Seregin G., Partial regularity of the deformation gradient for some model problems in nonlinear two dimensional elasticity, Algebra Anal., 1994, **6**: 128–153.

[14] Gao H. Y., Deng H., Huang M. M., et al., Generalizations of Stampacchia lemma and applications to quasilinear elliptic systems, *Nonlinear Anal.*, 2021, **208**: 112297.

[15] Gao H. Y., Di Q. H., Ma D. N., Integrability for solutions to some anisotropic obstacle problems, *Manuscripta Math.*, 2015, **146**: 433–444.

[16] Gao H. Y., Huang M. M., Ren W., Global regularity for minimizers of some anisotropic variational integrals, *J. Optim. Theory Appl.*, 2021, **188**: 523–546.

[17] Gao H. Y., Huang M. M., Ren W., Regularity for entropy solutions to degenerate elliptic equations, *J. Math. Anal. Appl.*, 2020, **491**: 124251.

[18] Gao H. Y., Leonetti F., Macrí M., et al., Regularity for minimizers with positive Jacobian, *Appl. Anal.*, 2020, **39**: 496–507.

[19] Gao H. Y., Leonetti F., Wang L. H., Remarks on Stampacchia Lemma, *J. Math. Anal. Appl.*, 2018, **458**: 112–122.

[20] Gao H. Y., Shan Y., Ren W., Regularity for minimizing sequences of some variational integrals, *Sci. China Math.*, https://doi.org/10.1007/s11425-021-1975-5.

[21] Gao H. Y., Zhang J., Ma H., A generalization of Stampacchia lemma and applications, submitted.

[22] Innamorati A., Leonetti F., Global integrability for weak solutoins to some anisotropic elliptic equations, *Nonlinear Anal.*, 2015, **113**: 430–434.

[23] Kovalevsky A. A., Integrability and boundedness of solutions to some anisotropic problems, *J. Math. Anal. Appl.*, 2015, **432**: 820–843.

[24] Kovalevskii A. A., On the summability of entropy solutions for the Dirichlet problem in a class of non-linear elliptic fourth-order equations, *Izvestiya Math.*, 2003, **67**: 881–894.

[25] Leonetti F., Pointwise estimates for a model problem in nonlinear elasticity, *Forum Math.*, 2006, **18**: 529–534.

[26] Leonetti F., Petricca P. V., Global summability for solutions to some anisotropic elliptic systems, *Adv. Differential Equations*, 2015, **20**: 1165–1186.

[27] Leonetti F., Siepe F., Global integrability for minimizers of anisotropic functionals, *Manuscripta Math.*, 2014, **144**: 91–98.

[28] Leonetti F., Siepe F., Maximum principle for vector-valued minimizers of some intergral functionals, *J. Convex Anal.*, 2005, **12**: 267–278.

[29] Leonetti F., Siepe F., Bounds for vector valued minimizers of some integral functionals, *Ric. Mat.*, 2005, **54**: 303–312.

[30] Mingione G., Regularity of minima: an invitation to the dark side of the calculus of variations, *Applications of Mathematics*, 2006, **51**: 355–426.

[31] Stampacchia G., Équations elliptiques du second ordre á cofficients discontinus, Séminaire Jean Leray, 1963, **3**: 1–77.